इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
विज्ञान विद्यापीठ

BPHCL-132
यांत्रिकी : प्रयोगशाला

इकाई 1
मापन और त्रुटि विश्लेषण 5

इकाई 2
आलेखन 26

प्रयोग 1
लम्बाई का मापन 34

प्रयोग 2
घूर्णन अक्ष के परितः गतिपालक चक्र के जड़त्व-आघूर्ण का निर्धारण 51

प्रयोग 3
दंड बंकन विधि द्वारा यंग के गुणांक का निर्धारण 59

प्रयोग 4
मैक्सवेल सुई द्वारा तार के दृढ़ता गुणांक का निर्धारण 77

प्रयोग 5
सर्ल्स की विधि द्वारा तार के प्रत्यास्थतांकों का निर्धारण 85

प्रयोग 6
दंड लोलक का प्रयोग कर गुरुत्वीय त्वरण का निर्धारण 94

प्रयोग 7
केटर के लोलक द्वारा गुरुत्वीय त्वरण का निर्धारण 104

प्रयोग 8
कमानी-द्रव्यमान निकाय की गति का अध्ययन : कमानी नियतांक तथा गुरुत्वीय त्वरण का निर्धारण 111

प्रयोग 9
सोनोमीटर का उपयोग कर स्वरित्र द्विभुज की आवृति का निर्धारण 119

प्रयोग 10
कैथोड किरण दोलनदर्शी द्वारा लिसाजू आकृतियों का अध्ययन 132

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति

प्रो. अजय घटक (सेवानिवृत्त)
आई.आई.टी. दिल्ली

प्रो. सुरेश गर्ग (सेवानिवृत्त)
विज्ञान विद्यापीठ
इग्नू, नई दिल्ली

डा. नरेश कुमार (सेवानिवृत्त)
हिन्दू कॉलेज,
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

डॉ. प्रगति अशधीर
हिन्दू कॉलेज,
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

प्रो. विजयश्री
विज्ञान विद्यापीठ
इग्नू, नई दिल्ली

प्रो. सुदीप रंजन झा
विज्ञान विद्यापीठ
इग्नू, नई दिल्ली

प्रो. शुभा गोखले
विज्ञान विद्यापीठ
इग्नू, नई दिल्ली

डॉ. संजय गुप्ता
विज्ञान विद्यापीठ
इग्नू, नई दिल्ली

डॉ. शुभलक्ष्मी लांबा
विज्ञान विद्यापीठ
इग्नू, नई दिल्ली

पाठ्यक्रम समन्वयक

प्रो. सुरेश गर्ग (सेवानिवृत्त) (प्रयोग 4, 5)
कुलपति, ऊषा मार्टिन विश्वविद्यालय
रांची

प्रो. शुभा गोखले (इकाई I, II और प्रयोग 1, 7, 10)
विज्ञान विद्यापीठ
इग्नू, नई दिल्ली

डॉ. संजय गुप्ता (इकाई I, प्रयोग 2, 3, 6, 8, 9)
विज्ञान विद्यापीठ
इग्नू, नई दिल्ली

पाठ्यक्रम समन्वयक : प्रो. शुभा गोखले एवं डॉ. संजय गुप्ता

खंड मुद्रण

श्री सुनील कुमार
सहायक कुलसचिव (प्रकाशन), इग्नू

ऋणनिर्देश: शब्द संसाधन के लिए गोपाल अरोड़ा

अगस्त, 2019

© इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय, 2019

ISBN: 978-93-89499-99-5

सर्वाधिकार सुरक्षित। इस कार्य का कोई भी अंश इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की लिखित अनुमति लिए बिना मिमियोग्राफ अथवा किसी अन्य साधन से पुनः प्रस्तुत करने की अनुमति नहीं है।

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय के पाठ्यक्रमों के विषय में और अधिक जानकारी विश्वविद्यालय के कार्यालय मैदान गढ़ी, नई दिल्ली–110068 और इग्नू की वेबसाइट *www.ignou.ac.in* से प्राप्त की जा सकती है।

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की ओर से प्रो. पूर्णिमा मितल, निदेशक, विज्ञान विद्यापीठ द्वारा मुद्रित और प्रकाशित।

लेजर टाईपिंग : आकाशदीप प्रिंटर्स, 20–अंसारी रोड, दरियागंज, नई दिल्ली – 110002

मुद्रक: गीता ऑफसेट प्रिंटर्स प्रा. लि., सी–90, ओखला औद्योगिक क्षेत्र, फेज़–1, नई दिल्ली–110020

यांत्रिकी: प्रयोगशाला – पाठ्यक्रम परिचय

यांत्रिकी प्रयोगशाला के इस पाठ्यक्रम में आप यांत्रिकी में सिद्धान्त पाठ्यक्रम में पढ़ी हुई भौतिकी की मूलभूत धारणाओं पर आधारित कुछ प्रयोग करेंगे। इसमें गुरूत्वीय त्वरण, पदार्थ के गुणधर्म जैसे कि प्रत्यास्थतांक तथा कमानी-द्रव्यमान तंत्र का कमानी स्थिरांक मालूम करने के कुछ प्रयोग शामिल किए हैं। आप दोलन और तरंगों पर आधारित कुछ प्रयोग भी करेंगें। इसके अलावा मापन, त्रुटि विश्लेषण और योग्य आरेखन तकनीकों का प्रयोग करके आंकड़ों को आरेखित करने के विषय पर आधारित दो इकाइयां भी शामिल की है। इस पाठ्यक्रम में हमारा उद्देश्य आपको मूलभूत राशियों – लम्बाई, द्रव्यमान और समय – के यथार्थ मापन के कौशलों में प्रशिक्षित करना और आंकड़ों का विश्लेषण करके प्राप्त परिणामों की भौतिक सार्थकता को समझने की क्षमता आप में लाना है।

विभिन्न उपकरणों से मापन और आंकड़ों का विश्लेषण करते समय आपको संभाव्य त्रुटियों के स्रोतों की जानकारी होनी चाहिए। आपको सार्थक अंकों की परिकल्पना का ध्यान रखते हुए आंकड़े दर्ज करना और परिकलन करना आवश्यक है। प्रयोग करने के इन पहलुओं से आपको अवगत कराने के लिए इकाई I में हमने त्रुटि विश्लेषण का महत्व और परिणामों को उचित सार्थक अंकों में लिखने के बारे में चर्चा की है। कई बार प्रयोग से प्राप्त आंकड़ों को उचित आलेख पर निरूपित करने से विश्लेषण आसान हो जाता है। अतः इकाई II में हमने आलेख आरेखन की उत्तम विधियों पर तथा रैखिक, अर्ध-लॉग और लॉग-लॉग आलेखों में से योग्य प्रारूप का उपयोग करने पर चर्चा की है।

प्रयोग करते हुए उत्तम परिणाम पाने के लिए उचित उपकरण का चयन करना महत्वपूर्ण होता है। किसी भी उपकरण का चयन करने का मुख्य कारण वांछित परिशुद्धता से मापन करने की उसकी क्षमता होता है। उपकरण का अल्पतमांक आपके मापन की परिशुद्धता निर्धारित करने वाला एक मुख्य प्राचल होता है। इस तथ्य को अधोरेखित करने के लिए प्रयोग 1 में आप वर्नियर कैलिपर्स, स्क्रू-गेज, चल-सूक्ष्मदर्शी जैसे भिन्न-भिन्न उपकरणों की सहायता से लम्बाई का मापन करेंगे। प्राप्त मापनों पर इकाई I में चर्चित क्रमबद्ध त्रुटियों के लिए संशोधन लागू करके आप अधिक यथार्थ परिणाम प्राप्त करना सीखेंगे।

प्रयोग 2 में आप गतिपालक चक्र का उपयोग घूर्णी पिंड का जड़त्व-आघूर्ण प्राप्त करने के लिए करेंगे। अगले तीन प्रयोगों में आप विभिन्न तकनीकों का प्रयोग करके पदार्थ के भिन्न-भिन्न प्रत्यास्थतांकों के मान प्राप्त करना सीखेंगे। यंग का गुणांक पदार्थ का एक महत्वपूर्ण यांत्रिकी गुणधर्म है, जो विशेषतः सेतु और स्तंभ निर्माण में उपयुक्त होता है। प्रयोग 3 में आप दंड बंकन विधि से पदार्थ के यंग का गुणांक का निर्धारण करेंगें। दंड के बंकन का मापन सूक्ष्मदर्शी और प्रकाशिक उत्तोलक विधाओं से किया जा सकता है। इस प्रयोग में प्रकाशिक उपकरणों की सहायता से लम्बाइयों का मापन करते समय आप लंबन का अपनयन करके विशुद्ध पाठ्यांक लेना सीखेगें। प्रयोग 4 में आप मैक्सवेल सुई की सहायता से तार का दृढ़ता गुणांक ज्ञात करना सीखेंगे। इसमें आप गतिक विधि का उपयोग करेंगे, जहां भिन्न-भिन्न विन्यासों में दोलायमान सुई के आवर्तकालों को नापा जाता है। इन दो गुणांकों के अलावा और दो प्रत्यास्थतांक होते है : आयतन प्रत्यास्थता गुणांक तथा प्वासों अनुपात। प्रयोग 5 में आप सर्ल्स उपकरण द्वारा चारों प्रत्यास्थतांक प्राप्त करेंगे।

अगले दो प्रयोगों (प्रयोग 6 और 7) में आप समांगी द्रव्यमान बंटीत (दंड लोलक) और असमांगी द्रव्यमान बंटीत (केटर लोलक) तंत्रों के सरल आवर्ती दोलनों का उपयोग गुरुत्वीय त्वरण परिकलित करने के लिए करेंगे।

हमारे रोजमर्रा के जीवन में कमानी का महत्वपूर्ण उपयोग होता है। प्रयोग 8 में आप दो विधाओं से कमानी का कमानी-नियतांक निर्धारित करेंगें : स्थैतिक विधा में आप कमानी की लम्बाई में वृद्धि का भार

के फलन के रूप में निर्धारण करेंगे तथा गतिज विधा में कमानी-द्रव्यमान तंत्र के आवर्ती दोलनों का दोलन काल मापेंगे।

हम सब जानते हैं कि संगीत के बिना जीवन नीरस होता है। भौतिकी के विद्यार्थी होने के नाते आप यह जरूर जानना चाहेंगे कि सितार, वायोलिन, गिटार और इकतारा जैसे वाद्यों से संगीत कैसे उत्पन्न होता है और इसकी गुणवत्ता किन कारकों पर निर्भर करती है। प्रयोग 9 में आप तनित तार की कंपन आवृत्ति की लागू किए गए तनाव बल, तार का प्रति एकक लम्बाई द्रव्यमान और कंपन लम्बाई पर निर्भरता का अध्ययन करेंगे। आप तनित तार के लिए आवृत्ति और तरंगदैर्घ्य में संबंध भी स्थापित कर सकेंगे।

इस प्रयोगशाला पाठ्यक्रम के अंतिम प्रयोग (प्रयोग 10) में आप दो परस्पर लंबवत ज्यावक्रीय तरंगों के अध्यारोपण से जनित लिसाजू आकृतियों के बारे में सीखेंगे। इन आकृतियों के आकार का अध्ययन करके आप दो तरंगों के बीच कलांतर पता कर सकेंगे। दो असमान आवृत्तियों वाली तरंगों से जनित लिसाजू आकृति की जांच से आप इन दो आवृत्तियों के बीच का संबंध भी जान सकेंगे। इस प्रयोग के दौरान आप कैथोड किरण दोलनदर्शी (CRO) से परिचित होंगे। यह किसी भी इलेक्ट्रॉनिकी प्रयोगशाला में अक्सर प्रयुक्त होने वाला वैद्युत उपकरण है। इस प्रयोग के लिए आप कलांतर वाली तरंगे जनित करने के लिए छोटे-छोटे इलेक्ट्रॉनिकी परिपथ भी बनाएंगे।

इस प्रयोगशाला पाठ्यक्रम में इन सारे प्रयोगों को शामिल करने का उद्देश्य आपको सरल परिचित स्थिति से आरंभ करके धीरे-धीरे अधिक जटिलता वाले प्रयोगों का नियोजन करने का अनुभव देना है। इसमें उपकरणों का नियोजन, पाठ्यांक लेना, सरल परिकलन करना और परिणामों का विश्लेषण करना जैसे कौशल आप प्राप्त करेंगे। आप यह समझ सकेंगे कि सरल प्रयोगों और गतिविधियों द्वारा भी सार्थक भौतिकी को समझा जा सकता है।

हम आशा करते हैं कि प्रयोगशाला में आपका अनुभव रोचक रहेगा।

इकाई I

मापन और त्रुटि विश्लेषण

इकाई की रूपरेखा

I.1 प्रस्तावना
उद्देश्य

I.2 मापन में त्रुटियाँ
प्रसंभाव्य त्रुटि और परिशुद्धता
आपेक्षिक त्रुटि और यथार्थता

I.3 परिणामों का प्रतिवेदन
वैज्ञानिक संकेत
सार्थक अंक

I.4 त्रुटियों के प्रकार
क्रमबद्ध त्रुटियाँ
यादृच्छिक त्रुटियाँ

I.5 त्रुटि परिमाणों का निर्धारण

I.6 त्रुटि-संचरण
मूलभूत गणितीय संक्रियाओं में त्रुटि-संचरण
कोणीय मापनों में त्रुटि-संचरण
मापित राशि के घातांक के कारण त्रुटि-संचरण

I.7 सारांश

I.8 अंत में कुछ प्रश्न

I.9 हल और उत्तर

I.10 शब्दावली

I.1 प्रस्तावना

विज्ञान विषय के विद्यार्थी होने के नाते आपने पाठशाला की प्रयोगशाला में प्रयोग किए होंगे। आप जानते हैं कि भौतिक राशियों के मापन में विभिन्न उपकरणों का प्रयोग होता है। जब हम भौतिक राशि का मापन करते हैं तब इस मापन का सही तरीका जानना और सही प्रेक्षण प्राप्त करना महत्वपूर्ण होता है। परंतु यह भी वास्तविकता है कि सर्वोत्तम उपकरण से भी मापित राशि का यथार्थ मान प्राप्त ना हो। यह उपकरण की सीमित परिशुद्धता (precision) और यथार्थता (accuracy) के कारण होता है।

हम मापनों को 3.2 cm या 3.20 cm जैसे सन्निकट अंकों से व्यक्त करते हैं। क्या आप जानते हैं कि इन संख्याओं में हम अलग-अलग दशमलव स्थानों तक अंकों का प्रयोग क्यों करते हैं, और इनमें क्या भेद है? इन संख्याओं से परिकलन करते समय हमें विशेष सावधानी बरतने की आवश्यकता होती है। उदाहरण के लिए, दो राशियों के अनुपात, जैसे 32.1/12 को 2.7 के रूप में व्यक्त किया जाता है, न कि 2.68 या 2.675 द्वारा। क्या आप इसका कारण जानते हैं? माप को व्यक्त करने में प्रयुक्त अंकों की संख्या मापन यंत्र की गुणवत्ता की द्योतक होती है।

इस प्रयोगशाला पाठ्यक्रम में आप मापन के लिए विभिन्न उपकरणों का स्वयं प्रयोग करेंगे। अतः मापन संदर्भ में कुछ मूलभूत धारणाओं को जानना अच्छा होगा। इस इकाई में आप मापित अंकों का – विशेषतः परिशुद्धता और यथार्थता के संदर्भ में – अर्थ और उनका प्रयोग समझेंगें। अपने किए हुए मापन ठीक तरीके से प्रस्तुत करना भी महत्वपूर्ण होता है। अतः इस इकाई के पहले दो भागों (भाग I.2 और I.3) में आप परिशुद्धता और यथार्थता का अर्थ समझेंगे और परिणामों को उचित सार्थक अंकों के साथ वैज्ञानिक संकेत में प्रस्तुत करना सीखेंगे।

आप जानते हैं कि प्रत्येक मापन उपकरण का एक अल्पतमांक (least count) होता है, जो किसी विशिष्ट यथार्थता तक भौतिक राशि के मापन की क्षमता बताता है। अर्थात् मापन (या मापन श्रेणी) के परिणामस्वरूप प्राप्त संख्या को मापित राशि का यथार्थ या वास्तविक माप नहीं कहलाया जा सकता। इसके अतिरिक्त मापन उपकरण में कुछ दोष भी हो सकता है और एक सतर्क प्रयोगकर्ता भी, कोई व्यक्तिगत भूल कर सकता है। इन दोनों कारणों से प्रायोगिक त्रुटि आ सकती है।

मापन से प्राप्त संख्या में आनेवाली अनिश्चितता (uncertainty) **त्रुटि** कहलाती है। यह जानना महत्वपूर्ण है कि प्रयोग के दौरान किए गए विभिन्न मापनों की त्रुटियाँ संचित (accumulate) होती हैं। भाग I.4 में आप त्रुटियों के प्रकार एवं स्रोतों के बारे में पढ़ेंगे। आप इन त्रुटियों का निर्धारण, संभाव्य निरसन या न्यूनतमीकरण तथा इनका हिसाब रखना भी सीखेंगे। अधिकतम भौतिकी प्रयोगों में हमारा उद्देश्य भौतिकी राशियों के बीच संबंध मालूम करना होता है। हम मापित प्रेक्षणों का उचित समीकरणों में उपयोग करके परिकलन करते हैं। भाग I.5 में हम ऐसे परिकलनों में त्रुटियों के संचरण की चर्चा करेंगे।

इस प्रयोगशाला अभ्यासक्रम में सर्वप्रथम आप लंबाई का मापन करेंगे, और फिर दो या अधिक भौतिक राशियाँ अंतर्भूत होने वाले प्रयोग करेंगे।

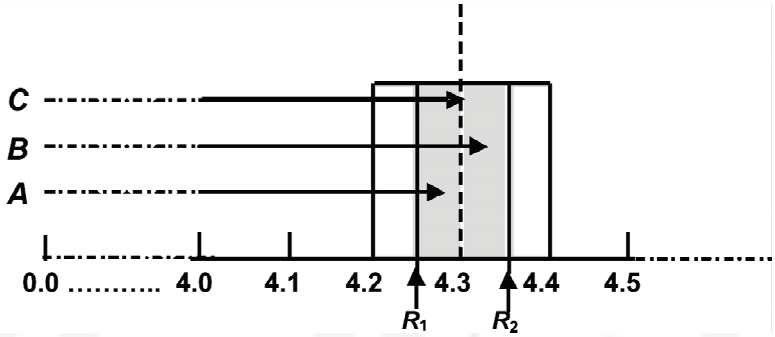
उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, आप :

- व्याख्या कर सकेंगे कि सभी मापों के परिणाम सन्निकट संख्याओं के रूप में क्यों प्राप्त होते हैं;
- परिशुद्धता एवं यथार्थता में भेद कर सकेंगे;
- किसी माप को वैज्ञानिक संकेत पद्धति में उचित सार्थक अंकों के साथ व्यक्त कर सकेंगे;
- त्रुटियों के स्रोतों की पहचान कर सकेंगे; और
- यादृच्छिक तथा क्रमबद्ध त्रुटियों में भेद कर सकेंगे।

I.2 मापन में त्रुटियां

त्रुटि का पहला कारण मापन उपकरण में शून्यांक त्रुटि जैसा निहित दोष हो सकता है। दूसरा कारण प्रयोगकर्ता की सीमित निर्णय-क्षमता और बोध-गम्यता है। जिस छड़ की लंबाई मापी जाने वाली है उसके सिरे का पैमाने के शून्य के साथ ठीक-ठीक संरेखण नहीं करना या माप को पढ़ने में लंबन (parallax) का होना इसके उदाहरण है। मापन की अयथार्थ प्रकृति को अधिक बेहतर ढंग से समझने के लिए आइए हम लंबाई मापने की विधि पर विचार करें। मान लें कि हमारे पास एक परमशुद्ध सेंटीमीटर पैमाना है जिस पर मिलीमीटर के चिह्न स्पष्ट एवं बराबर दूरी पर अंकित हैं। इस पैमाने द्वारा हम चित्र I.1 में दिखाए गए तीन तीरों *A*, *B* और *C* की लंबाई मापना चाहते हैं। हम मान लेते हैं कि तीरों की पूछों को पैमाने के शून्य के साथ परमशुद्धतापूर्वक संरेखित कर दिया गया है। (वस्तुतः व्यवहार में ऐसा होना असंभव है, लेकिन मापन प्रक्रम को भली-भांति समझने के लिए हम इस आदर्श स्थिति की कल्पना करते हैं)।



चित्र I.1: तीन (असमान) तीरों *A*, *B* और *C* की लंबाई 4.3 cm ही लिखी जाती है। पैमानों पर छायित भाग इस मापन में त्रुटि परिसर को निरूपित करता है (पैमाना अत्यधिक आवर्धित है)।

इन तीनों की लंबाइयों को मापने के लिए हम इनके शीर्षों की स्थितियों को देखते हैं। तीर *A* का शीर्ष 4.2 cm की अपेक्षा 4.3 cm के समीप है। अतः हम इस तीर की लंबाई को निकटतम मिलीमीटर तक अर्थात् 4.3 cm लिखेंगे। आइए, अब तीर *B* की लंबाई मापें। इसका शीर्ष 4.4 cm की अपेक्षा 4.3 cm के समीप है। अतः निकटतम मिलीमीटर तक इसकी लंबाई को भी 4.3 cm ही लिखेंगे। इसी प्रकार, तीर *C* की लंबाई भी हम 4.3 cm लिखेंगे। अतः इन सभी तीरों की लंबाई अलग होने के बावजूद 4.3 cm ही लिखी जाएगी।

इससे हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि मापी गई राशि 4.3 cm में (जो कि R_1 और R_2 के मध्य में है) संभवतः 0.05 cm (जो पैमाने के माप मात्रक, 0.1 cm का आधा है) या उससे कम त्रुटि है। इसका अर्थ यह है कि माप 4.3 cm के अंतिम अंक 3 में त्रुटि है। हम इस परिणाम का सामान्यीकरण कर सकते हैं : **कोई भी माप कभी भी यथातथ नहीं हो सकता;** यह मापन युक्ति/उपकरण की सीमित यथार्थता के कारण सदैव वास्तविक मान से भिन्न ही होगा। यह अयथार्थता अंतिम अंक में निहित होती है।

I.2.1 प्रसंभाव्य त्रुटि और परिशुद्धता

अब आप जान चुके हैं कि यदि प्रयोगकर्ता की भूल के कारण होने वाली त्रुटियों को छोड़ दिया जाए तो किसी भी माप में अधिकतम प्रसंभाव्य त्रुटि (probable error) मापन की

इकाई की आधी होती है। अतः **प्रसंभाव्य त्रुटि युक्तियों में अंतर्निहित अपरिशुद्धता, जिसे अल्पतमांक (least count) कहते है; के कारण होती है**। जिन मापों में कम प्रसंभाव्य त्रुटि है, वे अधिक परिशुद्ध (precise) होते हैं। **प्रसंभाव्य त्रुटि माप की इकाई (अल्पतमांक) के आनुपातिक होती है, इसलिए वे उपकरण अधिक परिशुद्ध माप देते हैं जिनका अल्पतमांक छोटा होता है।** उदाहरणतया, सेंटीमीटर के सौवें भाग तक दिया गया माप, जैसे कि 5.32 cm दसवें भाग तक दिए गए माप, जैसे कि 5.3 cm से अधिक परिशुद्ध है।

प्रसंभाव्य त्रुटि मापन की इकाई के आधे के बराबर होती है।

किसी भी मापन की परिशुद्धता का आकलन करने के लिए आप एक बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 1 – मापन में परिशुद्धता

निम्नलिखित माप युग्मों के लिए बताइए कि प्रत्येक युगल में कौन-सा माप अधिक परिशुद्ध है :

क) 17.9 cm या 19.87 cm

ख) 16.5 s या 3.21 s

ग) 20.56° C या 32.22° C

I.2.2 आपेक्षिक त्रुटि और यथार्थता

अब तक हमने परिशुद्धता (precision) पर अधिक बल देते हुए लगभग समान लंबाइयों वाले मापों पर विचार किया। आइए, अब हम ऐसी लंबाइयों के मापन पर विचार करें जिनके मान बहुत अलग हैं। मान लीजिए कि एक मीटर पैमाने से मापे गए दो माप 3.2 cm और 98.6 cm है। इन दोनों ही मापों में प्रसंभाव्य त्रुटि 0.05 cm है। परंतु माप 3.2 cm की अपेक्षा माप 98.6 cm काफी बड़ा है। क्या आप कह सकते हैं कि माप 98.6 cm अधिक यथार्थ है? इसी तरह, समय मापन में 7.4 s और 98 s की यथार्थताओं की तुलना किस प्रकार की जा सकती है? आपने देखा होगा कि, 7.4 s मापने में प्रसंभाव्य त्रुटि 0.05 s है, किंतु 98 s में प्रसंभाव्य त्रुटि 0.5 s है। ऐसे मापों की यथार्थता की तुलना करने के लिए हम **आपेक्षिक त्रुटि** (relative error) ज्ञात करते हैं। यह प्रसंभाव्य त्रुटि और कुल माप का अनुपात होती है।

$$\text{आपेक्षिक त्रुटि} = \frac{\text{प्रसंभाव्य त्रुटि}}{\text{कुल माप}}$$

सारणी I.1 में हमने कुछ प्रतिरूपी मापों की आपेक्षिक त्रुटियों को परिकलित किया है। भाग I.5 में आपेक्षिक त्रुटि के निरूपण पर विस्तार से चर्चा की जाएगी।

सारणी I.1: आपेक्षिक त्रुटि का परिकलन

माप	माप की इकाई	प्रसंभाव्य त्रुटि	आपेक्षिक त्रुटि
3.2 cm	0.1 cm	0.05 cm	0.02
98.6 cm	0.1 cm	0.05 cm	0.0005
7.4 s	0.1 s	0.05 s	0.007
98 s	1 s	0.5 s	0.005

यहाँ ध्यान देने योग्य बात है कि 3.2 cm और 98.6 cm के लिए माप की इकाई एक ही है। अर्थात् दोनों मापों की परिशुद्धता समान है। परंतु बड़े माप में आपेक्षिक त्रुटि कम है (0.02 की तुलना में 0.0005) और इसलिए यह अधिक यथार्थ है।

समय के मापों 7.4 s और 98 s की तुलना अधिक रोचक है। माप 7.4 s माप 98 s की तुलना में **अधिक परिशुद्ध** है (प्रसंभाव्य त्रुटियां क्रमशः 0.05 s और 0.5 s है); लेकिन यह **कम यथार्थ** है (0.005 की तुलना में आपेक्षिक त्रुटि 0.007)।

अब आप समझ गए होंगे कि **किसी भी दी गई यथार्थता के लिए, छोटे माप अधिक परिशुद्ध होने चाहिए**। यही कारण है कि जब कमरे की लंबाई मापी जाती है, तब माप के एकक के लिए मीटर का प्रयोग किया जाता है और जब नगरों के बीच की दूरी मापनी होती है, तब उसी परिशुद्धता के लिए एकक के रूप में किलोमीटर का प्रयोग किया जाता है।

अब निम्न बोध प्रश्नों में दिए गए माप-युग्मों की यथार्थता जाँचें।

बोध प्रश्न 2– मापन में यथार्थता

निम्नलिखित माप-युग्मों के लिए बताइए कि प्रत्येक युगल में कौन-सा माप अधिक यथार्थ है :

क) 40.0 cm या 8.0 cm

ख) 0.85 m या 0.05 m

मापों में निम्नलिखित कारणों से त्रुटियां आ सकती हैं :

- **मापन युक्ति/उपकरण में अंतर्निहित त्रुटि के कारण,**
- **प्रयोग करने वाले व्यक्ति की सीमाओं के कारण, और**
- **बाह्य अवस्थाओं के कारण।**

प्रसंभाव्य और आपेक्षिक त्रुटियों के आधार पर परिशुद्धता और यथार्थता के बीच भेद समझने के पश्चात् अब हम आपने लिए हुए प्रेक्षणों का वैज्ञानिक संकेत (scientific notation) में प्रतिवेदन (reporting) करने के बारे में चर्चा करेंगे।

I.3 परिणामों का प्रतिवेदन

I.3.1 वैज्ञानिक संकेत

वैज्ञानिक संकेत (SI मापन पद्धति) में हम परिणाम को दशमलव अंकों से व्यक्त करते हैं। आपको याद होगा कि अंतरा-परमाणुक दूरियों के लिए अति लघु संख्याएं प्राप्त होती हैं, जबकि अंतरा-तारकीय (interstellar) दूरियों में अति बृहत् संख्याओं का प्रयोग होता है। वैज्ञानिक संकेत में इन संख्याओं को प्रदर्शित करने के लिए एक और दस के बीच एक अंक के पश्चात् दशमलव बिंदु लगाते हैं तथा शेष संख्या को दस की घातों में व्यक्त करते हैं। उदाहरण के लिए सूर्य का व्यास 1,390,000,000 m और हाइड्रोजन के परमाणु का व्यास केवल 0.000000000106 m है। वैज्ञानिक संकेत में हम सूर्य के व्यास को 1.39×10^9 m और हाइड्रोजन परमाणु के व्यास को 1.06×10^{-10} m लिखते है।

बोध प्रश्न 3– परिणामों को वैज्ञानिक संकेत में व्यक्त करना

जल के एक अणु का द्रव्यमान 0.000 000 000 000 000 000 000 03 g है। इसे वैज्ञानिक संकेत में व्यक्त करें।

अब आप समझ गए होंगे कि संख्याओं को वैज्ञानिक संकेत में लिखने पर उनका निरूपण बहुत सुविधाजनक हो जाता है। और उनमें परिकलन भी अत्यंत सरल हो जाता है क्योंकि इन पर हम घातांकों के नियमों का प्रयोग कर सकते हैं।

I.3.2 सार्थक अंक

भाग I.2.1 में आप पढ़ चुके हैं कि माप 5.32 cm, माप 5.3 cm की अपेक्षा अधिक परिशुद्ध है। इन मापों में अंकों की संख्या क्रमशः तीन और दो हैं। इससे यह ज्ञात होता है कि किसी माप के प्रतिवेदन में प्रयुक्त अंकों की संख्या की कुछ न कुछ सार्थकता तो होती है। जब भी आप कोई माप लिखते हैं तब इसमें ''सही'' संख्या में सार्थक अंकों का प्रयोग करना महत्वपूर्ण है। उदाहरणार्थ, मान लीजिए कि आप 0.1 s अल्पतमांक वाली विराम घड़ी (स्टॉप वॉच) से 3 घटनाओं के समय माप कर उनके माध्य के रूप में पाठ्यांक लिख रहे हैं। आपके प्रेक्षण 5.5 s, 5.7 s और 6.0 s हैं और इनका माध्य 5.733 s है। ध्यान दें कि इन मापों में दो सार्थक अंक हैं। इसलिए आपको पाठ्यांक दो सार्थक अंकों के साथ 5.7 s लिखना चाहिए।

सार्थक अंकों को गिनने के कुछ नियम हैं। अब हम उदाहरणों सहित इन नियमों को स्पष्ट करेंगे।

- दो शून्येतर अंकों के बीच के सभी शून्य सार्थक होते हैं। 107.005 m में छः सार्थक अंक है, चाहे इसे 0.107005 km अथवा 10700.5 cm क्यों न लिखा गया हो।
- जब दशमलव बिंदु की बाईं ओर कोई शून्येतर अंक नहीं होता तब इसके दाईं ओर किसी भी शून्य की कोई सार्थकता नहीं होती। अतः 0.003 kg में केवल एक सार्थक अंक है और 0.7 s में भी एक ही सार्थक अंक है। परंतु 0.103 m में तीन सार्थक अंक हैं, ठीक उसी तरह जैसे 0.00783 m में।

- शून्येतर अंक के बाद दशमलव की दाईं ओर के सभी शून्य सार्थक होते हैं। इसलिए माप 47.000 में पांच सार्थक हैं तथा 700.000 kg में छह सार्थक अंक हैं।

अब एक बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 4 – सार्थक अंक

सारणी I.2 पूरी करें और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दें।

सारणी I.2

क्र.सं.	माप (m)	सार्थक अंकों की संख्या	माप की इकाई (m)	प्रसंभाव्य त्रुटि (m)	आपेक्षिक त्रुटि
1.	0.2	1	0.1	0.05	$\frac{0.05\,m}{0.2\,m} = 0.25$
2.	0.20	2	0.01	–	–
3.	0.2000	–	–	–	–
4.	25	–	–	–	–
5.	250	–	–	–	–
6.	25000	–	–	–	–
7.	102	–	–	–	–
8.	1002	–	–	–	–

क) पहले तीन मापों में क्या अनुगामी (trailing) शून्यों की कोई सार्थकता है?

ख) पाँचवें और छठे माप में क्या शून्यों की सार्थकता है?

ग) सातवें और आठवें माप में अशून्य अंकों के बीच के शून्यों की सार्थकता क्या है?

बोध प्रश्न 4 में आप यह जान गए हैं कि कोई भी अंक तभी सार्थक होता है जब वह आपेक्षिक त्रुटि को प्रभावित करता है। अर्थात्, अधिक सार्थक अंकों की संख्या वाले माप की यथार्थता अधिक होती है।

कभी-कभी हम केवल पूर्णांक संख्याओं के मापों का अनुक्रम लेते हैं, जैसे 32, 30, 28, 26। इन मापों में केवल माप 30 को छोड़कर सभी में दो सार्थक अंक हैं। ऐसी विशेष स्थितियों में बिना संशय शून्य अंक को भी सार्थक माना जाता है।

अब आप जान गए हैं कि मापन में कई कारणों से त्रुटियां आ सकती हैं। अगले भाग में आप त्रुटियों के विभिन्न प्रकारों के बारे में पढ़ेंगे।

I.4 त्रुटियों के प्रकार

अब तक आप पढ़ चुके हैं कि प्रत्येक मापन यंत्र का अल्पतमांक उसकी यथार्थता को सीमित करके त्रुटियां जनित करता है। उदाहरणार्थ, हम मीटर पैमाने से 0.1 cm, वर्नियर कैलिपर्स से 0.01 cm और एक स्क्रूगेज से 0.001 cm से कम दूरी नहीं माप सकते। इसी प्रकार, एक तापमापी से आधा डिग्री सेल्सियस की यथार्थता तक ही तापमान मापा जा सकता है। जब कोण मापते हैं तो एक साधारण कोण मापक एक डिग्री की यथार्थता तक कोण माप सकता है, परंतु जब कोणमापक में एक वर्नियर लगा दिया जाता है, जैसा कि स्पेक्ट्रममापी में होता है, तब हम 30" तक की परिशुद्धता से कोण माप सकते हैं।

ऊपर बताई गई सीमाएं, मापन युक्तियों में अंतर्निहित होती हैं। इनके अतिरिक्त त्रुटियों के अन्य स्रोत भी होते हैं : (i) पर्यावरण में परिवर्तन, (ii) सदोष (faulty) प्रेक्षण तकनीक, तथा (iii) मापन उपकरणों का ठीक से काम नहीं करना आदि।

मोटे तौर पर त्रुटियों को दो रूपों में वर्गीकृत किया जाता है: **क्रमबद्ध त्रुटि** (systematic error) और **यादृच्छिक त्रुटि** (random error)। अब हम इन त्रुटियों के बारे में विस्तार से चर्चा करेंगे।

I.4.1 क्रमबद्ध त्रुटियां

क्रमबद्ध त्रुटियां मुख्य रूप से मापन के लिए प्रयुक्त उपकरणों/युक्तियों के कारण उत्पन्न होती हैं। इन त्रुटियों को निर्धार्य (determinable) त्रुटियां भी कहा जाता है और वे अभिज्ञेय (identifiable) कारणों से उत्पन्न होती है। इसलिए सिद्धांत रूप में इनका निराकरण किया जा सकता है। इन त्रुटियों के कारण मापे गए मान वास्तविक मान से सदैव कम या अधिक होते हैं। क्रमबद्ध त्रुटियों के अंतर्गत निम्नलिखित उपकरणीय त्रुटियां आती हैं :

- **शून्यांक त्रुटि (Zero error)** उपकरणों के अत्यधिक प्रयोग से जीर्ण-शीर्णता (wear and tear) के कारण उत्पन्न होती है। वर्नियर कैलिपर्स के हनुओं (jaws) को संपर्क में लाने पर संभव है कि वर्नियर पैमाने का शून्य मुख्य पैमाने के शून्य के संपाती न हो। शून्यांक त्रुटि के परिमाण और प्रकृति (धनात्मक या ऋणात्मक) को सरलतापूर्वक निर्धारित और संशोधित किया जा सकता है। धनात्मक शून्य त्रुटि में वर्नियर पैमाने का शून्यांक मुख्य पैमाने के शून्यांक की दाईं तरफ तथा ऋणात्मक शून्य त्रुटि में बाईं तरफ होता है। इसलिए धनात्मक शून्यांक त्रुटि में संशोधन के लिए इसके मान को मापे गए मान में से घटाते हैं (और ऋणात्मक शून्यांक त्रुटि के लिए इसके मान को जोड़ते हैं)।

- **पश्चगमन त्रुटि (Backlash error)** स्क्रू-गेज, चल-सूक्ष्मदर्शी या स्फेरोमीटर आदि उपकरणों में जीर्ण-शीर्णता या दोषपूर्ण फिटिंग के कारण हो सकती है। इस स्थिति में अग्रदिशिक (forward) या पश्चदिशिक (backward) घूर्णन करने पर समान परिणाम प्राप्त नहीं होते। मापन प्रक्रिया में प्रारंभ से अंत तक मापन युक्ति के स्क्रू को केवल एक ही दिशा में घुमाकर इस त्रुटि को कम किया जा सकता है।

- **अंत्य संशोधन (End correction)** त्रुटि पैमाने के किनारों के घिस जाने के कारण शून्य के निशान स्पष्ट रूप से दिखाई नहीं देने पर पैदा होती है। ऐसे पैमाने के शून्य को प्रारंभ बिंदु रखकर मापने का प्रयास करने पर माप में अंत्य संशोधन त्रुटि आ सकती है। इसका निराकरण पैमाने के संदर्भ बिंदु को एक निश्चित और स्पष्ट बिंदु (मान लीजिए 1 cm चिह्न) पर विस्थापित करके आसानी से किया जा सकता है।

- कभी-कभी प्रयोग के दौरान **भौतिक राशि(यों) में होने वाले परिवर्तनों के कारण भी माप में त्रुटि** आ जाती है। उदाहरण के लिए, विद्युत परिपथों में प्रवाहित धारा से जनित ऊष्मा के कारण परिपथ का प्रतिरोध परिवर्तित हो सकता है। इससे जो त्रुटियाँ आती हैं उनकी प्रतिपूर्ति करना या उन्हें परिकलित करना सामान्यतः कठिन होता है। लेकिन केवल पाठ्यांक लेते समय ही धारा को परिपथ में प्रवाहित करके कुछ हद तक इस त्रुटि को कम किया जा सकता है।

- ऐमीटर या वोल्टमीटर जैसे यंत्रों के **सदोष** या **अशुद्ध अंशांकन** (defective or improper calibration) के कारण भी त्रुटियां आ सकती हैं। ऐसी स्थिति में मापे गए मानों और वास्तविक मानों में नियत अंतर रहता है। यह निर्माण दोष (manufacturing defect) के कारण होता है। ऐसी स्थिति में सर्वोत्तम विकल्प यह है कि उस यंत्र को एक मानक यंत्र के साथ अंशशोधित कर लिया जाए।

- सदोष प्रेक्षण **लंबन** (parallax) के कारण भी हो सकता है। लंबन के कारण होने वाली संभावित त्रुटि को कम करने के लिए आपको उस रेखा के अनुदिश प्रेक्षण लेना चाहिए जो पैमाना तथा मेज़ का कोर, जिस पर पैमाना रखा गया है, इन दोनों के लंबवत् है।

जब प्रेक्षक बिंब और इसके प्रतिबिंब में आपेक्षिक चलन देखता है तो लंबन का अस्तित्व होता है।

I.4.2 यादृच्छिक त्रुटियां

प्रायः आपने देखा होगा कि एक ही राशि को बार-बार मापने पर प्राप्त विभिन्न पाठ्यांक किसी माध्य मान के इर्द-गिर्द बिखरे हुए होते हैं। इन्हें **यादृच्छिक त्रुटियां** कहते हैं और मापन प्रक्रम में ये त्रुटियां आकस्मिक त्रुटियों (accidental errors) के कारण जनित हो सकती हैं। यादृच्छिक त्रुटियों के स्रोतों को सदैव पहचानना संभव नहीं होता परंतु हम कुछ संभाव्य स्रोतों की सूची यहां देंगे :

- **प्रेक्षणात्मक** (observational) यादृच्छिक त्रुटियां प्रेक्षक के पाठ्यांक लेते समय निर्णय में गलतियों के कारण होती हैं। उदाहरण के तौर पर, मुख्य पैमाने के विभाजन के साथ संपाती वर्नियन विभाजन को पढ़ते हुए आदि। प्रेक्षणात्मक यादृच्छिक त्रुटियों को कम करने के लिए हम अधिक से अधिक पाठ्यांक लेकर उनका माध्य परिकलित करते हैं या श्रेष्ठतम आसंजित रेखा (best fit line) खींचते हैं; जैसा कि अगली इकाई के भाग II.2.1 में बताया गया है।

  यदि विभिन्न मापों से प्राप्त मान $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$, हों तो सभी मानों के योग को प्रेक्षणों की कुल संख्या से भाग देने पर औसत मान प्राप्त होता है :

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N}{N} \qquad \text{(I.1)}$$

- लाइन वोल्टता में उच्चावचन, तापमान में अचानक परिवर्तन या यांत्रिक कंपन आदि के कारण **पर्यावरणीय (environmental) यादृच्छिक त्रुटियां** आ सकती हैं। तंत्र के यांत्रिक पुर्जों की जीर्ण-शीर्णता या घर्षण के कारण भी पाठ्यांकों का यादृच्छिक फैलाव हो सकता है।

निम्न बोध प्रश्न में आप कुछ त्रुटियों का वर्गीकरण करेंगे।

बोध प्रश्न 5 – त्रुटियों का वर्गीकरण

उपयुक्त स्तंभ में निशान लगाकर त्रुटि के प्रकार के अनुसार निम्नलिखित मापों का वर्गीकरण कीजिए :

क्र.सं.	माप	त्रुटि का प्रकार	
		क्रमबद्ध	यादृच्छिक
i)	धीरे चल रही विराम घड़ी से मापा गया समय अंतराल		
ii)	प्रयोगशाला में अनेक छात्रों द्वारा मापी गई स्टील के छड़ की लंबाई		
iii)	गर्मी के कारण स्टील के पैमाने के प्रसार से मापी गई लंबाई का लघु मान प्राप्त होना		
iv)	वोल्टमीटर की सुई मुड़ने के कारण उसका शून्य पर नहीं रुकना		
v)	रेडियोएक्टिव तत्त्व के पिंड द्वारा प्रति सेकेंड उत्सर्जित न्यूक्लीय कणों की संख्या		

जब परिकलन में अयथार्थ मानों का प्रयोग किया जाता है, तब परिणाम में कुछ त्रुटि या अनिश्चितता का होना अपरिहार्य है। इस प्रकार प्राप्त माप की गुणता और परिणाम की विश्वसनीयता को अनुमानित (estimated) त्रुटि के परिमाण से निर्धारित किया जाता है। परंपरा के अनुसार, वैज्ञानिक कार्य में परिणाम के साथ संबंधित त्रुटि को उचित मानकों में और एक ही कोटि में लिखा जाता है।

किसी भी मापन के परिणाम को निम्नलिखित नियमों के अधीन त्रुटि के साथ मानक रूप में व्यक्त किया जाता है :

1) **त्रुटि को केवल एक सार्थक अंक तक ही व्यक्त किया जाता है।**
2) **माप की यथार्थता को त्रुटि की कोटि तक ही सीमित रखते हैं।**
3) **माप के परिणाम में *प्रथम सार्थक अंक के बाद* दशमलव लगाया जाता है।**
4) **त्रुटि को उसी घात से गुणा करते हैं, जो माप का घात है।**

यदि केवल नियम (1) और (2) को लागू किया जाए, तो परिणाम का रूप तो शुद्ध होगा, परंतु मानक नहीं। नियम (3) और (4) परिणाम को मानक रूप में रूपांतरित करने में मदद करते हैं। उदाहरणार्थ, मीटर पैमाने से प्राप्त लंबाई के परिणाम को मानक रूप में (4.6 ± 0.1) cm से व्यक्त किया जाता है।

यादृच्छिक त्रुटियों का प्रमात्रीकरण (quantification) सांख्यिकीय विश्लेषण से किया जा सकता है और इसे **निरपेक्ष त्रुटि** (absolute error) और **सापेक्ष त्रुटि** (relative error) के रूप में व्यक्त किया जाता है। आइए, अब हम त्रुटियों के मान का निर्धारण करना सीखें।

I.5 त्रुटि परिमाणों का निर्धारण

सारणी I.3 देखिए, जिसमें आवर्तकाल मापन के प्रतिरूपी मान दिए गए हैं। दिए गए आंकड़ों को केवल देखकर हम ''वास्तविक'' मान ज्ञात नहीं कर सकते।

सारणी I.3: प्रतिरूपी मापों के मानों का समुच्चय

क्र.सं.	पाठ्यांक (x_i) (s)	विचलन $\Delta x_i = \lvert x_i - \bar{x} \rvert$ (s)
1.	2.69	0.01
2.	2.67	0.01
3.	2.68	0.00
4.	2.69	0.01
5.	2.68	0.00
6.	2.69	0.01
7.	2.66	0.02
8.	2.67	0.01
	$\bar{x}$ = 2.68	$\overline{\Delta x}$ = 0.009

एक भौतिक राशि के वास्तविक या माध्य मान और उसके अलग-अलग मापे गए मानों के अंतर (जो अंतिम स्तंभ में विचलन के अंतर्गत दिए गए हैं) को **निरपेक्ष त्रुटि** कहते हैं। आइए इसे Δx_i से निरूपित करें।

एक राशि के N स्वतंत्र मापों $x_1, x_2, ..., x_N$, का औसत मान समीकरण (I.1) से प्राप्त किया जा सकता है। इसे हम निम्नलिखित संकलन (summation) के रूप में भी व्यक्त करते हैं :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \text{(I.2)}$$

प्रतीक $\sum$ को सिग्मा कहते हैं और यह सभी मापों के योग को निरूपित करता है। जैसा कि आप सारणी I.3 से देख सकते हैं, आवर्तकाल का औसत मान 2.68 s है। निरपेक्ष त्रुटि परिकलित करने के लिए हम औसत मान से अलग-अलग विचलनों के मापांक (modulus) $\Delta x_i = \lvert x_i - \bar{x} \rvert$ परिकलित करते हैं (जिन्हें अंतिम स्तंभ में लिखा है)। फिर इन विचलनों के योग को प्रेक्षणों की कुल संख्या से विभाजित करते हैं। गणितीय रूप से इसे हम निम्नलिखित रूप से व्यक्त करते हैं :

$$\overline{\Delta x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} |\Delta x_i|}{N} \quad \text{(I.3)}$$

सारणी I.3 में दिए गए आंकड़ों के लिए निरपेक्ष त्रुटि का औसत मान 0.009 s है। अतः हम माप के परिणाम को (2.68 ± 0.01) s के रूप में व्यक्त करते हैं। ध्यान रहे कि निरपेक्ष त्रुटि और मापी गई भौतिक राशि के मात्रक (unit) एक ही होते हैं।

त्रुटि विश्लेषण में विचलन का उपयोगी माप **प्रसरण** (**variance**) है। प्रसरण प्रेक्षणों के बंटन के विस्तार का माप है। N प्रेक्षणों के लिए संकलन की संकेतन-पद्धति में प्रसरण को निम्नलिखित रूप से व्यक्त किया जा सकता है :

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (\Delta x_i)^2}{N} \quad \text{(I.4)}$$

प्रसरण का वर्गमूल (square root) लेकर **मानक विचलन** (standard deviation) प्राप्त होता है। मानक विचलन उस परिसर को निरूपित करता है जिसमें मापों के मान विचरित होते हैं। दूसरे शब्दों में, मानक विचलन मापों की अनिश्चितता का परिमाण है।

आप विचार कर रहे होंगे कि हम विचलनों का सरल औसत लेने की बजाय मानक विचलन क्यों ज्ञात कर रहे हैं। इसका कारण यह है कि अलग-अलग विचलन (जो मापन में त्रुटि के संकेतक हैं) धनात्मक या ऋणात्मक हो सकते हैं। लेकिन त्रुटि की प्रकृति योज्य (additive) होती है, इसलिए विचलनों के वर्गों का औसत लेकर मानक विचलन परिकलित करना ही अधिक उपयुक्त होता है।

इन संकल्पनाओं को अच्छी तरह से समझने के लिए हम चाहते हैं कि आप नीचे दिए गए बोध प्रश्न का उत्तर दें।

बोध प्रश्न 6 – मानक विचलन

एक मेज की लंबाई के निम्नलिखित माप प्राप्त होते हैं :

x_1 = 135.0 cm, x_2 = 136.5 cm, x_3 = 134.0 cm और x_4 = 134.5 cm

इन राशियों का मानक विचलन परिकलित करें और अंतिम परिणाम प्रसंभाव्य त्रुटि के साथ व्यक्त करें।

सापेक्ष त्रुटि (relative error) माप या उपकरण की यथार्थता का बेहतर सूचक है। इसे प्रतिशत त्रुटि भी कहते हैं। वस्तुतः हम अपने परिणाम को निरपेक्ष त्रुटि की अपेक्षा सापेक्ष त्रुटि में व्यक्त करते हैं। निरपेक्ष त्रुटि और मापी गई राशि के माध्य मान के अनुपात को प्रतिशत में व्यक्त करने पर सापेक्ष त्रुटि प्राप्त होती है :

$$\delta x = \frac{\overline{\Delta x}}{\bar{x}} \times 100 \quad \text{(I.5)}$$

ध्यान दें कि निरपेक्ष मान से भेद बनाए रखने के लिए हमने सापेक्ष त्रुटि को δx के रूप में व्यक्त किया है। आप देखेंगे कि सापेक्ष त्रुटि के अंतर्गत लगभग सभी पाठ्यांक आ जाते हैं।

I.6 त्रुटि-संचरण

अब आप जानते हैं कि सीधे प्रेक्ष्य भौतिक राशि के मापन में त्रुटि का परिकलन कैसे किया जाता है। परंतु अधिकांश प्रयोगों में प्रायः किसी भी भौतिक राशि का मान ज्ञात करने के लिए आपको दो या इससे अधिक स्वतंत्र राशियों को मापना होगा। अतः अंतिम परिणाम में त्रुटि अलग-अलग राशियों के मापनों की त्रुटियों पर निर्भर करती है। दूसरे शब्दों में, प्रत्येक माप की त्रुटि संचरित होकर अंतिम परिणाम में प्रतिबिंबित होगी। त्रुटि संचरण का विस्तृत विश्लेषण इस प्रयोगशाला के कार्य क्षेत्र से बाहर है। अतः यहां हम कुछ उपयोगी नियमों का ही उल्लेख करेंगे।

I.6.1 मूलभूत गणितीय संक्रियाओं में त्रुटि-संचरण

मूलभूत गणितीय परिकलनों में त्रुटियों के संचरण को भली-भांति समझने के लिए पहले हम दो या दो से अधिक संख्याओं के योग और घटा के बारे में चर्चा करेंगे।

योग और घटा

मान लें कि दो भौतिक राशियों A और B के मापे गए मान क्रमशः $(A \pm \overline{\Delta A})$ और $(B \pm \overline{\Delta B})$ हैं, जहां $\overline{\Delta A}$ और $\overline{\Delta B}$ इनकी निरपेक्ष त्रुटियां हैं। आइए इनके योग $Z = A + B$ में त्रुटि $\overline{\Delta Z}$ परिकलित करें।

दी गई संख्याओं को जोड़ने पर हमें निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होता है :

$$Z \pm \overline{\Delta Z} = (A \pm \overline{\Delta A}) + (B \pm \overline{\Delta B})$$

अतः Z में अधिकतम प्रसंभाव्य त्रुटि निम्नलिखित है :

$$\overline{\Delta Z} = \overline{\Delta A} + \overline{\Delta B}$$

इन भौतिक राशियों के अंतर $Z = A - B$ के लिए

$$Z \pm \overline{\Delta Z} = (A \pm \overline{\Delta A}) - (B \pm \overline{\Delta B})$$

$$= A - B \pm \overline{\Delta A} \pm \overline{\Delta B}$$

या $$\pm \overline{\Delta Z} = \pm \overline{\Delta A} \pm \overline{\Delta B} \qquad \text{(I.6)}$$

त्रुटि $\overline{\Delta Z}$ का अधिकतम मान अलग-अलग त्रुटियों के योग ($\overline{\Delta A} + \overline{\Delta B}$) के बराबर है। अतः दो या दो से अधिक राशियों के जोड़ या घटा की त्रुटियों के संचरण नियम के अनुसार **अंतिम परिणाम में निरपेक्ष त्रुटि अलग-अलग राशियों की निरपेक्ष त्रुटियों के योग के बराबर होती है।**

प्रायः समीकरण (I.6) त्रुटि का अति-आकलन (over-estimate) करता है। सांख्यिकीय विश्लेषण (statistical analysis) पर आधारित $\overline{\Delta Z}$ का उपयोगी व्यंजक होता है :

$$\overline{\Delta Z} = \sqrt{\left(\overline{\Delta A}\right)^2 + \left(\overline{\Delta B}\right)^2} \qquad \text{(I.7)}$$

अब आप निम्नलिखित उदाहरण को ध्यान से पढ़ें और त्रुटि संचरण परिकलित करना सीखें।

उदाहरण *I.1* : योग में त्रुटि संचरण

दो लंबाइयों L_1 और L_2 के मापे गए मान क्रमशः (1.746 ± 0.001) m और (1.507 ± 0.001) m हैं। $L_1 + L_2$ माप में कुल त्रुटि परिकलित कीजिए।

हल :

माप की कुल त्रुटि, L_1 और L_2 की त्रुटियों के योग के बराबर होगी। अतः

$$\overline{\Delta L} = \overline{\Delta L}_1 + \overline{\Delta L}_2 = (0.001 + 0.001)\ \text{m} = 0.002\ \text{m}$$

और इस परिणाम को आप निम्न रूप में व्यक्त कर सकते हैं :

$$L = (3.253 \pm 0.002)\ \text{m}$$

यदि आप सांख्यिकीय विश्लेषण करते हैं तो आपको यह परिणाम प्राप्त होगा :

$$\overline{\Delta L} = \sqrt{\left(\overline{\Delta L}_1\right)^2 + \left(\overline{\Delta L}_2\right)^2}$$

$$= \sqrt{(0.001\text{m})^2 + (0.001\text{m})^2}$$

$$= 0.0014$$

$$= 0.001\ \text{m}$$

ध्यान दें कि हमने केवल धन-मूल ही लिया है, क्योंकि त्रुटियां संचयी (cumulative) होती हैं।

गुणा तथा भाग

यदि राशि $E = A \times B$ है और राशियों A और B के माप परिणाम क्रमशः $(A \pm \overline{\Delta A})$ और $(B \pm \overline{\Delta B})$ हैं, तो हम लिख सकते हैं कि

$$E \pm \overline{\Delta E} = (A \pm \overline{\Delta A}) \times (B \pm \overline{\Delta B})$$

$$= AB \pm B\ \overline{\Delta A} \pm A\ \overline{\Delta B} \pm \overline{\Delta A}\ \overline{\Delta B}.$$

पूरे समीकरण को $E = AB$ से विभाजित करने पर हमें निम्नलिखित व्यंजक मिलता है :

$$1 \pm \frac{\overline{\Delta E}}{E} = 1 \pm \frac{\overline{\Delta A}}{A} + \frac{\overline{\Delta B}}{B} + \frac{\overline{\Delta A}\,\overline{\Delta B}}{\Delta B}. \qquad \text{(I.8)}$$

क्योंकि $\overline{\Delta A}$ और $\overline{\Delta B}$ लघु हैं, इसलिए इनके गुणनफल के पद $\frac{\overline{\Delta A}\,\overline{\Delta B}}{AB}$ की अन्य पदों के सापेक्ष उपेक्षा की जा सकती है।

अतः E में अधिकतम त्रुटि का मान निम्नलिखित व्यंजक द्वारा परिकलित किया जा सकता है :

$$\frac{\overline{\Delta E}}{E} = \frac{\overline{\Delta A}}{A} + \frac{\overline{\Delta B}}{B} \qquad \text{(I.9)}$$

अब हम 'भाग' संक्रिया में त्रुटि-संचरण पर विचार करेंगे। यदि $E = \frac{A}{B}$ हो तो त्रुटि $\overline{\Delta E}$ का मान भी समीकरण (I.9) से परिकलित कर सकते हैं।

यदि आप $E = AB$ का लघुगणक (logarithm) लें और अवकलन करें तो आपको $\frac{\overline{\Delta E}}{E} = \frac{\overline{\Delta A}}{A} + \frac{\overline{\Delta B}}{B}$ व्यंजक प्राप्त होगा। इसे सामान्यतः **लघुगणकीय त्रुटि** कहते हैं।

यदि आप सांख्यिकीय विश्लेषण करेंगे तो आपको निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होगा :

$$\frac{\overline{\Delta E}}{E} = \sqrt{\left(\frac{\overline{\Delta A}}{A}\right)^2 + \left(\frac{\overline{\Delta B}}{B}\right)^2}. \qquad \text{(I.10)}$$

अब आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि जब स्वतंत्र राशियों के मानों का गुणनफल या भागफल प्राप्त किया जाता है तो उनके परिणामों में **भिन्नात्मक त्रुटि व्यष्टिगत राशियों की भिन्नात्मक त्रुटियों के वर्गों के योगफल का वर्गमूल होती है।** यह निष्कर्ष निरपेक्ष त्रुटि और सापेक्ष त्रुटि दोनों के लिए मान्य है।

आइए अब देखें कि जब किसी अभिकलन में गुणा और भाग की मिश्रित संक्रियाएं हों तो त्रुटियां कैसे संचरित होती हैं।

उदाहरण *I.2* : गुणा तथा भाग में त्रुटि संचरण

किसी प्रयोग में संबंध $B = \frac{XY}{Z}$ से एक विशिष्ट भौतिक राशि परिकलित की गई है। प्रयोगशाला में मापे गए X, Y और Z के मान निम्नलिखित हैं :

$X = 17 \pm 10\%$

$Y = 100 \pm 6$

और $Z = 15 \pm 3$

आइए, अब हम देखें कि ऐसी स्थिति में त्रुटि का संचरण किस प्रकार होता है।

हल :

अनिश्चितताओं को प्रतिशत में रूपांतरित करने पर आपको निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होगा :

$$B = \frac{(17 \pm 10\%) \times (100 \pm 6\%)}{(15 \pm 20\%)}$$

$$= 113.33 \pm 36\%,$$

यहां हमने अनिश्चितताओं को जोड़ा है।

आप देखेंगे कि 113.33 का 36% = 40.7988 है, अतः

$$B = 113.33 \pm 40.80$$

इसका अर्थ यह है कि B के मान में अनिश्चितता लगभग 41 है। अतः B और इसकी अनिश्चितता के मानों में दशमलव के बाद के अंकों को रखने का कोई अर्थ नहीं है। इसलिए परिकलन के परिणाम को निम्नलिखित रूप में लिखना ज्यादा ठीक होगा :

$$B = 113 \pm 41.$$

I.6.2 कोणीय मापनों में त्रुटि-संचरण

भौतिकी के स्नातक पाठ्यक्रम की प्रयोगशाला में आपको कोणों का अति यथार्थ और परिशुद्ध मापन करने का अवसर प्राप्त होगा। यह विशेष रूप से उन प्रयोगों के लिए सत्य है जिनमें ग्रेटिंग और स्पेक्ट्रममापी से तरंगदैर्घ्य जैसी लघु भौतिक राशियां मापी जाती हैं। स्पेक्ट्रममापी में अचल वृत्ताकार कोणमापक के साथ एक चल-वर्नियर भी लगा होता है। सामान्यतः स्पेक्ट्रममापी का अल्पतमांक एक चाप का 1 मिनट या एक डिग्री का $\frac{1}{16}$ वां हिस्सा होता है। इसके लिए भी त्रुटि संचरण का परिकलन अन्य मापों की तरह ही होता है। इसे नीचे दर्शाया गया है।

विवर्तन (diffraction) ग्रेटिंग प्रयोग में तरंगदैर्घ्य का व्यंजक $\lambda = N \sin\theta$ है, जहां N ग्रेटिंग में रेखांकनों (rulings) की संख्या और θ तरंगदैर्घ्य के संगत विवर्तन कोण हैं। तब

$$\frac{\overline{\Delta\lambda}}{\lambda} = \frac{N\cos\theta}{N\sin\theta} = \cot\theta$$

I.6.3 मापित राशि के घातांक के कारण त्रुटि-संचरण

मान लें कि हमें भुजा A की वर्गाकार भूमि का क्षेत्रफल परिकलित करना है। इसका व्यंजक $s = A \times A$ होता है। समीकरण (I.9) की सहायता से हम लिख सकते हैं कि

$$\frac{\overline{\Delta s}}{s} = \frac{\overline{\Delta A}}{A} + \frac{\overline{\Delta A}}{A}$$

$$= 2\frac{\overline{\Delta A}}{A} \qquad \text{(I.11)}$$

अर्थात् A की त्रुटि की अपेक्षा A^2 की त्रुटि दो गुनी है। यही परिणाम आप दोनों पक्षों का लघुगणक लेकर भी प्राप्त कर सकते हैं :

$$\log s = 2 \log A$$

अवकलन करने और अवकलों को 'डेल्टा' में परिवर्तित करने पर हमें समीकरण (I.11) प्राप्त होता है।

एक तार का व्यास (1.02 ± 0.01) mm मापा गया है। अतः इसके अनुप्रस्थ परिच्छेद के क्षेत्रफल $\left(= \frac{\pi d^2}{4}\right)$ के व्यंजक से आप कह सकते हैं कि इसमें कुल त्रुटि d की त्रुटि से दो गुनी होगी, अर्थात् लगभग 2% होगी।

व्यापक रूप में, यदि किसी व्यंजक में एक राशि का घात n (>1) है तो उसकी त्रुटि में उतने ही गुणा वृद्धि होती है। इसका अर्थ यह है कि यदि कोई राशि दो या अधिक घात की हो तो आपको उसे अधिक परिशुद्धता से मापना चाहिए। इसके अतिरिक्त उसके पाठ्यांक भी अधिक संख्या में लेने चाहिए। और यदि राशि का परिमाण लघु हो तो हमें प्रेक्षण विभिन्न बिंदुओं/लंबवत् दिशाओं से लेने चाहिए।

अब आप नीचे दिए गए उदाहरण का अध्ययन कीजिए।

उदाहरण *I.3* : घातांक के कारण त्रुटि-संचरण

एक सरल लोलक के दोलन के आवर्तकाल का व्यंजक $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ है। L का मान लगभग 100 cm है और यह 1 mm की यथार्थता तक ज्ञात है। दोलन का आवर्तकाल लगभग 2 s है। 100 दोलनों का समय एक सेकंड अल्पतमांक वाली हाथ की घड़ी से मापा गया है। g के मान में प्रतिशत त्रुटि परिकलित करें।

हल :

आप T के व्यंजक को निम्नलिखित तरीके से भी लिख सकते हैं :

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

अतः g में प्रतिशत त्रुटि निम्नलिखित संबंध से परिकलित कर सकते हैं :

$$100\frac{\overline{\Delta g}}{g} = 100\frac{\overline{\Delta L}}{L} + 2\times 100\frac{\overline{\Delta T}}{T}$$

L में प्रतिशत त्रुटि $= 100\frac{\overline{\Delta L}}{L} = 100\times\frac{0.1\text{ cm}}{100\text{ cm}} = 0.1\%$

और T में प्रतिशत त्रुटि $= 100\frac{\overline{\Delta T}}{T\times n} = 100\times\frac{1\text{s}}{2\times 100\text{ s}} = 0.5\%$ है।

अतः

$$100\frac{\overline{\Delta g}}{g} = 0.1 + 2\times 0.5 = 1.1\% \text{ है।}$$

ध्यान दीजिए कि T में प्रतिशत त्रुटि परिकलित करते समय हमने T को n से गुणा किया है। क्या आप बता सकते हैं कि हमने ऐसा क्यों किया? इसका कारण यह है कि वास्तव में मापी गई राशि 100 दोलनों का समय ($n\times T$) है, न कि केवल एक दोलन का आवर्तकाल। यदि आप एक दोलन का समय लेंगे, तो T में प्रतिशत त्रुटि 50% होगी। इसका अर्थ यह है कि **अधिक प्रेक्षण लेकर माप में त्रुटि को कम किया जा सकता है**।

इस इकाई में आपने जो कुछ पढ़ा है अब हम उसका संक्षिप्त विवरण देंगे।

I.7 सारांश

- किसी भी माप की परिशुद्धता मापन युक्ति/उपकरण के अल्पतमांक पर निर्भर करती है।
- प्रत्येक माप के परिणाम को अंकों में इस प्रकार व्यक्त किया जाता है कि त्रुटि उसके केवल अंतिम अंक में ही प्रतीत हो।
- वैज्ञानिक संकेत में प्रत्येक माप को एक से दस के बीच की दशमलव संख्या में व्यक्त करते हैं और उसे दस के उचित घात से गुणा करते हैं।
- **आपेक्षिक त्रुटि,** प्रसंभाव्य त्रुटि और पूर्ण माप का अनुपात है। यथार्थता आपेक्षिक त्रुटि से संबंधित होती है।
- शून्य त्रुटि, पश्चगमन त्रुटि, अंत्य संशोधन, सदोष अंशांकन या सदोष प्रेक्षण क्रियाविधियों के कारण **क्रमबद्ध त्रुटियां** जनित होती हैं। इन त्रुटियों को पहचाना जा सकता है, इसलिए इनका निराकरण या लेखा-जोखा रखना संभव है।
- मापन के दौरान पर्यावरण कारकों और निर्णय में त्रुटि के कारण **यादृच्छिक त्रुटियां** जनित होती हैं। ऐसी त्रुटि के कारण प्रेक्षित आंकड़ों में फैलाव प्राप्त होता है और इसे कम करने के लिए हम अधिक संख्या में प्रेक्षण लेते हैं।
- मापन में प्राप्त सन्निकट संख्याओं को जमा (या घटा) करते समय परिणाम (योग या अंतर) को सबसे कम परिशुद्ध माप के सार्थक अंकों तक पूर्णांकित (round off) करें।
- त्रुटियों के परिमाण का परिकलन सांख्यिकीय तरीके से किया जा सकता है। इसे अंतिम मान से प्रेक्षित मानों के विचलनों के माध्य के रूप में या मानक विचलन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
- त्रुटियां संचयी होती हैं और प्रयोग में संचरित होती हैं। इनका मान मापों की संख्या और मापक युक्तियों पर निर्भर करता है।

I.8 अंत में कुछ प्रश्न

1. भौतिक राशि x को अन्य तीन भौतिक राशियों a, b और c पदों में निम्नलिखित संबंध द्वारा व्यक्त किया जाता है :

$$x = ab^2c^{-3}$$

यदि a, b और c में त्रुटियां क्रमशः 1%, 3% और 2% हों, तो x में प्रतिशत त्रुटि परिकलित कीजिए।

2. एक द्रव की श्यानता मापने के लिए हम अचर दाबान्तर p पर त्रिज्या a और लंबाई L वाली केशिका में प्रवाहित द्रव की प्रवाह दर (प्रति सेकंड प्रवाहित आयतन V) ज्ञात करते हैं। श्यानता को निम्नलिखित व्यंजक द्वारा व्यक्त किया जाता है :

$$\eta = \frac{\pi p a^4}{8LV}$$

यदि p, a, V और L में प्रतिशत त्रुटियाँ क्रमशः 1%, 1%, 2% और 1% हों, तो η में प्रतिशत त्रुटि परिकलित कीजिए।

I.9 हल एवं उत्तर

बोध प्रश्न

1. क) 19.87 cm

   ख) 3.21 s

   ग) समान परिशुद्धता

2. क) आपेक्षिक त्रुटियां इस प्रकार हैं :

$$\frac{0.05}{40} = \frac{5}{4000} = \frac{1}{800}$$

और

$$\frac{0.05}{8} = \frac{5}{800} = \frac{1}{160}$$

अतः माप 40.0 cm अधिक यथार्थ है। लेकिन दोनों मापों की परिशुद्धता समान है।

ख) माप 0.85 m अधिक यथार्थ है, परंतु उतना ही परिशुद्ध है जितना 0.05 m।

3. 3×10^{-23}g

4.

क्र.सं.	माप (m)	सार्थक अंकों की संख्या	माप की इकाई (m)	प्रसंभाव्य त्रुटि (m)	आपेक्षिक त्रुटि
1.	0.2	1	0.1	0.05	$\frac{0.05}{0.2} = 0.25$
2.	0.20	2	0.01	0.005	$\frac{0.005}{0.20} = 0.025$
3.	0.2000	4	0.0001	0.00005	$\frac{0.00005}{0.2000} = 0.00025$
4.	25	2	1	0.5	$\frac{0.5}{25} = 0.02$
5.	250	3	1	0.5	$\frac{0.5}{250} = 0.002$
6.	25000	5	1	0.5	$\frac{0.5}{25000} = 0.00002$
7.	102	3	1	0.5	$\frac{0.5}{102} = 0.0049$
8.	1002	4	1	0.5	$\frac{0.5}{1002} = 0.000499$

क) ये सार्थक हैं।

ख) ये भी सार्थक हैं। नियमानुसार, केवल वही शून्य सार्थक होते हैं, जो मापन से प्राप्त होते हैं। इन दोनों मापों में माप का मात्रक 1 m है, इसलिए अनुगामी शून्य मापन के परिणामस्वरूप आए हैं और सार्थक हैं।

ग) सार्थक

5. i) क्रमबद्ध, ii) यादृच्छिक, iii) यादृच्छिक,
iv) क्रमबद्ध, v) यादृच्छिक

6.

क्र. सं.	लंबाई (x_i) (cm)	$\Delta x_i = x_i - \bar{x}$ (cm)	$(\Delta x_i)^2$ (cm^2)
1.	135.0	0	0
2.	136.5	+1.5	2.25
3.	134.0	–1.0	1.0
4.	134.5	–0.5	0.25

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{540}{4} = 135.0 \qquad \sum (\Delta x_i)^2 = 3.5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(\Delta x_i)^2}{N}} = \sqrt{\frac{3.5}{4}} = \sqrt{0.9} \approx 1.0 \text{ cm.}$$

अतः अंतिम परिणाम इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

लंबाई = $(135.0 \pm 1.0$ cm)

अंत में कुछ प्रश्न

1. प्रतिशत त्रुटि परिकलित करने के लिए हम देखते हैं कि :

$$a = (a_0 \pm 1\%)$$

$$b = (b_0 \pm 2 \times 3\%)$$

और

$$c = (c_0 \pm 3 \times 2\%)$$

अंतः x में कुल प्रतिशत त्रुटि 1+6+6 = 13% है।

2. $$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{\Delta p}{p} + 4x\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta L}{L}$$

अतः η में प्रतिशत त्रुटि = 1+4+2+1 = 8% है।

I.10 शब्दावली

Absolute error	निरपेक्ष त्रुटि
Accuracy	यथार्थता
Backlash error	पश्चगमन त्रुटि
Calibration	अंशशोधन
Diffraction	विवर्तन
Exact	यथातथ
Fluctuation	उच्चावचन
Parallax	लंबन
Precision	परिशुद्धता
Random errors	यादृच्छिक त्रुटियां
Relative error	आपेक्षिक त्रुटि
Standard deviation	मानक विचलन
Systematic error	क्रमबद्ध त्रुटि
Zero error	शून्यांक त्रुटि

इकाई II

आलेखन

इकाई की रूपरेखा

II.1 प्रस्तावना
उद्देश्य
II.2 आलेख का आलेखन
रैखीय आलेख
अरैखिक आलेख
II.3 आलेखों से त्रुटि-आकलन
II.4 सारांश
II.5 अंत में कुछ प्रश्न
II.6 शब्दावली

II.1 प्रस्तावना

इकाई I में आपने पढ़ा कि किसी भी मापन के परिणाम अंकों में प्रस्तुत किए जाते हैं। जब हम प्रयोग करते हैं, तब हमारी कोशिश होती है कि दो या अधिक भौतिक राशियों के बीच संबंध प्रस्थापित करके परिणाम की ओर पहुंचें।

कई बार केवल प्रेक्षणों की तरफ देखकर हम राशियों के बीच फलनात्मक संबंध प्रस्थापित नहीं कर सकते। परंतु यदि हम इन राशियों का आलेख खींचे तो हम आसानी से तुरंत और सुविधाजनक रूप में इनके बीच के संबंध की प्रागुक्ति कर सकते हैं। एक बार यह संबंध मालूम होने पर हम प्राचलों के उन दर्मियानी मानों का भी अनुमान लगा सकते हैं, जिनके लिए हमने प्रत्यक्ष प्रेक्षण न लिया हो। वस्तुतः आलेखों से हम त्रुटियों को न्यूनतम कर सकते हैं अथवा गलत प्रेक्षणों का पता भी लगा सकते हैं।

इस पाठ्यक्रम में जो प्रयोग आप करेंगे इनमें से कुछ प्रयोगों में आप विभिन्न राशियों के आलेख खीचेंगे। आलेख खींचने के दौरान कुछ उचित प्रथाओं का पालन करने से वे सब के लिए सुपाठ्य एवं सुबोध बन जाते हैं। इस इकाई में आप आलेख आलेखन की विधिओं से और सही तरीके से इनके निर्देशक लिखने से परिचित होंगें। अतः प्रयोगशाला में प्रयोगों का आरंभ करने से पूर्व आप इस इकाई का ध्यानपूर्वक अध्ययन करें।

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप :

- विभिन्न भौतिक राशियों में फलनात्मक संबंध प्रस्थापित कर सकेंगे;

- ❖ आलेख पर उचित मापक्रम (scale) का चयन का सकेंगे;
- ❖ आलेख पर प्रेक्षणों को त्रुटि-दंड (error-bar) के साथ दर्शा सकेंगे;
- ❖ रैखीय आलेख के लिए श्रेष्ठतम आसंजन (best-fit) निकष का प्रयोग कर सकेंगे;
- ❖ आलेख की व्याख्या करके भौतिक राशियों के मान प्राप्त कर सकेंगे; और
- ❖ आलेख की प्रवणता (slope) एवं अंतःखंड (intercept) में त्रुटियों का आकलन कर सकेंगे।

II.2 आलेख का आलेखन

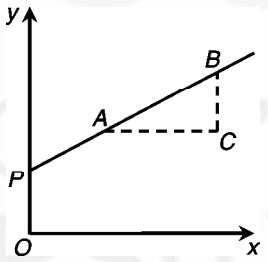
इस भाग में हम रैखीय और अरैखिक इन दोनों प्रकारों के आलेखों की चर्चा करेंगे।

II.2.1 रैखीय आलेख

रैखीय आलेख खींचना सरलतम होता है (चित्र II.1)। सरल रेखा का समीकरण $y = mx + c$ होता है, जहां m प्रवणता और c, y-अक्ष पर अंतःखंड है। चित्र II.1 में सरल रेखा की प्रवणता है :

$$m = \frac{BC}{AC}$$

और OP इसका अंतःखंड c है।



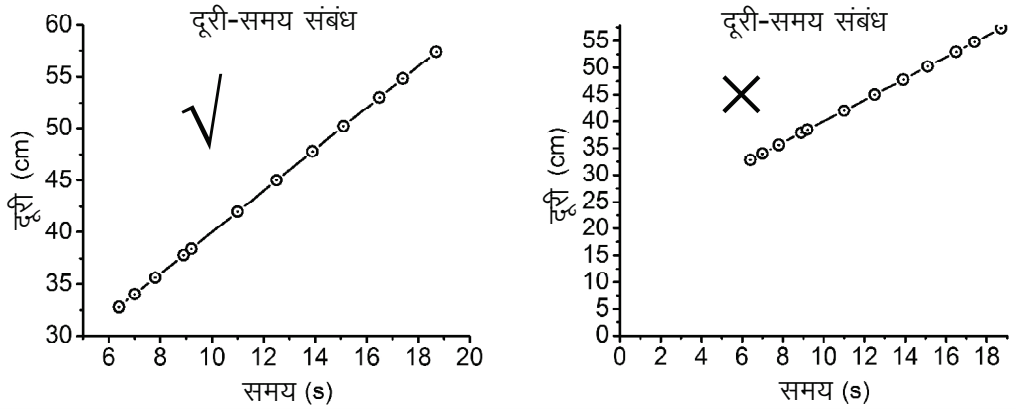
चित्र II.1: सरल रैखीय आरेख।

आलेख खींचने के लिए आप ग्राफ-पेपर का उपयोग करें। आम तौर पर, ग्राफ-पेपर पर 1 cm × 1 cm वर्गों का जाल (grid) छपा होता है। प्रत्येक वर्ग का 1 mm × 1 mm के चौकोरों में उप-विभाजन किया होता है। इसे रैखीय ग्राफ-पेपर कहते हैं।

आलेख खींचते समय आपको निम्नलिखित बातों को ध्यान में रखना चाहिए :

i) स्वतंत्र (independent) और आश्रित (dependent) चरों (variables) को पहचानें। प्रायः हम स्वतंत्र चर को x-अक्ष के अनुदिश और आश्रित चर को y-अक्ष के अनुदिश आलेखित करते हैं।

ii) आपको मापक्रम (scale) इस प्रकार चुनना चाहिए कि सारे प्रेक्षण बिंदु पूरे आलेख पर फैले हों (चित्र II.2क) और वे आलेख के थोड़े ही भाग में सीमित न रहें (चित्र II.2ख)। इसके लिए प्रथमतः प्रेक्षित पाठ्यांकों के निम्नतम और अधिकतम मानों का परिसर देखें और इन्हें निम्नतम से कुछ कम और अधिकतम से कुछ ज़्यादा पूर्णांकी बनाएं। फिर इनके बीच के अंतर के अनुसार आलेख पर x-अक्ष एवं y-अक्ष पर अंतराल चुनें। उदाहरण के लिए, यदि आपको x-अक्ष पर 6.4 s और 18.7 s के बीच और y-अक्ष पर 32.8 cm और 57.4 cm के बीच के प्रेक्षण आलेखित करने हों तो x-मापक्रम 0 से 19 s के बजाय 5 s से 20 s और y-मापक्रम 0 से 58 cm के बजाय 30 से 60 cm तक लेना चाहिए।



(क) (ख)

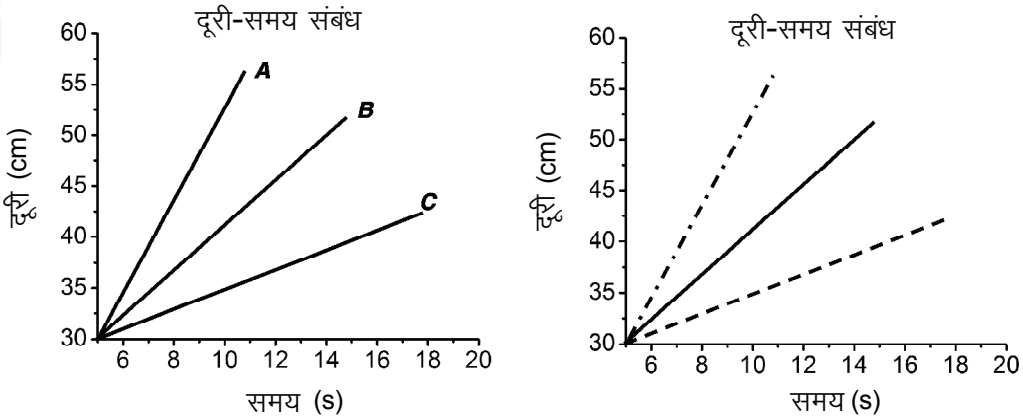
चित्र II.2: मापक्रम का चयन : क) सही; और ख) ग़लत।

iii) आलेख पर **अक्षों** को साफ़-साफ़ दिखाएं और आलेखित की जाने वाली भौतिक राशि का **नाम**, उसका प्रतीक, मात्रक और प्रत्येक अक्ष पर प्रयुक्त किया गया पैमाना लिखें।

iv) प्रेक्षित बिन्दुओं को आलेख में उपयुक्त स्थान पर दिखाने के लिए आलेखन प्रतीक के रूप में एक बिन्दु लें और उसके चारों ओर एक छोटा खुला वृत्त बनाएं (चित्र II.2क देखें)। इस वृत्त का आकार आलेख के कागज़ पर बने लघुतम वर्ग के आकार से बड़ा नहीं होना चाहिए।

v) आप आलेख को उपयुक्त **शीर्षक** दें।

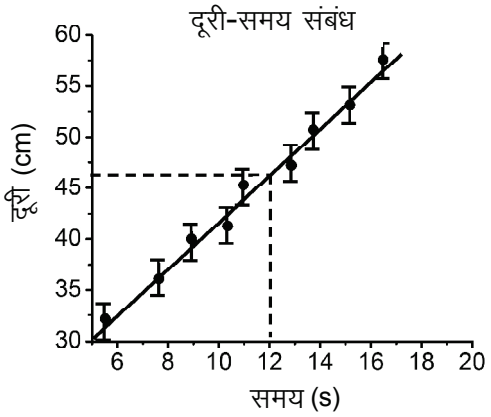
vi) यदि आलेख में एक से अधिक वक्र (curve) हों, तो उन्हें अलग-अलग नाम दें (चित्र II.3क) या विभिन्न वक्रों को दिखाने के लिए भिन्न-भिन्न प्रतीकों/संकेतों (डैश डॉट, ठोस रेखा, डैश) का प्रयोग किया जा सकता है (चित्र II.3ख)।



चित्र II.3 : एक से अधिक वक्रों के आलेख।

vii) प्रेक्षित पाठ्यांकों से एक सरल माध्य आसंजित वक्र खींचें। चित्र II.4 में दिखाए गए आलेख में आप देख सकते हैं कि प्रेक्षित बिंदु एक सरल रेखा पर स्थित होंगे। यह वक्र श्रेष्ठतम आसंजित वक्र कहलाता है। ध्यान दें कि यह आवश्यक नहीं कि प्रत्येक प्रेक्षित बिन्दु आसंजित वक्र पर ही हो। लेकिन यह वक्र प्रत्येक बिंदु के अनिश्चितता प्रदेश (region of uncertainty) से होकर अवश्य जाना

चाहिए। चित्र में अनिश्चितता प्रदेश को प्रत्येक बिंदु के साथ एक ऊर्ध्वाधर रेखा (जो मापन में अनिश्चितता के मान को निरूपित करती है) के रूप में दिखाया है। इसे **त्रुटि-दंड** (error bar) कहते हैं।



चित्र II.4 : श्रेष्ठतम आसंजित वक्र।

अरैखिक आंकड़ों के लिए श्रेष्ठतम आसंजित वक्र खींचने के लिए गहन सांख्यिकीय विधि की आवश्यकता होती है, परंतु रैखीय आंकड़ों के लिए प्रस्तुत विधि से पर्याप्त सही आसंजित वक्र प्राप्त हो सकता है।

आप इस आलेखित वक्र का प्रयोग प्राचल के उस मान का पता लगाने के लिए भी कर सकते हैं, जिस पर आपने प्रेक्षण ना लिया हो। उदाहरणार्थ, चित्र II.4 में समय 12 s के संगत कोई प्रेक्षण बिंदु नहीं है। किंतु आलेखित वक्र का अनुसरण करके आप बता सकते हैं कि उपयुक्त दूरी 46 cm है।

इन आलेखन तकनीकों का उपयोग आप इस पाठ्यक्रम के कुछ प्रयोगों – जैसे दंड बंकन विधि से यंग-गुणांक का निर्धारण तथा कमानी-द्रव्यमान निकाय से कमानी-नियतांक का निर्धारण – में करेंगे।

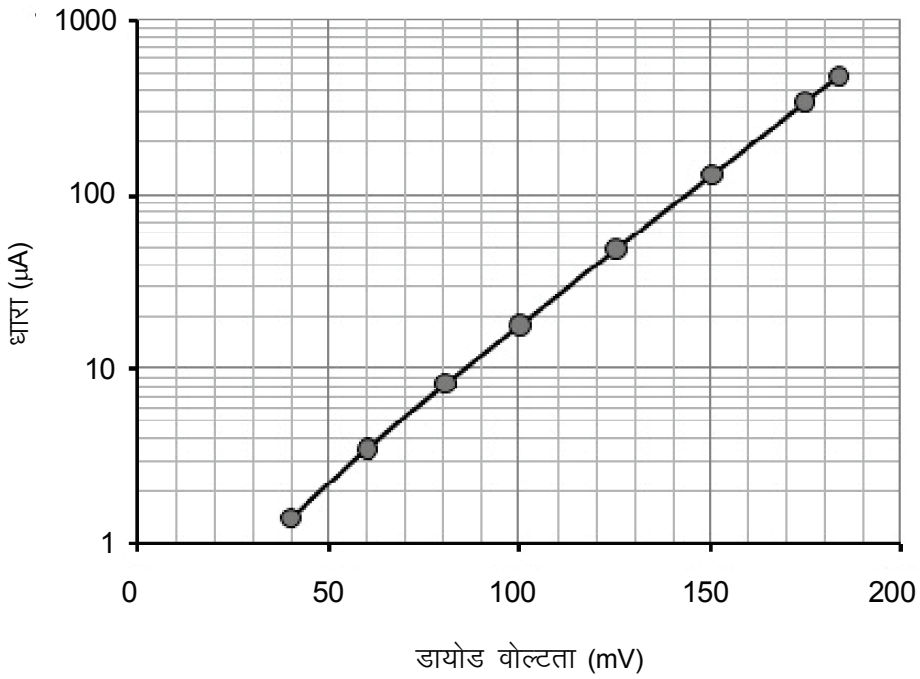
II.2.2 अरैखिक आलेख

चित्र II.4 में हमने एक रैखिक ग्राफ पेपर पर *y*-अक्ष के अनुदिश दूरी और *x*-अक्ष के अनुदिश काल आलेखित किया है, क्योंकि इन राशियों में रैखिक संबंध है। कुछ प्रयोगों में हमें ऐसे आंकड़े भी प्राप्त हो सकते हैं जहां मापे गए चरों के बीच रैखीय संबंध न हो और हमें एक ऐसा आलेख आलेखित करना पड़े जहां पर प्राचल एक घात-नियम से संबंधित हो, जैसे कि सरल लोलक ($T = k\ell^{1/2}$) में। ऐसी स्थिति में आवर्तकाल और लोलक की लंबाई के बीच आलेख खींचने के लिए आपको प्रत्येक मान का वर्गमूल परिकलित करना होगा। इसका अभिप्राय यह है कि विधि में एक चरण बढ़ जाता है, जो असुविधाजनक है।

कई बार चरों का मान विभिन्न घातों में संबंधित हो सकता है। उदाहरण के लिए, अग्रदिशिक बायसित डायोड की धारा और वोल्टताओं में संबंध निम्नलिखित समीकरण द्वारा निरुपित होता है :

$$I_D = I_S\left[\exp\frac{qV_D}{kT} - 1\right] \qquad \text{(II.1)}$$

I_D बनाम V_D प्रेक्षणों का सीधा आलेख एक घातांकी वक्र होगा। किंतु अगर हम धारा प्रेक्षणों के लघुगणक लें तो इनका V_D के मानों के बनाम वक्र रैखीय होगा, जैसा कि चित्र II.5 में दर्शाया गया है। ऐसे आलेखों को अर्ध-लॉग (Semi-log) आलेख कहते हैं।



चित्र II.5: डायोड की धारा-वोल्टता का अर्ध-लघुगणकीय आलेख।

और एक उदाहरण खगोल-विज्ञान में भी मिलता है। केप्लर नियम के अनुसार, एक ग्रह की कक्षा के अर्ध-दीर्घ अक्ष (R) और उसके आवर्तकाल (ग्रह द्वारा सूर्य की परिक्रमा में लगा समय) T में निम्नलिखित संबंध होता है :

$$R^3 = kT^2 \qquad \text{(II.2)}$$

जहां k स्थिरांक है।

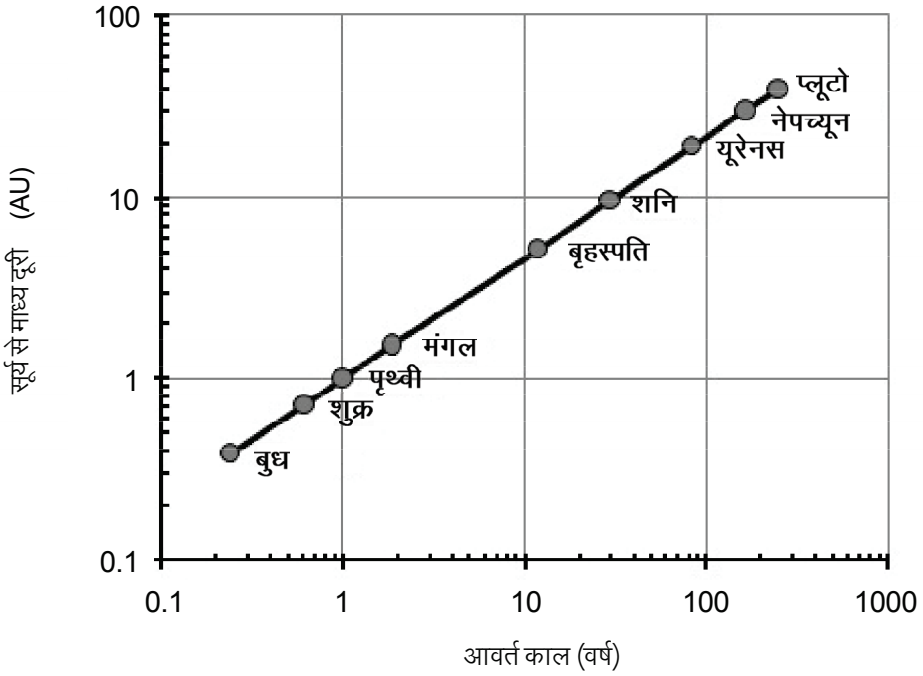
यदि आप ऐसे प्रायोगिक आंकड़े लें जो यह दर्शाएं कि T किस प्रकार R पर आश्रित है तो आप पाएंगे कि R के परिणाम में तीन कोटियों का और T के परिमाण में दो कोटियों का परिवर्तन होता है। दूसरे शब्दों में, प्रायोगिक आंकड़े समीकरण (II.2)का पालन करते हैं। एक पल के लिए यह मान लें कि आप T और R के बीच के यथातथ संबंध को नहीं जानते। तब हम लिख सकते हैं कि

$$R = kT^n \qquad \text{(II.3)}$$

जहां n एक अचर है। समीकरण (II.3) का लघुगणक लेकर आप n का मान ज्ञात कर सकते हैं :

$$\log R = \log k + n \log T \qquad \text{(II.4)}$$

अब आप रैखीय ग्राफ पेपर पर $\log T$ और $\log R$ के बीच आलेख खींच सकते हैं। प्राप्त सरल रेखा की प्रवणता से आपको घातांक n का मान प्राप्त हो जाएगा। परंतु जैसा कि ऊपर बताया गया है, प्रत्येक प्रायोगिक आंकड़े का लघुगणक लेना एक कठिन कार्य है। ऐसी स्थिति में हम लॉग-लॉग (log-log) (चित्र II.6) ग्राफ पेपर का प्रयोग करते हैं, ताकि हमें एक रैखीय वक्र मिलता है और हम आसानी से इसकी प्रवणता n एवं अंतःखंड मालूम कर सकते हैं।



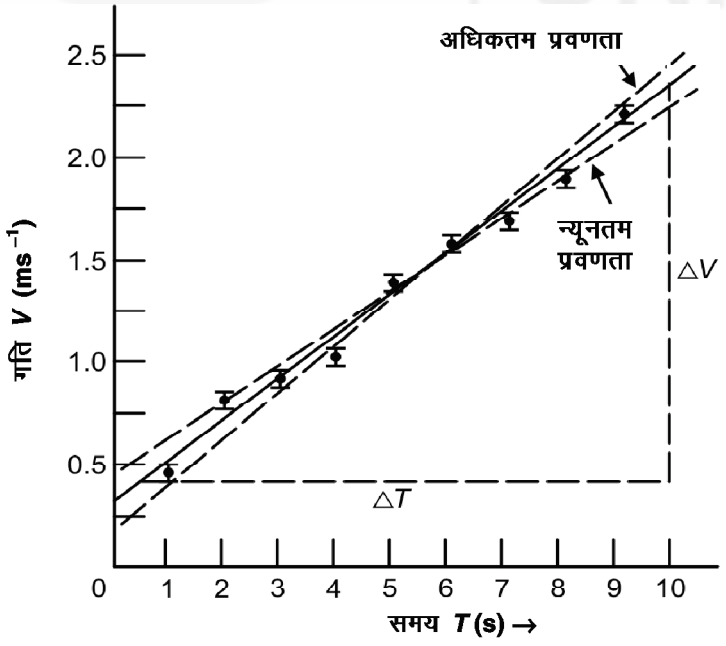
चित्र II.6: ग्रह की सूर्य से माध्य दूरी का और उसके आवर्त काल का लॉग-लॉग ग्राफ।

आप इन ग्राफ पेपरों का प्रयोग आगे के प्रयोगशाला पाठ्यक्रमों में करेंगे।

II.3 आलेखों से त्रुटि-आकलन

चित्र II.7 में हमने गति V और समय T के बीच का आलेख खींचा है, जो एक रैखीय संबंध दर्शाता है। प्रत्येक बिंदु त्रुटि-दंड के साथ आलेखित किया गया है।

आलेख (रैखीय, अर्ध-लॉग या लॉग-लॉग) की रेखा की प्रवणता के मान में त्रुटि का आकलन करने के लिए आप अधिकतम और न्यूनतम प्रवणता वाली दो रेखाएँ खींचे जैसा कि चित्र II.7 में असतत रेखाओं से दर्शाया है।



चित्र II.7: त्रुटि-दंडों के साथ गति और समय का आलेख।

चित्र II.7 में दिए गए ग्राफ में प्रवणता त्रुटि को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है।

$$\text{प्रवणता में त्रुटि} = \frac{\text{अधिकतम प्रवणता} - \text{न्यूनतम प्रवणता}}{2}$$

इसी प्रकार,

$$\text{अंतःखंड में त्रुटि} = \frac{(\text{न्यूनतम प्रवणता रेखा का अंतःखंड} - \text{अधिकतम प्रवणता रेखा का अंतःखंड})}{2}$$

इस इकाई में आपने जो कुछ पढ़ा है अब हम उसका संक्षिप्त विवरण देंगे।

II.4 सारांश

- आलेखन से प्रेक्षणों/आंकड़ों की व्याख्या करना आसान होता है।
- केवल आलेख को देखने से ही दो प्रायोगिक प्राचलों के बीच का फलन संबंध (विशेषतः रैखीय) निर्धारित किया जा सकता है।
- अर्ध-लॉग और लॉग-लॉग आलेखों का उपयोग अरैखिक संबंधों को दर्शाने के लिए होता है।
- प्रेक्षणों के प्रायोगिक परिसर में किसी प्राचल का अज्ञात मान आलेख की सहायता से अनुमानित किया जा सकता है।
- आलेख की सहायता से प्रवणता एवं अंतःखंड में त्रुटियों का मान प्राप्त किया जा सकता है।

II.5 अंत में कुछ प्रश्न

1. समीकरण $y = 2x + 4$ के लिए आलेख खींचें।

   बिंदुओं से गुजरने वाली श्रेष्ठतम आसंजित रेखा खींचे और उसकी प्रवणता मालूम करें।

2. निम्न सारणी में दिए प्रेक्षणों के लिए x और y के बीच आलेख खींचें। श्रेष्ठतम आसंजित रेखा खींचकर इसकी प्रवणता परिकलित करें। आपने खींची हुई रेखा का समीकरण लिखें।

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	4.1	6.1	7.9	10.0	11.9	13.9	16.0	18.1	20.0

3. निम्न सारणी में दिए प्रेक्षणों के लिए x और y के बीच आलेख खींचें। श्रेष्ठतम आसंजित रेखा खींचकर इसकी प्रवणता परिकलित करें और खींची हुई रेखा का समीकरण लिखें।

x	10	11	12	13	14	15	16	17	18
y	24	26.1	27.8	30	32.2	34	35.8	38.2	40

II.6 शब्दावली

Curve	वक्र
Dependent variables	आश्रित चर
Error-bar	त्रुटि-दंड
Independent variables	स्वतंत्र चर
Intercept	अंतःखंड
Linear plot	रैखीय आलेख
Scale	मापक्रम
Slope	प्रवणता
Uncertainty	अनिश्चितता

ignou THE PEOPLE'S UNIVERSITY

प्रयोग 1

लम्बाई का मापन

प्रयोग की रूपरेखा

1.1 प्रस्तावना

अपेक्षित कौशल

1.2 वर्नियर कैलिपर्स से लकड़ी के ब्लाक की मोटाई का मापन

वर्नियर कैलिपर्स का प्रचालन

वर्नियर कैलिपर्स से मापन

1.3 स्क्रू गेज से कागज़ की मोटाई का मापन

स्क्रू गेज का प्रचालन

स्क्रू गेज से मापन

1.4 चल-सूक्ष्मदर्शी से केशिका के आंतरिक व्यास का मापन

चल-सूक्ष्मदर्शी का प्रचालन

चल-सूक्ष्मदर्शी से मापन

1.5 शब्दावली

1.1 प्रस्तावना

आपने स्कूल की भौतिकी प्रयोगशाला में विभिन्न प्रयोग किए होंगे। आप जानते हैं कि इन प्रयोगों के दौरान आप को भिन्न-भिन्न मापन करना आवश्यक होता है। सबसे सरल मापन लंबाई का होता है। जब हमें किसी कमरे या भूखंड की लंबाई तथा चौड़ाई मालूम करनी होती है तो हम मापक फीते (measuring tape) का उपयोग करते हैं। और जब हम कपड़ा खरीदते हैं, तो मीटर पैमाने (scale) का उपयोग करते हैं। आप ऐसे मापनों से जरूर परिचित होंगे और आपने मापक फीते तथा मीटर पैमाने को देखा होगा और शायद इनका उपयोग भी किया होगा।

परंतु प्रयोगशाला में आपको छोटी-छोटी लंबाइयों, जैसे सरल लोलक के गोलक का व्यास या धातु के तार की मोटाई या केशिका के व्यास को मापना होगा। इसके लिए मीटर पैमाने से प्राप्त परिशुद्धता पर्याप्त नहीं होती – हमें 0.01 cm या इससे भी बेहतर परिशुद्धता की आवश्यकता होती है। छोटी लंबाइयां मापने के लिए अपेक्षित परिशुद्धता के अनुसार हम वर्नियर कैलिपर्स या स्क्रू गेज का उपयोग करते हैं। कुछ विशेष स्थितियों में हम चल-सूक्ष्मदर्शी (travelling microscope) का भी प्रयोग करते हैं। इस प्रयोग में आप इन युक्तियों के साथ लंबाई का मापन करना सीखेंगे। सभी मापन उपकरणों (लम्बाई मापन अथवा किसी और प्राचल के मापन में सहायक) के साथ काम करते समय आपको निम्नलिखित महत्त्वपूर्ण बिंदुओं को ध्यान में रखना होगा :

- **किसी भी मापन की परिशुद्धता मापन उपकरण की परिशुद्धता से अधिक नहीं हो सकती; और**
- **आंकड़ों (data) की परिशुद्धता की एक सीमा होती है।**

इसका अर्थ यह है कि **कोई भी मापन कभी भी यथातथ (exact) नहीं हो सकता** और वास्तविक मान से उसमें थोड़ा बहुत अंतर अवश्य होगा। अर्थात् प्रत्येक माप में कुछ अनिश्चितता (त्रुटि) हमेशा होती है। इसलिए किसी भी उपकरण से मापन प्रारंभ करने से पहले यह आवश्यक है कि आपको त्रुटियों की संकल्पना की स्पष्ट समझ होनी चाहिए, जिसकी व्याख्या हमने इस खंड की इकाई I में की है (आप देखेंगे कि हर प्रयोग में हम परिणाम के साथ त्रुटियों का भी उल्लेख करते हैं)।

इस प्रयोग के प्रथम भाग में आप वर्नियर कैलिपर्स की सहायता से लकड़ी के ब्लॉक की मोटाई मापना सीखेंगे (भाग 1.2)। फिर आप स्क्रू गेज का प्रयोग करके कागज़ की मोटाई या तार का व्यास मापना सीखेंगे (भाग 1.3)।

कभी-कभी आपको भौतिकी प्रयोगशाला में सूक्ष्म दूरियां शुद्धता से मापनी होती हैं, जैसे कि व्यतिकरण फ्रिंज (interference fringe) की चौड़ाई या केशिका नली (capillary tube) में पानी की बढ़ती ऊंचाई या दंड बंकन (bending of beam) के कारण सूचक सुई का लघु विस्थापन। इसके लिए हम **चल-सूक्ष्मदर्शी** का प्रयोग करते हैं, जो यौगिक (compound) सूक्ष्मदर्शी का एक प्रकार है। इस प्रयोग के आखिरी (तृतीय) भाग में आप चल-सूक्ष्मदर्शी को फोकस करना और इससे मापन करना सीखेंगे (भाग 1.4)। आप देखेंगे कि चल-सूक्ष्मदर्शी के साथ मापन करते समय मापित पिंड को स्पर्श करने की आवश्यकता नहीं होती है, जो वर्नियर कैलिपर्स या स्क्रू गेज के साथ मापन में अपरिहार्य होता है। अतः यहां आप अस्पर्श विधा में मापन करेंगे।

अपेक्षित कौशल

इस प्रयोग का उद्देश्य आपको लघु लंबाई मापन के लिए प्रयुक्त उपकरणों का संचलन करना सीखाना है। इस प्रयोग को पूरा कर लेने के बाद आप :

- ❖ वर्नियर कैलिपर्स का अल्पतमांक तथा शून्य त्रुटि मालूम करके किसी वस्तु की मोटाई मापने के लिए इसका उपयोग कर सकेंगे;
- ❖ स्क्रू गेज का अल्पतमांक तथा शून्य त्रुटि मालूम करके कागज़ अथवा तार की मोटाई मापने के लिए इसका उपयोग कर सकेंगे; और
- ❖ चल-सूक्ष्मदर्शी को फोकस करके लघु लंबाइयों को अस्पर्श विधा में माप सकेंगे।

इस प्रयोग के लिए आवश्यक उपकरणों की सूची नीचे दी गयी है :

आवश्यक उपकरण

वर्नियर कैलिपर्स, स्क्रू गेज, चल-सूक्ष्मदर्शी, लकड़ी का ब्लाक, धातु का तार/सुई या कागज़, केशिका नली, स्पिरिट लेविल और कॉर्क क्लैम्प के साथ स्टैंड।

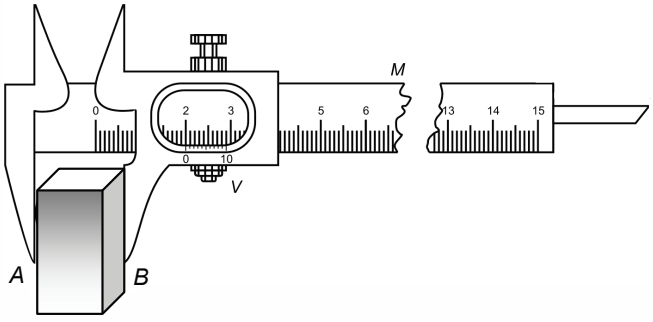
प्रयोग के प्रथम भाग में हम वर्नियर कैलिपर्स का वर्णन करेंगे तथा अल्पतमांक एवं शून्य त्रुटि को मालूम करने की विधि समझाएंगे। इसकी सहायता से लकड़ी के ब्लॉक की मोटाई मापना भी आप सीखेंगे।

1.2 वर्नियर कैलिपर्स से लकड़ी के ब्लाक की मोटाई का मापन

जब आप 5 mm से 10 cm के परिसर में लम्बाई का मापन 1 mm से बेहतर परिशुद्धता से करना चाहते हैं तब आपको वर्नियर कैलिपर्स का प्रयोग करना चाहिए। इस प्रयोगशाला पाठ्यक्रम के कुछ प्रयोगों में आप वर्नियर कैलिपर्स का प्रयोग करेंगे; उदारणार्थ, सरल दोलक में लोलक की त्रिज्या या मरोड़ी लोलक के प्रयोग में बांट के रूप में प्रयुक्त वृत्तीय बेलन का आंतरिक/बाह्य व्यास नापने के लिए। इस प्रयोग में आप वर्नियर कैलिपर्स से लकड़ी के ब्लाक की मोटाई का मापन करेंगे। प्रयोग प्रारंभ करने से पहले यह आवश्यक है कि आप वर्नियर कैलिपर्स के प्रचालन से भली-भांति परिचित हों।

1.2.1 वर्नियर कैलिपर्स का प्रचालन

वर्नियर कैलिपर्स इस्पात का बना उपकरण होता है, जिसमें दो हनु (jaws) होते हैं। इन्हें चित्र 1.1 में *A* और *B* से चिह्नित किया गया है। हनु *A* एक 15 cm लम्बे मुख्य पैमाने (MS) से जुड़ा होता है, जिस पर मिलीमीटर मापक्रम अंकित किया होता है। हनु *B* एक छोटे चल पैमाने से जुड़ा होता है, जिसे वर्नियर पैमाना (VS) कहते हैं। जिस वस्तु (हमारे प्रयोग में लकड़ी का ब्लाक) की लम्बाई मापनी हो, उसे इन दो हनुओं के बीच पकड़ा जाता है और इस भाग में बाद में बताई गई विधि के अनुसार मापन किया जाता है।

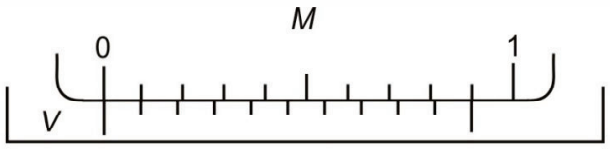


चित्र 1.1: वर्नियर कैलिपर्स से लकड़ी के ब्लाक की मोटाई का मापन।

किसी भी मापन उपकरण का प्रयोग करते समय इसके अल्पतमांक और उपकरण के समायोजन के कारण उत्पन्न कोई क्रमबद्ध त्रुटि का ज्ञान होना महत्त्वपूर्ण है। लंबाई मापन के उपकरणों में मुख्य पैमाने और चल पैमाने के शून्य अंकनों का कुमेलन (mismatch) हो सकता है। इसे उपकरण की **शून्यांक त्रुटि** कहते हैं। यह एक क्रमबद्ध त्रुटि है, जिसे आप के द्वारा लिए हुए माप से जोड़ (या घटा) कर ठीक किया जा सकता है। अब हम वर्नियर कैलिपर्स के अल्पतमांक और शून्य त्रुटि को मालूम करने की विधि समझाएंगे।

क) अल्पतमांक (Least count)

एक साधारण वर्नियर कैलिपर्स में वर्नियर पैमाने को दस बराबर भागों मे विभाजित किया जाता है जो मुख्य पैमाने के 9 भागों या 9 mm के बराबर होते हैं (चित्र 1.2)। इसका अर्थ है कि प्रत्येक वर्नियर भाग का मान 0.9 mm है और यह मुख्य पैमाने के एक भाग से 0.1 mm कम है। **जब हनुओं को एक-दूसरे के इतना निकट लाया जाता है कि वे स्पर्श करने लगें, तो मुख्य पैमाने और वर्नियर पैमाने के शून्य संपाती होने चाहिए**। क्योंकि वर्नियर का एक भाग, मुख्य पैमाने के एक भाग से 0.1 mm कम है, इसलिए पहला वर्नियर भाग पहले मुख्य पैमाना भाग से 0.1 mm बायीं ओर होगा। अब यदि हम हनु *B* को धीरे-धीरे इस तरह दायीं ओर खिसकाएं, कि यह 0.1 mm का अंतर लुप्त हो जाए, तो हम कहेंगे कि हनु 0.1 mm खिसक गया। यही दोनों हनुओं के बीच के रिक्त स्थान (gap) की चौड़ाई भी होगी। इसलिए, वर्नियर कैलिपर्स द्वारा मापी जाने वाली न्यूनतम लंबाई 0.1 mm या 0.01 cm है। इसे वर्नियर कैलिपर्स का **अल्पतमांक** या **वर्नियर स्थिरांक** (vernier constant) कहते हैं।



चित्र 1.2: वर्नियर कैलिपर्स का अल्पतमांक।

वर्नियर कैलिपर्स का अल्पतमांक मुख्य पैमाने के न्यूनतम भाग और वर्नियर पैमाने के न्यूनतम भाग के मानों के बीच के अंतर के बराबर होता है।

अब आप वर्नियर कैलिपर्स का अल्पतमांक परिकलित करना सीखेंगे। इस विधि का उपयोग किसी भी उपकरण के लिए किया जा सकता है जिसमें MS (मुख्य पैमाना) और VS (वर्नियर पैमाना) का जोड़ा मौजूद हो।

वर्नियर कैलिपर्स के अल्पतमांक का परिकलन

वर्नियर कैलिपर्स के अल्पतमांक (LC) को निम्नलिखित रूप में परिभाषित किया जाता है :

LC = मुख्य पैमाने के न्यूनतम भाग का मान (MSD) – वर्नियर पैमाने के न्यूनतम भाग का मान (VSD) जो कि MSD के पदों में है।

चित्र 1.2 का अध्ययन करें। आप देखेंगे कि 10 VSD का मान 9 MSD के मान के बराबर है। अतः हम यह कह सकते हैं कि 1 VSD = (9/10) MSD । अतएव, हम अल्पतमांक के लिए निम्नलिखित व्यंजक लिख सकते हैं :

$$LC \equiv 1MSD - 1VSD = 1MSD - (9/10)\,MSD = (1/10)\,MSD$$

चित्र 1.2 में दिखाए गए वर्नियर कैलिपर्स के लिए,

1 MSD का मान = 1 mm है।

इसलिए,

$$LC = \left(\frac{1}{10}\right) mm = 0.1\,mm = 0.01\,cm \qquad (1.1क)$$

भौतिकी प्रयोगशाला में आप कुछ ऐसे यंत्रों को देखेंगे जिनमें वर्नियर पैमाने पर 10 से अधिक भाग होंगे और 1 MSD का मान 1 mm से कम होगा। इसका एक सुपरिचित उदाहरण **चल-सूक्ष्मदर्शी** है जहां 49 MSD के संगत 50 VSD और 1 MSD = 0.5 mm के बराबर है। इसलिए चल-सूक्ष्मदर्शी का अल्पतमांक है :

1 MSD – (49/50) MSD = (1/50) MSD = (0.5/50) mm = 0.01 mm= 0.001 cm (1.1ख)

ध्यान दें कि समीकरण (1.1क और ख) के कोष्ठक (bracket) के हर (denominator) में दी गई संख्या हर वर्नियर पैमाने VS पर कुल भागों की संख्या को प्रकट करती है। अतः, व्यापक रूप में हम लिख सकते हैं कि :

$$\text{LC} = \frac{1}{n} \times 1 \text{ MSD का मान} \qquad (1.2)$$

जहां n, VS पर कुल भागों की संख्या है। चल-सूक्ष्मदर्शी के लिए $n = 50$ और 1 MSD = 0.5 mm है। अतः, इसका अल्पतमांक (LC) निम्नलिखित है :

$$\text{LC} = \frac{1}{50} \times 0.5\,\text{mm} = 0.01\text{mm} = 0.001\text{cm}$$

अन्य उपकरण जिनमें वर्नियर पैमाने का प्रयोग होता है, वे हैं : स्फेरोमीटर, फार्टिन का वायुदाबमापी (Fortin's barometer) और स्पेक्ट्रममापी (spectrometer)। आप जब भौतिकी प्रयोगशाला में प्रयोग करेंगे, तब आपको इन उपकरणों के साथ काम करने का अवसर मिलेगा।

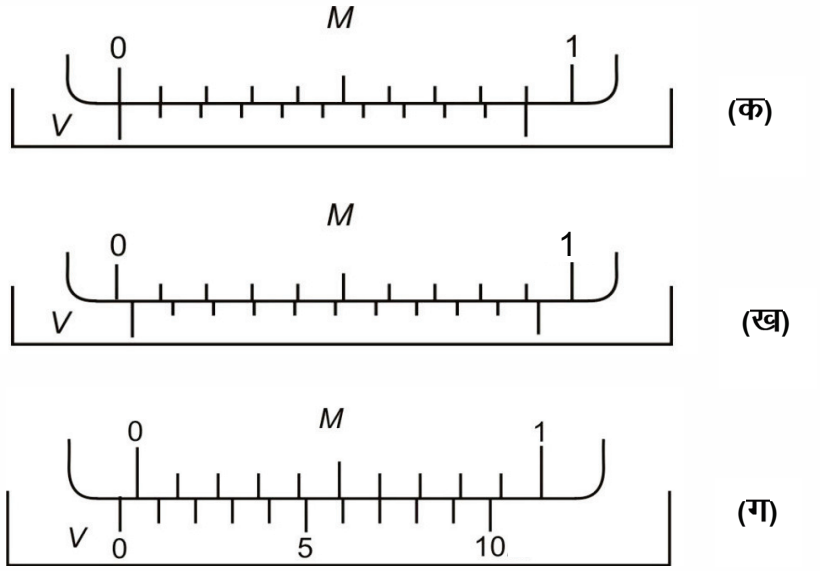
ख) शून्यांक त्रुटि (zero error)

जब वर्नियर कैलिपर्स के हनु एक साथ जुड़े हों, तो MS का शून्यांक VS के शून्यांक के संपाती होना चाहिए (चित्र 1.3क देखें)। कुछ वर्नियर कैलिपर्स में ऐसा नहीं भी होता। ऐसी स्थिति में हम कहते हैं कि वर्नियर कैलिपर्स में **शून्यांक त्रुटि** (zero error) है। वर्नियर कैलिपर्स से मापन करते समय इस त्रुटि का निर्धारण करके मापन में उसका हिसाब रखना चाहिए।

मान लें कि हनु A और B एक दूसरे को स्पर्श करते हैं और वर्नियर पैमाने का शून्य मुख्य पैमाने के **शून्य के दायीं ओर है** (चित्र 1.3ख)। इस त्रुटि को **धनात्मक शून्यांक त्रुटि** (positive zero error) कहते हैं। स्पष्ट है कि सही मान प्राप्त करने के लिए हमें **शून्यांक संशोधन** (zero correction) करना होगा। हम इसे कैसे करेंगे? जब वर्नियर पैमाने का mवां भाग मुख्य पैमाने के किसी भाग के संपाती होता हो तो उपकरण जो पाठ्यांक (reading) दर्शाता है वह **अल्पतमांक** (least count) के m गुणा के बराबर होता है।

अतः धनात्मक शून्यांक त्रुटि का परिमाण = m x LC होता है।

यदि उपकरण (वर्नियर कैलिपर्स) में धनात्मक त्रुटि है तो उसके द्वारा लिए गए किसी भी पाठ्यांक से शून्यांक त्रुटि को घटा दिया जाता है।



चित्र 1.3: (क) MS का शून्यांक VS के शून्यांक के संपाती होता है तो कोई शून्यांक त्रुटि नहीं होती; (ख) धनात्मक शून्यांक त्रुटि; (ग) ऋणात्मक शून्यांक त्रुटि।

जब वर्नियर पैमाने का शून्य मुख्य पैमाने के **शून्य के बायीं** ओर होता है तो वर्नियर कैलिपर्स की इस त्रुटि को **ऋणात्मक शून्यांक त्रुटि** (negative zero error) कहते हैं (चित्र 1.3ग)। अतः

ऋणात्मक शून्यांक त्रुटि का मान = $(n - m)$ x LC

जहाँ n वर्नियर पैमाने पर भागों की कुल संख्या है और mवां वर्नियर पैमाना भाग मुख्य पैमाने के किसी भाग के संपाती है। उदाहरणार्थ, चित्र 1.3ग में $m = 7$ है, अतः ऋणात्मक त्रुटि का मान $(10–7) \times LC = 3 \times LC$ है।

जब किसी उपकरण में ऋणात्मक शून्यांक त्रुटि होती है तब हम उपकरण के प्रेक्षित पाठ्यांक में त्रुटि के तुल्य मान को जोड़कर संशोधन करते हैं।

हम धनात्मक शून्यांक त्रुटि को '+' चिह्न से और ऋणात्मक शून्यांक त्रुटि को '–' चिह्न से दिखाते हैं। इस प्रकार व्यापक नियम यह है कि **प्रेक्षित पाठ्यांक से त्रुटि को उचित चिह्न (+ या –) के साथ सदैव घटाना चाहिए।**

स्कूल में आपने वर्नियर कैलिपर्स के बारे में पढ़ा होगा। अपनी याद ताजा करने के लिए निम्नलिखित चरणों का अनुसरण करें :

- कैलिपर्स के मुख्य पैमाने (MS) और वर्नियर पैमाने (VS) को पहचानें और VS पर बने हुए विभाजनों की संख्या लिखें :

  वर्नियर पैमाने में विभाजनों की संख्या = ...

- अब मालूम करें कि MS के कितने विभाजन VS के सभी विभाजनों के बराबर हैं :

  मुख्य पैमाने में ..... विभाजनों की संख्या = वर्नियर पैमानें में ..... विभाजनों की संख्या

अब निम्नलिखित तरीके से अपने वर्नियर कैलिपर्स का अल्पतमांक परिकलित करें :

- 1 VSD परिकलित करें। 1 VSD = मुख्य पैमाने पर विभाजनों की संख्या / वर्नियर पैमाने पर विभाजनों की संख्या = ... MSD
- मुख्य पैमाने पर 1 विभाजन का मान = 1 MSD = ... mm
- निम्नलिखित समीकरण के उपयोग से वर्नियर कैलिपर्स का अल्पतमांक परिकलित करें :

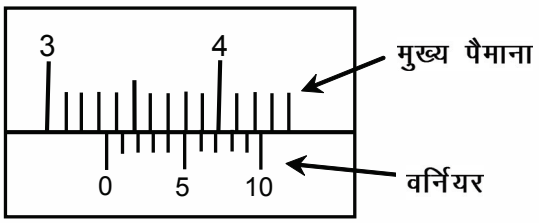
  अल्पतमांक = (1 MSD – 1 VSD) का मान = ... mm

वर्नियर कैलिपर्स का अल्पतमांक मालूम करने के बाद आप इसका प्रयोग छोटी लंबाइयां मापने के लिए करेंगे। इसके लिए आपको एक वर्नियर कैलिपर्स और लकड़ी के छोटे टुकड़े जैसे एक ठोस पिंड की आवश्यकता होगी।

1.2.2 वर्नियर कैलिपर्स से मापन

अब आप नीचे दी गई विधि द्वारा लकड़ी के ब्लाक की मोटाई माप सकते हैं :

1. वर्नियर कैलिपर्स के हनुओं को संपर्क में लाइए और देखिए कि वर्नियर पैमाने (VS) और मुख्य पैमाने (MS) के शून्य संपाती हैं या नहीं। **यदि ये संपाती नहीं है तो शून्य त्रुटि मौजूद है। इन हनुओं को संपाती बनाने के लिए बल लगाने की आवश्यकता नहीं है। ऐसा करने से कैलिपर्स क्षतिग्रस्त हो सकता है।** ऊपर बताए हुए तरीके से शून्यांक त्रुटि को ध्यान से देखें और इसे उचित चिह्नों (धनात्मक के लिए + तथा ऋणात्मक के लिए –) के साथ प्रेक्षण सारणी 1.1 में लिखें। आपको याद होगा कि **उचित बीजीय चिह्न के साथ** शून्यांक त्रुटि–चाहे धनात्मक हो या ऋणात्मक–सदा मापे गए मान से घटाई जाती है।
2. अल्पतमांक को प्रेक्षण सारणी 1.1 में लिखें।
3. ब्लाक को हनुओं के बीच, चित्र 1.1 के अनुसार रखें।
4. वर्नियर पैमाने को इस प्रकार खिसकाएं कि इससे जुड़ा हनु ब्लाक के दूसरे फलक को स्पर्श करे।
5. मुख्य पैमाने पर वर्नियर पैमाने के शून्यांक की स्थिति से हमें ब्लाक की मोटाई का स्थूल अनुमान प्राप्त होता है। यदि वर्नियर पैमाने का शून्यांक मुख्य पैमाने के किसी निशान के ठीक संगत है, तो मुख्य पैमाने पर पढ़ने से ही हमें ब्लाक की मोटाई प्राप्त हो जाएगी। लेकिन यदि वर्नियर पैमाने का शून्यांक मुख्य पैमाने के दो निशानों जैसे 3.3 cm और 3.4 cm के बीच हो (चित्र 1.4), तो ब्लाक की मोटाई 3.3 cm से अधिक (जिसे मुख्य पैमाने का पाठ्यांक कहते हैं) और 3.4 cm से कम होगी । यह मोटाई 3.3 cm से कितनी अधिक है, इसका पता वर्नियर पैमाने के उस भाग को देखकर लगाया जा सकता है जो मुख्य पैमाने के किसी भाग के साथ संपाती है। यदि वर्नियर पैमाने का चौथा भाग मुख्य पैमाने के किसी भाग के साथ संपाती हो, तो ब्लाक की मोटाई 3.3 cm + 4 × 0.01 cm = 3.34 cm होगी। (यदि VS का शून्यांक MS के किसी भाग के ठीक संपाती हो तो केवल मुख्य पैमाना पढ़ें। यह प्रेक्षण ब्लाक की मोटाई बताएगा।)



चित्र 1.4: मुख्य एवं वर्नियर पैमाने को पढ़ना।

व्यापक रूप में, वर्नियर कैलिपर्स के हनुओं के बीच की दूरी निम्नलिखित व्यंजक से प्राप्त की जा सकती है :

मुख्य पैमाने का पाठ्यांक + (वर्नियर पैमाने का पाठ्यांक × अल्पतमांक)

अपना पाठ्यांक प्रेक्षण सारणी 1.1 में लिखें। आपने गौर किया होगा कि वर्नियर पैमाने पर अंशांकन (graduations) बहुत बारीक हैं और एक-दूसरे के काफ़ी निकट हैं। अतः इन्हें आवर्धक लेन्स (magnifying glass) द्वारा पढ़ना अधिक सुविधाजनक होगा।

6. चरण 3 से 5 को कम से कम चार बार ब्लाक के उन्हीं फलकों पर लेकिन अलग-अलग स्थानों पर दोहराइए। आप समझ गए होंगे कि इस अभ्यास का कारण यादृच्छिक त्रुटियों को कम से कम रखना है।
7. सही मान प्राप्त करने के लिए मापे गए प्रत्येक मान से (उचित बीजीय चिह्न के साथ) शून्य त्रुटि (यदि है, तो) घटाएं और इन संशुद्ध मानों को प्रेक्षण सारणी 1.1 में लिखें।
8. संशुद्ध मानों का माध्य परिकलित करें। इससे आपको दिए हुए ब्लाक की मोटाई प्राप्त हो जाएगी।
9. इकाई I में बतायी गई विधि द्वारा प्रतिशत त्रुटि परिकलित करें और उसी के अनुसार अपना परिणाम लिखें।

प्रेक्षण सारणी 1.1 : लकड़ी के ब्लॉक की मोटाई का मापन

वर्नियर कैलिपर्स का अल्पतमांक = ... cm

वर्नियर कैलिपर्स की शून्य त्रुटि = ... cm (+ अथवा – चिह्न के साथ)

क्र.सं.	मुख्य पैमाने का पाठ्यांक (MS) (cm)	वर्नियर पैमाना पाठ्यांक (VS)	मोटाई (cm)	
			मापा गया पाठ्यांक (=MS+ LC × VS)	संशुद्ध पाठ्यांक (मापी गई मोटाई– शून्यांक त्रुटि)
1.				
2.				
3.				
4.				

ध्यान रहे कि वर्नियर प्रेक्षण केवल एक अंक है परंतु MS प्रेक्षण लंबाई के मात्रक में है।

परिणाम : दिए हुए ब्लाक की मोटाई = ...cm ± .....cm है।

वर्नियर कैलिपर्स के उचित रखरखाव के लिए आपको

- शून्य त्रुटि देखते समय या पाठ्यांक लेते समय हनुओं पर अधिक दबाव नहीं डालना चाहिए; और
- इन्हें निर्माता द्वारा उपलब्ध कराए गए बक्सों में रखें।

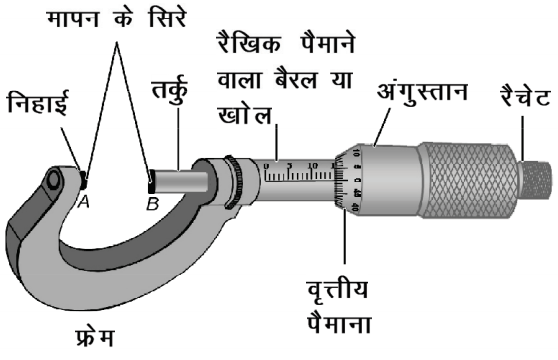
इस प्रयोग को पूरा करने पर आप देखेंगे कि वर्नियर कैलिपर्स का उपयोग 0.01 cm की परिशुद्धता के साथ 0-15 cm के परिसर में लंबाई मापने के लिए किया जा सकता है। यदि हमें वर्नियर कैलिपर्स से प्राप्त होने वाली परिशुद्धता से भी अधिक परिशुद्धता की आवश्यकता हो तो हम स्क्रू गेज का उपयोग करते हैं। इस प्रयोग के अगले भाग में आप स्क्रू गेज का उपयोग करना सीखेंगे।

1.3 स्क्रू गेज से कागज़ की मोटाई का मापन

जब आप तार या कागज़ की मोटाई जैसी अत्यंत लघु लम्बाइयां नापना चाहते हैं तब आपको वर्नियर कैलिपर्स से बेहतर परिशुद्धता वाले उपकरण की आवश्यकता होती है। इस प्रयोगशाला पाठ्यक्रम के बाद के प्रयोगों में आप स्क्रू गेज का प्रयोग तार का व्यास अथवा दंड की मोटाई मापने के लिए करेंगे। प्रयोग के इस भाग में आप एक कागज़ की मोटाई (या तार के व्यास) का मापन करना सीखेंगे। लेकिन आगे बढ़ने से पहले आप स्क्रू गेज के भागों को जान लें।

1.3.1 स्क्रू गेज का प्रचालन

चित्र 1.5 में स्क्रू गेज दिखाया गया है। इसमें एक पेंच (screw) परिशुद्ध खांचे में चालन करता है। स्क्रू गेज में एक स्क्रू या तर्कु (spindle), U-आकार का फ्रेम और मिलिमीटर अंशांकित रैखिक पैमाना उत्कीर्णीत (engraved) एक खोखला बैरल या खोल होती है। यह पैमाना स्क्रू गेज में मुख्य पैमाने का कार्य करता है। एक बेलनाकार कॉलर, जिसे अंगुस्ताना (thimble) कहते है, तर्कु से जुड़ा होता है। कॉलर पर 100 (या कभी-कभी 50) अंशों वाला वृत्तीय पैमाना उत्कीर्णीत किया होता है। अंगुस्ताने को घुमाने पर तर्कु का रैखिक विस्थापन होता है। फ्रेम की दूसरी ओर एक समतल स्टड, जिसे निहाई (anvil) कहते है, लगा होता है। जिस वस्तु की लंबाई मापनी हो उसे निहाई सिरा (*A*) और तर्कु सिरा (*B*) के बीच में कसा जाता है। आप स्क्रू को जुड़े रैचेट को घुमाकर वस्तु को ठीक तरह से कसकर पकड़ सकते हैं।

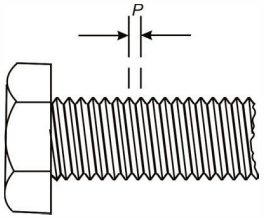


चित्र 1.5: स्क्रू गेज।

लगातार उपयोग से स्क्रू और खांचे घिस जाते हैं। इसके कारण यह भी संभव है कि शीर्ष के घूर्णन के बावजूद स्क्रू आगे न बढ़े। इस प्रकार वृत्तीय गति की अपेक्षा रैखिक गति के पिछड़ने को **पश्चगमन त्रुटि** (back-lash error) कहते हैं। इस त्रुटि से बचने के लिए **आप मापन के दौरान स्क्रू गेज को सदैव एक ही दिशा में घुमाएं।** अन्य मापन उपकरणों की तरह ही स्क्रू गेज में भी अल्पतमांक तथा कभी-कभी ऋणात्मक/धनात्मक शून्यांक त्रुटि होती हैं। स्क्रू गेज के तीन मुख्य प्राचल हैं : **पिच, अल्पतमांक** और **शून्यांक त्रुटि**। अब हम स्क्रू गेज के इन तीन प्राचलों की चर्चा करेंगे। स्क्रू गेज से पाठ्यांक लेने के लिए इन संकल्पनाओं को समझना महत्वपूर्ण है।

क) पिच

तर्कु का पेंच इस युक्ति का अत्यंत महत्वपूर्ण पुर्जा है। इसमें अत्यंत परिशुद्ध चूड़ियाँ (threads) कटी होती हैं जिनके घूर्णन करने पर पेंच आगे-पीछे चलता है। **पेंच के एक पूर्ण परिक्रमण में तर्कु द्वारा तय की गई दूरी को स्क्रू गेज का चूड़ी अंतराल या पिच** (pitch) ***P*** **कहा जाता है** (चित्र 1.6)। यदि हम अंगुस्ताने को दक्षिणावर्त (clockwise) घुमाएं तो तर्कु निहाई सिरे (*A*) की ओर बढ़ेगा। जब ये दोनों आपस में स्पर्श करते हों तब वृत्तीय पैमाने और मुख्य पैमाने के शून्यांक संपाती होने चाहिए। एक पूर्ण वामावर्त (anticlockwise) घूर्णन करने पर वृत्तीय पैमाने का शून्य चिह्न पुनः मुख्य पैमाने के भाग के साथ संपाती होगा और निहाई सिरा (*A*) तर्कु सिरे (*B*) से अलग हो जाएगा। आप इस दूरी को मुख्य पैमाने पर पढ़ सकते हैं। यह पेंच के **चूड़ी अंतराल** (पिच) के बराबर होगा।



चित्र 1.6: स्क्रू गेज का पिच।

ख) अल्पतमांक

मान लें कि स्क्रू का पिच 0.5 mm है और वृत्तीय पैमाने पर 50 अंश है। अब वृत्तीय पैमाने पर अंगुस्ताने को केवल एक अंश से घुमाने पर तर्कु द्वारा तय की गई दूरी

$(1/50) \times \text{pitch} = (1/50) \times (0.5\text{mm}) = 0.01$ mm or 0.001 cm होगी।

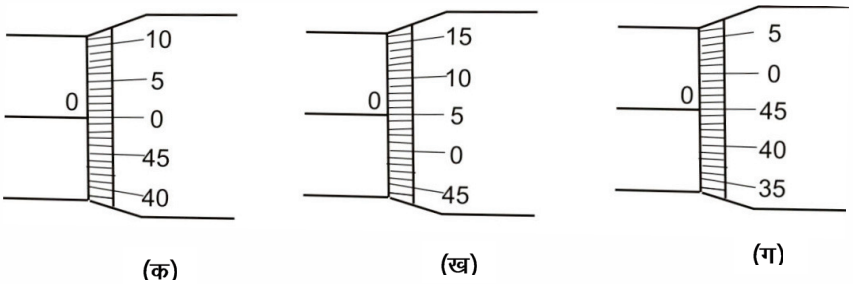
यह वह निम्नतम लंबाई है जिसे स्क्रू गेज द्वारा मापा जा सकता है। यही इसका **अल्पतमांक** है। क्योंकि प्रारूपिक स्क्रू गेज का अल्पतमांक 0.01 mm या 10μm होता है, इसे माइक्रोमीटर स्क्रू गेज भी कहते हैं।

ग) शून्यांक त्रुटि

वर्नियर कैलिपर्स की तरह स्क्रू गेज में भी शून्यांक त्रुटि हो सकती है। जब निहाई सिरा *A* और तर्कु सिरा *B* आपस में स्पर्श करें परंतु वृत्तीय और मुख्य पैमानों के शून्य संपाती न हों, तब हम कहते हैं कि स्क्रू गेज में **शून्यांक त्रुटि** है। जब निहाई सिरा *A* और तर्कु सिरा *B* आपस में स्पर्श करें और वृत्तीय तथा मुख्य पैमानों के शून्य संपाती हों, तब हम कहते हैं कि स्क्रू गेज में कोई **शून्यांक त्रुटि नहीं** है (चित्र 1.7क देखें)। जब वृत्तीय पैमाने का शून्य मुख्य पैमाने के शून्य से नीचे होता है तब शून्यांक त्रुटि **धनात्मक** होती है (चित्र 1.7ख)। जब वृत्तीय पैमाने का शून्य मुख्य पैमाने के शून्य के ऊपर होता है, तब शून्यांक त्रुटि को **ऋणात्मक** कहा जाता है (चित्र 1.7ग)। वर्नियर कैलिपर्स की भांति इस उपकरण में भी **वास्तविक पाठ्यांक से शून्यांक त्रुटि (इसके चिह्न के साथ) को घटाकर संशोधित मान प्राप्त किया जाता है।**

अतः

अंतिम पाठ्यांक = लिया गया पाठ्यांक – उचित बीजीय चिह्न के साथ शून्यांक त्रुटि



चित्र 1.7: जब स्क्रू गेज की निहाई और तर्कु आपस में स्पर्श करते हैं तो वृत्तीय पैमाने तथा रैखीय पैमानों के शून्यों की आपेक्षिक स्थिति जब (क) कोई शून्यांक त्रुटि नहीं; (ख) धनात्मक; तथा (ग) ऋणात्मक शून्यांक त्रुटि है।

स्क्रू गेज एक सुग्राही युक्ति है और आपको इसका प्रयोग सावधानी से करना चाहिए।

स्क्रू गेज का उपयोग करते हुए आप :

- अंगुस्ताने को ज्यादा सख़्त न कसें; और
- स्क्रू गेज को ऐसे समंजित करें, जहां उसे शून्य पाठ्यांक दर्शाना हो। अगर शून्येतर पाठ्यांक मिले तो त्रुटि का मान लिख लें।

हम आशा करते हैं कि अब आप स्क्रू गेज के साथ अच्छी तरह काम कर सकेंगे और मापन करते समय आवश्यक सावधानियाँ बरतेंगे। प्रयोग के इस भाग के लिए आपको एक स्क्रू गेज और कागज या तार या पिन जैसी पतली वस्तु आवश्यक होगी।

1.3.2 स्क्रू गेज से मापन

आप नीचे दिए गए चरणों से वस्तु की मोटाई माप सकते हैं :

1. स्क्रू गेज लें और देखें कि उसका रैचेट ठीक तरह से काम कर रहा है या नहीं। यदि यह ठीक तरह से काम नहीं कर रहा हो तो स्क्रू गेज को बदल दें।
2. रैखिक (मुख्य) पैमाने (LS) पर दो भागों के बीच की लंबाई देखें और उसे प्रेक्षण सारणी 1.2 में लिखें। स्क्रू को दस घूर्णन दें और देखें कि चूड़ी कितना आगे बढ़ती है। इससे आप एक बार पूरा घुमाने पर स्क्रू (तर्कु) द्वारा तय की गई दूरी परिकलित कर सकते हैं। इस दूरी को स्क्रू का पिच (pitch) कहते हैं। वृत्तीय स्केल (CS) के विभाजनों की कुल संख्या (N) लिखें। स्क्रू के पिच को वृत्तीय स्केल के विभाजनों की कुल संख्या से भाग देने पर आपको स्क्रू गेज का अल्पतमांक (LC) प्राप्त हो जाएगा। प्रायः स्क्रू गेज का अल्पतमांक 0.001 cm होता है।
3. अब निहाई और तर्कु को संपर्क में लाएं और देखें कि कोई शून्य त्रुटि तो नहीं है। अगर त्रुटि है तो इसे उचित चिह्न के साथ प्रेक्षण सारणी 1.2 में लिखें।

4. निहाई और तर्कु के बीच कागज़ या तार रखिए। स्क्रू को इस प्रकार कसें कि वस्तु तर्कु और निहाई के बीच में पकड़ी जाए। स्क्रू को कसने के लिए अतिरिक्त बल ना लगाएं। रैचेट को घुमाकर आप कसने के लिए इष्टतम जोर लगा सकते हैं।

5. मुख्य और वृत्तीय पैमानों के पाठ्यांक पढ़कर प्रेक्षण सारणी 1.2 में लिखें।

6. चरण 4 और 5 को कम से कम 6 बार इस प्रकार दोहराएं कि अलग-अलग स्थानों पर मोटाई मापी जाए। इस प्रकार आप कागज़ या तार के एकसमान न होने (non-uniformity) का हिसाब लगा सकते हैं। अपने सभी प्रेक्षणों को आप प्रेक्षण सारणी 1.2 में लिखें।

7. मापे गए प्रत्येक मान से (उचित चिह्न के साथ) शून्यांक त्रुटि, यदि कोई हो, तो घटा दें। दिए हुए कागज़/तार की मोटाई का माध्य मान परिकलित करें।

8. पहले की ही भांति प्रतिशत त्रुटि परिकलित करें और अपने परिणाम के साथ लिखें।

प्रेक्षण सारणी 1.2: मोटाई का मापन

रैखिक (मुख्य) पैमाने पर लघुतम विभाजन का मान = ... mm

स्क्रू को दस बार घुमाने पर स्क्रू द्वारा तय की गई दूरी = D = ... mm

स्क्रू का पिच = P (= D/10) = ... mm

वृत्तीय पैमाने के विभाजनों की संख्या (N) = ...

स्क्रू गेज का अल्पतमांक LC = $\frac{\text{पिच}}{\text{N}}$ = ... mm = ...cm

शून्यांक त्रुटि (+ या – चिह्न के साथ) =.....mm

क्र.सं.	रैखिक (मुख्य) पैमाने का पाठ्यांक LS (mm)	वृत्तीय पैमाने पर पाठ्यांक ×LC = CS (mm)	मोटाई (mm)	
			मापी गई (=LS+CS)	संशुद्ध (मापी गई – शून्य त्रुटि)
1 2				
3				
4				
5				
6				

औसत मोटाई = ... mm

परिणाम : कागज़/तार की मोटाई = ... cm ± ..... cm **है।**

अब तक आपने अति परिशुद्धता से लंबाई का मापन करने वाली युक्तियों के बारे में पढ़ा। इन युक्तियों में लंबाई मापने वाली वस्तु को उपकरण का स्पर्श होता है। अब हम चल-सूक्ष्मदर्शी के बारे में चर्चा करेंगे, जो अस्पर्श विधा में लंबाई का मापन करता है।

1.4 चल-सूक्ष्मदर्शी से केशिका के आंतरिक व्यास का मापन

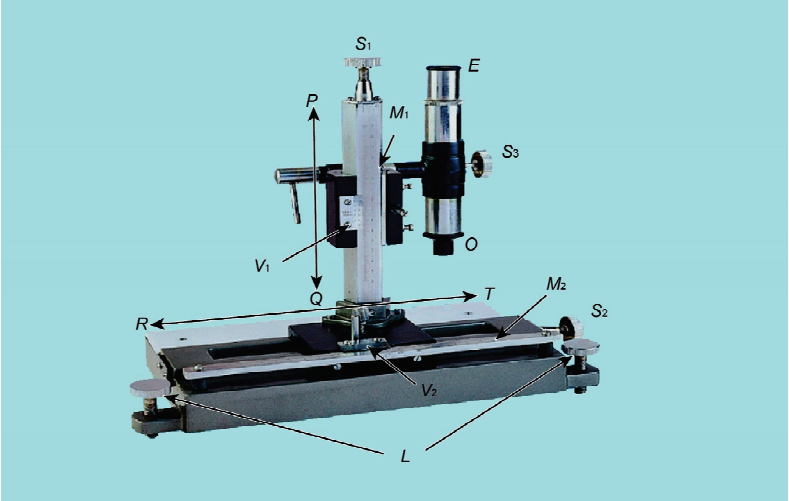
कई प्रयोगों में आपको छोटी लंबाइयों को विषय वस्तु से कुछ दूरी पर मापना पड़ता है। उदाहरणार्थ, दंड बंकन उपकरण में आपको धातु के दंड का प्रयुक्त बाटों के कारण होने वाला अल्प विस्थापन मापना होता है। कुछ प्रकाशिकी प्रयोगों में व्यतिकरण से प्राप्त दीप्त और अदीप्त फ्रिंजों के बीच की दूरियां अति परिशुद्धता से मापनी होती हैं।

ऐसे अस्पर्श विधा में करने वाले मापनों के लिए हम चल-सूक्ष्मदर्शी का प्रयोग करते हैं। प्रयोग के इस भाग में आप इसके उपयोग से केशिका नली के आंतरिक व्यास का मापन करेंगे।

इसके लिए आपको एक चल-सूक्ष्मदर्शी, स्पिरिट लेविल, स्टैंड और केशिका नली के एक टुकड़े की जरूरत होगी। लेकिन प्रयोग करने से पहले आपको चल-सूक्ष्मदर्शी को सेट करना सीखना होगा और समझना होगा कि यह कैसे कार्य करता है।

1.4.1 चल-सूक्ष्मदर्शी का प्रचालन

चित्र 1.8 में आप एक प्रारूपिक चल-सूक्ष्मदर्शी की तस्वीर देख सकते हैं। मूलतः, चल-सूक्ष्मदर्शी एक यौगिक सूक्ष्मदर्शी ही होता है जिसे क्षैतिक और ऊर्ध्वाधर दोनों दिशाओं में चलाया जा सकता है। इसमें दो लेंस होते हैं : नेत्रिका (*E*-eyepiece) और अभिदृश्यक (*O*-objective)। आप इसे पेंच S_1 की मदद से *PQ* के अनुदिश ऊर्ध्वाधर दिशा में और पेंच S_2 की मदद से *RT* के अनुदिश क्षैतिज दिशा में चला सकते हैं। ऊर्ध्वाधर पैमाने पर चली गई दूरी का मापन आप मुख्य पैमाने M_1 और संगत वर्नियर पैमाने V_1 की मदद से कर सकते हैं। क्षैतिज दिशा में किया विस्थापन मुख्य पैमाना M_2 और वर्नियर पैमाना V_2 से मापा जा सकता है। आपको सूक्ष्मदर्शी में नेत्रिका के ज़रिए देखना चाहिए और अभिदृश्यक को देखी जाने वाली वस्तु की ओर रखना चाहिए। आप सूक्ष्मदर्शी को उस पर लगे पेंच S_3 की मदद से फोकस कर सकते हैं।

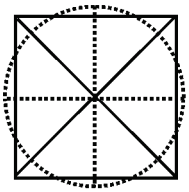


चित्र 1.8: चल-सूक्ष्मदर्शी

1.4.2 चल-सूक्ष्मदर्शी से मापन

चल-सूक्ष्मदर्शी को सेट करना

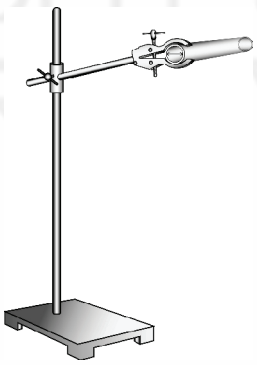
नेत्रिका में क्रॉस तार लगे होते हैं (चित्र 1.9 में बिंदुकित रेखा से दर्शाए हुए) जिन्हें आप नेत्रिका को अंदर-बाहर सरका कर फोकस कर सकते हैं। अब सूक्ष्मदर्शी को सेट करने के लिए नीचे दिए गए चरणों का अनुसरण करें :



चित्र 1.9: कागज़ के टुकड़े पर बने क्रॉस के निशान से क्रॉस तार को संपाती करना।

- सूक्ष्मदर्शी के आधार पर चार समतलन पेंच (leveling screws) (*L*) होते हैं (चित्र 1.8)। शुरू में यह सुनिश्चित करें कि चल-सूक्ष्मदर्शी का आधार पूर्णतः क्षैतिज है। इसके लिए समतलन पेंचों और स्पिरिट लेविल का उपयोग करें।
- फिर पेंचों S_1 और S_2 की मदद से जांच करें कि सूक्ष्मदर्शी ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज दिशाओं में मुक्त रूप से चल सकता है या नहीं।
- सूक्ष्मदर्शी को ऊर्ध्वाधर स्थिति में रखें। कागज़ के एक छोटे टुकड़े पर पेन से क्रॉस का निशान बनाएं (चित्र 1.9 में ठोस रेखा से दर्शाए जैसे) और इसे अभिदृश्यक के नीचे रखें।
- पेंच S_3 की मदद से धीमे से नेत्रिका को सरकाएं और क्रॉस पर इस तरह फोकस करें कि नेत्रिका के क्रॉस तार का केंद्र, क्रॉस से संपाती हो और स्पष्ट रूप से दिखें। इस अवस्था में सूक्ष्मदर्शी फ़ोकसित होता है।
- प्रयोग की शुरुआत करने से पहले आपको दोनों वर्नियर पैमानों V_1 और V_2 के अल्पतमांक भी परिकलित कर लेने चाहिए। आप इनका परिकलन अल्पतमांक के सूत्र की मदद से कर सकते हैं (आम तौर पर दोनों वर्नियर पैमानों का अल्पतमांक एक ही होता है)।

अब जबकि आपने सूक्ष्मदर्शी को सेट कर लिया है, आप केशिका नली का आंतरिक व्यास माप सकते हैं।



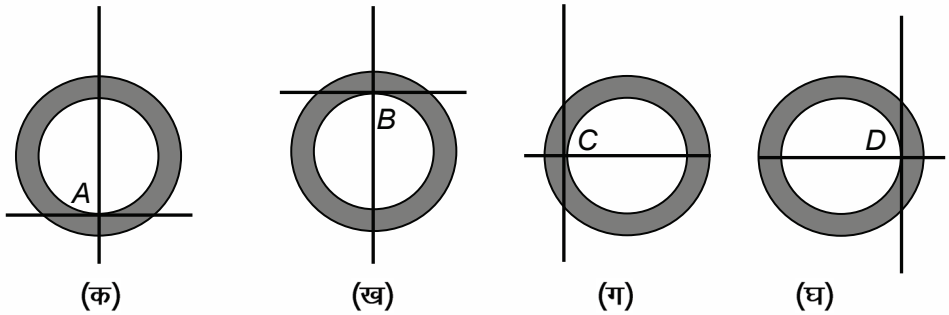
चित्र 1.10: रिटॉर्ट स्टैण्ड में लगी हुई केशिका नली।

मापन की विधि

1. रिटॉर्ट स्टैंड के क्लैंप में केशिका नली को क्षैतिजतः रखें जैसा कि चित्र 1.10 में दिखाया गया है। सूक्ष्मदर्शी को क्षैतिज स्थिति में घुमाएं ताकि अभिदृश्यक केशिका नली के सामने आए। केशिका नली के बोर की तरफ इसे फ़ोकस करें।

2. चल-सूक्ष्मदर्शी को ऐसा समायोजित करें जिससे ऊर्ध्वाधर क्रॉस तार बोर के मध्य में हो और क्षैतिज क्रॉस तार बोर को बिंदु *A* पर छुए जैसा कि चित्र 1.11क में दिखाया गया है। सूक्ष्मदर्शी के ऊर्ध्वाधर पैमाने पर मुख्य पैमाना पाठ्यांक (M_1) और वर्नियर पैमाना पाठ्यांक (V_1) नोट करें। इन पाठ्यांकों को प्रेक्षण सारणी 1.3 के स्तंभ (*A*) में लिखें।

3. अब पेंच S_1 का इस्तेमाल करके ऊर्ध्वाधर दिशा में चल-सूक्ष्मदर्शी को इस तरह चलाएं कि क्रॉस तार बिंदु *A* के ठीक विपरीत स्थित बिंदु *B* को छुए (चित्र 1.11ख)। सूक्ष्मदर्शी के ऊर्ध्वाधर पैमाने पर मुख्य पैमाना पाठ्यांक और वर्नियर पैमाना पाठ्यांक नोट करें। इन पाठ्यांकों को प्रेक्षण सारणी 1.3 के स्तंभ (*B*) में लिखें।



चित्र 1.11 : केशिका नली के आंतरिक व्यास के मापन के लिए चल-सूक्ष्मदर्शी के क्रॉस तारों की भिन्न-भिन्न स्थितियां।

4. अब क्षैतिज क्रॉस तार को फिर से बोर के मध्य पर लाएं। फिर चल-सूक्ष्मदर्शी को क्षैतिज दिशा में इस तरह चलाएं कि ऊर्ध्वाधर क्रॉस तार बोर को बिंदु *C* पर छुए जैसा कि चित्र 1.11ग में दिखाया गया है। सूक्ष्मदर्शी के क्षैतिज पैमाने पर मुख्य पैमाना पाठ्यांक (M_2) और वर्नियर पैमाना पाठ्यांक (V_2) नोट करें। इन पाठ्यांकों को प्रेक्षण सारणी 1.3 के स्तंभ (*C*) में लिखें।

5. अंत में पेंच S_2 का इस्तेमाल करके चल-सूक्ष्मदर्शी को क्षैतिज दिशा में इस तरह चलाएं कि ऊर्ध्वाधर क्रॉस तार बोर को बिंदु *C* के ठीक विपरीत बिंदु *D* पर छुए (चित्र 1.11घ)। सूक्ष्मदर्शी के क्षैतिज पैमाने (M_2) पर मुख्य पैमाना पाठ्यांक और वर्नियर पैमाना पाठ्यांक नोट करें। इन पाठ्यांकों को प्रेक्षण सारणी 1.3 के स्तंभ (*D*) में लिखें।

6. अब तक प्राप्त पाठ्यांकों का उपयोग करके आप ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज आंतरिक व्यासों का माध्य लेकर नली का आंतरिक व्यास परिकलित कर सकते हैं।

7. ऊपर दिए चरण 2 से चरण 5 को और दो बार दोहराएं ताकि आपके पास पाठ्यांकों के तीन सेट हो जाएं। उनसे केशिका नली का औसत व्यास परिकलित करें।

प्रेक्षण

वर्नियर पैमाने V_1 का अल्पतमांक :

$$\mathbf{LC_1} = \frac{M_1 \text{ पर एक मुख्य पैमाना भाग का मान}}{\text{वर्नियर पैमाने } V_1 \text{ पर भागों की संख्या}} = \text{.....cm}$$

वर्नियर पैमाने V_2 का अल्पतमांक :

$$\mathbf{LC_2} = \frac{M_2 \text{ पर एक मुख्य पैमाना भाग का मान}}{\text{वर्नियर पैमाने } V_2 \text{ पर भागों की संख्या}} = \text{.....cm}$$

ध्यान दें कि :

पाठ्यांक = MS (मुख्य पैमाना पाठ्यांक) +

VS (वर्नियर पैमाना पाठ्यांक) × LC (LC_1 अथवा LC_2)

प्रेक्षण सारणी 1.3: सूक्ष्मदर्शी के पाठ्यांक

क्र. सं.	क्रॉस तार की स्थिति के लिए सूक्ष्मदर्शी पाठ्यांक				आंतरिक व्यास		
	***A*(cm)**	***B*(cm)**	***C*(cm)**	***D*(cm)**	ऊर्ध्वाधर ***Y=B−A*** **(cm)**	क्षैतिज ***X=D−C*** **(cm)**	व्यास ***=(X+Y)/2*** **(cm)**
1.							d_1=
2.							d_2=
3.							d_3=

परिणाम

औसत व्यास $= \frac{d_1 + d_2 + d_3}{3}$ cm = ... cm.

1.5 शब्दावली

Anticlock-wise	वामावर्त
Anvil	निहाई
Back-lash error	पश्चगमन त्रुटि
Bending of beam	दंड बंकन
Capillary	केशिका
Clock-wise	दक्षिणावर्त
Compound microscope	यौगिक सूक्ष्मदर्शी
Displacement	विस्थापन
Division	भाग
Engraved	उत्कीर्णीत
Exact	यथातथ
Eye piece	नेत्रिका
Graduations	अंशांकन
Interference	व्यतिकरण
Least count	अल्पतमांक
Leveling screw	समतलन पेंच
Magnifying glass	आवर्धक लेन्स
Measuring tape	मापक फीता

Mismatch	कुमेलन
Non-contact mode	अस्पर्श विधा
Objective lens	अभिदृश्यक
Pitch	चूड़ी-अंतराल, पिच
Scale	पैमाना
Screw	पेंच
Spectrometer	स्पेक्ट्रममापी
Spindle	तर्कु
Thimble	अंगुस्ताना
Thread	चूड़ी
Travelling microscope	चल-सूक्ष्मदर्शी
Zero correction	शून्यांक संशोधन
Zero error	शून्यांक त्रुटि

प्रयोग 2

घूर्णन अक्ष के परितः गतिपालक चक्र के जड़त्व-आघूर्ण का निर्धारण

प्रयोग की रूपरेखा

2.1 प्रस्तावना
अपेक्षित कौशल

2.2 गतिपालक चक्र का सिद्धांत

2.3 जड़त्व-आघूर्ण मापने की विधि

2.4 शब्दावली

2.1 प्रस्तावना

प्रयोग 1 में आपने सीखा था कि छोटी कोटि की लम्बाइयों को वर्नियर कैलिपर्स और स्क्रू गेज़ जैसे उपकरणों का उपयोग कर कैसे मापा जा सकता है। कुछ विशेष मामलों में, आप चल-सूक्ष्मदर्शी का भी उपयोग करते हैं। भौतिकी में समय और द्रव्यमान दो और मौलिक राशियां हैं। आप इसी प्रयोगशाला के अन्य प्रयोगों में द्रव्यमान का मापन करना सीखेंगे। इस प्रयोग में आपको गतिपालक चक्र का जड़त्व-आघूर्ण निर्धारण करने का अवसर प्राप्त होगा। इस प्रक्रिया में, आप गतिपालक चक्र की धुरी (axle) का व्यास मापेंगे और गतिपालक चक्र के विराम में आने से पहले लगाए गए चक्करों की संख्या का समय मापेंगे। संपूर्णता की दृष्टि से हम अपनी चर्चा का प्रारम्भ जड़त्व-आघूर्ण की साधारण संकल्पना को दोहरा कर और गतिपालक चक्र के जड़त्व-आघूर्ण का विवरण देकर करेंगे। इसके बाद हम इस प्रयोग को करने की विधि/प्रक्रिया की चर्चा करेंगे।

अपेक्षित कौशल

इस प्रयोग को करने के बाद, आपः

- जाँच कर सकेंगे कि जड़त्व-आघूर्ण, डोरी से लटकाए गए द्रव्यमान और जिस दूरी से यह नीचे गिरता है, उस पर किस प्रकार निर्भर करता है; तथा
- गतिपालक चक्र का जड़त्व-आघूर्ण ज्ञात कर सकेंगें।

इस प्रयोग के लिए आप को निम्नलिखित उपकरणों की आवश्यकता होगी।

आवश्यक उपकरण

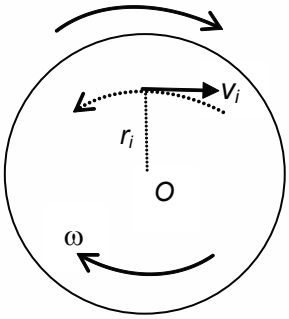
गतिपालक चक्र, बाट बाक्स (बाट लगभग 100g, 200g, 300g), विराम घड़ी, मीटर स्केल, डोरी, वर्नियर कैलिपर्स।

2.2 गतिपालक चक्र का सिद्धान्त

यांत्रिकी के सैद्धांतिक पाठ्यक्रम की इकाई 12 में आप जड़त्व की संकल्पना के बारे में जान चुके हैं। न्यूटन के प्रथम नियम के अनुसार जब तक किसी पिंड पर कोई बाह्य बल नहीं लगाया जाता, वह अपनी विरामावस्था या सरल रेखा में एकसमान गति की अवस्था में बना रहता है। इसका तात्पर्य है कि प्रत्येक पिंड में अपनी गति या विराम की अवस्था में परिवर्तन के प्रतिरोध की प्रवृत्ति होती है। पिंडों की गति या विरामावस्था में परिवर्तन का यह प्रतिरोध **जड़त्व** कहलाता है। जड़त्व पिंड के द्रव्यमान के अनुक्रमानुपाती होता है। अर्थात्, स्थानांतरण गति में द्रव्यमान, जड़त्व का माप है। घूर्णी गति में, जहाँ पिंड एक नियत अक्ष के परितः घूर्णन करता है, यह प्रतिरोध न केवल पिंड के द्रव्यमान पर निर्भर करता है, बल्कि घूर्णन अक्ष से इसके विभिन्न भागों की दूरियों पर भी निर्भर करता है। घूर्णन करते पिंड की गति या विरामावस्था में परिवर्तन का प्रतिरोध **जड़त्व आघूर्ण** कहलाता है। अतः हम कह सकते हैं कि जड़त्व आघूर्ण द्रव्यमान का घूर्णी समरूप है। इसके संबंध में आप यांत्रिकी के सैद्धांतिक पाठ्यक्रम के खंड 3 में सीख चुके हैं। आपको इसका अनुप्रयोग सिंचाई के लिए कुएँ से पानी निकालने की उस व्यवस्था में मिलेगा जिसमें बैल एक वृत्ताकार पथ पर घूमते हैं। व्यवहार में, मशीनों के गतिशील भागों की धुरी पर गतिपालक चक्र लगाया जाता है। यह गति को एकसमान बनाए रखने में मदद करता है; जब मशीन तेज चलती है तो ऊर्जा अवशोषित करता है और जब धीमी पड़ने लगती है तो ऊर्जा प्रदान करता है।

गतिपालक चक्र का जड़त्व आघूर्ण

चित्र 2.1 देखिए। यह दर्शाता है कि द्रव्यमान M का एक दृढ़ पिंड इसके बिन्दु O से गुजरने वाले एक नियत अक्ष के परितः घूर्णन कर रहा है। ध्यान दें कि $M = \sum m_i$ जहां m_i, i^{th} कण का द्रव्यमान है। इस दृढ़ पिंड के सभी कण घूर्णन अक्ष के परितः वृत्ताकार पथ पर चलते हैं। ध्यान दें कि कणों के रैखिक वेग और घूर्णन अक्ष से उनकी दूरियाँ भिन्न-भिन्न हैं, किन्तु सभी कणों के कोणीय वेग (ω) समान हैं।



चित्र 2.1: एक दृढ़ पिंड।

घूर्णन अक्ष से r_i दूरी पर अपने नियत पथ पर रैखिक वेग v_i से गतिमान किसी कण की गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2} m_i v_i^2$ होती है। चूँकि $v_i = r_i\omega$ है, हम गतिज ऊर्जा के व्यंजक को $\frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$ लिख सकते हैं। अतः, नियत अक्ष के परितः घूर्णन करते किसी पिंड की कुल गतिज ऊर्जा (KE) का व्यंजक निम्नलिखित होगा :

$$KE = \sum \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

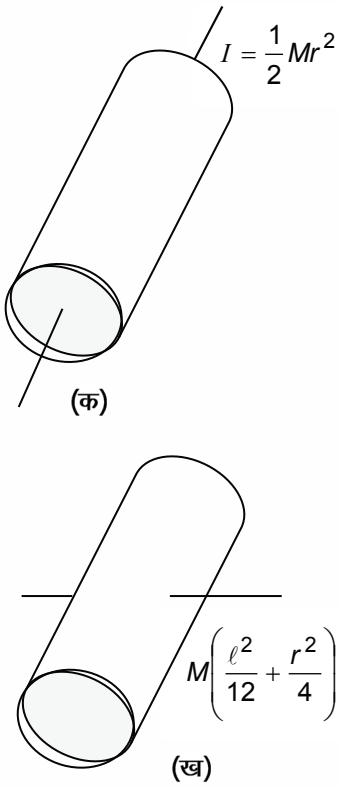
यदि ω नियत है, तो हम इसको फिर से इस तरह लिख सकते हैं :

$$\text{KE} = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i r_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 I$$

जहाँ $I = \sum m_i r_i^2$, पिंड का घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण है।

किसी पिंड के दिए गए अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण को पिंड निर्मित करने वाले सभी कणों के लिए $m_i r_i^2$ गुणनफलों के योग के रूप में परिभाषित किया जाता है; जहां m_i, i वे कण की द्रव्यमान है एवं r_i घूर्णन-अक्ष से इस कण की दूरी है।

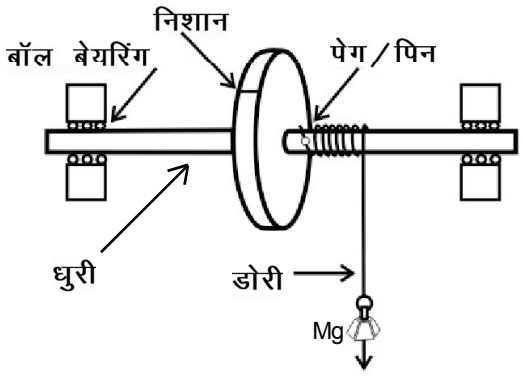
ध्यान दें कि जड़त्व-आघूर्ण एक नियत राशि नहीं है। यह घूर्णन अक्ष के परितः द्रव्यमान के वितरण पर निर्भर करती है। उदाहरण के लिए किसी बेलन का अपने अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण $\frac{1}{2}Mr^2$ (चित्र 2.2) होता है जबकि इसके मध्य बिन्दु से इसके अक्ष के लम्बवत् गुजरने वाले अक्ष के परितः इसका जड़त्व आघूर्ण $M\left(\frac{\ell^2}{12}+\frac{r^2}{4}\right)$ होता है।



चित्र 2.2: बेलन के लिए जड़त्व आघूर्ण (क) स्वयं के अक्ष के परितः; (ख) बेलन के मध्य बिन्दु से इसके अक्ष के लम्बवत् गुजरने वाले अक्ष के परितः।

गतिपालक चक्र

गतिपालक चक्र धुरी पर लगा एक भारी पहिया होता है, जैसा कि चित्र 2.3 में दर्शाया है। गतिपालक चक्र का द्रव्यमान मुख्यतः इसके किनारे में समाहित रहता है। अपनी भौतिकी प्रयोगशाला में, आप देखेंगे कि धुरी के सहारे गतिपालक चक्र को एक दीवार पर जमीन से उपयुक्त ऊँचाई पर लगाया गया है।



चित्र 2.3: धुरी पर लगा एक गतिपालक चक्र।

डोरी का एक सिरा धुरी पर जड़े हुए किसी पेग/पिन से स्थिर किया गया है और दूसरे सिरे पर एक द्रव्यमान M लगा होता है। डोरी पूरी तरह धुरी पर लिपटी रहती है। जब द्रव्यमान M को विमुक्त किया जाता है तो डोरी खुलती है और इससे गतिपालक चक्र घूमने लगता है।

जैसे-जैसे द्रव्यमान M नीचे आता है, गतिपालक चक्र की घूर्णन-दर बढ़ती जाती है और अन्ततः जब डोरी धुरी को छोड़ती है और द्रव्यमान गिर जाता है तो घूर्णन-दर अधिकतम हो जाती है। मान लें कि डोरी के धुरी को छोड़ने से पहले द्रव्यमान M ऊर्ध्वाधर ऊँचाई h से नीचे गिरता है। हम कह सकते हैं कि भार Mg ऊर्ध्वाधर

ऊँचाई h से गिरता है और इसकी स्थितिज ऊर्जा में P.E. (= Mgh) की कमी होती है। यह ऊर्जा द्रव्यमान को रैखिक वेग और गतिपालक चक्र को कोणीय वेग प्रदान करने में प्रयुक्त होती है। जिस क्षण पर द्रव्यमान अलग होकर गिरता है, उस क्षण पर हम इन्हें क्रमशः v और ω द्वारा निर्दिष्ट करते हैं।

बोध प्रश्न 1

उचित द्रव्यमान चुनने के लिए हमें किन बातों का ध्यान रखना पड़ता है?

हम कह सकते हैं कि स्थितिज ऊर्जा का उपयोग निम्नलिखित रूप से होता है :

1) गतिपालक चक्र को घूर्णी गतिज ऊर्जा $\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)$ प्रदान करने में, जहाँ I गतिपालक चक्र का घूर्णन-अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण है और ω उसका कोणीय वेग है।

2) धुरी पर घर्षण के विरूद्ध कार्य करने में, और

3) गिरते हुए भार में गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}Mv^2$ जनित करने में।

द्रव्यमान के विलगित होने के बाद, गतिपालक चक्र का कोणीय वेग घर्षण के कारण कम होता जाता है और कुछ समय t के पश्चात् गतिपालक चक्र विरामावस्था में आ जाता है। द्रव्यमान के विलगित होने के पल पर पहिये का कोणीय वेग ω है और जब यह विरामावस्था में आता है तो इसका कोणीय वेग शून्य हो जाता है। अतः यदि घर्षण बल स्थायी है तो गतिपालक चक्र की गति एकसमान मंदित होती है और इस कालावधि में पहिए की औसत कोणीय चाल $\omega/2$ होती हैं। अतः

$\omega/2 = 2\pi n/t \Rightarrow \omega = 4\pi n/t$

आप ध्यान देंगे कि पेग से भार के विलगित हो जाने के बाद भी गतिपालक चक्र का घूमना जारी रहता है। मान लें कि विरामावस्था में आने से पहले समय t में पहिया n बार घूमता है। तब इस गतिपालक चक्र का औसत कोणीय वेग $\frac{2\pi n}{t}$ होगा। यह मानते हुए कि गतिपालक चक्र में धुरी पर लगे घर्षण बल के कारण वेग-ह्रास एक समान है और अंतिम कोणीय वेग शून्य है, इसका प्रारंभिक औसत कोणीय वेग निम्नलिखित (हाशिए में दी गई टिप्पणी देखें) होगा :

$$\omega = \frac{4\pi n}{t} \tag{2.1}$$

अब, गतिपालक चक्र की गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}I\omega^2$ है और यह उसके n चक्करों में क्षयित हो जाती है। प्रति चक्र घूर्णन में घर्षण के कारण हुई ऊर्जा की हानि $\frac{1}{2}I\omega^2/n$ है।

यदि गति के प्रारंभ में डोरी n_1 बार धुरी पर लपेटी गई थी, तो गिरते हुए भार की घर्षण के कारण क्षयित स्थितिज ऊर्जा $n_1\left(\frac{1}{2}I\omega^2/n\right)$ है। और यदि पेग से विलगित होते समय गिरते हुए भार का वेग v हो तो इसकी गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}Mv^2$ होगी। अतः हम लिख सकते हैं :

$$Mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{n_1}{n}\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2 \tag{2.2}$$

$v = r\omega$ प्रतिस्थापित करके समीकरण (2.2) को हम निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं :

$$Mgh = \frac{1}{2} I\omega^2 \left(1+\frac{n_1}{n}\right) + \frac{1}{2} Mr^2\omega^2$$

जहां r धुरी की त्रिज्या है।

उपर्युक्त व्यंजक के पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$I = \frac{\frac{2Mgh}{\omega^2} - Mr^2}{\left(1+\frac{n_1}{n}\right)} = \frac{2Mgh}{\omega^2\left(1+\frac{n_1}{n}\right)} - \frac{Mr^2}{\left(1+\frac{n_1}{n}\right)} \qquad (2.3)$$

अतः समय t का मापन करके और गतिपालक चक्र के लिए n एवं n_1 के मान ले कर, समीकरण (2.3) से जड़त्व आघूर्ण का परिकलन किया जा सकता है।

2.3 जड़त्व-आघूर्ण मापने की विधि

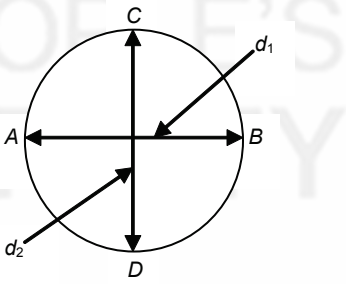
नीचे दिए गए चरणों का अनुसरण करें:

1. वर्नियर कैलिपर्स लें और इसका अल्पतमांक ज्ञात करें। इस विधि के बारे में आप प्रयोग 1 में सीख चुके हैं।
   - वर्नियर कैलिपर्स पर मुख्य स्केल (MS) एवं वर्नियर स्केल पहचानिए तथा वर्नियर स्केल पर भागों की संख्या लिखिए :

     वर्नियर स्केल पर भागों की संख्या = ...
   - ध्यान दें कि कितने MS भाग सभी भागों के बराबर हैं :

     मुख्य स्केल पर ..... भाग = वर्नियर स्केल पर ..... भाग
   - अपने वर्नियर कैलिपर्स का अल्पतमांक परिकलित कीजिए।

   धुरी का व्यास कई स्थानों पर दो परस्पर लम्बवत् दिशाओं में मापें, जैसा कि चित्र 2.4 में दर्शाया गया है। अपने प्रेक्षणों को शून्यांक त्रुटि संशोधनों (अगर कोई हो तो) के बाद सारणी 2.1 में रिकॉर्ड कीजिए। इसका माध्य मान ज्ञात कीजिए। ध्यान दें कि r के इन मानों में मामूली त्रुटि भी परिणाम में बड़ा परिवर्तन ला सकती हैं क्योंकि I के व्यंजक में r^2 पद आता है।



चित्र 2.4: गतिपालक चक्र की धुरी।

2. एक डोरी लीजिए जिसकी लम्बाई फर्श से धुरी की ऊँचाई से कम हो।
3. डोरी के एक सिरे पर एक लूप बनाइए और इसे पेग (गतिपालक चक्र की धुरी पर लगे पीतल के पिन के लिए चित्र 2.3 देखें) से अटका दीजिए।
4. पहिए को हाथ से वामावर्त दिशा में घुमाइए और डोरी को धुरी पर समान रूप से सटा-सटा कर लपेटिए। सुनिश्चित कर लें कि डोरी न तो एक के ऊपर एक लपेटी हो, न ही फेरों के बीच कोई दूरी रहे। जब लगभग पूरी डोरी लपेटी जा चुकी हो तो जहाँ यह धुरी को छोड़ती है ठीक उस स्थान पर इस

पर एक चिह्न अंकित कीजिए। लपेटे गए फेरों की संख्या गिनिए और इसे प्रेक्षण सारणी 2.2 में n_1 के स्तंभ में लिखिए। आप के प्रयोग के दौरान n_1 का मान नियत होना अपेक्षित है।

5. कोई द्रव्यमान, मान लें कि 100 g, डोरी के मुक्त सिरे से जोड़िए।
6. जब द्रव्यमान किनारे के ठीक नीचे हो तो दीवार पर एक संदर्भ चिह्न अंकित कीजिए।
7. द्रव्यमान को विमुक्त कीजिए। आप देखेंगे कि जब डोरी खुलती है, तब गतिपालक चक्र दक्षिणावर्त दिशा में घूमता है।
8. यदि आप दो लोग साथ में काम कर रहें हो तो आप में से एक ठीक उस क्षण पर, जब द्रव्यमान अलग होता है, गतिपालक चक्र के चक्करों की संख्या गिन सकता है और दूसरा विरामघड़ी शुरू कर सकता है। उन चक्करों की संख्या (n) गिनिए जो गतिपालक चक्र विरामावस्था में आने से पहले लगाता है। ठीक उस क्षण पर जब गतिपालक चक्र विरामावस्था में आता है विरामघड़ी को बन्द कर दीजिए।
9. द्रव्यमान अलग होने के बाद गतिपालक चक्र जितनी देर घूमता रहता है वह समय (t) रिकॉर्ड कीजिए।
10. लूप और दूसरे सिरे पर अंकित चिह्न के बीच डोरी की लम्बाई h मापिए। यह वह दूरी है जिससे द्रव्यमान नीचे उतरा है। प्रेक्षणों को सारणी 2.2 में रिकॉर्ड कीजिए।
11. 4-10 तक के चरणों को दोहराइए और अब गतिपालक चक्र का घूर्णन वामावर्त दिशा में होना चाहिए। इसके लिए आप पहिए को दक्षिणावर्त दिशा में घूमाकर डोरी को लपेटेंगे।
12. 4-11 तक के चरणों को डोरी से विभिन्न द्रव्यमान जोड़ कर दोहराइए।

प्रेक्षण सारणी 2.1: गतिपालक चक्र की धुरी के व्यास का मापन

वर्नियर कैलिपर्स का अल्पतमांक = ... cm

शून्यांक त्रुटि (उचित संकेत के साथ + अथवा –) = ... cm

क्रम संख्या	*AB* के अनुदिश पाठ्यांक d_1(cm)	*CD* के अनुदिश पाठ्यांक d_2(cm)	$(d_1+d_2)/2$ (cm)
1			
2			
3			
4			
5			

माध्य व्यास (d) = ... cm

(% त्रुटि) = ...

धुरी की माध्य त्रिज्या, $r = d/2$ = ...±..... cm

प्रेक्षण सारणी 2.2: h, n, n_1 एवं t का मापन

विराम घड़ी का अल्पतमांक = ... s

सेट संख्या	द्रव्यमान M(g)	घूर्णन	ऊँचाई h(cm)	n_1	n		t (s)	
					मापित	माध्य	मापित	माध्य
1	100	दक्षिणावर्त						
		वामावर्त						
2	200	दक्षिणावर्त						
		वामावर्त						

परिकलन

गतिपालक चक्र के जड़त्व-आघूर्ण का मान समीकरण (2.3) का उपयोग करके प्राप्त किया जा सकता है। इस समीकरण में ω का मान प्रतिस्थापित किया जाता है। अतः व्यंजक को पुनः निम्नवत् लिखा जा सकता है :

$$I = \frac{2Mgh}{\frac{(4\pi n)^2}{t^2}\left(1+\frac{n_1}{n}\right)} - \frac{Mr^2}{\left(1+\frac{n_1}{n}\right)}$$

सभी सेटों के लिए इस समीकरण का उपयोग कर जड़त्व-आघूर्ण (I) का मान परिकलित करें। I का माध्य मान लेकर अपने परिणाम की रिपोर्ट करें।

परिणाम

गतिपालक चक्र के उसके अक्ष के परितः जड़त्व-आघूर्ण का औसत मान
= .....g cm^2 = ...kg m^2

त्रुटि न्यूनीकरण के लिए सावधानियाँ

1. डोरी को धुरी पर सटा कर एकसमान रूप से लपेटा जाना चाहिए।
2. विराम घड़ी ठीक उस क्षण शुरू की जानी चाहिए जब डोरी पेग को छोड़े।
3. क्षैतिज धुरी पर लगे पेग पर अटकाया गया लूप ढीला होना चाहिए जिससे कि डोरी की लपेटन खत्म होने के साथ डोरी में विपरीत दिशा में लिपटने की प्रवृत्ति न रहे।
4. घर्षण कम करने के लिए धुरी के चूल में अच्छी तरह तेल लगाया जाना चाहिए।

बोध प्रश्न 2

जड़त्व-आघूर्ण घूर्णन अक्ष पर किस प्रकार निर्भर करता है।

2.4 शब्दावली

Angular velocity	कोणीय वेग
Axis of rotation	घूर्णन अक्ष
Ball bearing	बॉल बेयरिंग
Cord	डोरी
Flywheel	गतिपालक चक्र
Mass	द्रव्यमान
Moment of inertia	जड़त्व-आघूर्ण
Peg/Pin	पेग / पिन
Rim	किनारा / रिम
Stop watch	विराम घड़ी

प्रयोग 3

दंड बंकन विधि द्वारा यंग के गुणांक का निर्धारण

प्रयोग की रूपरेखा

3.1 प्रस्तावना
अपेक्षित कौशल

3.2 कैन्टीलीवर का सिद्धान्त
कैन्टीलीवर का कार्यकारी सिद्धान्त
बंकन आघूर्ण
कैन्टीलीवर के मुक्त सिरे पर अवनमन

3.3 सूक्ष्मदर्शी द्वारा दंड में उत्पन्न अवनमन के मापन की प्रक्रिया

3.4 दूरबीन और प्रकाशिक लीवर द्वारा दण्ड में उत्पन्न अवनमन का मापन

3.5 परिशुद्धताओं की तुलना

3.6 शब्दावली

3.1 प्रस्तावना

पिछले प्रयोग में आपने जड़त्व-आघूर्ण की संकल्पना के बारे में सीखा था और आपने गतिपालक चक्र का जड़त्व-आघूर्ण मापा था। इस पाठ्यक्रम के कुछ प्रयोगों में आप पदार्थ के कुछ प्रत्यास्थ (elastic) गुणधर्मों को मापेंगे जिनके बारे में आप स्कूल की भौतिकी में पढ़ चुके हैं। इस प्रयोग में आप दंड बंकन विधि द्वारा पदार्थ के यंग गुणांक को मापना सीखेंगे। यंग गुणांक इस बात का सूचक है कि कोई एक-विमीय पिंड (object) कितना प्रत्यास्थ होता है जब बल (force) को उसकी लम्बाई के अनुदिश लगाया जाता है। भाग 3.2 में हम संक्षेप में इसके अंतर्निहित सिद्धान्त की चर्चा करेंगे। भाग 3.3 में हम सूक्ष्मदर्शी का उपयोग कर दंड में उत्पन्न अवनमन को मापने की प्रक्रिया की चर्चा करेंगे। भाग 3.4 में आप दूरबीन और प्रकाशिक लीवर व्यवस्था का उपयोग कर दंड के अवनमन (depression) को मापने के लिए प्रयोग करना और प्रेक्षण लेना सीखेंगे। अंत में भाग 3.5 में आप दूरबीन और प्रकाशिक लीवर विधि द्वारा मापे गए अवनमनों की परीशुद्धताओं की तुलना कर सकेंगे।

अगले प्रयोग में, आप मैक्सवेल सुई का उपयोग कर तार के दृढ़ता गुणांक (modulus of rigidity) को मापना सीखेंगे।

अपेक्षित कौशल

इस प्रयोग को करने के बाद, आपः

- किसी पिंड पर सूक्ष्मदर्शी और दूरबीन को फोकसित कर सकेंगे;
- लंबन (parallax) त्रुटि को हटाने में सक्षम होंगे;
- सूक्ष्म अवनमन का मापन कर सकेंगे;
- दंड के अवनमन को (i) सूक्ष्मदर्शी तथा (ii) दूरबीन और प्रकाशिक लीवर व्यवस्था द्वारा माप कर इन दोनों विधियों की परिशुद्धताओं की तुलना कर सकेंगे; तथा
- यंग के प्रत्यास्थता गुणांक का मान परिकलित कर सकेंगे।

इस प्रयोग के लिए आपको निम्नलिखित उपकरणों की आवश्यकता होगी।

आवश्यक उपकरण

आयताकार स्टील का दंड, दो क्षुरधार, चल-सूक्ष्मदर्शी, पिन, प्रकाशिक लीवर और स्केल व्यवस्था, दूरबीन, मीटर स्केल, दंड के बीच में भार लटकाने के लिए एक हैंगर (अथवा एक रकाब), आधा किलोग्राम भार के कई बाट, वर्नियर कैलिपर्स तथा स्क्रू गेज।

आइये अब हम इस प्रयोग के संगत सिद्धान्त का वर्णन करते हैं।

3.2 कैन्टीलीवर का सिद्धान्त

यदि आप रबर की गेंद अथवा स्पंज को दबाते हैं तो उनकी आकृति में परिवर्तन आ जाता है। जब आप इन्हें दबाना बंद करते हैं तो क्या होता है? आप देखेंगे कि वे फिर से अपनी मूल आकृति में आ जाते हैं। वास्तव में सभी निकायों को कुछ सीमा तक उपयुक्त बल लगाने पर विरूपित (deform) किया जा सकता है तथा विरूपक बल (deforming force) के हटने पर यह अपनी मूल स्थिति में वापस आने का प्रयास करता है। एक सिरे पर दृढ़तापूर्वक कसा तानित तार विरूपण का सरलतम उदाहरण है। तार के निचले सिरे पर अतिरिक्त भार लगाने पर तार की लंबाई बढ़ जाती है। तार पर लटके भार को हटाने पर वह पुनः अपनी मूल अवस्था में आने का प्रयास करता है। इसी प्रकार आपने देखा होगा कि किसी पुल पर दौड़ती रेलगाड़ी पटरियों में अवनमन जनित करती है। लेकिन रेल के चले जाने के बाद वे अपनी मूल अवस्था ग्रहण कर लेती हैं। इसका अर्थ यह है कि प्रत्येक वस्तु बाह्य बल से उत्पन्न किसी भी प्रकार के विरूपण का विरोध करती है। और बाह्य बल के हटने पर प्रत्येक पिंड अपनी मूल अवस्था में आने की कोशिश करता है। इस गुणधर्म को **प्रत्यास्थता** (elasticity) कहते हैं। पिंड के विरूपण के लिए जितना अधिक बल लगता है, वह उतना ही अधिक प्रत्यास्थ होता है।

वह अधिकतम प्रतिबल जिसे कोई पिंड स्थाई रूप से विरूपित होने से पहले प्रतिपालित (sustain) कर सकता है, **प्रत्यास्थता सीमा** कहलाता हैं।

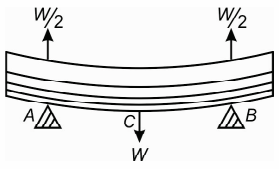
जब किसी वस्तु पर विरूपक बल लगता है तब उसमें प्रतिक्रिया बल उत्पन्न होता है जो आरोपित बल के प्रभाव का विरोध करता है। साम्यावस्था में आरोपित बाह्य बल और प्रत्यानयन बल (restoring force) बराबर होते हैं। पिंड के अंदर प्रति इकाई क्षेत्रफल पर उत्पन्न प्रत्यानयन बल को **प्रतिबल** (stress) कहते हैं। पिंड की लंबाई, आयतन या आकार में होने वाले भिन्नात्मक परिवर्तन (fractional change) को **विकृति** (strain) कहते हैं। उदाहरणतया, जब किसी तार को उसकी लंबाई के अनुदिश अर्थात् उसके अनुप्रस्थ परिच्छेदित क्षेत्रफल के लम्बवत् बल लगाकर खींचा जाता है तो उसकी लंबाई में परिवर्तन आता है। तार की लंबाई में होने वाली वृद्धि तथा प्रारंभिक लम्बाई के अनुपात को **अनुदैर्घ्य विकृति** (longitudinal strain) कहते हैं। प्रत्यास्थता सीमा के भीतर, प्रतिबल तथा अनुदैर्घ्य विकृति के अनुपात को **यंग का गुणांक** (Young's modulus) कहते हैं। इसका मान पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करता है, न कि पदार्थ के भौतिक आयाम पर।

पुलों के निर्माण में यंग के गुणांक का ज्ञान होना अति महत्त्वपूर्ण है क्योंकि हमें भारित संरचना (loaded structure) और उसके भागों में परिशुद्ध (precise) विरूपण (अवनमन) जानना जरूरी होता है। चित्र 3.1 देखें। जब पुल के ऊपर से रेलगाड़ी गुजरती है तो दंड (beam) झुक जाता है। इसका ऊपरी पृष्ठ संपीडित हो जाता है जबकि निचले पृष्ठ का प्रसार होता है। ये विरूपण पुल के अन्य भागों में भी संचरित होते है। यंग का गुणांक हमें इंजन की संबंधन छड़ (connecting rod) या पिस्टन (piston) अथवा गर्डर, आदि पिंडों की प्रतिबल सहने की क्षमता की जानकारी भी देता है। (आपने देखा होगा कि पुलों और ऊँची इमारतों में गर्डरों और दंडों का प्रयोग होता है। इन गर्डरों के अनुप्रस्थ परिच्छेद का आकार अंग्रेजी के अक्षर I के रूप का होता है। आयताकार अनुप्रस्थ परिच्छेद के दंड में लम्बी कोर को गहराई के रूप में इस्तेमाल किया जाता है।) इस प्रयोग में आप दंड बंकन विधि द्वारा यंग का गुणांक ज्ञात करना सीखेंगे।

समांगी (homogenous), एवं समदैशिक (isotropic) प्रत्यास्थ पदार्थ के समान अनुप्रस्थ काट (गोलीय अथवा चौकोर) वाले छड़ को दंड (beam) कहते हैं।

चित्र 3.1: लोहे के पुल पर चलते रेलगाड़ी के इंजन से दंड में पैदा झुकाव।

जब किसी दंड के दोनों सिरों को किसी सुदृढ़ आधार पर रखकर इसके मध्य में भार लटकाया जाता है तब भारित बिंदु पर सर्वाधिक अवनमन होता है। इसका मान पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करता है; स्टील दंड में अवनमन इतना कम होता है कि यह आंख से नहीं देखा जा सकता। चित्र 3.2 देखें जिसमें एक ऐसे दंड को दर्शाया गया है जो *A* तथा *B* बिंदुओं पर रखे दो क्षुरधारों (knife-edges) पर टिका है। मान लें कि इसके मध्य बिंदु *C* पर भार *W* लटकाया गया है। दोनों क्षुरधारों पर प्रतिक्रिया (*W*/2) को ऊपरी दिशा में ले



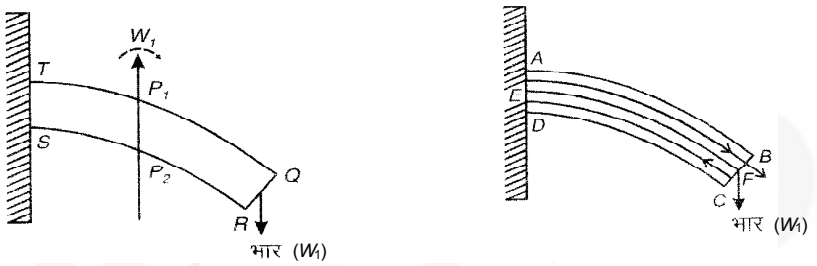
चित्र 3.2: दो सिरों पर आधारित और केन्द्र पर भारित दंड।

एक सिरे पर क्षैतिजतः स्थिर दंड को कैन्टीलीवर कहते हैं।

सकते हैं। ऐसी स्थिति में दंड को बिंदु *C* पर स्थिर दो प्रतिलोमित कैन्टीलीवरों (inverted cantilevers) के समतुल्य समझा जा सकता है (हाशिए पर दी गई टिप्पणी पढ़े)। इन दो कैन्टीलीवरों में बंकन (bending) *A* और *B* पर ऊपरी दिशा में लगे प्रतिक्रिया बल के कारण होगा। अतः हमें यह जानना आवश्यक है कि कैन्टीलीवर में बंकन कैसे होता है तथा यह किन कारकों पर निर्भर करता है।

3.2.1 कैन्टीलीवर का कार्यकारी सिद्धान्त

आइए, चित्र 3.3क में दिखाए गए कैन्टीलीवर पर विचार करें। मान लीजिए कि मुक्त सिरे पर भार W_1 लगाया है। जैसे ही दंड को भारित किया जाता है वैसे ही वह झुक जाता है। क्या आप जानते हैं कि ऐसा क्यों होता है? इसका उत्तर जानने के लिए आइए दंड के P_1QRP_2 परिच्छेद पर विचार करें। चूंकि भार W_1 दंड के मुक्त सिरे पर लगाया गया है, इसलिए प्रत्यानयन बल P_2P_1 के अनुदिश ऊर्ध्वाधर होगा। ये दोनों बल समान परन्तु विपरीत दिशाओं में हैं इसलिए ये बल-युग्म (couple) बनाते हैं।



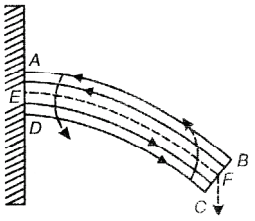
(क) (ख)

चित्र 3.3: क) जब कैन्टीलीवर पर भार लटकाया जाता है तो यह झुक जाता है; ख) बल-युग्म के प्रभाव में कैन्टीलीवर के अंतर्निहित तंतु।

स्कूल की भौतिकी की पढ़ाई से और यांत्रिकी के सैद्धांतिक पाठ्यक्रम के खंड 3 की इकाई 12 से आपको याद होगा कि जब किसी पिंड पर कोई बल-युग्म लगता है तो वह पिंड को घूर्णित करने का प्रयास करता है। लेकिन कैन्टीलीवर घूर्णन नहीं कर सकता क्योंकि इसका एक सिरा स्थिर है। इसलिए दंड दक्षिणावर्त दिशा (clockwise direction) में झुक जाता है। इसे तीर द्वारा दिखाया गया है। यही कारण है कि इस बल-युग्म को **बंकन बल-युग्म** (bending couple) और इस युग्म के आघूर्ण को **बंकन आघूर्ण** (bending moment) कहते हैं।

अब आप पूछ सकते हैं कि दंड पर बल-युग्म लगने पर यह साम्यावस्था में कैसे रह सकता है? यह तभी संभव हो सकता है जब कोई संतुलन बल-युग्म (balancing couple) दंड पर कार्य करे। यह जानने के लिए कि संतुलन बल-युग्म कैसे बनता है, आइए पहले समझें कि जब दंड का मुक्त सिरा भारित किया जाता है तब उसमें क्या बदलाव होते हैं। इसके लिए आप कल्पना करें कि दंड एक दूसरे के ऊपर अनेक पतली परतों से बना हुआ है। इन परतों को **तंतु** (filaments) कहते हैं। जब कैन्टीलीवर को भारित किया जाता है तब उसके ऊपरी आधे भाग के तंतु खिंच जाते हैं अर्थात् उनका प्रसार होता है तथा निचले आधे भाग के तंतु संपीडित (compressed)

होते हैं। लेकिन इनके बीच में एक ऐसी परत (या तंतु) होती है जो न तो फैलती है और न ही सिकुड़ती है। इस सतह को **उदासीन पृष्ठ** या **उदासीन सतह** (neutral surface) कहते हैं, तथा इसे चित्र 3.3ख में *EF* से दर्शाया गया है।

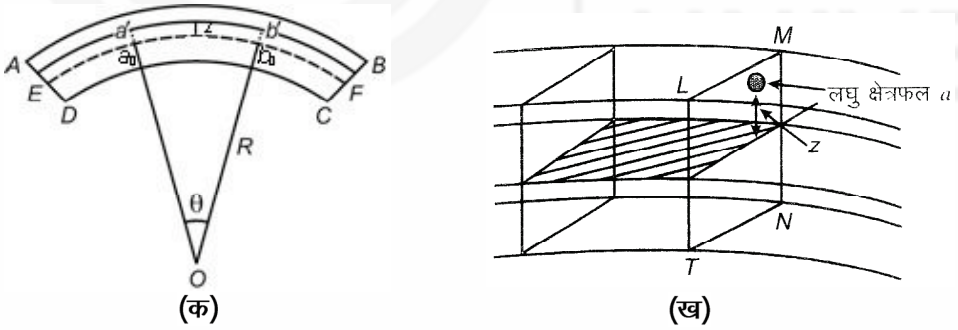


चित्र 3.4: डैशदार रेखा द्वारा दिखाए गए उदासीन अक्ष के सापेक्ष बल के आघूर्ण दंड बंकन का विरोध करते हैं।

बल-युग्म के कारण उत्पन्न बदलावों से तंतुओं में प्रत्यानयन बल (restoring force) पैदा हो जाते हैं, जैसा कि चित्र 3.4 में दिखाया गया है। उदासीन सतह के ऊपर ये बल दंड के स्थिर सिरे की ओर कार्य करते हैं तथा प्रसार का विरोध करने का प्रयास करते हैं। दूसरी ओर, उदासीन पृष्ठ के नीचे प्रत्यानयन बल भारित सिरे की ओर कार्य करते हैं तथा संपीडन का विरोध करते हैं। बलों के ये दो समुच्चय विपरीत दिशाओं में लगते हैं। इन बलों की उदासीन पृष्ठ के सापेक्ष आघूर्णों की दिशा वामावर्त होती है। (इसे बिन्दुकित तीरों द्वारा दिखाया गया है।) यह दिशा उस दिशा के विपरीत है जो बंकन बल-युग्म के कारण दंड के बंकन की है। बलों के इस समुच्चय से संतुलन बल-युग्म प्राप्त होता है जो दंड को उसकी मूल अवस्था में लाने का प्रयत्न करता है। जब दंड साम्यावस्था में होता है, तब बल-युग्म आघूर्ण बंकन आघूर्ण के बराबर होता है। अब आप उन कारकों को जानना चाहेंगे जिन पर बंकन आघूर्ण निर्भर करता है।

3.2.2 बंकन आघूर्ण

चित्र 3.5क में दिखाए गए दंड के छोटे से भाग पर विचार करें। यह भाग एक चाप के रूप में मुड़ा हुआ है। मान लीजिए कि उदासीन सतह का अंश a_ob_o वक्रता केन्द्र पर कोण θ बनाता है तथा इसकी वक्रता त्रिज्या R है। अतः उदासीन सतह (तंतु) से दूरी z पर तंतु के भाग $a'b'$ की लम्बाई का व्यंजक $a'b' = (R+z)\ \theta$ होता।



(क) (ख)

चित्र 3.5: क) विकृत दशा में दंड का एक छोटा भाग; ख) *LMNT* दंड का वह अनुप्रस्थ परिच्छेद है जो कि दंड की लम्बाई तथा बंकन तल के लम्बवत् है।

जब दंड बंकित नहीं होता तब इस तंतु की लम्बाई $R\theta$ उदासीन तंतु की लम्बाई के बराबर होती है। इसलिए इसकी लम्बाई में हुई वृद्धि का व्यंजक निम्नलिखित है:

$$a'b' - a_ob_o = (R + z)\ \theta - R\ \theta = z\ \theta \qquad (3.1)$$

अतः

$$\text{अनुदैर्घ्य विकृति} = \frac{\text{लम्बाई में वृद्धि}}{\text{मूल लम्बाई}} = \frac{z\theta}{R\theta} = \frac{z}{R} \qquad (3.2)$$

आइए अब चित्र 3.5ख में दिखाए गए परिच्छेद *LMNT* पर चर्चा करें जो दंड की लम्बाई तथा बंकन तल के लम्बवत् है। इसमें उदासीन पृष्ठ से *z* दूरी पर अल्प अवयव क्षेत्रफल की कल्पना करें। इस क्षेत्रफल से गुजरते हुए तंतु में उत्पन्न विकृति *z/R* होगी।

पिछले उपभाग से आपको याद होगा कि जब कभी किसी तंतुओं की लम्बाई में वृद्धि होती है, इसमें जनित प्रत्यानयन बल दंड के स्थिर सिरे की ओर लगता है। इस बल का परिमाण (magnitude) परिकलित करने के लिए आप यंग के गुणांक का इस्तेमाल करते हैं:

$$Y = \frac{\text{प्रतिबल}}{\text{अनुदैर्घ्य विकृति}}$$

अर्थात्, प्रतिबल, दंड के यंग के गुणांक (Young's modulus) और अनुदैर्घ्य विकृति का गुणनफल है। इसका अर्थ है कि क्षेत्रफल *a* पर लग रहे प्रतिबल का मान है:

$$S = Y\frac{z}{R} \tag{3.3}$$

और क्षेत्रफल *a* पर लगे बल का परिमाण है :

$$F = \text{क्षेत्रफल} \times \text{प्रतिबल} = aY\frac{z}{R} \tag{3.4}$$

उदासीन पृष्ठ के सापेक्ष इस बल का आघूर्ण, बल और उदासीन पृष्ठ से इसकी दूरी के गुणनफल के बराबर है:

$$M = Ya\frac{z}{R}z = Ya\frac{z^2}{R} \tag{3.5}$$

परिच्छेद *LMNT* के सभी तंतुओं (अथवा दंड) में कार्यरत बलों के कुल आघूर्ण का व्यंजक निम्नलिखित है:

$$\sum\frac{Yaz^2}{R} = \frac{Y}{R}\sum az^2 = \frac{Y}{R}I_g \tag{3.6}$$

जहां $I_g = \sum az^2$ दंड का जड़त्व-आघूर्ण है। अतः दंड का बंकन आघूर्ण $\frac{Y}{R}I_g$ है ।

अब आप प्रत्यानयन बल-युग्म का आघूर्ण और कैन्टीलीवर के मुक्त सिरे पर उत्पन्न अवनमन के बीच संबंध जानना चाहेंगे।

$\sum az^2$ दंड के उदासीन पृष्ठ के सापेक्ष इसका जड़त्व-आघूर्ण (moment of inertia) I_g है। इसलिए इसका मान AK^2 के बराबर है, जहां A दंड के अनुप्रस्थ परिच्छेद का कुल क्षेत्रफल है तथा K उदासीन पृष्ठ के सापेक्ष परिभ्रमण त्रिज्या (radius of gyration) है।
आयताकार अनुप्रस्थ परिच्छेद के लिए

$A = b \times d$ और $K^2 = \frac{d^2}{12}$,

यहां आयताकार हिस्से की लंबाई b तथा चौड़ाई d है।

$\therefore I_g = AK^2 = \frac{bd^3}{12}$ (i)

वृत्ताकार परिच्छेद के लिए

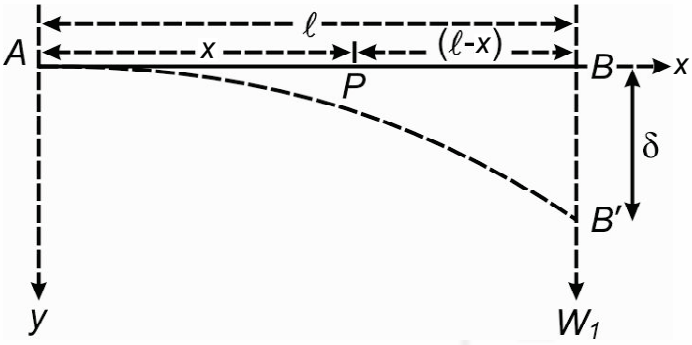
$A = \pi r^2$ और $K^2 = \frac{r^2}{4}$,

जहां r त्रिज्या है।

$\therefore I_g = AK^2 = \frac{\pi r^4}{4}$ (ii)

3.2.3 कैन्टीलीवर के मुक्त सिरे पर अवनमन

चित्र 3.6 देखें। इसमें लम्बाई ℓ के ऐसे कैन्टीलीवर को दिखाया गया है जिसका मुक्त सिरा भारित है। *AB* इसके उदासीन अक्ष का द्योतक है। आइए इसकी लंबाई के अनुदिश *x*-अक्ष तथा नीचे की ओर ऊर्ध्वाधर *y*-अक्ष लें। कैन्टीलीवर के मुक्त सिरे पर W_1 भार लगाने पर वहां सर्वाधिक अवनमन होता है। उदासीन अक्ष की नई स्थिति *AB'* है और *B* सिरे पर अवनमन δ है।



चित्र 3.6: मुक्त सिरे पर भारित लम्बाई ℓ का कैन्टीलीवर।

दंड के सिरे *A* से दूरी *x* पर परिच्छेद *P* पर विचार कीजिए। भार W_1 के कारण, इस भाग पर बंकन आघूर्ण का मान $W_1 \times PB = W_1(\ell - x)$ होगा। चूंकि दंड साम्यावस्था में है, इसलिए इसका मान बंकन के प्रतिरोधी आघूर्ण $\frac{YI_g}{R}$, के बराबर होना चाहिए। अतः हम लिख सकते हैं कि

$$W_1(\ell - x) = \frac{YI_g}{R} \qquad (3.7)$$

चूंकि उदासीन पृष्ठ अतनित रहता है, इसलिए हम किसी भी बिंदु पर इसकी वक्रता त्रिज्या *(R)* को इस संबंध द्वारा व्यक्त कर सकते हैं: (हाशिया देखें।)

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

समीकरण (3.7) में *R* के इस मान को प्रतिस्थापित करने पर हम देखते हैं कि

$$W_1(\ell - x) = YI_g \frac{d^2y}{dx^2}$$

या

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{W_1}{YI_g}(\ell - x) \qquad (3.8)$$

अवकलन गणित (differential calculus) की कोई भी पुस्तक देखें। आप वक्रता त्रिज्या के पूर्ण व्यंजक को निम्नलिखित संबंध से व्यक्त कर सकते हैं:

$$\frac{1}{R} = \frac{(d^2y/dx^2)}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

जब अवनमन का मान अल्प होता है, तो $\frac{dy}{dx} << 1$ और उपरोक्त व्यंजक के हर (denominator) में हम इसे 1 की तुलना में छोड़ सकते हैं। इस प्रकार हमें निम्नलिखित सरल व्यंजक प्राप्त होता है:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

समीकरण (3.8) का x के सापेक्ष दो बार समाकलन करने पर (हाशिए में दी गई टिप्पणी पढ़ें) हमें मुक्त सिरे पर अवनमन δ का मान प्राप्त होता है:

$$\delta = \frac{W_1 \ell^3}{3YI_g} \qquad (3.9)$$

अर्थात् कैन्टीलीवर के मुक्त सिरे पर उत्पन्न अवनमन $\frac{W_1 \ell^3}{3YI_g}$ है।

समीकरण (3.8) का x के सापेक्ष समाकलन करने पर हमें यह व्यंजक प्राप्त होता है:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W_1}{YI_g}\left(\ell x - \frac{x^2}{2}\right) + C_1$$

जहां C_1 समाकलन अचर है।

$x = 0$ के लिए $\frac{dy}{dx} = 0$ अतः

$C_1 = 0$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{W_1}{YI_g}\left(\ell x - \frac{x^2}{2}\right)$$

दंड के मुक्त सिरे ($x = \ell$) पर $y = \delta$ है। अतः दी गई सीमाओं में दोबारा समाकलन करने पर हमें वांछित परिणाम प्राप्त होता है:

$$\int_0^{\delta} dy = \frac{W_1}{YI_g}\int_0^{\ell}\left(\ell x - \frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$\therefore \delta = \frac{W_1}{YI_g}\left(\frac{\ell^3}{2} - \frac{\ell^3}{6}\right)$$

$$= \frac{W_1 \ell^3}{3YI_g}$$

बोध प्रश्न 1 – कैन्टीलीवर में अवनमन

समीकरण (3.9) को देखकर उन कारकों के नाम बताइये जिन पर कैन्टीलीवर के मुक्त सिरे का अवनमन निर्भर करता है।

चित्र 3.2 को पुनः देखें। यदि दंड AB की लंबाई L है तो दोनों कैन्टीलीवरों (AC और BC) की लंबाई $L/2$ होगी। चूंकि प्रत्येक क्षुरधार पर प्रतिक्रिया बल $W/2$ है, इसलिए हम यह मान सकते हैं कि प्रत्येक कैन्टीलीवर (AC अथवा BC) के मुक्त सिरों पर भार $W/2$ है। तब समीकरण (3.9) में $W_1 = W/2$ और $\ell = L/2$ रख कर बिंदु C से A या B का उत्थान (elevation) या अवनमन Δ ज्ञात किया जा सकता है:

$$\Delta = \frac{\frac{W}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^3}{3YI_g}$$

$$= \frac{WL^3}{48YI_g}$$

बिंदु C से A या B का उत्थान बिंदु C के A या B से अवनमन के बराबर है। इसलिए उपरोक्त परिणाम को पुनर्व्यवस्थित करने पर हम लिखते हैं कि

$$Y = \frac{WL^3}{48\Delta I_g}$$

चौड़ाई b और मोटाई d के आयताकार अनुप्रस्थ परिच्छेद के दंड के लिए जड़त्व-आघूर्ण $I_g = bd^3/12$ है। अतः हम दंड की विमाओं के पदों में यंग के गुणांक के व्यंजक को निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं:

$$Y = \frac{WL^3}{4\Delta bd^3} \qquad (3.10)$$

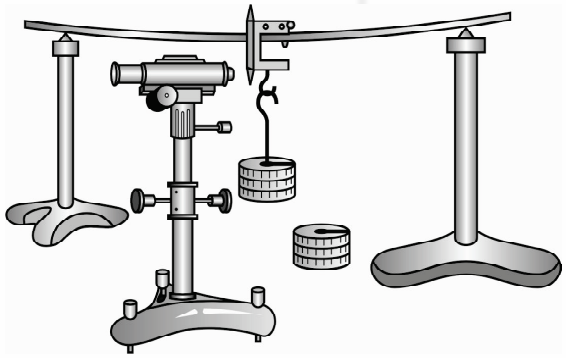
इस परिणाम से आप देख सकते हैं कि यंग के गुणांक का निर्धारण करने के लिए आपको ज्ञात भार W के लिए दंड के मध्यबिंदु में उत्पन्न अवनमन Δ का

मापन करना होगा। स्टील छड़ों के अवनमन का परिमाण बहुत कम होता है, इसलिए इसका मापन अति-परिशुद्धता से करना चाहिए। इसके लिए आप सूक्ष्मदर्शी या दूरबीन और प्रकाशिक लीवर विधियां इस्तेमाल करना सीखेंगे। अतः अब हम Δ ज्ञात करने की विधियों का वर्णन करेंगे।

3.3 सूक्ष्मदर्शी द्वारा दंड में उत्पन्न अवनमन के मापन की प्रक्रिया

सूक्ष्मदर्शी द्वारा दंड में उत्पन्न अवनमन को मापने के लिए नीचे दिए गए चरणों का अनुसरण करें:

1. दिए गए दंड को क्षुरधारों के ऊपर क्षैतिज स्थिति में इस प्रकार रखिए जैसा कि चित्र 3.7 में दिखाया गया है। ध्यान रहे कि क्षुरधारों के बाहर दंड का बराबर (परंतु छोटा) भाग निकले तथा अनुप्रस्थ परिच्छेद का छोटा हिस्सा ऊर्ध्वाधर हो।
2. दंड को ठीक मध्य में भारित करने के लिए दो क्षुरधारों के बीच एक हैंगर लटकाइए। दंड की स्थिति ज्ञात करने के लिए हैंगर के ऊपरी छोर पर मोम द्वारा (ऊर्ध्वाधर दिशा में) पिन को इस प्रकार लगाएं जैसे चित्र में दिखाया है।
3. चल-सूक्ष्मदर्शी को पिन पर फोकस कीजिए और इसके क्षैतिज क्रॉस-तार को पिन की नोक के साथ सम्पाती कीजिए। यदि आप सूक्ष्मदर्शी को पिन पर फोकस नहीं कर पाते हैं तो अपने परामर्शदाता की सहायता लीजिए।
4. प्रेक्षण लेने से पहले आप सूक्ष्मदर्शी का अल्पतमांक ज्ञात कर लें। इसके लिए सूक्ष्मदर्शी के मुख्य स्केल के लघुतम भाग का मान और वर्नियर स्केल पर भागों की संख्या ज्ञात करें। मुख्य स्केल के लघुतम अंश के मान तथा वर्नियर स्केल के लघुतम अंश के मान के अंतर से हमें इसके **अल्पतमांक** का मान प्राप्त होता है। सूक्ष्मदर्शी को पिन की नोक पर फोकसित करने और क्षैतिज क्रॉस तार से सम्पाती कर लेने पर समझ लीजिए कि आप प्रयोग करने के लिए तैयार हैं।



चित्र 3.7: सूक्ष्मदर्शी से दंड में उत्पन्न अवनमन को मापने के लिए प्रायोगिक व्यवस्था।

5. मुख्य स्केल और वर्नियर स्केल के पाठ्यांकों को पढ़िए। यह पाठ्यांक उस स्थिति के लिए है जब हैंगर पर कोई भार नहीं लटकाया गया है। इसे प्रेक्षण सारणी 3.1 में लिखिए।
6. इसके बाद, किसी चीज को बिना हिलाए हैंगर में आधा किलोग्राम का बाट रखें। क्या अब भी सूक्ष्मदर्शी के दृष्टि क्षेत्र में पिन की नोक दिखाई दे रही

है? यदि ऐसा है तो क्या पिन की नोक क्षैतिज क्रॉस-तार के सम्पाती है? हम अपेक्षा करते हैं कि नोक दंड के मध्य में अवनमन पैदा होने के कारण क्षैतिज क्रॉस-तार के सम्पाती नहीं होगी। आप पिन की नोक और क्षैतिज क्रॉस-तार के बीच अंतर देखेंगे। पिन की नोक को पुनः क्षैतिज क्रॉस-तार के सम्पाती करने के लिए सूक्ष्मदर्शी को ऊर्ध्वाधरतः खिसकाइये तथा मुख्य स्केल और वर्नियर स्केल के पाठ्यांकों को देखिए। इन्हें भी प्रेक्षण सारणी 3.1 में लिखिए।

भार को आधा किलोग्राम के समान चरणों में बढ़ाइये। प्रत्येक स्थिति में पिन को क्षैतिज क्रॉस तार के सम्पाती रखकर पाठ्यांक लीजिए।

7. अब क्रमशः धीरे-धीरे बाटों को उतारते जाइए और सूक्ष्मदर्शी के पाठ्यांकों को पुनः पढ़कर प्रेक्षण सारणी में लिखिए।

8. चरण 7 को तब तक दोहराएं जब तक हैंगर पर कोई भार न रहे। **बांटों को हैंगर पर बहुत धीरे-धीरे रखें और हटाएं।**

बोध प्रश्न 2 – प्रत्यास्थता सीमा

भार कम करते समय भी पाठ्यांक लेना क्यों ज़रूरी है?

प्रेक्षण सारणी 3.1: दंड में उत्पन्न अवनमन का सूक्ष्मदर्शी द्वारा मापन

सूक्ष्मदर्शी के मुख्य स्केल के एक लघुतम भाग का मान (x) = ...cm

वर्नियर स्केल के भागों की संख्या (n) = ...

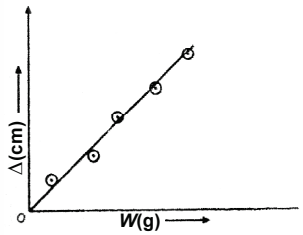
सूक्ष्मदर्शी का अल्पतमांक (x/n) = ...cm

क्र. सं.	हैंगर पर रखा भार W (g)	पिन की नोक के सूक्ष्मदर्शी के क्षैतिज क्रॉस-तार से सम्पाती होने पर सूक्ष्मदर्शी का पाठ्यांक			अवनमन Δ(cm)
		भार बढ़ते हुए (cm)	भार घटते हुए (cm)	माध्य (cm)	
1.	0				
2.	500				
3.	1,000				
4.	1,500				
5.	2,000				
6.	2,500				
7.	3,000				
8.	3,500				

इस प्रकार आपको प्रत्येक भार के लिए दो पाठ्यांक प्राप्त होंगे : एक भार बढ़ाते हुए और दूसरा भार घटाते हुए। प्रत्येक भार के लिए इन दोनों पाठ्यांकों

का माध्य परिकलित करें। प्रत्येक भार के लिए उसके संगत माध्य पाठ्यांक में से प्रारंभिक माध्य पाठ्यांक को घटाकर दंड में उत्पन्न अवनमन परिकलित करें।

भार (x-अक्ष के अनुदिश) और अवनमन (y-अक्ष के अनुदिश) का ग्राफ खींचिए। हम आशा करते हैं कि ग्राफ एक सरल रेखा होगी। जैसा कि चित्र 3.8 में दिखाया है, एक सरल रेखा इस प्रकार खींचिए कि वो अधिक से अधिक प्रेक्षण बिन्दुओं के निकट से गुजरे। किन्हीं दो दूरस्थ बिंदुओं को लेकर सरल रेखा की प्रवणता परिकलित करें। प्रवणता से आपको Δ/W का मान प्राप्त होगा।

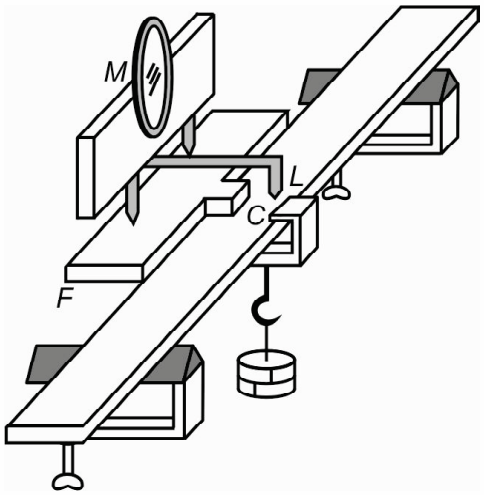


चित्र 3.8: अवनमन (Δ) और भार (W) के बीच ग्राफ।

3.4 दूरबीन और प्रकाशिक लीवर द्वारा दंड में उत्पन्न अवनमन का मापन

दूरबीन की सहायता से अवनमन को मापने के लिए आपको प्रकाशिक लीवर तथा स्केल व्यवस्था की आवश्यकता पड़ेगी। (प्रकाशिक लीवर एक समतल दर्पण है जिसे तीन टांगों वाले धातु के फ्रेम में लगाया जाता है।) उपकरण को व्यवस्थित करने के लिए निम्नलिखित चरणों का अनुसरण करें।

1. दंड को इस प्रयोग के भाग 3.3 के चरण 1 की तरह रखें।
2. ऊर्ध्वाधर पिन को हटाइए और उसके स्थान पर प्रकाशिक लीवर को इस प्रकार रखिए कि दर्पण M को सहारा देने वाली दो टांगें दंड के पीछे स्थित क्षैतिज आधार F पर टिकें और तीसरी टांग L दंड के मध्य बिंदु C पर रहे, जैसा कि चित्र 3.9 में दिखाया गया है। यदि आप दर्पण को सहारा देने वाली दो टांगों को दंड पर और तीसरी टांग को आधार पर रख दें तो क्या होगा? यदि आप ऐसा करेंगे तो इस विधि द्वारा प्राप्त अवनमन का मान दंड के मध्य बिंदु के अवनमन के बराबर नहीं होगा। यह आवश्यक है कि दर्पण इस प्रकार समायोजित हो कि वह ऊर्ध्वाधर रहे और दंड की लम्बाई के समांतर हो।

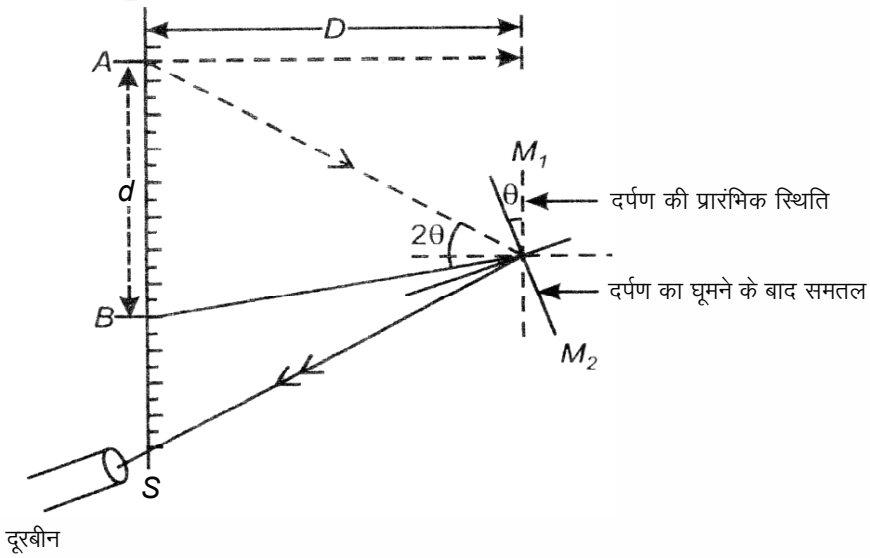


चित्र 3.9: दूरबीन और प्रकाशिक लीवर की सहायता से दंड में उत्पन्न अवनमन को मापने के लिए प्रायोगिक व्यवस्था।

जब हैंगर पर बाट रखा जाता है, दंड में अवनमन होता है। इसके परिणामस्वरूप दंड के मध्य बिंदु को स्पर्श करने वाली प्रकाशिक लीवर की टांग नीचे चली जाएगी तथा दर्पण आगे की ओर झुकेगा। इसलिए, इस प्रयोग में अवनमन जानने के लिए आपको वह कोण मापना होगा जिससे दर्पण झुकता है। इसके लिए दूरबीन और स्केल व्यवस्था की आवश्यकता होती है।

3. दर्पण के ठीक सामने लगभग एक मीटर की दूरी पर दृढ़ स्टैण्ड पर एक स्केल को ऊर्ध्वाधर स्थिति में इस तरह रखिए कि इसका प्रतिबिंब दर्पण में दिखे। दूरबीन को स्केल के पास उतनी ही ऊँचाई पर रखिए जितनी ऊँचाई पर दर्पण है। दूरबीन की नेत्रिका (eye piece) को इस प्रकार फोकस कीजिए कि उसका क्षैतिज क्रॉस-तार स्पष्ट दिखाई दे। अब दूरबीन को दर्पण में स्केल के बिंब पर फोकसित करें। स्केल के बिंब को फोकस करने के लिए आपको दर्पण को हल्का सा उसके क्षैतिज अक्ष के सापेक्ष घुमाना पड़ सकता है। यदि आप स्केल के प्रतिबिंब को स्पष्ट रूप से फोकस नहीं कर पा रहे हैं तो अपना समय व्यर्थ ना गँवाए। आप अपने परामर्शदाता से सलाह लें और इस क्रिया को स्वयं कई बार दोहराएं। जब आपको दूरबीन द्वारा दर्पण में स्केल का प्रतिबिंब स्पष्टतः दिखने लगे तब इस पर क्षैतिज क्रॉस-तार की स्थिति की पाठ्यांक पढ़कर प्रेक्षण सारणी 3.2 में लिखें।

क्षैतिज क्रॉस तार की यह स्थिति क्या दर्शाती है? चित्र 3.10 देखें। यहां M_1 समतल दर्पण की प्रारंभिक स्थिति है। इसका अर्थ यह है कि आपने जो पाठ्यांक लिया है वह स्केल पर पाठ्यांक A के संगत है।



हम जानते हैं कि जब प्रकाश की किरणें किसी समतल दर्पण पर आपतित होती हैं तथा दर्पण अपने तल में ऊर्ध्वाधर अक्ष के सापेक्ष कोण θ से घूम जाता है तो परावर्तित किरण कोण 2θ से घूम जाती है।

चित्र 3.10 : प्रकाशिक लीवर का कार्यकारी सिद्धांत।

4. अब आप हैंगर पर 500 *g* भार धीरे से रखिए। इससे दंड थोड़ा सा झुक जाएगा। मान लीजिए कि इसके परिणामस्वरूप दर्पण आगे की ओर कोण θ से झुक जाता है। इसके कारण आप समतल दर्पण से परावर्तित होने के बाद दूरबीन में स्केल का पाठ्यांक *A* के बजाय *B* देखेंगे (चित्र 3.10 देखें)। इस पाठ्यांक को भी प्रेक्षण सारणी 3.2 में लिखें।

5. हैंगर पर आधे-आधे किलोग्राम के बाट रखते जाइए। प्रत्येक भार के लिए स्केल के प्रतिबिंब को दूरबीन के क्षैतिज क्रॉस-तार से संपाती करके पढ़ें तथा पाठ्यांक प्रेक्षण सारणी में लिखते जाएं।

6. अब हैंगर से बाटों को क्रमवार हटाइए और हर बार दूरबीन के क्षैतिज क्रॉस-तार पर स्केल के प्रतिबिंब को संपाती बनाकर पाठ्यांक लें और उसे प्रेक्षण सारणी 3.2 में लिखिए। प्रत्येक भार के लिए क्रॉस-तार से प्राप्त हुए दो पाठ्यांकों (एक भार बढ़ाते हुए तथा दूसरा भार कम करते हुए) का औसत (*s*) परिकलित कीजिए। प्रत्येक भार के लिए, उसके माध्य पाठ्यांक में से प्रारंभिक माध्य पाठ्यांक (d_0) को घटा कर *d* का मान परिकलित करें।

7. यदि स्केल में पाठ्यांकों *A* और *B* के बीच की दूरी *d* और दर्पण और स्केल के बीच की दूरी *D* हो तो

$$2\theta = \frac{d}{D}$$

यदि तीसरी टांग, पिछली दो टांगों *P* और *Q* में लंबवत दूरी *x* पर हो तो दंड के अवनमन Δ को दिए हुए भार के लिए इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

$$\Delta = x\theta = \frac{xd}{2D} \qquad (3.11)$$

जैसे ही हमें *x*, *d* और *D* के मान ज्ञात हो जाते हैं, हम Δ का मान आसानी से परिकलित कर सकते हैं।

8. दर्पण और पैमाने के बीच की दूरी *D* को माप कर प्रेक्षण सारणी 3.2 में लिखें। *x* मापने के लिए प्रकाशिक लीवर को किसी कागज़ पर रखकर उसे धीरे से दबाइए जिससे उसके पैरों के निशान कागज़ पर बन जाएं। इन निशानों की सहायता से प्रकाशिक लीवर की पिछली दो टांगों को मिलाने वाली रेखा से आगे वाले पैर की लंबवत् (perpendicular) दूरी का निर्धारण कीजिए। प्रत्येक भार के लिए समीकरण (3.11) का उपयोग करके दंड का अवनमन (Δ) परिकलित कीजिए और प्रेक्षण सारणी 3.2 में लिखें।

प्रेक्षण सारणी 3.2: दूरबीन और प्रकाशिक लीवर द्वारा अवनमन का मापन

प्रकाशिक लीवर के दर्पण से स्केल की दूरी (D) = ...cm

प्रकाशिक लीवर के आगे वाले पैर से पिछली टांगों को मिलाने वाली रेखा की लंबवत् दूरी (x) = ...cm

क्र. सं.	हैंगर पर रखा भार (W) (g)	स्केल के प्रतिबिंब की दूरबीन के क्षैतिज क्रॉस-तार के संपाती स्थिति (cm)			$d=s-d_0$ (cm)	$\Delta = \frac{xd}{2D}$ (cm)
		भार बढ़ते हुए	भार घटते हुए	माध्य (s)		
1.	0			d_0=...		
2.	500					
3.	1,000					
4.	1,500					
5.	2,000					
6.	2,500					
7.	3,000					
8.	3,500					

भार (W) को x-अक्ष के अनुदिश और अवनमन Δ को y-अक्ष के अनुदिश लेकर ग्राफ खींचिए। (ग्राफ खींचने के लिए आप वही पैमाना लें जो आपने सूक्ष्मदर्शी के लिए W-Δ ग्राफ में लिया था।) इस प्रकार प्राप्त सरल रेखा की प्रवणता का परिकलन कीजिए। हम उम्मीद करते हैं कि इसका मान भाग 3.3 में प्राप्त मान के समान ही होगा।

3.5 परिशुद्धताओं की तुलना

अब आपको दोनों विधियों से यंग का गुणांक परिकलित करना होगा। इसके लिए आपको दंड की मोटाई और चौड़ाई तथा क्षुरधारों के बीच उसकी लंबाई को मापना होगा। क्षुरधारों के बीच लम्बाई मापने के लिए आप मीटर पैमाना इस्तेमाल कर सकते हैं। स्केल के भिन्न-भिन्न भागों का इस्तेमाल करके लम्बाई को कई बार मापिए और माध्य मान प्राप्त कीजिए। अपने पाठ्यांकों को प्रेक्षण सारणी 3.3(क) में लिखें।

प्रेक्षण सारणी 3.3(क): क्षुरधारों *A* तथा *B* के बीच दंड की लम्बाई *(L)*

क्र. सं.	क्षुरधार *A* के लिए मीटर पैमाने का पाठ्यांक x_1 (cm)	क्षुरधार *B* के लिए मीटर पैमाने का पाठ्यांक x_2 (cm)	लम्बाई $(x_2 - x_1)$ cm
1.			
2.			
3.			
4.			
.			
.			
.			

माध्य लम्बाई L (cm) = ...

स्क्रूगेज की सहायता से लम्बाई की दिशा में दंड की मोटाई को भिन्न-भिन्न स्थानों पर मापिए। प्रयोग 1 में बनाई प्रेक्षण सारणी 1.2 के अनुसार आप स्वयं प्रेक्षण सारणी 3.3(ख) बनाकर औसत मोटाई परिकलित कीजिए।

प्रेक्षण सारणी 3.3(ख): स्क्रू गेज द्वारा दंड की मोटाई (*d*) का मापन

स्क्रू गेज का अल्पतमांक = ...cm

शून्यांक त्रुटि (अगर कोई हो) उचित बीजीय चिह्न के साथ = ...cm

माध्य मोटाई = ...cm $\pm$ .....cm

वर्नियर कैलिपर्स से विभिन्न स्थानों पर दंड की चौड़ाई मापने के लिए कम से कम चार पाठ्यांक लीजिए। प्रयोग 1 की प्रेक्षण सारणी 1.1 के अनुसार प्रेक्षण सारणी 3.3(ग) बनाकर पाठ्यांकों को लिखिए। चौड़ाई का माध्य मान परिकलित कीजिए।

प्रेक्षण सारणी 3.3(ग): वर्नियर कैलिपर्स द्वारा दंड की चौड़ाई (*b*) का मापन

वर्नियर कैलिपर्स का अल्पतमांक = ...cm

शून्यांक त्रुटि (अगर कोई हो) उचित बीजीय चिह्न के साथ = ...cm

माध्य चौड़ाई = ...cm ± .....cm

बोध प्रश्न 3 – लघु लंबाइयों का मापन

मान लें कि एक अच्छा स्क्रू गेज या वर्नियर कैलिपर्स *d* और *b* को मापने के लिए आपकी प्रयोगशाला में उपलब्ध नहीं है। आप कौन से उपकरण – मीटर स्केल, ग्राफ पेपर, सूक्ष्मदर्शी या दूरबीन – का प्रयोग करेंगे? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

इस प्रकार *L*, *b*, *d* के मान तथा सूक्ष्मदर्शी और दूरबीन द्वारा प्राप्त सरल रेखाओं की प्रवणताओं के मान जानकर आप समीकरण (3.10) की सहायता से दंड के यंग का गुणांक परिकलित कर सकते हैं:

$$Y = \frac{L^3}{4bd^3} \times \frac{1}{\text{प्रवणता}} = \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ dynes cm}^{-2}$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ N m}^{-2}$$

परिणाम : सूक्ष्मदर्शी द्वारा प्राप्त किया गया दंड का यंग का गुणांक = ... N m^{-2}

परिणाम : दूरबीन और प्रकाशिक लीवर द्वारा प्राप्त दंड का यंग का गुणांक = ... N m^{-2}

इन दो परिणामों में से कौन-सा परिणाम मानक (standard) मान के निकट है? सैद्धांतिक रूप में, सूक्ष्मदर्शी की सहायता से अवनमन का जिस परिशुद्धता से मापन किया जाता है, वह सूक्ष्मदर्शी के अल्पतमांक के बराबर होता है। मान लें कि सूक्ष्मदर्शी का अल्पतमांक 0.001 cm है।

प्रकाशिक लीवर व्यवस्था के लिए, ऊर्ध्वाधर स्केल का अल्पतमांक 0.1 cm है। इसे x/2D से गुणा किया जाता है (प्रेक्षण सारणी 3.2 देखें)।

यदि D = 1m = 100 cm और x = 3 हों, तो $\frac{x}{2D} = \frac{3}{200} = 0.015$ । अतः प्रकाशिक लीवर व्यवस्था की सहायता से अवनमन के मापन का अल्पतमांक = 0.1 × 0.015 = 0.0015 cm होगा।

इससे यह पता चलता है कि सूक्ष्मदर्शी द्वारा अवनमन का मापन तथा Y का मान प्रकाशिक लीवर की तुलना में अधिक परिशुद्ध होता है। किन्तु प्रकाशिक लीवर विधि द्वारा सूक्ष्मदर्शी विधि से अधिक परिशुद्ध परिणाम प्राप्त किया जा सकता है। इसके लिए आपको यह सोचना होगा कि किस प्रकार प्रकाशिक लीवर व्यवस्था की सहायता से अवनमन के मापन का अल्पतमांक कम किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, आप मिलीमीटर पैमाने के स्थान पर अर्ध-मिलीमीटर पैमाने का उपयोग कर सकते हैं। प्रकाशिक लीवर की सहायता से अवनमन के मापन का अल्पतमांक (i) उसकी दो टांगों को जोड़ने वाली रेखा से तीसरे पैर की लंबवत् दूरी x तथा (ii) दर्पण और पैमाने के बीच की दूरी D पर भी निर्भर करता है। जब तक आप किसी दूसरे प्रकाशिक लीवर का उपयोग नहीं करते, x को समायोजित करना संभव नहीं है। लेकिन अगर हम उच्चशक्ति की दूरबीन का उपयोग करें, जिससे कि D को अधिक से अधिक बढ़ाया जा सके, जैसे कि 3 m तक, तब प्रकाशिक लीवर विधि सूक्ष्मदर्शी विधि से अधिक परिशुद्ध परिणाम दे सकती है।

3.6 शब्दावली

Accuracy	परिशुद्धता
Anticlockwise	वामावर्त
Beam	दंड
Bending	बंकन
Cantilever	कैन्टीलीवर
Centre of curvature	वक्रता केन्द्र
Clockwise	दक्षिणावर्त
Compression	संपीडन
Couple	बल युग्म
Cross-section	अनुप्रस्थ परिच्छेद
Cross-wire	क्रॉस-तार
Deformation	विरूपण
Deforming Force	विरूपक बल
Depression	अवनमन

Elasticity	प्रत्यास्थता
Equilibrium	साम्यावस्था
Eye piece	नेत्रिका
Filament	तंतु
Focus	फोकस / फोकसन
Free end	मुक्त सिरा
Integration	समाकलन
Inverted	प्रतिलोमित
Knife-edge	क्षुरधार
Longitudinal	अनुदैर्घ्य
Least count	अल्पतमांक
Lamp and scale arrangement	लैंप-स्केल व्यवस्था
Microscope	सूक्ष्मदर्शी
Moment	आघूर्ण
Moment of inertia	जड़त्व-आघूर्ण
Neutral surface	उदासीन सतह
Optical lever	प्रकाशिक लीवर
Radius of curvature	वक्रता त्रिज्या
Radius of gyration	परिभ्रमण त्रिज्या
Restoring force	प्रत्यानयन बल
Strain	विकृति
Stress	प्रतिबल
Theoretical	सैद्धांतिक
Young's modulus	यंग का गुणांक
Zero error	शून्यांक त्रुटि

प्रयोग 4

मैक्सवेल सुई द्वारा तार के दृढ़ता गुणांक का निर्धारण

प्रयोग की रूपरेखा

4.1 प्रस्तावना

अपेक्षित कौशल

4.2 मैक्सवेल सुई उपकरण से परिचय

4.3 दृढ़ता गुणांक का सिद्धांत

4.4 मैक्सवेल सुई उपकरण के साथ प्रयोग

4.5 शब्दावली

4.1 प्रस्तावना

पिछले प्रयोग में आप दंड बंकन विधि द्वारा स्टील के यंग के गुणांक का निर्धारण करना सीख चुके हैं। जब एक दंड के मध्य में भार लटकाया जाता है तो भारित बिन्दु पर अवनमन (depression) को चल-सूक्ष्मदर्शी या दूरबीन और प्रकाशिक लीवर व्यवस्था द्वारा मापा जा सकता है। आपको याद होगा कि यह जानकारी इमारतों तथा पुलों के निर्माण के लिए अत्यन्त आवश्यक है। इस प्रयोग में आप मैक्सवेल सुई उपकरण का उपयोग करके तार का **दृढ़ता गुणांक** प्राप्त करेंगे। जब आप अपने अध्ययन केन्द्र पर अपनी भौतिकी प्रयोगशाला में जाएं तो ऐसे उपकरणों के बारे में जाने जिनमें दृढ़ता गुणांक भौतिक राशि के निर्धारण में महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। आप मरोड़ी दोलक, जिसका इस्तेमाल तार के दृढ़ता गुणांक के निर्धारण के लिए किया जाता है, तथा प्रत्यास्थतांकों के निर्धारण के लिए प्रयुक्त किए जाने वाले सर्ल्स उपकरण अवश्य देखें। आप प्रक्षेप धारामापी (ballistic galvanometer), जिसका उपयोग न्यून अवमंदित गति के अध्ययन के लिए किया जाता है, के बारे में भी जानने की कोशिश करें।

अपेक्षित कौशल

इस प्रयोग को करने के बाद आप :

- मैक्सवेल सुई उपकरण सेट कर सकेंगे;
- विभिन्न द्रव्यमान वितरणों में इसके विन्यास कर सकेंगे;
- स्क्रू गेज की सहायता से तार का व्यास माप सकेंगे;
- द्रव्यमान मापने के लिए भौतिक तुला का उपयोग कर सकेंगे; और
- आवर्ती दोलक के आवर्तकाल के पाठ्यांक ले सकेंगे।

मैक्सवेल सुई के साथ दृढ़ता गुणांक मापने के लिए आपको निम्न उपकरणों की आवश्यकता होगी :

आवश्यक उपकरण

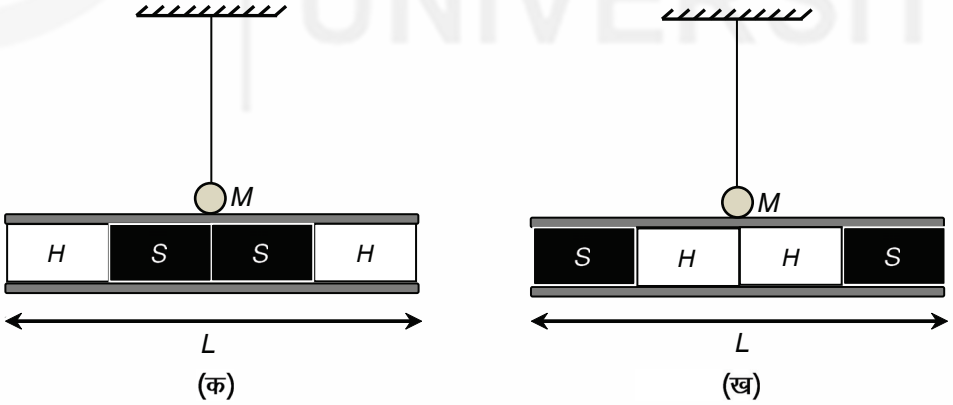
मैक्सवेल की सुई, एक लम्बा पतला तार जिसका दृढ़ता गुणांक निर्धारित करना है, मीटर पैमाना, विराम घड़ी, भौतिक तुला, बाट पेटी, स्क्रू गेज, स्टैंड में ऊर्ध्वाधरतः लगी बुनाई वाली सलाई तथा दूरबीन।

मापन विधि के बारे में जानने से पूर्व हम इस प्रयोग के साथ जुड़े हुए सिद्धांत की चर्चा करेंगे।

4.2 मैक्सवेल सुई उपकरण से परिचय

इस प्रयोग में दृढ़ता गुणांक प्राप्त करने के लिए मैक्सवेल सुई उपकरण का उपयोग किया जा रहा है। यह वस्तुतः गतिक विधि है, जिसमें विभिन्न विन्यासों में सुई का आवर्तकाल मापा जाता है।

चित्र 4.1 को देखें। आप पाएंगे कि मैक्सवेल की सुई लम्बाई L वाली पीतल की एक खोखली नली तथा इसके केन्द्र पर स्थित एक पतला तार है। इस तार के दूसरे सिरे को दृढ़ आलंब से क्लैम्प किया जाता है। नली में समान लम्बाई (= $L/4$) के चार बेलनाकार पिंड रखे होते हैं। दो खोखले बेलन (H, H) बराबर द्रव्यमान m_1 के हैं तथा दूसरे दो ठोस बेलनों (S, S) के द्रव्यमान $m_2 > m_1$ हैं। एक समतल दर्पण M सुई के ऊपर मध्य में जुड़ा होता है। प्रायः बुनाई करने वाली सलाई को ऊर्ध्वाधर रख कर इसके प्रतिबिंब को दर्पण में उचित ऊँचाई/स्थिति में लगी दूरबीन के माध्यम से देखा जा सकता है। आपको मैक्सवेल सुई द्वारा पूरे किए गए दोलनों का समय ज्ञात करने के लिए विराम घड़ी तथा तार की त्रिज्या ज्ञात करने के लिए स्क्रू गेज की आवश्यकता होगी।



चित्र 4.1: मैक्सवेल सुई उपकरण

मापन की विधि आरंभ करने से पूर्व आप इस प्रयोग का सिद्धांत समझ लें।

4.3 दृढ़ता गुणांक का सिद्धांत

हम जानते हैं कि बल लगाने पर सभी पिंड विरूपित (deform) हो जाते हैं। अनुप्रयुक्त बल (applied force) की दिशा के आधार पर हम विभिन्न प्रत्यास्थतांक परिभाषित करते हैं।

उदाहरणतया, जब लगाए गए बल का मान प्रत्यास्थता सीमा (elastic limit) में होता है तो पिंड विरूपक बल (deforming force) के हटने पर उसमें उत्पन्न प्रत्यानयन बल (restoring force) के कारण अपनी मूल अवस्था में लौट आता है। यंग का गुणांक, *Y*, अनुप्रयुक्त बल के प्रभाव से लंबाई में होने वाले परिवर्तन को अभिलक्षित करता है। इसे प्रतिबल और अनुदैर्घ्य विकृति (longitudinal strain) के अनुपात द्वारा परिभाषित किया जाता है।

जब अनुप्रयुक्त बल अचर आयतन पर पिंड के आकार में परिवर्तन उत्पन्न करता है तो विकृति को अपरूपण कोण (angle of shear) द्वारा अभिलक्षित किया जाता है। ऐसी स्थिति में प्रतिबल और अपरूपण विकृति (shearing strain) का अनुपात **दृढ़ता गुणांक** या **अपरूपण गुणांक** परिभाषित करता है। हम तार के दृढ़ता गुणांक को मालूम करने के लिए मैक्सवेल की सुई का उपयोग करेंगे। इसके लिए हम बेलनों के स्थानों को बदल कर सुई में द्रव्यमान वितरण (mass distribution) के विभिन्न विन्यासों का उपयोग करेंगे।

चित्र 4.1क में दिखाए गए विन्यास को पुनः देखें। ठोस बेलनों को नली में आंतरिक स्थानों पर तथा खोखले बेलनों को बाहरी स्थानों पर रखा गया है। जब तार को ऐंट कर छोड़ा जाता है, तंत्र तार को घूर्णन अक्ष मानकर मरोड़ी दोलन करने लगता है। मैक्सवेल सुई की गति सरल आवर्ती होगी तथा इसके आवर्त काल का व्यंजक निम्नलिखित होगा :

$$T_1 = 2\pi\sqrt{I_1 / C} \qquad (4.1)$$

जहां I_1, घूर्णन अक्ष के सापेक्ष मैक्सवेल सुई का जड़त्व-आघूर्ण (moment of inertia) है तथा C तार का मरोड़ी प्रतिक्रिया (torisional reaction) के कारण उत्पन्न प्रति-एकक मरोड़ प्रत्यानयन बल-युग्म है।

अब ठोस और खोखले बेलनों का इस प्रकार विनिमय किया जाता है कि ठोस बेलन बाहरी और खोखले बेलन आन्तरिक स्थिति में आ जाएं जैसा कि चित्र 4.1ख में दिखाया है। यदि मैक्सवेल सुई को बदले विन्यास में पुनः दोलित किया जाता है तो अपेक्षित है कि आवर्त काल पहले से भिन्न होगा। क्या आप इसका कारण जानते हैं? इसका कारण है कि जड़त्व-आघूर्ण (MI) अब पिछली स्थिति से भिन्न होगा क्योंकि घूर्णन अक्ष के सापेक्ष द्रव्यमान वितरण (mass distribution) बदला गया है। यदि इस स्थिति में MI को प्रतीक I_2 से निर्दिष्ट करें और मैक्सवेल सुई को पहले की तरह दोलित करें तो नए आवर्तकाल का व्यंजक निम्नवत् होगा :

$$T_2 = 2\pi\sqrt{I_2 / C} \qquad (4.2)$$

समीकरण (4.1) तथा (4.2) का वर्ग कर परिणामी व्यंजकों को संयोजित करने पर हम लिख सकते हैं कि

$$T_2^2 - T_1^2 = \frac{4\pi^2}{C}(I_2 - I_1)$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{4\pi^2(I_2 - I_1)}{T_2^2 - T_1^2} \qquad (4.3)$$

हम प्रति-एकक मरोड़ प्रत्यानयन बल-युग्म को दृढ़ता गुणांक के पदों में व्यक्त कर सकते हैं। इसके लिए हम ऐसी स्थिति पर विचार करते हैं जिसमें तार को उसकी लंबाई के

अपनी + 2 कक्षाओं की भौतिकी से आपको याद होगा कि

$$\text{प्रत्यास्थता} = \frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}}$$

पिंड के अन्दर प्रति इकाई क्षेत्रफल पर उत्पन्न प्रत्यानयन बल को प्रतिबल कहते हैं तथा पिंड की लंबाई, आयतन या आकार में होने वाले भिन्नात्मक परिवर्तन को विकृति कहते हैं। संगत विकृतियों को यंग के गुणांक, आयतन गुणांक तथा दृढ़ता गुणांक द्वारा अभिलक्षित किया जाता है।

लम्बवत् समतल में मरोड़ा जाता है। प्रत्यास्थता के कारण तार में उसी मान का परन्तु विपरीत दिशा में बल-आघूर्ण उत्पन्न हो जाता है। साम्यावस्था स्थिति में व्यावर्ती बल-युग्म (twisting couple) और प्रत्यानयन बल-युग्म समान परन्तु विपरीत दिशाओं में होते हैं। प्रति-एकक रेडियन बल-युग्म का व्यंजक नीचे दिया गया है :

$$C = \frac{\pi n r^4}{2\ell} \tag{4.4}$$

जहां n तार का दृढ़ता गुणांक; r तार की त्रिज्या तथा ℓ इसकी लंबाई है।

समीकरण (4.3) और (4.4) को संयोजित कर हम लिख सकते हैं कि

$$n = \frac{8\pi\ell (I_2 - I_1)}{(T_2^2 - T_1^2) r^4} \tag{4.5}$$

इस परिणाम से आप देख सकते हैं कि n निर्धारित करने के लिए हमें I_1 और I_2 ज्ञात होने चाहिए। आमतौर पर किसी पिंड के जड़त्व-आघूर्ण को परिशुद्धतः निर्धारित करना सरल नहीं होता तथा अंतर-पद $(I_2 - I_1)$ के कारण त्रुटियां भी आवर्धित हो जाती है। परन्तु इस विधि में हम $(I_2 - I_1)$ अन्तर को बेलनों के द्रव्यमानों के अन्तर $(m_2 - m_1)$ तथा मैक्सवेल सुई की लंबाई के पदों में व्यक्त कर सकते हैं। इसे समझने के लिए ध्यान दें कि आन्तरिक एवं बाह्य बेलनों के संहति-केन्द्र (centre of mass) दोलन अक्ष से क्रमशः $L/8$ तथा $3L/8$ दूरी पर हैं। पहले विन्यास, जिसमें ठोस बेलन अन्दर की ओर हैं, से दूसरे विन्यास में अन्तर केवल यह है कि अब ठोस बेलन बाहर की ओर हैं। इसका अभिप्राय यह है कि द्रव्यमान $(m_2 - m_1)$ दोलन अक्ष के सापेक्ष दोनों ओर $L/8$ दूरी से $3L/8$ दूरी पर स्थानांतरित हो गया है। ऐसा करने के कारण मैक्सवेल सुई का जड़त्व-आघूर्ण परिवर्तित हो जाता है। समानान्तर अक्ष सिद्धांत (हाशिया देखें) का उपयोग कर हम लिख सकते हैं कि

$$I_2 = I_1 + 2(m_2 - m_1)\left[\left(\frac{3L}{8}\right)^2 - \left(\frac{L}{8}\right)^2\right] \tag{4.6}$$

गौर करें कि हमने द्रव्यमान वाले पद को 2 से गुणा किया है। इसका कारण दोलन अक्ष के दोनों ओर होने वाला परिवर्तन है। समीकरण (4.6) को सरलीकृत कर हम लिख सकते हैं कि

$$I_2 - I_1 = 2(m_2 - m_1) \times \left(\frac{9L^2}{64} - \frac{L^2}{64}\right) = (m_2 - m_1)\frac{L^2}{4} \tag{4.7}$$

समीकरण (4.5) और (4.7) को समायोजित करने पर हम लिख सकते हैं कि

$$n = \frac{2\pi\ell (m_2 - m_1) L^2}{(T_2^2 - T_1^2) r^4} \tag{4.8}$$

समीकरण (4.8) दृढ़ता गुणांक को ℓ, m_1, m_2, L, T_1, T_2 तथा r के पदों में व्यक्त करता है। इन सभी भौतिक राशियों को परिशुद्धतापूर्वक ज्ञात किया जा सकता है तथा हम कह सकते हैं कि मैक्सवेल सुई विधि दृढ़ता गुणांक निर्धारित करने के लिए अत्यन्त परिष्कृत है। ध्यान रहे कि

समानान्तर अक्ष सिद्धांत के अनुसार पिंड का किसी दोलन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व-आघूर्ण इस के संहति केन्द्र से गुजरते समानान्तर अक्ष के सापेक्ष उसके जड़त्व-आघूर्ण तथा उसके द्रव्यमान एवं दो अक्षों के बीच की दूरी के वर्ग का योग होता है। आपने यह सिद्धांत बारहवीं कक्षा में सीखा होगा।

1. इस व्यंजक में विभिन्न भौतिक राशियों के घात भिन्न-भिन्न हैं। उदाहरणतया, तार की त्रिज्या का घात चार है अतः इसके मापन में थोड़ी सी भी त्रुटि परिणाम को अत्यधिक प्रभावित कर सकती है। इसलिए इसके मापन में आपको अत्यन्त सजग रहना चाहिए। हमारी सलाह है कि आप इसके लिए स्क्रू गेज का उपयोग करें।
2. दृढ़ता गुणांक के व्यंजक में आवर्तकालों के वर्गों का अन्तर हर में मौजूद है। चूंकि यह काफी न्यून राशि होगी, इसलिए T_1 तथा T_2 के मान प्राप्त करने हेतु कम से कम 20 दोलनों के लिए समय ज्ञात करें।

4.4 मैक्सवेल सुई उपकरण के साथ प्रयोग

मैक्सवेल सुई की सहायता से दृढ़ता गुणांक निर्धारित करने के लिए आप निम्नलिखित चरणों का अनुसरण करें :

1. जिस पदार्थ का गुणांक ज्ञात करना है उस पदार्थ की एक (लगभग 1 m) लम्बी निकुंच-मुक्त (kink free) तार लें। (यदि तार में निकुंच हों तो इसे पूर्णतयः दूर करना चाहिए। एक आसान तरीका ये होगा कि आप तार को रूमाल की कई पर्तों के बीच रखकर उसकी लम्बाई के अनुदिश खीचें। यदि आप निकुंच दूर करने में सफल हो जाते हैं तो बहुत अच्छा, वरना अपने परामर्शदाता से कह कर इसे बदलवा लें।)
2. तार को एक दृढ़ आलम्ब से निलंबित करें तथा इसके दूसरे छोर को खोखली मैक्सवेल सुई के मध्य में बांध दें। आप ध्यान रखें कि सुई क्षैतिज है तथा दर्पण आपकी ओर है।
3. बुनाई वाली सलाई दर्पण के समक्ष इस प्रकार रखें कि इसका शीर्ष दर्पण के मध्य में हो। (यह दोलनों की संख्या गिनने में संकेतक का कार्य करेगा।) अब लगभग 1.5 m की दूरी से एक दूरबीन दर्पण में बने शीर्ष के प्रतिबिंब पर फोकस करें तथा यदि कोई लंबन हो तो दूर करें।
4. भौतिक तुला का उपयोग करके दोनों खोखले और दोनों ठोस बेलनों के द्रव्यमान अलग-अलग नापें। प्रेक्षण सारणी 4.1 में m_1 के तहत खोखले बेलनों के तथा m_2 के तहत ठोस बेलनों के द्रव्यमान दर्ज करें। m_1 और m_2 के माध्य मान परिकलित करें।
5. ठोस बेलनों *SS* को सुई के मध्य में तथा खोखले बेलनों *HH* को बाहरी ओर रखें। आप ध्यान रखें कि
   i) मैक्सवेल सुई क्षैतिज है, तथा
   ii) नली से बेलनों का कोई भाग बाहर नहीं निकले।

   (यदि मैक्सवेल सुई क्षैतिज नहीं होगी तो इसकी ऊपर-नीचे की गति के कारण अशुद्ध परिणाम प्राप्त होगा।)
6. मैक्सवेल सुई के एक सिरे को क्षैतिज समतल में पीछे की ओर धकेल कर छोड़ दें। सुई मरोड़ी दोलन करना शुरू कर देगी।
7. जब गति स्थायी हो जाए, यानि ना तो ऊपर-नीचे गति है और ना ही पार्श्व गति, तो 20 दोलनों में लगा समय (t_1) ज्ञात कीजिए। इसके लिए आप विराम-घड़ी को उस वक्त शुरू करें जब बुनने की सलाई का प्रतिबिंब दूरबीन की क्रॉस तार की बायीं या

दायीं ओर जाते हुए दिखाई दे, और 20 दोलनों के लिए लगा समय मापें। (आपने विराम घड़ी का प्रयोग +2 कक्षाओं में सीखा होगा) अपने पाठ्यांकों को प्रेक्षण सारणी 4.1(क) में लिखें। प्रेक्षण लेते समय आप प्रयोगशाला में पंखा बंद करवा दें।

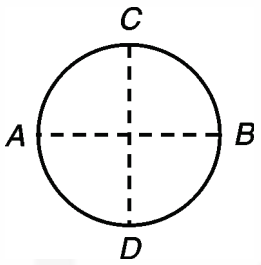
8. चरण 6 और 7 को कम से कम पांच बार दोहराएं।

9. अब खोखले तथा ठोस बेलनों को विनियमित करके चरण 6 से 8 में बताए गए विधि को दोहराएं और 20 दोलनों का आवर्तकाल (t_2) नापकर प्रेक्षण सारणी 4.1(क) में दर्ज करें।

10. मैक्सवेल नली (L) तथा तार (ℓ) की लम्बाई मापें और प्रेक्षण सारणी 4.1 में लिखें।

11. चूंकि दृढ़ता गुणांक के व्यंजक में तार की त्रिज्या का चतुर्थ घात है और इसका मान सूक्ष्म है, आप इसके व्यास को अति परिशुद्धता से मापें। तार की लम्बाई के अनुदिश कम से कम पांच अलग-अलग जगहों पर स्क्रू गेज की सहायता से दो लम्बवत् दिशाओं, AB तथा CD में मापें (चित्र 4.2)। अपने पाठ्यांकों को प्रेक्षण सारणी 4.1(ख) में लिखें। इससे आपको तार के परिच्छेद में असमांगता (non-uniformity) के प्रभाव को कम करने में सहायता मिलेगी।

12. समीकरण (4.8) की सहायता से दृढ़ता गुणांक परिकलित करें।



चित्र 4.2: तार का परिच्छेद

प्रेक्षण सारणी 4.1

तार की लम्बाई, ℓ = ... cm

मैक्सवेल नली की लम्बाई, L = ... cm

खोखले बेलनों का माध्य द्रव्यमान, $m_1 = \frac{..... + ...}{2} = ... \text{ g}$

ठोस बेलनों का माध्य द्रव्यमान, $m_2 = \frac{..... + ...}{2} = ... \text{ g}$

(क) आवर्तकालों का निर्धारण

दोलनों की संख्या, $n = 20$

विराम घड़ी का अल्पतमांक = ... s

क्रम सं.	n दोलनों का आवर्तकाल t_1 (s)	n दोलनों का आवर्तकाल t_2(s)	$\frac{t_1}{n} = T_1$(s)	$\frac{t_2}{n} = T_2$(s)
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

T_1 का माध्य मान = ... s

T_2 का माध्य मान = ... s

(ख) तार की त्रिज्या का निर्धारण

स्क्रू गेज का अल्पतमांक = ... cm

क्रम सं.	व्यास (cm)		त्रिज्या (cm)	
	AB के अनुदिश	***CD*** के अनुदिश	***AB*** के अनुदिश	***CD*** के अनुदिश
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

AB के अनुदिश माध्य त्रिज्या r_1 = ... cm

CD के अनुदिश माध्य त्रिज्या r_2 = ... cm

माध्य मान, $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$ cm

परिकलन

समीकरण (4.8) से दृढ़ता गुणांक परिकलित करें।

$$n = \frac{2\pi\ell(m_2 - m_1)L^2}{(T_2^2 - T_1^2)r^4}$$

परिणाम : दिए गए तार का दृढ़ता गुणांक = ... $\times 10^{11}$ dyne cm^{-2}.

4.5 शब्दावली

Angle of shear	अपरूपण कोण
Centre of mass	संहति-केंद्र
Deform	विरूपित
Depression	अवनमन
Elastic constant	प्रत्यास्थतांक
Elasticity	प्रत्यास्थता
Kink	निकुंच

Longitudinal	अनुदैर्घ्य
Modulus of rigidity	दृढ़ता गुणांक
Moment of inertia	जड़त्व-आघूर्ण
Restoring force	प्रत्यानयन बल
Shear modulus	अपरूपण गुणांक
Shear	अपरूपण
Strain	विकृति
Stress	प्रतिबल
Torsional reaction	मरोड़ी प्रतिक्रिया
Twisting couple	व्यावर्ती बल-युग्म

ignou THE PEOPLE'S UNIVERSITY

प्रयोग 5

सर्ल्स की विधि द्वारा तार के प्रत्यास्थतांकों का निर्धारण

प्रयोग की रूपरेखा

5.1 प्रस्तावना

अपेक्षित कौशल

5.2 सर्ल्स उपकरण से परिचय

5.3 प्रत्यास्थतांकों का सिद्धांत

5.4 सर्ल्स उपकरण के साथ मापन

5.5 परिकलन

5.6 शब्दावली

5.1 प्रस्तावना

इस प्रयोग से पूर्व आप यंग का गुणांक (*Y*) तथा दृढ़ता गुणांक (*n*) क्रमशः दंड बंकन विधि तथा मैक्सवेल सुई द्वारा निर्धारित करना सीख चुके हैं। दो अन्य प्रत्यास्थतांक (elastic constants) हैं : आयतन प्रत्यास्थता गुणांक (*K*) (bulk modulus) तथा प्वासों अनुपात (σ) (Poisson ratio) अब आप पूछ सकते हैं : क्या हम इन सभी प्रत्यास्थतांकों को एक ही प्रयोग से निर्धारित कर सकते हैं? इस प्रश्न का उत्तर सकारात्मक है। भौतिकी प्रयोगशाला में सर्ल्स उपकरण द्वारा *Y*, *n*, σ और *K* ज्ञात किए जा सकते हैं। इस प्रयोग में आप इसका प्रयोग करके प्रत्यास्थतांक प्राप्त करना सीखेंगे।

प्रत्यास्थता सीमा के भीतर, प्रतिबल तथा आयतन विकृति के अनुपात को **आयतन प्रत्यास्थता गुणांक** कहते हैं : $K = \dfrac{\text{प्रतिबल}}{\text{आयतन विकृति}} = \dfrac{F / A}{\Delta V / V}$

प्वासों अनुपात को पार्श्विक विकृति (lateral strain) तथा रैखिक (linear) या स्पर्शरेखीय (tangential) विकृति के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है। इसे प्रतीक σ द्वारा निरूपित किया जाता है। इसका मान प्रायः 0.2 और 0.4 के बीच में रहता है तथा इसकी इकाई नहीं होती।

अपेक्षित कौशल

इस प्रयोग को करने के बाद आप :

- सर्ल्स उपकरण के घटकों की सूची बना सकेंगे;
- सर्ल्स उपकरण को जोड़ सकेंगे;
- तंत्र (system) का व्यवरूद्ध (constrained) स्थिति में व्यवस्थापन करके इसे दोलन विधा में ला सकेंगे और यंग के गुणांक का मान प्राप्त कर सकेंगे;

- ❖ दृढ़ता गुणांक नापने के लिए तंत्र का आवश्यक व्यवस्थापन कर सकेंगे;
- ❖ यंग के गुणांक तथा दृढ़ता गुणांक के मानों से प्वासों अनुपात प्राप्त कर सकेंगे; और
- ❖ यंग के गुणांक तथा प्वासों अनुपात के प्राप्त मानों से आयतन प्रत्यास्थता गुणांक परिकलित कर सकेंगे।

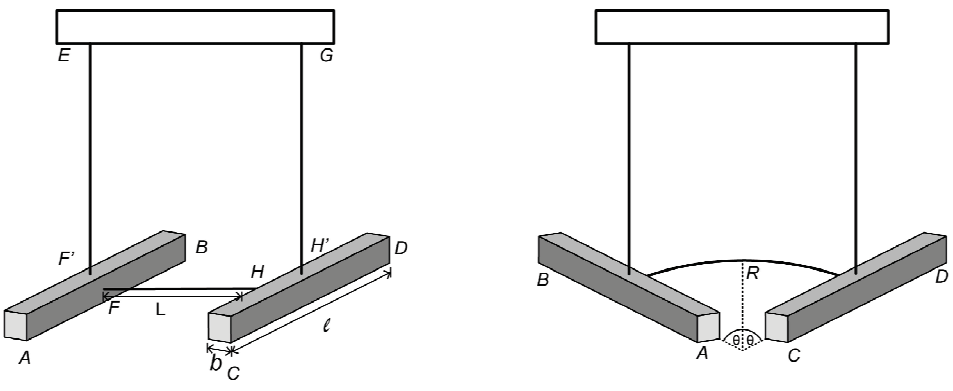
अब हम इस प्रयोग में प्रयुक्त होने वाले उपकरणों की सूची दे रहे हैं।

आवश्यक उपकरण

गोल (या वर्ग) परिच्छेद के दो सर्वसम छड़/दंड जिन्हें लटकाया जा सकता है, लगभग 30 cm लम्बाई का पतला तार, विराम घड़ी, स्क्रू गेज, वर्नियर कैलिपर्स, अवितान्य डोरी (inextensible thread), मीटर पैमाना, बाट पेटी तथा भौतिक तुला।

5.2 सर्ल्स उपकरण से परिचय

चित्र 5.1(क) देखें। इसमें दो सर्वसम छड़ *AB* और *CD* को उनके मध्य बिन्दुओं पर एक लम्बाई *L* वाले तार *FH* से जोड़ा गया है। हमें इस तार के पदार्थ के प्रत्यास्थतांक निर्धारित करने हैं। इस तंत्र को दो समांतर मरोड़ी रहित ऊर्ध्वाधर अवितान्य डोरियों *EF* और *GH* की सहायता से एक दृढ़ आधार से क्षैतिजतः इस प्रकार निलंबित किया जाता है कि जब तार सीधा है तथा तंत्र साम्यावस्था में है तब समतल *ABCD* में छड़ एक दूसरे के समान्तर होगे। डोरियों को छड़ों के मध्य में छोटे सूच्चाकार छिद्रों *F'* और *H'* में बांधा जाता है। छड़ों को समान कोण (θ) से विपरीत दिशाओं में क्षैतिज समतल में घुमाएं। इसके लिए आप *A* और *C* छोरों को एक दूसरे की ओर खींचें, जैसा चित्र 5.1(ख) में दिखाया गया है। इस व्यवरूद्ध स्थिति में तार *FH* वृत्ताकार चाप में बंकित (bend) हो जाता है। जैसे ही *A* और *C* को निर्मुक्त किया जाता है, छड़ मरोड़ी दोलन करने लगते हैं। इन दोलनों के आवर्तकाल को नाप कर हम तार के प्रत्यास्थतांकों को मालूम कर सकते हैं। अब हम इन मापनों का संनियमन करने वाले सिद्धांत की चर्चा करते हैं।



(क) (ख)

चित्र 5.1: प्रत्यास्थतांको को निर्धारित करने के लिए सर्ल्स उपकरणः (क) साम्यावस्था स्थिति; तथा (ख) तात्क्षणिक व्यवरूद्ध विन्यास।

5.3 प्रत्यास्थतांकों का सिद्धांत

जब हम छड़ों को दोलन देते हैं तब आप देखेंगे कि छड़ों के माध्य बिन्दु लगभग विरामावस्था में रहते हैं। लेकिन यदि दोलनों का आयाम लघु हो तो चाप लगभग सरल रेखा से मिलता जुलता रहेगा। इसका अर्थ है कि डोरियों के आधार के निचले सिरों F और H के बीच दूरी लगभग अचर रहती है। इसका तात्पर्य है कि छड़ों/दंडों के दोलनों के दौरान डोरियां ऊर्ध्वाधर रहती हैं। इससे हम कह सकते हैं कि लघु दोलन सन्निकटन में डोरियों के तनाव बल का कोई क्षैतिज घटक तार पर क्रियाशील नहीं है।

ध्यान दें कि छड़ों के मुकाबले में तार का द्रव्यमान नगण्य है तथा छड़ों के मध्य बिन्दु विरामावस्था में रहते हैं, यानि क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर गति विद्यमान नही है। इसलिए इन छड़ों पर तार का प्रभाव बल-युग्म (couple) के रूप में दिखाई पड़ता है। इस बल-युग्म का आघूर्ण तार में हर जगह समान होता है तथा तार एक गोल चाप के रूप में बंकित हो जाता है।

यदि चाप की त्रिज्या R और प्रत्येक छड़ का संगत साम्यावस्था स्थिति से विक्षेप कोण (angle of deflection) θ हो तो हम लिख सकते हैं कि

$$L = R2\theta \qquad (5.1\text{क})$$

जहां L तार की लम्बाई है तथा 2θ तार द्वारा वृत्ताकार चाप के वक्रता केन्द्र पर बनाया गया कोण है।

समीकरण (5.1क) को पुनर्व्यवस्थित करके हम लिख सकते हैं कि

$$R = \frac{L}{2\theta} \qquad (5.1\text{ख})$$

दंड बंकन के प्रयोग (भाग 3.2.2) में हमने दंड पर लागू बंकन आघूर्ण का व्यंजक (समीकरण 3.6) प्राप्त किया था। उसी तर्क से तार का बंकन बल-आघूर्ण तथा इसके द्वारा प्रत्येक छड़ पर लगाया गया बल-युग्म निम्नलिखित है :

$$G = \frac{Y I_g}{R} = Y\frac{\pi r^4}{4R} = \frac{Y\pi r^4\theta}{2L} \qquad (5.2)$$

जहां Y दिए गए तार के पदार्थ का यंग का गुणांक है और $I_g (= \pi r^4/4)$ तार के अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल के केन्द्रक (centroid) से गुजरने वाले अक्ष के सापेक्ष तथा बंकन समतल के लम्बवत् ज्यामितीय जड़त्व-आघूर्ण है। बल-युग्म के कारण $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ कोणीय त्वरण प्रत्येक छड़ में जनित होता है जो इसकी साम्य स्थिति की ओर दिष्ट होता है। अतः हम लिख सकते हैं कि

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Y\pi r^4\theta}{2L} \qquad (5.3)$$

जहां I प्रत्येक छड़ का उसके गुरूत्व केन्द्र (centre of gravity) से गुजरने वाले तथा लम्बाई ℓ के लम्बवत् अर्थात् जिस डोरी से निलंबित है उसके सापेक्ष जड़त्व-आघूर्ण है।

हम समीकरण (5.3) को निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Y\pi r^4}{2IL}\theta \qquad (5.4)$$

क्या आप इस समीकरण को पहचानते हैं? यह सरल आवर्त गति को निरूपित करता है और हम लिख सकते हैं कि $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$ जहां $\omega^2 = \frac{Y\pi r^4}{2IL}$ है, तथा प्रत्येक छड़ के आवर्तकाल का व्यंजक निम्नलिखित है :

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2IL}{Y\pi r^4}}$$

$$\Rightarrow \qquad Y = \frac{8\pi LI}{T_1^2 r^4} \qquad (5.5)$$

यदि छड़ों का अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल वर्ग या आयत है तथा लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः ℓ और b हैं तो हम लिख सकते हैं कि

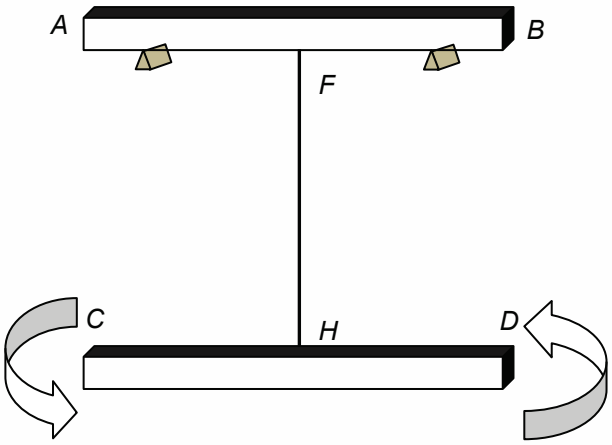
$$I = M\left[\frac{\ell^2 + b^2}{12}\right] \qquad (5.6\text{क})$$

जहां M छड़ का द्रव्यमान है।

यदि छड़ का अनुप्रस्थ परिच्छेद R_c त्रिज्या का वृत्ताकार हो तो हम लिख सकते हैं कि

$$I = M\left(\frac{\ell^2}{12} + \frac{R_c^2}{4}\right) \qquad (5.6\text{ख})$$

ध्यान दें कि समी. (5.5) का प्रयोग करके हम तार *FH* के लिए यंग का गुणांक ज्ञात कर सकते हैं। अब आप पूछेंगे : दिए गए उपकरण द्वारा हम अन्य प्रत्यास्थतांकों को किस प्रकार निर्धारित कर सकते हैं? दृढ़ता गुणांक ज्ञात करने के लिए आप छड़ों को निलंबन से हटाएं। इनमें से एक छड़ को दृढ़ आलम्ब से क्षैतिजतः बांधें, जैसा कि चित्र 5.2 में दिखाया गया है। तार *FH* को ऊर्ध्वाधरतः लटका कर इसके निचले सिरे से दूसरे छड़ को क्षैतिजतः निलंबित करें।



चित्र 5.2: दृढ़ता गुणांक का निर्धारण करने के लिए सर्ल्स उपकरण का विन्यास।

अब छड़ *CD* को तार की इसकी लम्बाई के लम्बवत् समतल में वामावर्त (anticlock wise) दिशा में घुमा कर ऐंठा दें। छोड़ने पर छड़ क्षैतिज समतल में मरोड़ी दोलन करने लगेगा। क्या आप इस तंत्र को पहचानते हैं? यह विन्यास मरोड़ी लोलक की भांति कार्य करता है।

सरल आवर्त गति के लिए आवर्तकाल का व्यंजक निम्नलिखित है :

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} \qquad (5.7)$$

जहां I छड़ *CD* का उसके मध्य से गुजरने वाले दोलन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व-आघूर्ण है तथा $C = \frac{\pi n r^4}{2L}$ त्रिज्या r, लम्बाई L और दृढ़ता गुणांक n वाले तार में प्रति-एकक रेडियन प्रत्यानयन बल-आघूर्ण है। जैसा कि प्रयोग 4 में बताया जा चुका है, प्रत्यानयन बल-आघूर्ण तार में प्रत्यास्थता के कारण जनित होता है। समीकरण (5.7) में दिए गए व्यंजक का वर्ग लेने पर हम लिख सकते हैं कि

$$C = \frac{\pi n r^4}{2L} = \frac{4\pi^2 I}{T_2^2}$$

अतः
$$n = \frac{8\pi I L}{T_2^2 r^4} \qquad (5.8)$$

समीकरण (5.5) और (5.8) को संयोजित करने पर हमें निम्न व्यंजक प्राप्त होता है :

$$\frac{Y}{n} = \frac{T_2^2}{T_1^2} \qquad (5.9)$$

अनुपात $\frac{Y}{n}$ प्वांसों अनुपात σ से निम्नलिखित रूप में संबंधित है :

$$\frac{Y}{n} = 2(1+\sigma) \qquad (5.10)$$

अतः
$$\sigma = \frac{Y}{2n} - 1 = \frac{T_2^2}{2T_1^2} - 1 \qquad (5.11)$$

आयतन प्रत्यास्थता गुणांक तथा यंग का गुणांक प्वांसों अनुपात से निम्नवत् संबंधित हैं :

$$\frac{Y}{3K} = 1 - 2\sigma \qquad (5.12)$$

अतः
$$K = \frac{1}{3}\frac{Y}{(1-2\sigma)} \qquad (5.13)$$

यहां ध्यान देने योग्य महत्वपूर्ण बात यह है कि Y, n और σ को सर्ल्स उपकरण के दो विन्यासों के दोलनों के आवर्तकालों के मापन द्वारा निर्धारित किया जा सकता है। आयतन प्रत्यास्थता गुणांक को Y तथा σ के मापित मानों से परिकलित किया जा सकता है। अतः हम कह सकते हैं कि यह एक सीधी और सरल विधि है।

5.4 सर्ल्स उपकरण के साथ मापन

1. उपकरण को चित्र 5.1क के अनुसार इस प्रकार संजोये कि छड़ *AB* तथा *CD* एक ही क्षैतिज समतल में हों। इसके लिए आप लगभग 60 cm लम्बी दो अवितान्य सूती या रेशम की डोरियां लें।

2. एक छड़ के मध्य के सामने एक संसूचक रखें तथा जब सर्ल्स उपकरण साम्यावस्था में तथा छड़ विरामी अवस्था में हों तो इसकी समरेखा में छड़ पर एक निशान लगा दें।

3. *A* और *C* सिरों पर सूती धागे की लूप लगा लें। इसकी सहायता से आप इन सिरों को लघु कोण में पास-पास ला सकते हैं। सुनिश्चित कर लें कि बंधा हुआ व्यवरूद्ध तंत्र विरामावस्था में है।

4. सूती धागे को आग से जला दें। *A* और *C* सिरे मुक्त हो जाएंगे तथा छड़ दोलन करने लगेंगे। सुनिश्चित करें कि दोलनों के आयाम कम हैं : लगभग 3''। विराम घड़ी का अल्पतमांक ज्ञात करें और 20 दोलनों में लगा समय (t) नापें। अपने पाठ्यांकों को प्रेक्षण सारणी 5.1 में लिखें।

5. उपरोक्त 3 तथा 4 चरणों को कम से कम 5 बार दोहराएं। इनसे आप आवर्तकाल का माध्य मान ज्ञात कर सकते हैं : $T_1 = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{5 \times 20}$.

6. सूती (या रेशमी) धागों वाले विन्यास को हटा कर *AB* छड़ को दृढ़ आधार में क्षैतिजतः बांध दें, जैसा कि चित्र 5.2 में दिखाया गया है। आप सुनिश्चित करें कि तार ऊर्ध्वाधर रहे।

7. छड़ *CD* के एक सिरे को क्षैतिज समतल में न्यून कोण से घुमा कर ऐठें तथा उसके बाद छोड़ दें। छड़ मरोड़ी दोलन करने लगेगा। 20 दोलनों का समय (t') मापने से पहले आप सुनिश्चित करें कि छड़ डगमगा नहीं रहा है।

8. चरण 7 को कम से कम 5 बार दोहराएं और अपने पाठ्यांक प्रेक्षण सारणी 5.1 में सूचीबद्ध करें।

9. तार का व्यास इसकी लम्बाई के अनुदिश कम से कम पाँच अलग-अलग जगहों पर दो परस्पर लम्बवत् दिशाओं *XX'* और *YY'* में स्क्रू गेज की सहायता से मापें। ऐसा करने पर आप तार की मोटाई में असमांगता (inhomogeneity) का प्रभाव कम कर सकेंगे। अपने पाठ्यांकों को प्रेक्षण सारणी 5.2 में लिखें। त्रिज्या में छोटी से छोटी त्रुटि प्रत्यास्थतांकों के मानों को अत्यधिक प्रभावित कर सकती है क्योंकि उनके व्यंजकों में इसका घात चार है और इसका मान भी कम है। अतः आप अत्यन्त सावधानी से त्रिज्या r निर्धारित करें।

   तार की लम्बाई L मीटर पैमाने से नापें और प्रेक्षण सारणी 5.2 के नीचे दर्ज करें।

10. छड़ *CD* का द्रव्यमान M तथा लम्बाई ℓ परिशुद्धतापूर्वक मापें और पाठ्यांकों को प्रेक्षण सारणी 5.3 के ऊपर लिखें। छड़ *CD* की त्रिज्या R_c मापने के लिए आप

वर्नियर कैलिपर्स का प्रयोग कर सकते हैं। आप अलग-अलग जगहों पर न्यूनतम पाँच प्रेक्षण लेकर इन्हें प्रेक्षण सारणी 5.3 में दर्ज करें।

प्रेक्षण सारणी 5.1: आवर्तकाल T_1 तथा T_2 का मापन

दोलनों की संख्या = 20

विराम घड़ी का अल्पतमांक = …….. s

क्रम सं.	t (s)	t' (s)
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		

$T_1 = \frac{\Sigma t}{100} =$ .....s $\qquad$ $T_2 = \frac{\Sigma t'}{100} =$ .....s

प्रेक्षण सारणी 5.2: तार की त्रिज्या का निर्धारण

स्क्रू गेज का अल्पतमांक = …….. cm

क्रम सं.	व्यास (cm)		माध्य व्यास (cm)
	XX' के अनुदिश	YY' के अनुदिश	$d = \frac{XX' + YY'}{2}$
1.			d_1 =
2.			d_2 =
3.			d_3 =
4.			d_4 =
5.			d_5 =

तार का माध्य व्यास, d = …….. cm

तार की माध्य त्रिज्या, $r = \frac{d}{2}$ = …….. cm

तार की लम्बाई, L = …….. cm

प्रेक्षण सारणी 5.3: छड़ की त्रिज्या का मापन

छड़ *CD* का द्रव्यमान = *M* = ... g

छड़ *CD* की लम्बाई = ℓ = ... cm

वर्नियर कैलिपर्स का अल्पतमांक = ... cm

यदि छड़ का अनुप्रस्थ वर्गाकार है तो आप इसकी चौड़ाई वर्नियर कैलिपर्स से मापेंगे और I का मान समीकरण (5.6क) का उपयोग कर परिकलित करेंगे।

क्रम सं.	व्यास (cm)		माध्य व्यास (cm)
	XX′ के अनुदिश	*YY′* के अनुदिश	
1.			D_1
2.			D_2
3.			D_3
4.			D_4
5.			D_5

छड़ *CD* का माध्य व्यास = D = ... cm

छड़ *CD* की माध्य त्रिज्या = $R_c = \frac{D}{2}$ = ... cm

5.5 परिकलन

निम्न सूत्रों का उपयोग करके विभिन्न प्रत्यास्थतांक परिकलित करें :

i) $$Y = \frac{8\pi L}{r^4 T_1^2} M \left(\frac{\ell^2}{12} + \frac{R_c^2}{4} \right) \text{ dyne cm}^{-2}$$

ii) $$n = \frac{8\pi L}{r^4 T_2^2} M \left(\frac{\ell^2}{12} + \frac{R_c^2}{4} \right) \text{ dyne cm}^{-2}$$

iii) $$\sigma = \frac{Y}{2n} - 1$$

iv) $$K = \frac{Y}{3(1-2\sigma)} \text{ dyne cm}^{-2}.$$

परिणाम : सर्ल्स उपकरण के प्रयोग से प्राप्त प्रत्यास्थतांकों के मान निम्नवत् हैं :

Y = ... dyne cm^{-2}

n = ... dyne cm^{-2}

σ = ...

k = ... dyne cm^{-2}

प्रत्यास्थतांकों के मान प्राप्त होने पर आप तार का पदार्थ मालूम कर सकते हैं। इसके लिए आप प्रयोगशाला में रखी संदर्भ पुस्तिकाओं की सहायता ले सकते हैं या आपके परामर्शदाता से विचार-विमर्श कर सकते हैं।

5.6 शब्दावली

Anticlockwise	वामावर्त
Bulk modulus	आयतन प्रत्यास्थता गुणांक
Centre of gravity	गुरूत्व-केन्द्र
Constrained system	व्यवरूद्ध तंत्र
Couple	बल-युग्म
Elastic constant	प्रत्यास्थतांक
Inhomogeneity	असमांगता
Lateral strain	पार्श्विक विकृति
Linear strain	रैखिक विकृति
Poisson ratio	प्वासों अनुपात
Restoring torque	प्रत्यानयन बल-आघूर्ण
System	तंत्र
Tangential strain	स्पर्शरेखीय विकृति
Volume strain	आयतन विकृति

प्रयोग 6

दंड लोलक का प्रयोग कर गुरुत्वीय त्वरण का निर्धारण

प्रयोग की रूपरेखा

6.1 प्रस्तावना
अपेक्षित कौशल

6.2 पिंड लोलक का सिद्धांत

6.3 गुरुत्वीय त्वरण निर्धारण की विधि
दंड लोलक
दोलनों का मापन
दंड लोलक को सेट करके मापन
परिभ्रमण त्रिज्या का निर्धारण

6.4 शब्दावली

6.1 प्रस्तावना

प्रयोग 5 में आप सर्ल्स उपकरण का उपयोग कर प्रत्यास्थतांक (यंग गुणांक, दृढ़ता गुणांक, आयतन प्रत्यास्थता गुणांक, प्वासों अनुपात) का निर्धारण करना सीख चुके हैं। ये सभी प्रत्यास्थतांक एक ही प्रयोग में निर्धारित किये गये थे। अब इस प्रयोग में आप दोलनी तंत्रों पर आधारित प्रयोग करेंगे। आपने स्कूल में सरल लोलक पर प्रयोग अवश्य किया होगा। सरल लोलक में एक भारी (बिन्दु) द्रव्यमान को भारहीन, अवितान्य (inextensible) डोरी से बांधकर दृढ़ आलंब से लटकाया जाता है। व्यवहार में, एक साधारण डोरी की सहायता से धातु के बने एक भारी गोलक (bob) को एक दृढ़ आलंब से लटकाकर सरल लोलक प्राप्त किया जाता है। (यानी आपको समझना चाहिए कि जिस लोलक का प्रयोग हम व्यवहार में करते हैं, वह एक आदर्श सरल लोलक नहीं होता।) गोलक आलंब–बिन्दु के इर्द–गिर्द मुक्त रूप से एक तल में दोलन कर सकता है। साम्यावस्था स्थिति (equilibrium position) की दोनों ओर गोलक के अधिकतम विस्थापन को दोलन का **आयाम** (amplitude) कहा जाता है। एक दोलन पूरा करने में लोलक द्वारा लिए गए समय को **आवर्तकाल** (period) कहते हैं। जैसा कि आप जानते हैं, लोलक दीवार घड़ी का मुख्य घटक होता है।

आपको याद होगा कि आपने स्कूल के भौतिकी पाठ्यक्रम में केवल सरल लोलक की लम्बाई पर आवर्तकाल की निर्भरता का अध्ययन किया था।

अब आप यह सोच रहे होंगे कि समय मापने के लिए सरल लोलक एक आदर्श विन्यास है। लेकिन ऐसा नहीं है, क्योंकि एक व्यावहारिक सरल लोलक में कुछ अंतर्निहित कमियां होती हैं जिनके बारे में हम भाग 6.2 में चर्चा करेंगे। दंड लोलक का उपयोग इनमें से कुछ कमियों को दूर कर देता है। इस प्रयोग में हम दंड लोलक की दोलन गति तक ही सीमित रहेंगे। भाग 6.3 में दंड लोलक का प्रयोग कर आप गुरुत्वीय

त्वरण का मापन करेंगे। अगले प्रयोग में, आप केटर लोलक (Kater's pendulum) का उपयोग कर असमांगी द्रव्यमान वितरित पिंड से गुरुत्वीय त्वरण का निर्धारण करेंगे।

अपेक्षित कौशल

इस प्रयोग को करने के बाद, आप:

- दंड लोलक के आवर्तकाल और लंबाई के बीच संबंध स्थापित कर सकेंगे;
- दंड लोलक के आवर्तकाल की उसकी लंबाई पर निर्भरता ज्ञात कर सकेंगे;
- दंड लोलक का उपयोग कर गुरुत्वीय त्वरण का मान निकाल सकेंगे; और
- दंड लोलक की परिभ्रमण-त्रिज्या (radius of gyration) परिकलित कर सकेंगे।

इस प्रयोग के लिए आपको निम्नलिखित उपकरणों की आवश्यकता होगी।

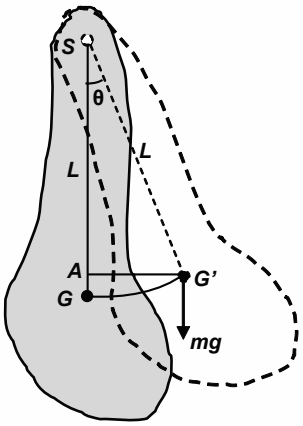
आवश्यक उपकरण

दंड लोलक, विराम घड़ी, मीटर पैमाना

6.2 पिंड लोलक का सिद्धांत

हम जानते हैं कि सरल लोलक के गोलक के साथ कुछ हवा सदैव कर्षित होती है। इसी प्रकार, धागे के पूर्णतः अवितान्य न होने के कारण भी असमतलीय दोलन हो सकते हैं और निलंबन बिंदु के इर्द गिर्द गति का घूर्णी घटक भी हो सकता है। इन त्रुटियों के कारण आवर्तकाल T का अचर मान प्राप्त नहीं होता। क्या आप किसी ऐसी व्यवस्था का सुझाव दे सकते हैं जिसमें इन त्रुटियों को दूर किया जा सके? इसका निराकरण है पिंड लोलक (compound pendulum) का प्रयोग।

मान लें कि m द्रव्यमान का एक पिंड लोलक बिन्दु S से निलंबित किया गया है। माना कि इसे एक लघु कोणीय विस्थापन θ दिया जाता है, जैसा कि चित्र 6.1 में दर्शाया गया है। अब गुरुत्व केन्द्र (Centre of gravity) (G) बिन्दु G' पर स्थानान्तरित हो जाता है, जहां गुरुत्वीय बल mg अधोमुखी दिशा में कार्य करता है।



चित्र 6.1: दोलन करता हुआ पिंड लोलक।

जब दूरी $SG = SG' = L$ हो, तो आरोपित बल आघूर्ण निम्नलिखित होगा :

$$\tau = -mg \times AG'$$

$$= -mgL \sin\theta$$

θ के अल्प मान के लिए हम सन्निकटतः $\sin\theta \approx \theta$ लिख सकते हैं और तब

$$\tau = -mgL\theta \qquad \text{(i)}$$

यदि बल आघूर्ण के कारण कोणीय त्वरण α और S के परितः दृढ़ पिंड का जड़त्व आघूर्ण I हो तो हम लिख सकते हैं :

$$\tau = I\,\alpha = I\,\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \text{(ii)}$$

अतः $I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL\theta$

या, $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgL}{I}\theta$ (iii)

यह समीकरण सरल आवर्ती गति निरूपित करता है और दोलन आवृत्ति ω_0 के पदों में हम इसे लिख सकते हैं :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0 \quad (6.1)$$

जहाँ $\omega_0^2 = \frac{mgL}{I}$

अब दोलन काल T और ω_0 में निम्नलिखित संबंध है :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \quad (6.2)$$

T ज्ञात करने के लिए हमें I को मापी जा सकने वाली राशियों के पदों में व्यक्त करना चाहिए। आप जानते हैं कि किसी पिंड का दिए गए अक्ष के परितः जडत्व-आघूर्ण (I) और इस अक्ष के समान्तर गुरुत्व केन्द्र (CG) से गुजरने वाले अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण (I_g) निम्नलिखित समीकरण द्वारा संबंधित हैं :

$$I = I_g + mL^2 = m(k_r^2 + L^2) \quad (6.3)$$

जहाँ L उन दो अक्षों के बीच की दूरी है, $I_g = mk_r^2$ तथा k_r पिंड की G से गुजरने वाले अक्ष के परितः परिभ्रमण त्रिज्या (radius of gyration) हैं।

एक अक्ष के प्रति पिंड की परिभ्रमण-त्रिज्या घूर्णन-अक्ष से उस बिन्दु की दूरी होती है जिस पर पूरे पिंड का द्रव्यमान निहित माना जाने पर घूर्णन–अक्ष के प्रति उसके जड़त्व–आघूर्ण के मान में कोई अंतर न आता हो।

समीकरण (6.3) से I का मान समीकरण (6.2) में प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होता है:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_r^2 + L^2)}{mgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{k_r^2 + L^2}{gL}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{k_r^2}{L} + L}{g}} \quad (6.4)$$

$\frac{k_r^2}{L} + L = L'$ लिखने पर हम समीकरण (6.4) को निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L'}{g}} \quad (6.5)$$

आपको याद होगा कि यह सरल लोलक के दोलन के लिए व्यंजक है। लम्बाई L' दिए गए पिंड लोलक की **सरल लोलक के समतुल्य लम्बाई** कहलाती है। इसका तात्पर्य है कि लम्बाई $L'\left(=\frac{k_r^2}{L}+L\right)$ के सरल लोलक का दोलन काल उतना ही है जितना एक पिंड लोलक का जिसकी परिभ्रमण त्रिज्या k_r तथा निलंबन बिन्दु और गुरुत्व केन्द्र के बीच की दूरी L हो।

जब निलंबन बिन्दु S और गुरुत्व-केन्द्र G के बीच की दूरी L हो तो G की दूसरी ओर $\frac{k_r^2}{L}$ दूरी पर एक बिन्दु P ऐसा होता है जो उतने ही दोलन काल के संगत होता है। यह **दोलन केन्द्र** (centre of oscillation) कहलाता है। S और P के बीच की दूरी है:

$$=L+\frac{k_r^2}{L}\left(=L'\right)$$

अतः दोलन केन्द्र निलंबन बिन्दु से सरल लोलक की समतुल्य दूरी (L') पर पड़ता है। क्योंकि इन दोनों बिन्दुओं के दोलन काल समान हैं, हम उन्हें अदल-बदल करके इस्तेमाल कर सकते हैं।

इसलिए जब दंड लोलक एक क्षैतिज अक्ष के प्रति दोलन करता है तब इसकी गति सरल आवर्त गति होती है और इसके आवर्तकाल का व्यंजक समीकरण (6.6) द्वारा दिया जाता है :

$$T=2\pi\sqrt{\frac{k_r^2+L^2}{Lg}} \qquad (6.6)$$

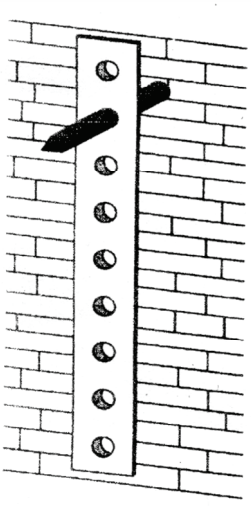
यहां L निलंबन बिन्दु और गुरूत्व-केन्द्र के बीच की दूरी और k_r परिभ्रमण त्रिज्या है।

समीकरण (6.6) पिंड लोलक के आवर्तकाल का सामान्य समीकरण है। अब हम व्यंजक $\frac{k_r^2}{L}+L$ को L' द्वारा परिभाषित करते हैं और इसे तुल्य सरल लोलक की लंबाई कहते हैं।

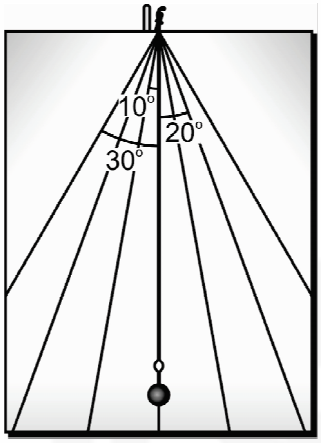
समीकरण (6.6) के साथ इस परिणाम का संयोजन करने पर हमें आवर्तकाल का अभीष्ट व्यंजक प्राप्त होता है:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L'}{g}} \qquad (6.7)$$

प्रयोग के इस भाग में आपको ज्ञात करना है कि दंड लोलक के दोलन का आवर्तकाल उसके निलंबन बिन्दु और गुरुत्व-केन्द्र के बीच की दूरी के साथ किस प्रकार बदलता है।



(क)



(ख)

चित्र 6.2: क) दंड लोलक; ख) कोण अंशाकित स्केल के साथ लोलक।

6.3 गुरुत्वीय त्वरण निर्धारण की विधि

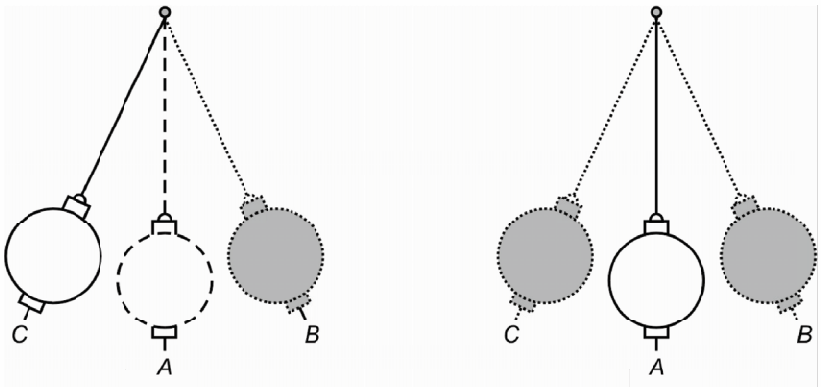
6.3.1 दंड लोलक

दंड लोलक ऐसा दृढ़ पिंड होता है जो एक क्षैतिज अक्ष के प्रति मुक्त रूप से दोलन कर सकता है। भौतिकी प्रयोगशाला में यह लगभग एक मीटर लंबे और लगभग 2.5 cm चौड़े दंड के रूप में उपलब्ध होता है। इस दंड के गुरुत्व-केन्द्र की दोनों ओर अर्थात् दंड की लंबाई के अनुदिश समान दूरी पर लगभग 5-6 मिलीमीटर त्रिज्या के सुराख बने होते हैं (चित्र 6.2क)। किन्हीं दो (consecutive) सुराखों के केन्द्र लगभग 5 cm की दूरी पर होते हैं। इन सुराखों की सहायता से दंड लोलक को एक क्षुरधार से लटकाया जा सकता है। सामान्यतः दंड लोलक में दो चल क्षुरधार लगे होते हैं। इन्हें CG के दोनों ओर उससे बराबर दूरी पर क्रमानुसार विभिन्न सुराखों में डाला जाता है। अब आप समझ सकते हैं कि सरल लोलक के विषय में बताई गई कठिनाइयों को पिंड/दंड लोलक में किस प्रकार दूर किया जाता है।

6.3.2 दोलनों का मापन

एक सूचक की सहायता से गोलक की साम्यवस्था स्थिति और दोलन के अधिकतम विस्थापन पर एक निर्देश निशान लगाएं। प्रत्येक प्रेक्षण में आयाम अचर रखें और इसका मान सदैव ऐसा हो कि न्यून कोण सन्निकटन ($\theta \leq 10^o$) का उल्लंघन न हो। अर्थात् यह सरल आवर्त गति करे। एक प्रोट्रेक्टर की सहायता से इसे सुनिश्चित किया जा सकता है। (यदि प्रयोगशाला में प्रोट्रेक्टर उपलब्ध न हो, तो आप अलग से एक ड्राइंग शीट पर कोनों के मान अंशाकित करें। अंशाकित स्केल को लोलक के पीछे इस प्रकार रखें कि 0^o वाली रेखा और लोलक की साम्यावस्था स्थिति संपाती हों। साथ ही, अंशाकित स्केल का मूल बिंदु लंबन बिन्दु के संपाती हो जैसा कि चित्र 6.2ख में दिखाया गया है।)

प्रयोग प्रारंभ करने से पहले विराम घड़ी का अल्पतमांक (least count) देखें और उसे प्रेक्षण सारणी 6.1 में लिखें। अब आप दंड लोलक को साम्यावस्था स्थिति से एक ओर विस्थापित करके छोड़ दीजिए। दोलनों की गिनती करने के लिए संदर्भ बिन्दु का चयन हम दो प्रकार से कर सकते हैं, जैसाकि चित्र 6.3 में दिखाया गया है। हम द्वितीय विकल्प को बेहतर समझते हैं क्योंकि इसमें संदर्भ बिन्दु अचर रहता है।



(क) एक संपूर्ण दोलन $C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C$

(ख) एक संपूर्ण दोलन $A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow A$

चित्र 6.3: दोलनों की गिनती करने के दो अलग-अलग विकल्प।

आप लोलक की **साम्यावस्था स्थिति** से दोलनों की गिनती प्रारंभ कीजिए। ध्यान रहे कि गिनती प्रारंभ करने के साथ-साथ विराम घड़ी भी शुरू करनी होगी। (विराम घड़ी को शुरू/बंद करने और दोलनों की गिनती करने में अभिक्रिया काल (reaction time) जो कि औसतन 0.3 सेकंड होता है, के कारण समय-पश्चता (time-lag) हो सकती है। इससे आवर्तकाल T के मान में कुछ त्रुटि हो सकती है।) यहां पर इस बात का ध्यान रखना बहुत जरूरी है कि आपको अपने परिणाम में कितनी यथार्थता चाहिए। एक अन्य महत्वपूर्ण तथ्य यह है कि आप ऐसा समयांतराल मापें जिसमें दोलन के आयाम में कोई कमी नहीं आती। इसके लिए आप 1, 10, 20, 30, 50, 70, 100 दोलनों में लगने वाला समय मापें। प्रत्येक स्थिति में आप कम से कम तीन प्रेक्षण अवश्य लें। आप अपने पाठ्यांकों को प्रेक्षण सारणी 6.1 में लिखें। अब दोलन का आवर्तकाल T परिकलित करें।

यदि आप किसी और विद्यार्थी के साथ इस प्रयोग को कर रहे हैं तो आप दोनों में से एक विद्यार्थी दोलनों की गणना करें और दूसरा समय का ध्यान रखे। गणना करने वाला विद्यार्थी उल्टी गणना से शुरूआत करे जैसे दो, एक, ''शुरू'', एक, दो, तीन, इत्यादि। इससे समय का ध्यान रखने वाले विद्यार्थी को विराम घड़ी ''शुरू'' करने का संकेत मिलेगा। गणना का अंत ''स्टॉप'' या ''ठहरो'' कहकर किया जा सकता है। अगर आप दो साथी यह प्रयोग कर रहे हैं तो यह सुनिश्चित कीजिए कि आप दोनों बराबर-बराबर पूर्ण प्रेक्षण लें।

प्रेक्षण सारणी 6.1: दोलनों की इष्टतम संख्या का निर्धारण

विराम घड़ी का अल्पतमांक = ... s

क्र. सं.	दोलनों की संख्या (N)	समय (s)				$T = \frac{\text{माध्य समय}}{N}$ (s)
		(i)	(ii)	(iii)	(माध्य)	
1.	1					
2.	10					
3.	20					
4.	30					
5.	50					
6.	70					
7.	100					

अभिक्रिया काल निवेश-उद्दीपन एवं उसकी अनुक्रिया के बीच का समयांतराल है।

एक साधारण विराम घड़ी का अल्पतमांक 0.1 s होता है। अतः जब 1 s की कोटि का समय मापना हो तो आप अधिक यथार्थता वाली स्वयंचलित स्विचन युक्ति जैसे कि अंकीय कालद (digital timer) का प्रयोग करें।

निष्कर्ष : दोलनों की इष्टतम संख्या ..... है।

दोलनों की इष्टतम संख्या (optimum number) ज्ञात करने के लिए T के मान में हुए परिवर्तन को देखें। जब T के दो क्रमिक मानों (successive values) के बीच अंतर 0.1 प्रतिशत से कम हो तो यह स्वीकार्य होता है। हम आशा करते हैं कि दोलनों की इष्टतम संख्या 50 होगी। लेकिन इसे अलंघनीय संख्या न मानें। इष्टतम संख्या के संबंध में आप स्थिति के अनुसार स्वयं निर्णय लें।

6.3.3 दंड लोलक को सेट करके मापन

दंड लोलक को सेट करने और मापन के लिए नीचे दिए गए चरणों का अनुसरण करें।

1. लोलक के एक सिरे के पास वाले सुराख में एक क्षुरधार लगा दीजिए। दूसरे क्षुरधार को लोलक के दूसरे सिरे के पास वाले सुराख में लगा दीजिए। इस प्रकार

दोनों क्षुरधार दंड लोलक के गुरुत्व-केन्द्र से समदूरस्थ होंगे और उसके प्रति सममित होंगे।

2. लोलक को एक क्षुरधार पर क्षैतिज दृढ़ आलंब से ऊर्ध्वाधरतः (vertically) लटका लीजिए।

3. पहले की भांति, लोलक की साम्यावस्था स्थिति को निर्देशित करने के लिए एक निर्देश चिन्ह् लगा लीजिए।

4. दंड लोलक के गुरुत्व-केन्द्र और आलंबन बिन्दु (क्षुरधार वाले सुराख के केन्द्र) के बीच की दूरी मापें। इससे हमें L का मान प्राप्त हो जाता है।

5. दंड को एक ओर थोड़ा सा विस्थापित करके दोलित होने दीजिए। जब आप यह सुनिश्चित कर लें कि ऊर्ध्वाधर तल में मुक्त दोलन हो रहे हैं, तब आप अपना प्रयोग शुरू कर सकते हैं।

6. अब आप साम्यावस्था से दंड लोलक के मुक्त सिरे को आहिस्ता से विस्थापित कर उसे दोलन करने दें। ध्यान रखें कि लोलक जिस दीवार पर आलंबित है, उसके समांतर तल में दोलन करे और दीवार को छुए नहीं।

7. अब आप N (= 30) पूर्ण दोलनों का समय मापें। आप इन पाठ्यांकों को प्रेक्षण सारणी 6.2(क) में लिख लीजिए। इस चरण को तीन बार दोहराइए।

8. अब लोलक को उलट कर पुनः N पूर्ण दोलनों का समय मापें। प्रेक्षण सारणी 6.2(क) की तरह आप स्वयं प्रेक्षण सारणी 6.2(ख) बनाएं और अपने प्रेक्षण इसमें दर्ज करें।

9. अब आप क्षुरधारों को अगले सुराखों में लगा दीजिए जिससे कि वे पहले की भांति गुरुत्व-केन्द्र के प्रति सममित हो जाएं। ऐसा करने से लोलक की लंबाई बदल जाती है। अतः आप पाएंगे कि N पूर्ण दोलनों में लगने वाला समय पहले मापे गए समय से भिन्न है।

10. अलग-अलग सुराखों में क्षुरधारों को लगा कर गुरुत्व-केन्द्र की दोनो ओर प्रेक्षणों को दोहराइए। लेकिन ऐसा करते समय यह आवश्यक है कि हर बार क्षुरधार गुरुत्व-केन्द्र के प्रति सममित रहें। जैसे–जैसे आप दंड लोलक के केन्द्र के निकट पहुंचते हैं आवर्तकाल में क्या परिवर्तन होता है? आप देखेंगे कि पहले N दोलनों के समय में कमी आती है, यह घटकर निम्नतन हो जाता है और इसके बाद बढ़ने लगता है। जैसे-जैसे आप दंड के गुरुत्व-केन्द्र के समीप आते रहेंगे, दोलनों में लगने वाले समय में तेजी से वृद्धि होगी।

11. अगर केन्द्र पर बने सुराख में क्षुरधार लगाया जाए तो क्या होगा? आप पाएंगे कि दंड दोलन नहीं करता। यह केवल एक ओर जा कर रुक जाएगा।

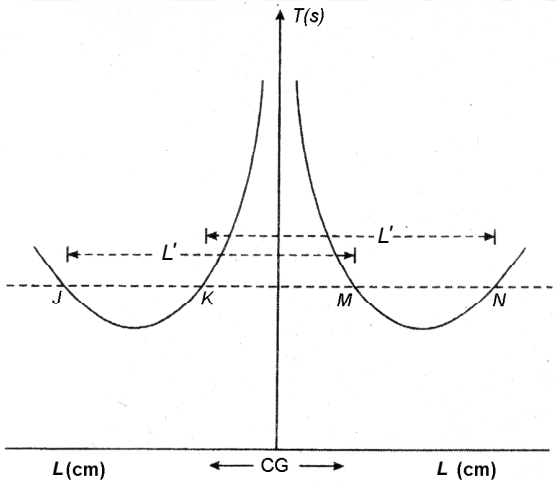
प्रेक्षण सारणी 6.2(क): गुरुत्व-केन्द्र और निलंबन बिन्दु के बीच की दूरी के साथ आवर्तकाल में परिवर्तन

विराम घड़ी का अल्पतमांक = ... s

क्र. सं.	गुरुत्व-केन्द्र से निलंबन बिंदु की दूरी L (cm)	N = 30 दोलनों के लिए समय (s)				आवर्तकाल T (s)	LT^2 (cm s^2)
		(i)	(ii)	(iii)	(माध्य)		
1.							
2.							
3.							
4.							
5.							
6.							

इसी तरह की और एक प्रेक्षण सारणी 6.2(ख) आप बनाएं और लोलक को उलट कर लिए गए प्रेक्षण इसमें लिखें।

T और L का ग्राफ दंड के गुरुत्व-केन्द्र को भुज मान कर इसकी दोनो ओर खींचिए। आपको गुरुत्व-केन्द्र के प्रति सममित दो वक्र प्राप्त होंगे (चित्र 6.4)। अब आप x - अक्ष के समांतर एक रेखा इस प्रकार खींचिए कि यह इन वक्रों को दो-दो बिंदुओं पर काटे। मान लीजिए कि ये बिन्दु J, K, M और N हैं, जिन्हें चित्र 6.4 में दिखाया गया है।



चित्र 6.4: गुरुत्व-केन्द्र से निलंबन बिन्दु की दूरी के सापेक्ष आवर्तकाल का आरेख।

इन सभी बिन्दुओं पर लोलक का आवर्तकाल समान है। JM और KN की लंबाईयां मापिए। आप इनकी व्याख्या किस प्रकार करेंगे? इनमें से प्रत्येक लंबाई एक तुल्य सरल लोलक की लंबाई L' को निरूपित करती है। समीकरण (6.7) की सहायता से आप गुरुत्वीय त्वरण परिकलित कर सकते हैं।

परिणाम : गुरुत्वीय त्वरण का मान = ...

6.3.4 परिभ्रमण त्रिज्या का निर्धारण

परिभ्रमण त्रिज्या परिकलित करने के लिए हम समीकरण (6.6) को इस प्रकार लिखते हैं:

$$LT^2 = \left(\frac{4\pi^2}{g}\right)L^2 + \frac{4\pi^2}{g}k_r^2 \qquad (6.8)$$

इस समीकरण को देखने से पता चलता है कि यदि आप LT^2 के सापेक्ष L^2 आरेखित करते हैं तो आपको एक सरल रेखा प्राप्त होगी जिसकी प्रवणता $\frac{4\pi^2}{g}$ और अंतःखंड $\frac{4\pi^2}{g}k_r^2 = c$ होगा। अतः, हम गुरुत्वीय त्वरण एवं परिभ्रमण त्रिज्या के मान निम्नलिखित व्यंजकों से परिकलित कर सकते हैं:

$$g = \frac{4\pi^2}{\text{प्रवणता}} \qquad (6.9)$$

और परिभ्रमण त्रिज्या को निम्नलिखित रुप में लिखा जाता है:

$$k_r^2 = \frac{cg}{4\pi^2}$$

या $$k_r = \frac{\sqrt{cg}}{2\pi} \qquad (6.10)$$

परिणाम : i) दंड लोलक की परिभ्रमण त्रिज्या = ... m

ii) गुरुत्वीय त्वरण = ... ms^{-2}

बोध प्रश्न 1 – दंड लोलक

i) क्षुरधारों को गुरुत्व-केन्द्र के प्रति सममित रखना क्यों आवश्यक है?

ii) अपने प्रयोग में आप ऐसे दो स्रोत बताइए जिनके कारण त्रुटियाँ हो सकती हैं।

6.4 शब्दावली

Accuracy	परिशुद्धता
Amplitude	आयाम
Bar pendulum	दंड लोलक
Compound pendulum	पिंड लोलक
Damping	अवमंदन
Displacement	विस्थापन

Equilibrium position	साम्यावस्था स्थिति
Initial phase	प्रारंभिक कला
Least count	अल्पतमांक
Oscillation	दोलन
Radius of gyration	परिभ्रमण त्रिज्या
Relaxation time	विश्रांति काल
Rotation	घूर्णन
Simple harmonic motion	सरल आवर्त गति
Time period	आवर्तकाल

ignou THE PEOPLE'S UNIVERSITY

प्रयोग 7

केटर के लोलक द्वारा गुरुत्वीय त्वरण का निर्धारण

प्रयोग की रूपरेखा

7.1 प्रस्तावना
अपेक्षित कौशल

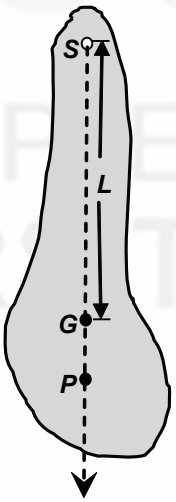
7.2 केटर के लोलक का मूलभूत सिद्धांत और संरचना

7.3 केटर के लोलक के साथ प्रयोग
उपकरण व्यवस्था
मापन विधि

7.4 शब्दावली

7.1 प्रस्तावना

आप जानते हैं कि किसी निलंबन बिंदु के (point of suspension) परितः आवर्ती दोलन (harmonic oscillation) करते हुए दृढ़ पिंड को पिंड लोलक कहते हैं। पिछले प्रयोग में आपने एक दंड लोलक के साथ प्रयोग किया था, जो एक नियमित आकार का दृढ़ पिंड होता है और जिसका गुरुत्व केंद्र (centre of gravity) इसके केंद्रक (पिंड-केंद्र) के साथ संपाती होता है। किंतु व्यवहार में दृढ़ पिंड की आकृति अनियमित हो सकती है और आवश्यक नहीं है कि इसका गुरुत्व केंद्र इसके केंद्रक पर स्थित हो। चित्र 7.1 में एक प्रारूपिक पिंड लोलक दर्शाया गया है। जब यह लोलक मुक्त लटकता है तो G बिंदु द्वारा प्रदर्शित इसका गुरुत्व केंद्र इसके निलंबन बिंदु S के ऊर्ध्वाधरतः नीचे होता है। जब इस लोलक को एक छोटा कोणीय विस्थापन दिया जाता है तो यह अपनी संतुलन स्थिति के परितः सरल आवर्ती दोलन करता है।



चित्र 7.1: संयुक्त लोलक।

इस प्रकार के लोलक में गुरुत्व केंद्र की दूसरी तरफ एक अन्य बिंदु P होता है जो उतने ही दोलनकाल के संगत होता है। इसे **दोलन केंद्र** (Centre of Oscillation) कहते हैं (अगले पृष्ठ पर हाशिया देखें)।

दंड लोलक के प्रयोग में आपने देखा था कि जब निलंबन बिंदु S और गुरुत्व केंद्र G के बीच की दूरी L हो तो, दोलन केंद्र के संगत बिंदु P, G की दूसरी ओर $\frac{k^2}{L}$ की दूरी पर होता है जहां k_r पिंड के G से गुजरने वाले अक्ष के लिए परिभ्रमण त्रिज्या है। अतः S और P के बीच की दूरी, होती है।

$$L' = L + \frac{k_r^2}{L} = \frac{L^2 + k_r^2}{L} \qquad (7.1)$$

अर्थात् दोलन केंद्र निलंबन बिंदु से सरल लोलक की L' तुल्य लंबाई की दूरी पर पड़ता है। चूँकि इन दोनों बिंदुओं के लिए दोलन-काल समान है, इन बिंदुओं को हम अदला-बदली करके प्रयोग में ला सकते हैं। इस प्रयोग में आप इन दोनों बिंदुओं के लिए दोलन काल माप कर गुरुत्वीय त्वरण परिकलित करने के लिए केटर के लोलक का उपयोग करेंगे।

दोलन केन्द्र खेलों से जुड़े उन व्यक्तियों के लिए बहुत महत्वपूर्ण होता है जिनको अपने खेल के लिए बल्ले (या रेकैट) का उपयोग करना होता है। यदि गेंद बल्ले के दोलन-केंद्र पर टकराती है तो बल्ला गेंद के प्रतिघात के फलस्वरूप केवल घूमता है किंतु खिलाड़ी के हाथ को इस प्रतिघात के प्रभाव का अनुभव नहीं होता। यह बिंदु आघात केंद्र अथवा मधुर बिंदु भी कहलाता है।

अपेक्षित कौशल

इस प्रयोग को संपन्न करने के बाद आप :

- केटर के लोलक की संरचना समझ सकेंगे;
- केटर के लोलक का उपकरण संयोजित कर सकेंगे;
- इस संयोजन का गुरुत्व केंद्र निश्चित करके लोलक को संतुलित कर सकेंगे;
- निलंबन बिंदु और दोलन केंद्र पर दोलन कालों के प्रेक्षण ले सकेंगे; और
- प्रेक्षित दोलन कालों से गुरुत्वीय त्वरण परिकलित कर सकेंगे।

इस प्रयोग के लिए आपको निम्नलिखित उपकरणों की आवश्यकता होगी।

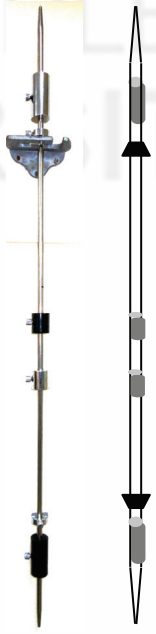
आवश्यक उपकरण

केटर का लोलक, निलंबन हेतु दीवार पर स्थापित ब्रैकेट, मीटर पैमाना और विराम घड़ी।

अब हम इस प्रयोग के मूलभूत सिद्धांत और उपकरण की संरचना की चर्चा करते हैं।

7.2 केटर के लोलक का मूलभूत सिद्धांत और संरचना

कैटर का लोलक निलंबन बिंदु एवं दोलन केंद्र के परस्पर विनिमय पर आधारित पिंड लोलक है। इसमें एक लगभग 1 m लम्बी धातु की वृत्ताकार अनुप्रस्थ काट की छड़ होती है जिसमें दो क्षुर-धार (knife edges) लगे होते हैं। छड़ के सिरों और क्षुर-धारों के बीच m_1 एवं m_2 भार के दो सिलिंडर लगे होते हैं। ये सिलिंडर समान आकार के किंतु भिन्न-भिन्न पदार्थों जैसे लकड़ी और धातु के बने होते हैं। इससे छड़ के अनुदिश भार-वितरण असममित हो जाता है और इस कारण गुरुत्व केंद्र G इसके ज्यामितीय केंद्र से विस्थापित हो जाता है। दो क्षुर-धारों के बीच धातु और लकड़ी से बने दो सरकवाँ प्रतितोलक भार (W_1 एवं W_2) लगे होते हैं। चित्र 7.2क में केटर के लोलक का छायाचित्र तथा चित्र 7.2ख में इसका व्यवस्था आरेख दिखाया गया है।



(क) (ख)

चित्र 7.2: **कैटर के लोलक का (क) छायाचित्र और (ख) व्यवस्था आरेख।**

दो क्षुर-धारों और भारों की स्थितियों को इस प्रकार समंजित किया जाता है कि दोनों क्षुर-धारों के परितः लोलक का दोलनकाल समान हो। इस स्थिति में जब एक क्षुर-धार निलंबन बिंदु की तरह कार्य करता है तो दूसरा दोलन केंद्र को निरूपित करता है और दो क्षुर-धारों के बीच की दूरी सरल लोलक की तुल्य लंबाई L' के बराबर होती है, जिसके आवर्तकाल का व्यंजक निम्नलिखित होता है :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L'}{g}} \qquad (7.2)$$

अब मान लें कि क्षुर-धारों A_1 एवं A_2 के संगत आवर्तकाल क्रमशः T_1 और T_2 हैं। A_1 की G से दूरी L_1 तथा A_2 से G की दूरी L_2 होने पर समीकरण (7.1) से हमें प्राप्त होता है :

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1^2 + k_r^2}{L_1 g}} \quad \text{और} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L_2^2 + k_r^2}{L_2 g}}$$

अर्थात्

$$\frac{L_1 g T_1^2}{4\pi^2} = L_1^2 + k_r^2 \qquad (7.3\text{क})$$

तथा

$$\frac{L_2 g T_2^2}{4\pi^2} = L_2^2 + k_r^2 \qquad (7.3\text{ख})$$

कुछ बीज क्रियाओं के बाद हमें गुरुत्वीय त्वरण के व्यंजक प्राप्त होता है (हाशिया देखें) :

$$g = \frac{8\pi^2}{\frac{T_1^2 + T_2^2}{L_1 + L_2} + \frac{T_1^2 - T_2^2}{L_1 - L_2}} \qquad (7.4)$$

जब T_1 और T_2 के मान एक-दूसरे के बहुत निकट हों तो हर में द्वितीय पद नगण्य हो जाता है और हम लिख सकते हैं :

$$g = \frac{8\pi^2 (L_1 + L_2)}{T_1^2 + T_2^2} \qquad (7.5)$$

जब कैटर का लोलक सही ढंग से संतुलित होता है तो $T_1 = T_2 (= T)$ होता है और तब हमें प्राप्त होता है :

$$g = \frac{4\pi^2 (L_1 + L_2)}{T^2} \qquad (7.6)$$

अब संतुलन अवस्था में, दो क्षुर-धारों के बीच की लंबाई सरल लोलक की समतुल्य लंबाई को निरूपित करती है।

समीकरण (7.3क) में से (7.3ख) घटाने पर

$$\frac{g}{4\pi^2}(L_1T_1^2 - L_2T_2^2) = L_1^2 - L_2^2$$

$$\therefore \frac{4\pi^2}{g} = \frac{L_1T_1^2 - L_2T_2^2}{L_1^2 - L_2^2}$$

आंशिक भिन्न विधि का प्रयोग करने पर

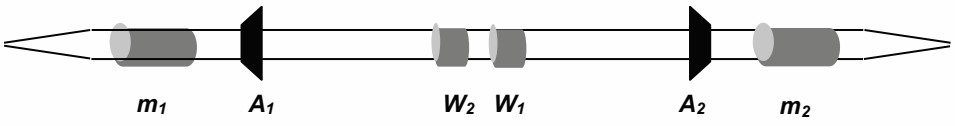
$$\frac{4\pi^2}{g} = \frac{T_1^2 + T_2^2}{2(L_1 + L_2)} + \frac{T_1^2 - T_2^2}{2(L_1 - L_2)}$$

7.3 केटर के लोलक के साथ प्रयोग

आप जान चुके हैं कि केटर के लोलक की संरचना काफी जटिल होती है। अतः मापन आरंभ करने से पूर्व सारे अवयवों को ठीक तरीके से व्यवस्थित करना अत्यंत महत्वपूर्ण है। उपकरण को आप निम्नलिखित चरणों का अनुसरण करके व्यवस्थित करें।

7.3.1 उपकरण व्यवस्था

1. लोलक को एक मेज़ पर क्षैतिजतः रखिए और क्षुर-धारों तथा भारों (A_1 और A_2) को चित्र 7.3 में दर्शाए अनुसार छड़ पर व्यवस्थित कीजिए।



चित्र 7.3: केटर के लोलक की व्यवस्था।

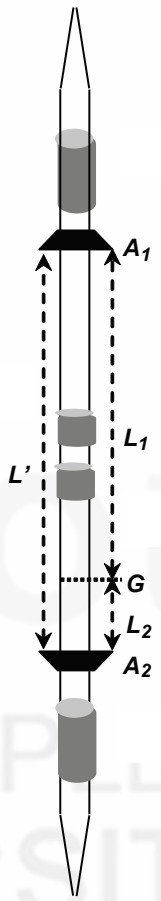
यहाँ m_1 और W_1 लकड़ी के बने भार है तथा m_2 एवं W_2 धातु के बने भार हैं जो m_1 और W_1 की अपेक्षा काफी भारी हैं।

2. प्रतितोलक भारों W_1 एवं W_2 को चित्र में दिखाए अनुसार छड़ के मध्य में रखिए।
3. क्षुर-धारों A_1 एवं A_2 को छड़ के दोनों सिरों से लगभग 20 cm की दूरी पर इस प्रकार व्यवस्थित कीजिए कि उनके धारदार किनारे एक दूसरे के आमने-सामने हों।
4. m_1 एवं m_2 को छड़ के दो सिरों से लगभग 15 cm की दूरी पर स्थिर कीजिए।
5. अब मीटर पैमाने को मेज़ पर रखिए और क्षुर-धारों के बीच की दूरी (L') मापिये और प्रेक्षण सारणी 7.1 में लिखिए। यह दूरी छड़ की लंबाई के अनुसार 65 से 75 cm होगी तथा पूरे प्रयोग के दौरान L' अचर बनी रहेगी।

7.3.2 मापन विधि

1. इस लोलक को अब तेज धार के किसी पिंड जैसे कि मीटर पैमाने पर क्षैतिजतः रखिए और संतुलित करके इस व्यवस्था का गुरुत्व केंद्र ज्ञात कीजिए। इसके लिए वह बिंदु (G) चिह्नित कीजिए जिस पर यह पूरी तरह क्षैतिजतः संतुलित हो जाए। यह लोलक की संतुलन अवस्था है। इस बिंदु और क्षुर-धार A_1 के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए, जैसा कि चित्र 7.4 में दर्शाया गया है। इसे प्रेक्षण सारणी 7.1 में क्रम संख्या 1 पर लंबाई L_1 के रूप में दर्ज कीजिए। G और A_2 के बीच की दूरी को L_2 के रूप में नोट कीजिए। स्पष्टतः आप पाएंगे कि $L_1 + L_2 = L'$.
2. अब लोलक व्यवस्था को दीवार के ब्रैकेट पर ऊर्ध्वाधरतः क्षुर-धार A_1 से लटकाइये। सुनिश्चित कीजिए कि केवल क्षुर-धार ही ब्रैकेट पर काँच की स्लाइड को स्पर्श करे और लोलक का कोई अन्य भाग दीवार पर लगे ब्रैकेट से न छुए।
3. अब लोलक को हलके से दोलन दीजिए ताकि वह सहारा देने वाली दीवार के समान्तर तल में बिना कहीं भी छुए सरल आवर्ती गति करें।

   विराम घड़ी का उपयोग करके 5 दोलनों का समय मापें और इसे सारणी 7.1 में क्रम संख्या 1 के सामने नोट करें। एक दोलन के लिए समय $t_1 = \frac{T_1}{5}$ का परिकलन करें।
4. अब लोलक व्यवस्था को घुमाकर उल्टा करें और इसे क्षुर-धार A_2 से निलंबित रखें। फिर से 5 दोलनों का समय मापें और इसे T_2 के रूप में नोट करें। एक दोलन का समय $t_2 = \frac{T_2}{5}$ परिकलित करें।
5. अब लोलक को ब्रैकेट से उतारें और इसे क्षैतिजतः मेज़ पर रखें।
6. भार W_2 को A_1 की ओर 1 cm खिसकाएं और इसे अच्छी तरह से कस दें।



चित्र 7.4: केटर के लोलक पर विभिन्न लंबाइयां।

7. G की नई स्थिति प्राप्त करें। अब चरण 1 में दिए गए विधि के अनुसार L_1 एवं L_2 के नए मान नोट करें। इन मानों को प्रेक्षण सारणी 7.1 में क्रम संख्या 2 पर दर्ज कीजिए।

8. चरण 2 से 4 में दिए गए विधि को फिर से दोहरा कर, T_1 एवं T_2 के मान क्रम संख्या 2 के सामने नोट कीजिए और नए t_1 एवं t_2 परिकलित कीजिए।

9. यदि t_1 एवं t_2 के बीच अंतर क्रम संख्या 1 पर प्राप्त प्रेक्षणों के संगत मानों से कम हों तो W_2 को A_1 की ओर 1 cm की दूरी से खिसकाना जारी रखिए। यदि यह अंतर अधिक हो तो W_2 को A_2 की ओर (विपरीत दिशा में) खिसकाइए।

10. L_1, L_2, T_1 एवं T_2 प्राप्त करने के लिए चरण 2 - 4 दोहराइये, प्रेक्षण सारणी 7.1 में अगली क्रम संख्याओं (क्रम संख्या 3 से आगे) के सामने नोट कीजिए और t_1 एवं t_2 परिकलित कीजिए।

11. चरण 9 में दी गयी कसौटी के द्वारा छड़ पर W_2 की गति की दिशा का निर्णय कीजिए और उपर्युक्त प्रक्रिया को दोहराइये।

12. माप W_2 को खिसकाने और t_1 और t_2 को मापने का क्रम तब तक जारी रखें जब तक उनके बीच अंतर 0.01 s से कम न रह जाए ($|t_1-t_2| < 0.01$s)।

13. अब T_1 एवं T_2 के माप 20-20 दोलनों के लिए लीजिए और उन्हें प्रेक्षण सारणी 7.2. में दर्ज कीजिए। T_1 और T_2 को 20 से विभाजित करके t_1 और t_2 के मान परिकलित कीजिए। देखिए कि t_1 और t_2 के बीच अंतर क्या अभी भी 0.01s से कम है। यदि नहीं, तो W_1 (लकड़ी का प्रतितोलक भार) को खिसकाइये और 20 दोलनों के लिए चरण 2-10 दोहराइये जब तक कि आपको संतुलन अवस्था न मिल जाए। (चूँकि W_1 भार W_2 की अपेक्षा बहुत हल्का है t_1 और t_2 को थोड़ा-सा भी प्रभावित करने के लिए हमें W_1 को अपेक्षाकृत अधिक दूरी तक खिसकाना होगा। अतः सूक्ष्म समंजन के लिए इसका उपयोग किया जाता है।)

14. जब आप 20 दोलनों के लिए संतुलन स्थिति प्राप्त कर लेते हैं तो चरण 2 - 4 को 50 दोलनों के लिए दोहराइये और T_1 एवं T_2 के मान प्रेक्षण सारणी 7.3 में दर्ज कीजिए। इस मापन को बिना W_1 और W_2 की स्थिति से छेड़छाड़ किए 3 बार दोहराएं और प्रत्येक बार t_1 और t_2 के मानों का परिकलन T_1 एवं T_2 को 50 से विभाजित करके प्राप्त कीजिए।

15. t_1 और t_2 के औसत मान परिकलित कीजिए और उन्हें प्रेक्षण सारणी 7.3 में दर्ज कीजिए।

16. अब लोलक को दीवार के ब्रैकेट से उतारिए और मेज पर क्षैतिजतः रखिये। चरण 1 का अनुसरण करके L_1 और L_2 के मान ज्ञात कीजिए और उन्हें सारणी 7.3 में दर्ज कीजिए।

17. $L_1 + L_2 = L'$ का परिकलन कीजिए। L' का मान वही होना चाहिए जो आप को उपकरण व्यवस्था (भाग 7.3.1) के चरण 5 में प्राप्त हुआ था, और जिसे आपने प्रेक्षण सारणी 7.1 में दर्ज किया था।

18. $L_1 - L_2 = L''$ का परिकलन कीजिए।

19. समीकरण (7.4) में दिए गए सूत्र का उपयोग करके g का मान परिकलित कीजिए।

प्रेक्षण :

प्रेक्षण सारणी 7.1: W_2 (धातु) को खिसका कर लिए गए पाठ्यांक

क्षुर-धारों के बीच दूरी = L' = …….. cm = ……m

क्र. सं.	L_1(m)	L_2(m)	A_1 से लटका कर 5 दोलनों के लिए लिया गया समय T_1 (s)	A_2 से लटका कर 5 दोलनों के लिए लिया गया समय T_2 (s)	$t_1 = \frac{T_1}{5}(s)$	$t_2 = \frac{T_2}{5}(s)$
1.						
2.						
3.						
⋮						

प्रेक्षण सारणी 7.2: W_1 (काष्ठ) को खिसका कर लिए गए प्रेक्षण

क्र. सं.	L_1(m)	L_2(m)	20 दोलनों के लिए T_1 (s)	20 दोलनों के लिए T_2 (s)	$t_1 = T_1/20$(s)	$t_2 = T_2/20$(s)
1.						
2.						
3.						
4.						

प्रेक्षण सारणी 7.3: 50 दोलनों के लिए पाठ्यांक

क्र. सं.	50 दोलनों के लिए T_1 (s)	50 दोलनों के लिए T_2 (s)	$t_1 = T_1/50$ (s)	$t_2 = T_2/50$ (s)	औसत t_1 (s)	औसत t_2 (s)
1.						
2.						
3.						

संतुलित लम्बाई L_1 (A_1 से G तक) = …….. cm = ……m

संतुलित लम्बाई L_2 (A_1 से G तक) = …….. cm = ……m

परिकलनः

$$L_1 - L_2 (= L'') = ...\text{m}$$

$$L_1 + L_2 (= L') = ...\text{m}$$

प्रेक्षण सारणी 7.3 में लिखे गए औसत मानों से परिकलन कीजिए :

$$t_1^2 = ...\text{s}^2$$

$$t_2^2 = ...\text{s}^2$$

समीकरण (7.4) से गुरुत्वीय त्वरण का परिकलन करें, तो :

$$g = \frac{8\pi^2}{\frac{t_1^2 + t_2^2}{L_1 + L_2} - \frac{t_1^2 - t_2^2}{L_1 - L_2}} \text{ms}^{-2}.$$

$$= \frac{8\pi^2}{\frac{t_1^2 + t_2^2}{L'} - \frac{t_1^2 - t_2^2}{L''}} \text{ms}^{-2}.$$

परिणाम :

गुरुत्वीय त्वरण g = ... ms^{-2}.

7.4 शब्दावली

Centre of gravity	गुरुत्व केंद्र
Centroid	केंद्रक
Harmonic oscillation	आवर्ती दोलन
Knife edge	क्षुर-धार
Point of suspension	निलंबन बिंदु

प्रयोग 8

कमानी-द्रव्यमान निकाय की गति का अध्ययन : कमानी नियतांक तथा गुरुत्वीय त्वरण का निर्धारण

प्रयोग की रूपरेखा

8.1 प्रस्तावना
अपेक्षित कौशल

8.2 कमानी-द्रव्यमान तंत्र का सिद्धांत

8.3 कमानी नियतांक का निर्धारण
स्थैतिक विधि द्वारा k का निर्धारण
गतिक विधि द्वारा k का निर्धारण

8.4 गुरुत्वीय त्वरण का निर्धारण

8.5 शब्दावली

8.1 प्रस्तावना

पिछले प्रयोग में केटर के लोलक (Kater's pendulum) का उपयोग कर आप गुरुत्वीय त्वरण का निर्धारण कर चुके हैं। अब हम कमानी-द्रव्यमान तंत्र का उपयोग कर कमानी नियतांक और गुरुत्वीय त्वरण, g का परिकलन करेंगे।

हमारे दैनिक जीवन में सर्पिल कमानियों के अनेक उपयोग हैं। ट्रांजिस्टर सेट और पॉकेट परिकलित्र (pocket calculator) में कमानियों का उपयोग शुष्क सेलों को उनके स्थान पर बनाए रखने के लिए किया जाता है। कमानियों का उपयोग मोटर गाड़ियों और रेल के डिब्बों में शॉक एब्जार्बर के रूप में भी होता है। आपने स्वयं कभी बुल-वर्कर का उपयोग किया होगा या फिर किसी बॉडी बिल्डर को इसका प्रयोग करते हुए अवश्य देखा होगा। क्या आप जानते हैं कि बुल-वर्कर में भी कमानियाँ होती हैं? हाथ की घड़ियों में कमानियां तंत्र के दोलनों को नियंत्रित करती हैं। उपरोक्त सभी उदाहरणों में प्रयुक्त कमानियों में आधारभूत अंतर उनके कमानी नियतांक (spring constant) के भिन्न–भिन्न मानों के कारण होता है। अतः किसी विशेष उद्देश्य के लिए कैसी कमानी का उपयोग करना चाहिए, यह सुनिश्चित करने के लिए आपको कमानी के नियतांक का मान ज्ञात होना चाहिए। भौतिकी प्रयोगशाला में आप कमानी नियतांक k का मान दो विधियों से ज्ञात कर सकते हैं:

i) दिए हुए भार के लिए कमानी की लंबाई में वृद्धि ज्ञात करके (स्थैतिक विधि); और

ii) कमानी-द्रव्यमान तंत्र के आवर्ती दोलनों का आवर्तकाल ज्ञात करके (गतिक विधि)।

इस प्रयोग में आप भाग 8.2 में कमानी द्रव्यमान तंत्र के सिद्धान्त के बारे में पढ़ेंगे। भाग 8.3 में आप कमानी नियतांक का परिकलन करना सीखेंगे और गुरुत्वीय त्वरण g का मान निकालेंगे।

अपेक्षित कौशल

इस प्रयोग को करने के बाद आप:

- दिए हुए भार के लिए कमानी की लंबाई में वृद्धि माप कर कमानी-नियतांक (k) परिकलित कर सकेंगे (स्थैतिक विधि);
- कमानी पर लगे भिन्न भारों के लिए दोलन का आवर्तकाल माप कर कमानी नियतांक (k) परिकलित कर सकेंगे (गतिक विधि);
- स्थैतिक और गतिक विधियों की परिशुद्धताओं की तुलना कर सकेंगे; और
- गुरुत्वीय त्वरण g का मान निर्धारित कर सकेंगे।

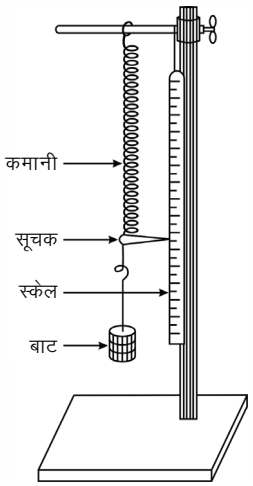
इस प्रयोग के लिए आवश्यक उपकरणों की सूची नीचे दी गई है।

आवश्यक उपकरण

एक सर्पिल कमानी, 100 g के गुणज में खांचेदार बाट, विराम घड़ी, प्रयोगशाला स्टैण्ड और 50 cm का स्केल

8.2 कमानी-द्रव्यमान तंत्र का सिद्धांत

प्रयोग 6 में आपने इस प्रश्न का उत्तर ढूंढ़ा था : दंड लोलक के आवर्तकाल T के मानों को कौन-सी भौतिक राशि निर्धारित करती है? अब आप यह प्रश्न कर सकते हैं: क्या हम इसी प्रकार का अध्ययन कमानी-द्रव्यमान निकाय के लिए भी कर सकते हैं? हां, ऐसा किया जा सकता है। इस प्रयोग में आप कमानी के कमानी-नियतांक का परिकलन दो विधियों से करेंगे: (i) दिये हुए भार के लिए कमानी की लंबाई में हुई वृद्धि को ज्ञात करके, और (ii) एक कमानी-द्रव्यमान निकाय के आवर्ती दोलनों का आवर्तकाल माप कर।



चित्र 8.1: कमानी-द्रव्यमान तंत्र।

चित्र 8.1 देखें जिसमें कमानी और मीटर स्केल को साथ-साथ स्टैण्ड से लटकाया गया है। कमानी के निचले वाले सिरे पर एक नुकीला सूचक (सुई) लगाएं। यदि सूचक उपलब्ध न हो तो आप एक दफ्ती को त्रिभुजाकार काटकर एक सूचक बना लीजिए। त्रिभुज के आधार को कमानी के निचले सिरे पर इस प्रकार लगायें कि गतिमान होने पर इस त्रिभुजाकार सूचक का शीर्ष स्केल के साथ बना रहे। ऐसा करने से लंबन त्रुटि (parallax error) कम करने में मदद मिलती है। कमानी के हुक से एक हैंगर (जो स्वयं किसी बाट के ज्ञात भार के बराबर होता है) लटका दीजिए। (विकल्प के रूप में आप कमानी के निचले सिरे पर एक पलड़ा बांध कर भी बाट रख सकते हैं।) सामान्यतः यह उचित होगा कि हुक पर एक प्रारंभिक भार लगा दिया जाए जिससे कि कमानी में निकुंच

(kinks) तथा अन्य असंगतियां कम हो जाए। इसका अभिप्राय है कि इस प्रयोग में प्रारंभिक स्थिति के चयन का कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

हैंगर को नीचे की ओर थोड़ा सा खींचकर कमानी को छोड़ दीजिए। ऐसा करने पर कमानी-द्रव्यमान निकाय ऊर्ध्वाधर दोलन करने लगेगा। आप सुनिश्चित करें कि सूचक कहीं भी न अटके और मुक्त रूप से दोलन करता रहे। अब आपका उपकरण तैयार है और आप अपना प्रयोग शुरू कर सकते हैं। परन्तु प्रयोग प्रारंभ करने से पहले आप कुछ समय यह गुणात्मक (qualitative) प्रेक्षण करने में लगाएं कि जब द्रव्यमान को **प्रत्यास्थ सीमा** (elastic limit) के अंतर्गत परिवर्तित करते हैं तो कमानी की लंबाई में वृद्धि एवं आवर्तकाल में क्या परिवर्तन आता है। प्रत्यास्थता सीमा अलग-अलग कमानियों के लिए अलग-अलग होती है। अतः कमानी पर भार रखने से पहले आपको अपने परामर्शदाता से इस संबंध में सलाह ले लेनी चाहिए।

जब किसी पिंड पर बाह्य बल लगाया जाता है तब वह अपना आकार और साइज़ बनाए रखने का प्रयास करता है और जैसे ही बाह्य बल हटाया जाता है, वह अपनी पूर्व स्थिति में आ जाता है। इस गुणधर्म को **प्रत्यास्थता** (elasticity) कहते हैं। इसकी अधिकतम सीमा को **प्रत्यास्थता सीमा** कहते हैं। यदि बाह्य बल प्रत्यास्थता सीमा से अधिक हो तो स्थाई विरूपण (permanent deformation) हो जाता है और बल हटाने पर भी पिंड अपना मूल आकार और साइज़ पुनः प्राप्त नहीं कर सकता।

जब हम बाट रखकर कमानी पर भार लटकाते हैं तो प्रत्यास्थता (elasticity) के कारण कमानी में प्रत्यानयन बल जनित हो जाता है। प्रत्यानयन बल लगाए गए बल का विरोध कर तंत्र को पुनः उसकी मूल स्थिति में लौटाने का प्रयास करता है। जब कमानी में हुआ विस्तार इसकी प्रारंभिक लंबाई की तुलना में कम होता है तो तनित कमानी द्वारा द्रव्यमान पर लगे प्रत्यानयन बल (F) का परिमाण निम्न समीकरण द्वारा दिया जाता है:

$$F = -kx \qquad (8.1)$$

जहां x कमानी की लंबाई में हुई वृद्धि और k कमानी नियतांक हैं।

समीकरण (8.1) से यह स्पष्ट है कि यदि हम भार के फलन के रूप में कमानी की लंबाई में हुए विस्तार को ज्ञात कर लें तो k का परिकलन सरलता से किया जा सकता है। इसी उद्देश्य से हमने कमानी के निचले सिरे पर एक सूचक लगाया है। k ज्ञात करने की इस विधि को **स्थैतिक विधि** कहते हैं।

अब आप यह जानना चाहेंगे: क्या k ज्ञात करने की कोई और भी विधि है? इसके लिए हम तथाकथित गतिक विधि (dynamic method) का प्रयोग करते हैं। यह विधि कमानी-द्रव्यमान निकाय के आवर्ती दोलनों के आवर्तकाल पर आधारित है।

पाठ्यक्रम 'यांत्रिकी' की इकाई 16 में आप पढ़ चुके हैं कि कमानी-द्रव्यमान निकाय भी एक सरल लोलक की तरह सरल आवर्त गति करता है, बशर्ते कि कमानी की लम्बाई में वृद्धि अधिक न हो। हमारे मन में एक अन्य प्रश्न यह उठता है: क्या दोलनों की आवृत्ति को गुरुत्व बल प्रभावित करता है? आप जानते हैं कि दोलनों की आवृत्ति पर गुरुत्व का कोई प्रभाव नहीं होता। दोलन का आवर्तकाल निम्न व्यंजक द्वारा दिया जाता है:

$$T = 2\pi\sqrt{m/k} \qquad (8.2)$$

इस संबंध से यह पता चलता है कि किसी भी द्रव्यमान के लिए दोलनों का आवर्तकाल ज्ञात होने पर हम k का मान परिकलित कर सकते हैं। m का मान कमानी की प्रकृति पर निर्भर करता है। यदि कमानी पतली है तो m का मान कुछ ग्राम ही होगा।

8.3 कमानी नियतांक का निर्धारण

जैसाकि हम पिछले भाग में बता चुके हैं, कमानी नियतांक का निर्धारण दो विधियों द्वारा किया जा सकता है: स्थैतिक विधि और गतिक विधि। अब हम इन विधियों द्वारा k का निर्धारण समझाएंगे।

8.3.1 स्थैतिक विधि द्वारा k का निर्धारण

k के निर्धारण की स्थैतिक विधि में निम्नलिखित चरण हैं :

1. एक बाट रखकर कमानी पर भार लटकाइए और सूचक (pointer) की संगत साम्य स्थिति को रिकॉर्ड कीजिए। स्केल पर सूचक की इस साम्यावस्था स्थिति को प्रेक्षणों का प्रारंभिक बिन्दु मान लीजिए। आप इस पाठ्यांक (reading) को प्रेक्षण सारणी 8.1 में लिखें।
2. हर बार बराबर बाट रखकर भार बढ़ाइए।
3. प्रत्येक भार के लिए सूचक की स्थिति रिकॉर्ड कीजिए।
4. पाठ्यांक लेने से पहले कुछ समय प्रतीक्षा कीजिए ताकि सूचक विरामावस्था में आ जाए।
5. इस तरह आप कम से कम छः पाठ्यांक लीजिए।

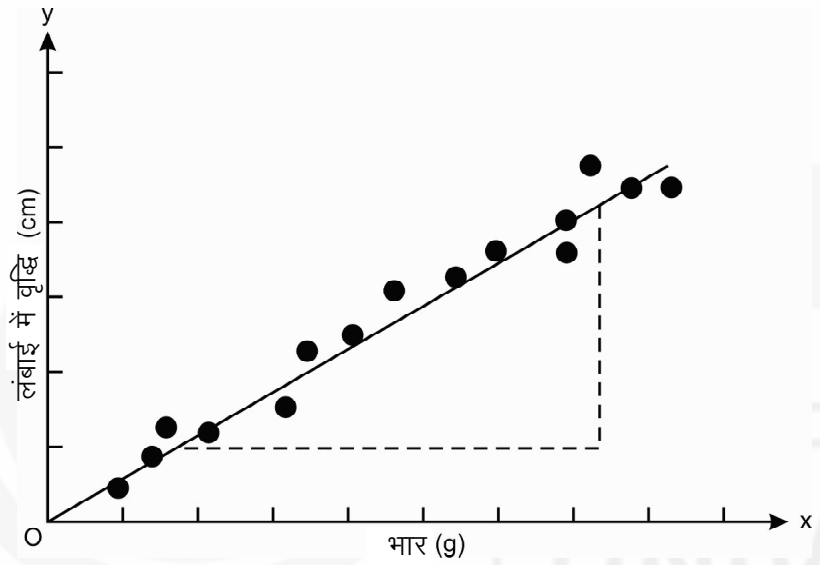
प्रेक्षण सारणी 8.1: भार के फलन के रूप में कमानी का विस्तार

क्र. सं.	कमानी पर लगा भार (g)	सूचक का पाठ्यांक (cm)		
		भार बढ़ाते समय	भार कम करते समय	माध्य मान
1				
2				
3				
4				
5				
6				

यह सुनिश्चित करने के लिए आप अनुमेय प्रत्यास्थता सीमा के अंतर्गत ही कार्य कर रहे हैं, कमानी से उन्हीं चरणों में भार हटाकर सूचक की स्थिति पुनः पढ़िए। आप अपने प्रेक्षणों को पुनः प्रेक्षण सारणी 8.1 में लिखिए। क्या ये पाठ्यांक कमानी पर भार बढ़ाते हुए

लिए गए पाठ्यांकों से भिन्न हैं? यदि किसी भार के लिए कमानी पर बाट रखते और उतारते समय लिए गए प्रेक्षण लगभग समान हों, तो यह बात सुनिश्चित हो जाती है कि आप प्रत्यास्थता सीमा के अंतर्गत ही कार्य कर रहे हैं। फिर भी, प्रत्येक स्थिति में एक दिए भार के लिए सूचक के माध्य मान को देखना बेहतर होता है।

अब आपको भार और कमानी की लंबाई में संगत वृद्धि के बीच एक आरेख खींचना होगा। पारंपरिक रूप से हम स्वतंत्र चर राशि को *x*-अक्ष के अनुदिश और आश्रित चर राशि को *y*-अक्ष के अनुदिश आरेखित करते हैं। आप इस प्रयोग में *x*-अक्ष के अनुदिश किस भौतिक राशि को आरेखित करेंगे? स्पष्टतः भार को *x*-अक्ष के अनुदिश खींचना चाहिए। प्रेक्षित बिन्दुओं से गुजरती हुई श्रेष्ठतम आसंजन रेखा खींचिए, जैसाकि चित्र 8.2 में दिखाया गया है। (उत्तम इस्पात की कमानी के लिए, हम आशा करते हैं कि आरेख रैखिक (linear) होगा।)



चित्र 8.2: प्रेक्षित बिन्दुओं से गुजरती श्रेष्ठतम आसंजन रेखा।

क्या आपकी सरल रेखा मूल बिन्दु से गुजरती है? सरल रेखा की प्रवणता (slope) का व्युत्क्रम (inverse) परिकलित कर कमानी नियतांक का मान प्राप्त किया जा सकता है। प्रवणता का परिकलन करने के लिए खींची गई श्रेष्ठतम आसंजन रेखा पर पहले बताई गई विधि के अनुसार दो बिन्दु लीजिए। *g* का मान 9.8 ms^{-2} लेकर *k* का मान परिकलित कीजिए। अपने परिणाम को SI मात्रकों में व्यक्त कीजिए।

यदि द्रव्यमान *M* के संगत लंबाई में वृद्धि x_0 होती हो तो हम लिख सकते हैं कि

$Mg = kx_0$ (i)

ध्यान रहे कि यहां हम केवल परिमाण ले रहे हैं।

मान लीजिए कि अतिरिक्त भार *m* के संगत लंबाई में वृद्धि δ होती है। तब

$(M+m)\, g = k\,(x_0 + \delta)$ (ii)

(i) और (ii) को समायोजित कर हम *k* का मान निम्नलिखित व्यंजक से प्राप्त करते हैं:

$mg = k\delta$

या

$$k = \frac{mg}{\delta} = \frac{g}{\text{प्रवणता}} \quad \text{(iii)}$$

मान लें कि आपकी प्रयोगशाला में किसी वजह से आरेख कागज नहीं है। तब आप पूछ सकते हैं: *k* को किस तरह परिकलित करें? आपको (iii) का प्रयोग करना पड़ेगा। मान लें कि आपने सात पाठ्यांक लिए हैं। पाठ्यांकों 4 और 1; 5 और 2; 6 और 3; तथा 7 और 4 के बीच भार अंतर के लिए वृद्धि δ परिकलित करें। अतएव *k* परिकलित करें।

त्रुटि विश्लेषण (Error Analysis)

अधिकतम और न्यूनतम प्रवणताओं वाली रेखाएं खींच कर सरल रेखाओं की प्रवणता में परिवर्तन ज्ञात कीजिए। इससे प्रवणता की अधिकतम त्रुटि प्राप्त होती है। $g = 9.8\ ms^{-2}$ लेकर SI इकाई में *k* में त्रुटि का मान परिकलित कीजिए।

परिणाम : दी हुई कमानी का कमानी नियतांक = ... ± ..... Nm^{-1}

बोध प्रश्न 1 – स्थैतिक विधि

अपने आरेख से बताइए कि 2 N भार के कारण कमानी की लंबाई में कितना विस्तार हुआ है?

8.3.2 गतिक विधि द्वारा *k* का निर्धारण

इस प्रयोग में आपको नीचे दी गई विधि द्वारा सरल आवर्त दोलनों का आवर्तकाल ज्ञात करना होगा। आपको यह अवश्य सुनिश्चित करना होगा कि ऊर्ध्वाधरतः लटके तंत्र के दोलन अनुदैर्घ्य हों। अर्थात् कोई पार्श्व दोलन न हो। अन्यथा दोलन सरल आवर्ती नहीं होंगे।

1. हैंगर पर एक भार रखिए और स्केल पर सूचक की स्थिति को साम्यवस्था स्थिति मान लीजिए। अब हैंगर को थोड़ा नीचे खींचकर कमानी को फैलाइए और फिर छोड़ दीजिए। ऐसा करने पर तंत्र दोलन करने लगेगा। यदि कोई पार्श्व दोलन न हो, तो समझ लीजिए कि आपका उपकरण पूरी तरह व्यवस्थित है। इस दोलक को विरामावस्था में लाइए। आप यह भी सुनिश्चित करें कि दोलनों का आयाम 20-30 दोलन करने से पहले कम न हो।

2. विराम घड़ी का अल्पतमांक (least count) नोट करके उसे प्रेक्षण सारणी 8.2 में लिख लीजिए।

3. अब आप कमानी-द्रव्यमान तंत्र को दोलित कीजिए। प्रारंभ के कुछ दोलनों को छोड़ दीजिए ताकि दोलन में कोई अप्रसंवादी घटक (anharmonic component) न रहे। आप अपनी गिनती साम्यावस्था स्थिति से प्रारंभ कीजिए और साथ ही स्टॉप वाच चला दीजिए। *N*, मान लीजिए 30, पूर्ण दोलनों में लगा समय नोट करें।

4. *T* के मान में कम से कम त्रुटि हो, इसलिए 50 या इससे अधिक दोलनों में लगा समय मापना बेहतर होगा। लेकिन आप अवश्य सुनिश्चित कर लें कि दोलनों के आयाम में सार्थक रूप से कोई कमी न आए। अपने पाठ्यांक को प्रेक्षण सारणी 8.2 में लिखें। हैंगर पर कुछ और भार रखिए और इस प्रक्रिया को कम से कम पांच बार दोहराइए।

5. हर बार अपने प्रेक्षणों को सारणी में लिखिए।

6. आवर्तकाल में किस प्रकार का परिवर्तन होता है? पहले की भांति, चरणशः भार में कमी करते हुए प्रक्रिया को दोहरायें। प्रत्येक भार के लिए आवर्तकाल का माध्य परिकलित कीजिए।

प्रेक्षण सारणी 8.2: भार के फलन के रूप में समय का मापन

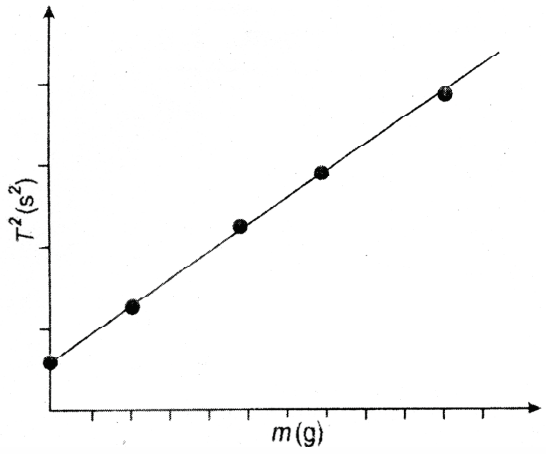
विराम घड़ी का अल्पतमांक = ... s

प्रत्येक बार गिनती किए गए पूर्ण दोलनों की संख्या (N) =.....

क्रम सं.	कमानी पर भार m (g)	N पूर्ण दोलनों में लगा समय (s)			आवर्तकाल $T = \frac{t}{N}$ (s)
		भार बढ़ते हुए	भार कम करते हुए	माध्य	
1.					
2.					
3.					
4.					
5.					
6.					

T^2 और m में आरेख खींचें। श्रेष्ठतम रेखा खींचिए, जैसा कि चित्र 8.3 में दिखाया गया है। क्या रेखा मूल बिन्दु से होकर गुजरती है? सरल रेखा की प्रवणता से आप k का मान सरलता से परिकलित कर सकते हैं।

7. जांच कीजिए कि यह मान और स्थैतिक विधि से प्राप्त मान समान हैं कि नहीं। दोनों मान लगभग समान होने चाहिए। (अगर आपको कमानी के k का मानक मान अपने परामर्शदाता या किसी पुस्तक से ज्ञात हो जाता है, तो आप जांच सकते हैं कि गतिक विधि अधिक परिशुद्ध है या स्थैतिक विधि।)



चित्र 8.3 : T^2 और m के मध्य अपेक्षित आरेख।

पहले की भांति आप यहाँ भी अधिकतम और न्यूनतम प्रवणताओं वाली रेखाएं खींचकर k के मान में त्रुटि अभिकलित कीजिए। k के मान में सापेक्ष परिवर्तन कितना होता है?

परिणाम : दी हुई कमानी का कमानी नियतांक = ... ±.....Nm^{-1}

बोध प्रश्न 2 – गतिक विधि

i) T^2 और m के आरेख को पीछे की ओर तब तक बहिर्वेशित (Extrapolate) कीजिए जब तक कि वह m-अक्ष से नहीं मिलता। m-अक्ष पर प्राप्त अंतःखंड की व्याख्या कीजिए।

ii) आरेख द्वारा 3N भार के लिए T का मान ज्ञात कीजिए।

8.4 गुरुत्वीय त्वरण का निर्धारण

स्थैतिक विधि तथा गतिक विधि का प्रयोग कर हम गुरुत्वीय त्वरण (g) का मान प्राप्त कर सकते हैं। सबसे पहले, हम समीकरण (8.2) को लेंगे और दोनों ओर वर्ग लेने पर इस समीकरण को पुनः निम्न रूप से लिखेंगेः

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k} \qquad (8.4)$$

चित्र 8.3 से, जो कि T^2 (y-अक्ष पर) और m (x-अक्ष पर) के बीच आरेख दर्शाता है, प्रवणता का मान $4\pi^2 / k$ अथवा $k = \frac{4\pi^2}{(\text{प्रवणता})}$ है। गतिक विधि का प्रयोग कर k का मान प्राप्त करने के बाद समीकरण (iii) जो कि भाग 8.2.1 के हाशिए की टिप्पणी में दिया है : $k = \frac{mg}{\delta} = \frac{g}{\text{प्रवणता}}$ (अथवा $g = k \times$ प्रवणता) का प्रयोग कर g का मान निकाला जा सकता है।

g का मान = ...

8.5 शब्दावली

Anharmonic component	अप्रसंवादी घटक
Dynamic method	गतिक विधि
Elasticity	प्रत्यास्थता
Extrapolated	बहिर्वेशित
Elastic limit	प्रत्यास्थता सीमा
Restoring couple	प्रत्यानयन बल-युग्म
Static method	स्थैतिक विधि
Suspension wire	निलंबन तार
Spring	कमानी
Spring constant	कमानी नियतांक

प्रयोग 9

सोनोमीटर का उपयोग कर स्वरित्र द्विभुज की आवृत्ति का निर्धारण

प्रयोग की रूपरेखा

9.1 प्रस्तावना
अपेक्षित कौशल

9.2 तनित तार में अप्रगामी तरंगें

9.3 तनाव बल के साथ तरंगदैर्घ्य में परिवर्तन

9.4 तार के प्रति इकाई लंबाई द्रव्यमान के साथ तरंगदैर्घ्य में परिवर्तन

9.5 तरंगदैर्घ्य और आवृत्ति में संबंध

9.6 शब्दावली

9.1 प्रस्तावना

पिछले प्रयोग में आपने कमानी-द्रव्यमान तंत्र का उपयोग कर कमानी नियतांक और गुरुत्वीय त्वरण के मानों का निर्धारण करना सीखा है। अब हम सोनोमीटर का उपयोग कर स्वरित्र द्विभुज की आवृत्ति का निर्धारण करेंगे।

आप सभी ने किसी संगीत समारोह, रेडियो या टेलीविजन पर सितार, वायलिन, गिटार, इकतारा जैसे तंतु-वाद्यों के मधुर संगीत का आनंद अवश्य लिया होगा। क्या आप जानते हैं कि ये सभी तंतु-वाद्य संगीत किस प्रकार जनित करते हैं? जब इन तंतु-वाद्यों के तारों को कर्षित (pluck), धनुरित (bowed) या आहत (strike) किया जाता है तो ये कंपित होते हैं तथा ध्वनि उत्पन्न करते हैं। ध्वनि की गुणवत्ता तनित तारों के कंपन की आवृत्ति (frequency) पर निर्भर करती है। अब प्रश्न उठता है कि तार के कंपनों की आवृत्ति किन कारकों पर निर्भर करती है? ये कारक तार की आवृत्ति से किस प्रकार संबद्ध हैं? इस प्रयोग में आप ऐसे प्रश्नों के उत्तर खोजेंगे।

एक वाद्य-यंत्र को दूसरे वाद्य-यंत्र के साथ समस्वरित करने का अर्थ है कि दोनों यंत्रों की आवृत्तियां समान हो जाएं।

आपने आर्केस्ट्रा में वायलिन वादक को दूसरे संगीतज्ञों के साथ अपने वाद्ययंत्र को समस्वरित करने के लिए इसकी खूंटियों को कसते या ढीला करते हुए देखा होगा। (जब किसी खूंटी को कसा या ढीला किया जाता है तो तार लपेटी या खोली जाती है।) इस प्रकार तार में तनाव बल परिवर्तित हो जाता है। इसका अर्थ यह है कि वायलिन के तार से उत्पन्न ध्वनि की आवृत्ति उसमें लगाए गए तनाव बल पर निर्भर करती है। क्या आप अन्य ऐसे प्राचलों (parameters) के बारे में सोच सकते हैं

जिन पर किसी कम्पित तार की आवृत्ति निर्भर करती है? यदि आप किसी धातु की भिन्न-भिन्न मोटाई वाले या भिन्न-भिन्न धातुओं के समान मोटाई वाले तार लें, तो आवृत्ति पर क्या प्रभाव पड़ता है? हम अपेक्षा करते हैं कि इन दोनों स्थितियों में कंपन की आवृत्तियां भिन्न होंगी। इसका अर्थ यह है कि कंपन की आवृत्ति को तार का प्रति इकाई लंबाई द्रव्यमान भी प्रभावित करता है।

आपने वीणा तो देखी होगी। इस संगीत वाद्य में असमान लंबाई के तार दो स्थाई सिरों से बंधे होते हैं। आपने यह भी देखा होगा कि वादक अपने वाद्य-यंत्र को समस्वरित करने के पश्चात् अपनी अंगुलियों को तारों के अनुदिश चला कर संगीत जनित करता है। इस प्रकार वह तार के कंपन की लंबाई को बदल कर विभिन्न स्वर उत्पन्न करता है। इसका अभिप्राय है कि किसी तार के कंपनों की आवृत्ति उसकी कंपायमान लंबाई पर भी निर्भर करती है। हम जानते हैं कि तार के कंपायमान खंड की लंबाई उसमें उत्पन्न अप्रगामी तरंगों के तरंगदैर्घ्य से संबंधित होती है। अतः हम यह अपेक्षा करते हैं कि तरंगदैर्घ्य और आवृत्ति के बीच एक निश्चित संबंध है।

इस प्रयोग का उद्देश्य यह जानना है कि तनित तार में उत्पन्न कंपनों की आवृत्ति इस पर लगे तनाव बल, इसके प्रति इकाई लंबाई द्रव्यमान तथा कंपायमान लंबाई पर किस प्रकार निर्भर करती है। इस प्रयोग में हम आवृत्ति में होने वाले किसी भी परिवर्तन को उस विशेष प्राचल के पदों में व्यक्त कर सकते हैं।

किसी भी तार में ज्ञात तरंगदैर्घ्य की तरंगों को स्थापित करना संभव है। परन्तु तार को ज्ञात आवृत्ति से कम्पित करना अधिक सहज होता है। इसलिए आप आवृत्ति को अचर रखकर तरंगदैर्घ्य पर तार के प्रति इकाई लंबाई द्रव्यमान और तनाव बल का प्रभाव ज्ञात करेंगे। अतः आप इस प्रयोग को तीन भागों में करेंगे। प्रथम भाग में आप तनाव बल पर तरंगदैर्घ्य की निर्भरता तार के कंपनों की आवृत्ति और प्रति एकक लंबाई द्रव्यमान को निश्चित रखकर ज्ञात करें। प्रयोग के दूसरे भाग में आप पता लगाएंगे कि (एक ही धातु की) विभिन्न मोटाई वाली या विभिन्न धातुओं की (समान मोटाई वाली) तारों पर तरंगदैर्घ्य कैसे निर्भर करता है। अर्थात् आप देखेंगे कि तार के प्रति इकाई लंबाई द्रव्यमान के साथ तरंगदैर्घ्य किस प्रकार परिवर्तित होता है जबकि तार के तनाव बल और कंपन की आवृत्ति में कोई परिवर्तन नहीं किया जाता। तीसरे भाग में आप तार के तनाव और प्रति इकाई लंबाई द्रव्यमान को नियत रखकर आवृत्ति और तरंगदैर्घ्य के बीच संबंध स्थापित करेंगे।

अपेक्षित कौशल

इस प्रयोग को करने के बाद, आपः

- तनित तार में अप्रगामी तरंगें स्थापित कर सकेंगे;
- तार में जनित अप्रगामी तरंगों के तरंगदैर्घ्य की तार पर लगे तनाव बल तथा इसके प्रति इकाई लंबाई द्रव्यमान पर निर्भरता ज्ञात कर सकेंगे;
- तरंगदैर्घ्य और आवृत्ति में संबंध स्थापित कर सकेंगे; और
- तार में अनुप्रस्थ तरंगों के वेग का व्यंजक प्राप्त कर सकेंगे।

इस प्रयोग में प्रयुक्त होने वाले उपकरणों की सूची नीचे दी गई है:

आवश्यक उपकरण

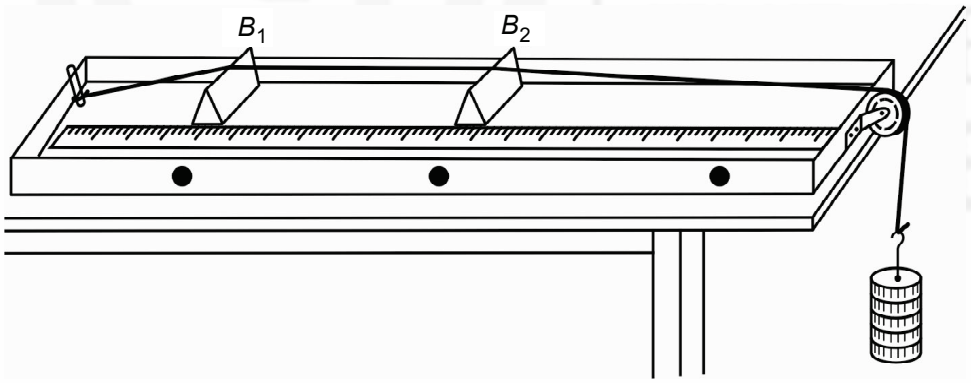
लोहे के भिन्न-भिन्न मोटाई के चार तार, या विभिन्न चुंबकीय धातुओं के चार तार, सोनोमीटर, हैंगर, खांचेदार बाट, 6 वोल्ट के प्रत्यावर्ती धारा ट्रांसफार्मर सहित विद्युत-चुंबक, छः विभिन्न ज्ञात आवृत्तियों के स्वरित्र द्विभुज, रबर पैड, मीटर स्केल, स्क्रू गेज, बाट-बॉक्स तथा रासायनिक तुला।

9.2 तनित तार में अप्रगामी तरंगें

अप्रगामी तरंगों की स्थापना

किसी भी तनित तार में तनाव बल (T) और इसके प्रति इकाई लंबाई द्रव्यमान (μ) का मापन बड़ी सरलता से किया जा सकता है। परन्तु तरंगदैर्घ्य को परिशुद्धता से ज्ञात करने के लिए हम **अप्रगामी तरंगें** (stationary waves) स्थापित करते हैं। अप्रगामी तरंगें दो विपरीत दिशाओं में गतिमान सर्वसम प्रगामी तरंगों (progressive waves) के अध्यारोपण (superposition) से जनित होती हैं। अप्रगामी तरंगें किसी भी दिशा में समय के साथ गतिमान नहीं होती। (यही कारण है कि कभी-कभी इन तरंगों को अप्रवाही तरंगें (standing waves) भी कहते हैं।) आपको अपने स्कूल के भौतिकी पाठ्यक्रम से याद होगा कि अप्रगामी तरंगों को वायु कॉलमों (air columns) और तनित तारों में जनित किया जा सकता है। इस प्रयोग में आप सोनोमीटर के तार में अप्रगामी तरंगें स्थापित करेंगे।

वह तरंग, जो माध्यम में ऊर्जा संचरित करती है, उसे प्रगामी तरंग कहते हैं। अप्रगामी तरंगों में ऊर्जा का स्थानांतरण नहीं होता।



चित्र 9.1: सोनोमीटर के तनित तार में अप्रगामी तरंगें।

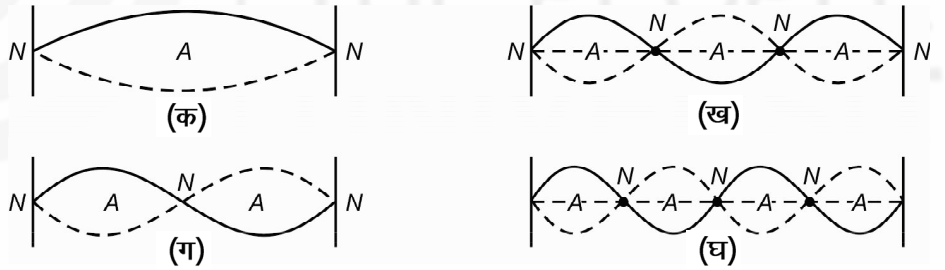
चित्र 9.1 देखें। इसमें सोनोमीटर दिखाया गया है, जिसमें लकड़ी के एक खोखले बॉक्स में वृत्ताकार छिद्र हैं। इसके एक सिरे पर खूंटी और दूसरे सिरे पर घिरनी (pulley) लगी है। तार का एक सिरा खूंटी से बंधा है और दूसरे सिरे पर घर्षण रहित घिरनी के ऊपर से एक हैंगर लटकाया गया है। (हैंगर के स्थान पर आप एक पलड़ा भी लगा सकते हैं।) हैंगर पर बाट रखकर तार को तनित किया जा सकता है। तार दो सेतुओं B_1 और B_2 के ऊपर से गुजरती है। सोनोमीटर के साथ प्रयोग करते समय तार और ध्वनि के स्रोत, जो स्वरित्र द्विभुज (tuning fork) या विद्युत-चुंबक (electromagnet) हो सकता है, को **स्वरैक्य** (unison) में कंपित किया जाता है। स्वरैक्य प्राप्त करने के लिए हम

जब सोनोमीटर तार की प्राकृतिक आवृत्ति ध्वनि स्रोत की आवृत्ति के समान होती है, तब तार स्रोत के साथ स्वरैक्य (unison) में कंपन करता है।

दोनों सेतुओं को खूंटी और घिरनी के बीच खिसका कर कंपित तार खंड B_1B_2 को समायोजित करते हैं। स्वरैक्य की स्थिति तब सुनिश्चित होती है जब सेतुओं के मध्य में तार अधिकतम आयाम से कपंन करता है तथा इसके मध्य में रखा V आकृति का कागज का राइडर नीचे गिर जाता है।

जब पिंड लगाए गए आवर्ती बल की आवृत्ति से कंपन करता है, तब प्रणोदित कंपन जनित होते हैं। इस स्थिति में दी गई बाह्य ऊर्जा, पिंड में क्षयित ऊर्जा के बराबर होती है।

आप स्कूल की भौतिकी कक्षाओं में सीख चुके हैं कि जब किसी कंपित स्वरित्र द्विभुज को सोनोमीटर के नाद पट (sounding board) पर रखा जाता है तो सोनोमीटर के अंदर की वायु कंपन करने लगती है। इससे तार में प्रणोदित कंपन (forced oscillations) होते हैं जिनके कारण अनुप्रस्थ तरंगें (transverse waves) उत्पन्न होती हैं। तार खंड B_1B_2 में ये अनुप्रस्थ तरंगें नियत बिन्दुओं B_1 और B_2 पर परावर्तित हो जाती हैं। इसके परिणामस्वरूप हमें विपरीत दिशाओं में आपतित और परावर्तित प्रगामी तरंगें प्राप्त होती हैं। इन तरंगों के अध्यारोपण (superposition) से अप्रगामी तरंगें उत्पन्न होती हैं। सेतुओं के बीच का तार एक या अधिक सुपरिभाषित खंडों (segments or loops) में कंपन कर सकता है, जैसाकि चित्र 9.2 में दिखाया गया है। आप देखेंगे कि तार कुछ बिन्दुओं पर हर समय गतिहीन रहता है। इसके विपरीत, कुछ अन्य बिन्दुओं पर तरंगें प्रबलित (reinforce) होती हैं और तार तेजी से कंपन करता है। जिन बिन्दुओं पर कंपन का आयाम शून्य होता है, उन्हें निस्पंद (nodes) कहते हैं और जिन बिन्दुओं पर आयाम अधिकतम होता है उन बिन्दुओं को प्रस्पंद (antinode) कहते हैं। इन्हें चित्र 9.2 में क्रमशः N और A से दर्शाया गया है। कंपन की सरलतम विधा वह होती है जिसमें तार एकल पाश (single loop) में कंपन करता है (चित्र 9.2क)। इस विधा के संगत कंपन की आवृत्ति को कंपन की **मूल आवृत्ति** (fundamental frequency) कहते हैं।



चित्र 9.2: दोनों सिरों पर बंधी तार में जनित अप्रगामी तरंगें।

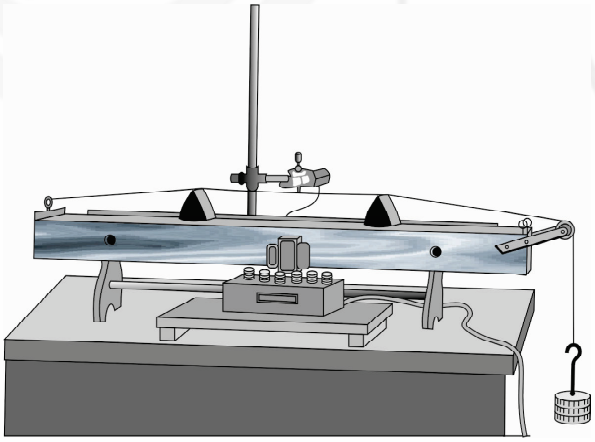
9.3 तनाव बल के साथ तरंगदैर्घ्य में परिवर्तन

प्रयोग के इस भाग में आपको तार के प्रति इकाई लंबाई द्रव्यमान (μ) और तार के कंपनों की मूल आवृत्ति को अचर रखना है। एक समान अनुप्रस्थ परिच्छेद वाले तार में μ अचर रहता है। तार के कंपन की मूल आवृत्ति को अचर रखने के लिए आप स्वरित्र द्विभुज या विद्युत-चुंबक का उपयोग कर सकते हैं। हम चाहेंगे कि यदि उपलब्ध हो तो आप विद्युत-चुंबक का ही उपयोग करें क्योंकि इसकी सहायता से तार प्रतिपालित कंपन (sustained vibrations) कर सकता है।

यदि आपको विद्युत-चुंबक उपलब्ध न हो तो ज्ञात आवृत्ति का स्वरित्र द्विभुज लीजिए। (इस संबंध में आप अपने परामर्शदाता से भी विचार-विमर्श कर सकते हैं।)

जैसा कि आप जानते हैं, हमारे कान संगीत की मधुरता को भली-भांति परख लेते हैं। अतः आप अपने कानों की सहायता से स्वरैक्य स्थिति प्राप्त करने के निकट आ सकते हैं। इसके लिए आप स्वरित्र द्विभुज को रबर पैड पर टकराकर कंपित करें और अपने कान के समीप लाएं। सेतुओं के बीच के सोनोमीटर तार को अपनी अंगुलियों से कंपित करें और अपने दूसरे कान को सोनोमीटर के तार के निकट लाइए। जब तक स्वरित्र द्विभुज एवं सोनोमीटर तार की आवृत्तियों में स्वरैक्य नहीं हो जाता तब तक आपको अलग-अलग आवृत्तियों की दो ध्वनियां सुनाई देती रहेंगी। परन्तु सेतुओं की स्थिति को समायोजित करके आप धीरे-धीरे स्वरैक्य स्थिति प्राप्त कर सकते हैं। अब स्वरित्र द्विभुज की एक भुजा (prong) को रबर की पैड पर धीरे से टकराएं और इसके स्टेम (stem) को सोनोमीटर के नाद पट पर धीरे से रखें। आप स्वरित्र द्विभुज के *U* भाग को न छुएं। (यदि आप ऐसा करते हैं, तो स्वरित्र द्विभुज के कंपन तेजी से समाप्त हो जाएंगे।) आप देखेंगे कि तार कंपन करने लगता है तथा अप्रगामी तरंगें जनित हो जाती हैं। तार के मध्य में रखा कागज का राइडर तब नीचे गिर जाएगा जब यह तार खंड स्वरित्र द्विभुज के साथ अनुनाद (resonate) करने लगेगा।

स्वरित्र द्विभुज से कार्य करते हुए आप देखेंगे कि कंपन लंबे समय तक प्रतिपालित नहीं रहते। ऐसा होने पर किसी भी तनाव बल के संगत तार की अनुनादी लंबाई ज्ञात करने के लिए आपको स्वरित्र द्विभुज को बार-बार कंपित कर नाद पट पर रखना पड़ सकता है। और चूंकि स्वरित्र द्विभुज द्वारा कंपित तार को दी गई ऊर्जा विद्युत-चुंबक द्वारा दी गई ऊर्जा से बहुत कम होती है, इसलिए तार तेजी से कंपन नहीं करेगा। अतः हमें स्वरैक्य स्थिति की जानकारी कागज के राइडर द्वारा ही प्राप्त करनी पड़ती है। इस स्थिति में प्रायः कागज का राइडर गिर जाता है या तेजी से कंपन करने लगता है।



चित्र 9.3: सोनोमीटर की तार में अनुप्रस्थ अप्रगामी तरंगों को विद्युत-चुंबक द्वारा जनित करने की प्रायोगिक व्यवस्था।

चित्र 9.3 में विद्युत-चुंबक का प्रयोग करके अनुप्रस्थ अप्रगामी तरंगें जनित करने की प्रायोगिक व्यवस्था दिखाई गई है। विद्युत-चुंबक को 6 वोल्ट के ट्रांसफॉर्मर के साथ जोड़कर तार के मध्य बिन्दु के समीप रखिए। जब विद्युत-चुंबक को प्रत्यावर्ती धारा विद्युत प्रदाय से जोड़ दिया जाता है तो प्रत्येक चक्र में इसका क्रोड विपरीत ध्रुवताओं पर दो बार चुंबकित होता है। इसके फलस्वरूप

सोनोमीटर का तार प्रत्येक चक्र में विद्युत-चुंबक की ओर दो बार आकर्षित होता है और कंपन करने लगता है। क्योंकि प्रत्यावर्ती धारा की आवृत्ति 50 Hz है, इसलिए तार 100 Hz की निश्चित आवृत्ति से कंपन करेगा।

बोध प्रश्न 1 – प्रणोदित कंपन प्रेरित करना

मान लीजिए कि विद्युत-चुंबक को दिष्ट धारा (direct current) के स्रोत से जोड़ा गया है। क्या तार कंपन करने लगेगा? यदि ऐसा है तो इसके कंपनों की आवृत्ति क्या होगी?

हैंगर पर एक उपयुक्त बाट रखकर तार को तनित कीजिए। (इसके सही मान का अनुमान लगाने के लिए आप अपने परामर्शदाता से सलाह ले सकते हैं।) यदि हैंगर का द्रव्यमान m kg हो और तार को तनित करने के लिए M kg भार रखा गया हो तो तार में उत्पन्न तनाव का मान $T = (M + m)g$ N होगा जहां g गुरुत्वीय-त्वरण है।

सोनोमीटर पर B_1 और B_2 सेतुओं को अधिकतम दूरी पर रखिए और विद्युत-चुंबक में धारा प्रवाहित कीजिए। ऐसा करने पर तार कंपन करने लगेगा। इसका अर्थ यह है कि उपकरण सुचारू रूप से कार्य कर रहा है और आप अपने अन्वेषण प्रारंभ कर सकते हैं।

आपका उद्देश्य तार की वह लंबाई ज्ञात करना है जिस पर सोनोमीटर मूल विधा में कंपन करेगा। जब ऐसा होगा तब सेतुओं के बीच तारखंड अधिकतम आयाम से एकल पाश में कंपन करेगा। यह लंबाई दो क्रमागत निष्पंदों के बीच की दूरी को निरूपित करती है और तार में जनित अप्रगामी तरंग के अर्ध-तरंगदैर्घ्य के बराबर है।

जब आप धारा प्रवाहित करेंगे, तो तार को 100 Hz की आवृत्ति से कंपन करना चाहिए। परन्तु यह संभव है कि तार बिल्कुल कंपित न हो। क्या आप इसका कारण जानते हैं? यह उस स्थिति में संभव है जब B_1 और B_2 सेतुओं के बीच तार की लंबाई मूल आवृत्ति की संगत लंबाई से बहुत भिन्न हो और तार में उत्पन्न प्रणोदित कंपन का आयाम अत्यंत लघु हो। अतः आपको कपायमान तार की लंबाई समायोजित करनी है। इसके लिए एक सेतु (मान लीजिए B_1) को स्थिर रखकर दूसरे सेतु B_2 को B_1 की ओर धीरे-धीरे खिसकाएं। आप क्या देखते हैं? क्या कंपन के आयाम में वृद्धि होती है? अगर ऐसा हो तो आप सेतु B_2 को तब तक सेतु B_1 की ओर लाते रहें जब तक तार के कंपनों का आयाम अधिकतम नहीं हो जाता। तब आप स्पष्ट रूप से देख सकते हैं कि तार बृहत् आयाम से एकल पाश में कंपन करेगा। अब यदि आप तार के मध्य में एक कागज का राइडर रखेंगे तो वह गिर जाएगा। सोनोमीटर के बोर्ड पर लगे मीटर स्केल की सहायता से B_1 और B_2 की स्थितियों को देखकर उनके बीच की दूरी और संगत भार को पढ़ें। अपने पाठ्यांकों को प्रेक्षण सारणी 9.1 में लिख लीजिए। इसके बाद सेतु B_2 को सेतु B_1 के थोड़ा और निकट (2-3 cm) लाइए। ऐसा करने पर आप क्या देखते हैं? क्या कंपन

के आयाम में परिवर्तन आता है? यदि ऐसा हो तो आप कह सकते हैं कि कंपित तार की आवृत्ति 100 Hz नहीं है। अब सेतु B_2 को धीरे-धीरे सेतु B_1 से दूर ले जाइए और उस स्थिति को पुनः प्राप्त कीजिए जहां तार विद्युत-चुंबक के स्वरैक्य में कंपन करता है। अपने प्रेक्षणों में त्रुटि कम करने के लिए प्रत्येक तनाव बल के लिए इस क्रिया को 3-4 बार दोहराइये। आपको अधिकतम ध्वनि तब सुनाई पड़ेगी जब कंपित तार प्रणोदित आवृत्ति के साथ स्वरैक्य में होगा।

अब हैंगर में 0.2 kg या 0.5 kg भार समान चरणों में बढ़ाकर तार में तनाव बल में परिवर्तन करते जाइए और प्रत्येक बल के लिए ऊपर बतायी गई विधि द्वारा तार की अनुनादी लंबाई मापिए। आप पाएंगे कि भार में वृद्धि होने पर अनुनादी लंबाई में भी वृद्धि होती है। प्रत्येक बल के लिए अपने पाठ्यांकों को प्रेक्षण सारणी 9.1 में लिखते रहें। सुनिश्चित करें कि तार पर तनाव बल प्रत्यास्थ सीमा से अधिक न हो। (इसके लिए आप अपने परामर्शदाता से चर्चा करें।)

प्रेक्षण सारणी 9.1: तनाव बल पर तरंगदैर्घ्य की निर्भरता

तार के कंपनों की आवृत्ति = ... Hz

मीटर स्केल का अल्पतमांक = ... cm

हैंगर का द्रव्यमान (m) = ... kg

क्र. सं.	हैंगर पर लटका भार M (kg)	तनाव-बल $T=(M+m)g$ (N)	B_1 और B_2 सेतुओं के बीच तार की अनुनादी लंबाई (m)				दिए गए भार के लिए माध्य अनुनादी लंबाई $\ell=\frac{\overline{L_1}+\overline{L_2}}{2}$ (m)	तरंगदैर्घ्य $\lambda = 2\ell$ (m)
			भार बढ़ाते हुए		भार घटाते हुए			
			L_1 (m)	माध्य मान $\overline{L_1}$(m)	L_2 (m)	माध्य मान $\overline{L_2}$(m)		
1.								
2.								
3.								
4.								

यह सुनिश्चित करने के लिए कि आप तनाव बल के अनुमेय परिसर (permissible range) में कार्य कर रहे हैं, तार से भार को समान चरणों में उतारें। हर बार तार की संगत अनुनादी लंबाई ज्ञात करें। प्रत्येक पाठ्यांक को प्रेक्षण सारणी में लिखिए। क्या ये लंबाइयां तार पर भार बढ़ाते समय संगत तनाव बल से प्राप्त लंबाइयों से भिन्न हैं? हम अपेक्षा करते हैं कि दोनों स्थितियों में ये लंबाईयां लगभग समान होंगी।

प्रेक्षण सारणी 9.1 से आप देखेंगे कि T के साथ λ के मान में परिवर्तन होता है। गणितीय भाषा में हम इसे निम्नलिखित रूप से व्यक्त कर सकते हैं:

$$\lambda = f(T)$$

क्या आप अपने प्रेक्षणों को देखकर इस संबंध को गणितीय रूप में व्यक्त कर सकते हैं? शायद यह संभव नहीं है। λ और T में यथार्थ संबंध ज्ञात करने के लिए हम लिखते हैं कि

$$\lambda \alpha T^{\alpha}$$

या

$$\lambda = k_1 T^{\alpha} \qquad (9.1)$$

यदि आपकी प्रयोगशाला में log-log ग्राफ पेपर न हो तो आप $T^{1/2}$ तथा T^2 परिकलित कर λ को $T^{1/2}$, T^1, T^2 के सापेक्ष आलेखित करें और जिस घात के लिए सरल रेखीय आरेख प्राप्त हो उसके संगत T की घात से आपको समीकरण (9.1) में यथार्थ मान ज्ञात हो जाएगा।

यहां k_1 आनुपातिकता स्थिरांक (constant of proportionality) है और a कोई अन्य अचर है।

इस समीकरण के दोनों पक्षों का लघुगणक (logrithms) लेने पर हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है:

$$\log \lambda = \log k_1 + a \log T \qquad (9.2)$$

यदि आप log-log ग्राफ पेपर लेकर λ को y-अक्ष के अनुदिश और T को x-अक्ष के अनुदिश आलेखित करें तो आपको सरल रेखा का आरेख प्राप्त होगा। y-अक्ष पर इसका अंतःखंड (intercept) आनुपातिकता स्थिरांक का मात्रक है और सरल रेखा की प्रवणता से a का मान मिलता है। सरल रेखा पर उचित दूरी पर दो बिन्दु लेकर प्रवणता परिकलित कीजिए। हम अपेक्षा करते हैं कि a का मान $\frac{1}{2}$ प्राप्त होगा।

अतः हम समीकरण (9.1) को निम्नलिखित रूप में व्यक्त कर सकते हैं :

$$\lambda = k_1 \sqrt{T} \qquad (9.3)$$

बोध प्रश्न 2 – तनाव बल के साथ तरंगदैर्घ्य में परिवर्तन

λ और $T^{1/2}$ का एक ग्राफ खींचिए। ग्राफ पर तनाव बल $T_1 = 64$ N और $T_2 = 324$ N के संगत बिन्दु लेकर तरंगदैर्घ्य का मान परिकलित कीजिए।

9.4 तार के प्रति इकाई लंबाई द्रव्यमान के साथ तरंगदैर्घ्य में परिवर्तन

तार की प्रति इकाई लंबाई के द्रव्यमान पर तरंगदैर्घ्य की निर्भरता ज्ञात करने के लिए आप एक ही धातु (लोहे या किसी अन्य चुंबकीय धातु) के भिन्न-भिन्न मोटाई

वाले चार समांग तार लें। सबसे पहले आप प्रत्येक तार का प्रति इकाई लंबाई द्रव्यमान (μ) ज्ञात करें। इसके लिए आप एक भौतिक तुला में प्रत्येक तार का भार लें और संगत लंबाइयां मापें। अनुपात (m/ℓ) से आपको μ का अभीष्ट मान प्राप्त हो जाएगा। अधिक परिशुद्ध परिणाम प्राप्त करने के लिए आप स्क्रू गेज से इनके व्यास (d) मापें। इसके लिए सर्वप्रथम स्क्रू गेज का अल्पतमांक ज्ञात करें और यह भी देखें की इसमें कोई शून्यांक त्रुटि तो नहीं है। तार का व्यास कई बार भिन्न-भिन्न जगहों पर मापें। इस प्रकार तार में किसी भी असमांगता (inhomogeneity) का भी ज्ञान हो जाता है। आप पाठ्यांकों को प्रेक्षण सारणी 9.2(क) में लिखिए। यदि तार के धातु का घनत्व ρ और व्यास d है तो आप संबंध $\mu = \frac{\pi d^2}{4}\rho$ द्वारा प्रत्येक तार के लिए प्रति इकाई लंबाई द्रव्यमान परिकलित कर सकते हैं।

प्रेक्षण सारणी 9.2(क): तार की प्रति इकाई लंबाई का द्रव्यमान

माइक्रोमीटर स्क्रू गेज का अल्पतमांक = ... cm

तार के नमूने	व्यास (cm)				माध्य व्यास d (m)	घनत्व ρ (kg m^{-3})	प्रति इकाई लंबाई द्रव्यमान μ (kg m^{-1})
	पाठ्यांक संख्या	मुख्य स्केल पर पाठ्यांक	वृत्ताकार स्केल पर पाठ्यांक	कुल मान			
A	(i)						
	(ii)						
	(iii)						
B	(i)						
	(ii)						
	(iii)						
C	(i)						
	(ii)						
	(iii)						
D	(i)						
	(ii)						
	(iii)						

कुछ प्रतिरूपी धातुओं के घनत्वों के मान

पदार्थ	घनत्व (×10^3 kg m^{-3})
लोहा	7.86
स्टील	8.03
निकल	8.912
तांबा	8.96
ऐलूमिनियम	2.698

प्रयोग के इस भाग में आपको तार का तनाव स्थिर रखना है। ऐसा करने के लिए, आप हैंगर पर एक भार, मान लीजिए 2 kg, रखिए और प्रयोग के दौरान इस भार में कोई परिवर्तन न करें। अब भाग 9.3 में बताई गई विधि के अनुसार B_1 और B_2 सेतुओं के बीच तार की वह अनुनादी लंबाई ज्ञात कीजिए जब यह एक खंड में अधिकतम आयाम के साथ कंपन करता है। इस दूरी को माप लीजिए और इसे प्रेक्षण सारणी 9.2(ख) में लिखिए।

तार में तनाव को स्थिर रखते हुए अन्य तारों के लिए उपरोक्त विधि को दोहराइए। आप अपने पाठ्यांकों को प्रेक्षण सारणी 9.2(ख) में लिखें।

प्रेक्षण सारणी 9.2(ख): तार की प्रति इकाई लंबाई के द्रव्यमान पर तरंगदैर्घ्य की निर्भरता

स्वरित्र द्विभुज अथवा विद्युत-चुंबक की आवृत्ति = ... Hz

तार में तनाव = ... N

क्र. सं.	प्रति इकाई लंबाई द्रव्यमान μ (kg m^{-1})	विद्युत-चुंबक/स्वरित्र द्विभुज की स्वरैक्य स्थिति में सेतुओं के बीच तार की अनुनादी लंबाई (cm)		माध्य लंबाई ℓ (cm)	तरंगदैर्घ्य $\lambda = 2\ell$ (m)
1.		(i)			
		(ii)			
		(iii)			
2.		(i)			
		(ii)			
		(iii)			
3.		(i)			
		(ii)			
		(iii)			

क्या μ के मान के साथ तरंगदैर्घ्य (λ) में परिवर्तन होता है? इस निर्भरता का गणितीय रूप प्राप्त करने करने के लिए हम लिखते हैं

$$\lambda = k_2 \mu^b, \quad (9.4)$$

जहां k_2 अनुपातिकता स्थिरांक है और b एक अन्य अचर है।

समीकरण के दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर हमें निम्नलिखित संबंध मिलता है:

$$\log \lambda = \log k_2 + b \log \mu$$

यदि आप λ तथा μ के बीच लॉग-लॉग ग्राफ खीचें तो आपको एक सरल रेखा प्राप्त होगी। इस सरल रेखा की प्रवणता धनात्मक है या ऋणात्मक? ऋण मान से यह पता चलता है कि μ को बढ़ाने पर λ का मान घटता है। सरल रेखा की प्रवणता से घातांक b का मान प्राप्त होता है। हम अपेक्षा करते हैं कि $b = -0.5$ होगा। (यदि इस मान और आपके द्वारा प्राप्त किए गए मान में अधिक अंतर हो तो आप अपने परामर्शदाता से इस विषय पर चर्चा करें।) अतः हमें λ और μ में निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है:

$$\lambda = k_2 \mu^{-1/2} \quad (9.5)$$

समीकरणों (9.3) और (9.5) के परिणामों को संयोजित करने पर आपको निम्नलिखित संबंध प्राप्त होगाः

$$\lambda = k\left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2} \qquad (9.6)$$

जहां k एक आनुपातिकता स्थिरांक है।

बोध प्रश्न 3 – तार की प्रति इकाई लंबाई पर तरंगदैर्घ्य की निर्भरता

i) यदि सोनोमीटर का तार खोखला होता तो समीकरण (9.6) किस प्रकार प्रभावित होता?

ii) मान लीजिए कि आपने स्टील के तार का स्वरित्र द्विभुज के साथ स्वरैक्य किया। यदि आप इस तार के स्थान पर निकल धातु का वैसा ही तार लगा दें तो क्या इस तार की भी उसी स्वरित्र द्विभुज के साथ स्वरैक्य वाली लंबाई वही रहेगी? अपने उत्तर की पुष्टि करें।

iii) प्रेक्षण सारणी 9.1 में दिए गए पाठ्यांकों से log T और log λ के बीच आलेखित ग्राफ से y-अक्ष पर अंतःखंड परिकलित कीजिए। यह तार की प्रति एकक लंबाई के द्रव्यमान से किस प्रकार संबंधित है? इस मान की तुलना इसकी त्रिज्या और घनत्व से आकलित किए गए मान से कीजिए।

9.5 तरंगदैर्घ्य और आवृत्ति में संबंध

किसी भी सोनोमीटर तार में तरंगदैर्घ्य और आवृत्ति के बीच संबंध स्थापित करने के लिए तार का तनाव बल अचर रखा जाता है। आवृत्ति में परिवर्तन करने के लिए आपको विभिन्न आवृत्तियों वाले अनेक स्वरित्र द्विभुजों की आवश्यकता होती है। स्पष्टतः इस भाग के कार्य में विद्युत-चुंबक उपयुक्त नहीं होगा क्योंकि यह तार में केवल एक आवृत्ति के ही कंपन उत्पन्न कर सकता है।

सबसे पहले एक उपयुक्त भार, मान लीजिए 2 kg, हैंगर में रखकर तार को तनित कीजिए। इसके बाद उपलब्ध अनेक स्वरित्र द्विभुजों में से न्यूनतम आवृत्ति वाला द्विभुज चुनिए। सोनोमीटर पर B_1 और B_2 सेतुओं को भाग 9.3 में बताई गई विधि के अनुसार इस प्रकार समायोजित कीजिए कि तार अधिकतम आयाम से एकल लूप में कंपन करे। इसका अर्थ यह है कि तार और स्वरित्र द्विभुज स्वरैक्य में है। इस लंबाई को माप लीजिए और पाठ्यांक को प्रेक्षण सारणी 9.3 में लिखिए।

तनाव को स्थिर रखकर उपरोक्त विधि को अन्य स्वरित्र द्विभुजों के लिए दोहराएं। हर बार लंबाई को मापकर सारणी 9.3 में लिखें।

प्रेक्षण सारणी 9.3: आवृत्ति पर तरंगदैर्घ्य की निर्भरता

तार में तनाव = ... N

क्र. सं.	स्वरित्र द्विभुज की आवृत्ति *f* (Hz)	स्वरित्र द्विभुज के स्वरैक्य में सेतुओं के बीच तार की लंबाई (m)			माध्य लंबाई ℓ (m)	तंरगदैर्घ्य $\lambda = 2\ \ell$ (m)
		(i)	(ii)	(iii)		
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						

अप्रगामी तरंगों का तरंगदैर्घ्य स्वरित्र द्विभुज की आवृत्ति (अचर तनाव बल के लिए तार की मूल आवृत्ति) पर किस प्रकार निर्भर करता है? हम अपेक्षा करते हैं कि आवृत्ति के बढ़ने पर तरंगदैर्घ्य घटेगा। इस निर्भरता को हम गणितीय भाषा में निम्नलिखित रूप में व्यक्त कर सकते हैं:

$$f = k_3\ \lambda^c, \tag{9.7}$$

जहां k_3 आनुपातिकता स्थिरांक है और c कोई अन्य स्थिरांक है।

अब आप यदि f और λ के बीच लॉग-लॉग आरेख खींचें तो आपको एक सरल रेखा प्राप्त होनी चाहिए। सरल रेखा की प्रवणता से आपको c का मान प्राप्त होगा। हम अपेक्षा करते हैं कि c का मान -1 होना चाहिए। आपको क्या परिणाम प्राप्त होता है?

y-अक्ष के अंतःखंड से आप $\ln k_3$ और इस तरह k_3 का मान परिकलित कर सकते हैं। k_3 के इस मान की तुलना दिए गए तार के लिए $\sqrt{T/\mu}$ के मान से कीजिए। क्या ये दोनों मान समान हैं? सैद्धांतिक रूप से ये दोनों मान समान होने चाहिए। इससे क्या पता चलता है? इसका अर्थ यह है कि किसी तार में अप्रगामी तरंगों की आवृत्ति और तरंगदैर्घ्य के बीच संबंध को निम्नलिखित रूप से व्यक्त किया जा सकता है:

$$f = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{T}{\mu}}. \tag{9.8}$$

गुणनफल $f\lambda$ की विमाएं वेग (ms^{-1}) की हैं। इससे आप यह निष्कर्ष निकाल सकते

हैं कि तनित तार में जनित अप्रगामी तरंगों के वेग का व्यंजक $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ है।

अब आप एक बोध प्रश्न का उत्तर दें।

बोध प्रश्न 4 – तरंगदैर्घ्य और आवृत्ति में संबंध

सेतुओं के बीच तार की अनुनादी लंबाई दोगुनी करने पर आवृत्ति में क्या परिवर्तन होगा?

9.6 शब्दावली

Alternating current	प्रत्यावर्ती धारा
Amplitude	आयाम
Antinode	प्रस्पंद
Constant of proportionality	आनुपातिकता स्थिरांक
Cross-section	अनुप्रस्थ-परिच्छेद
Elastic limit	प्रत्यास्थता सीमा
Forced vibration	प्रणोदित कंपन
Frequency	आवृत्ति
Fundamental mode	मूल विधा
Node	निस्पंद
Plucked	कर्षित
Polarity	ध्रुवता
Progressive wave	प्रगामी तरंग
Quality	गुणता
Reflected	परावर्तित
Resonating length	अनुनादी लंबाई
Slope	प्रवणता
Stationary wave/Standing wave	अप्रगामी तरंग
Stretched wire	तनित तार
Superposition	अध्यारोपण
Sustained oscillations	प्रतिपालित कंपन
Transverse wave	अनुप्रस्थ तरंग
Tuning fork	स्वरित्र द्विभुज
Unison	स्वरैक्य

प्रयोग 10

कैथोड किरण दोलनदर्शी द्वारा लिसाजू आकृतियों का अध्ययन

प्रयोग की रूपरेखा

10.1 प्रस्तावना

अपेक्षित कौशल

10.2 कैथोड किरण दोलनदर्शी से परिचय

10.3 फलन जनित्र

10.4 लिसाजू आकृति विधि से कलांतर निर्धारण

कलांतर सिग्नलों का जनन

लिसाजू आकृति से कलांतर परिकलन

10.5 असमान आवृत्ति वाले ज्यावक्रों की लिसाजू आकृतियां

10.6 शब्दावली

10.1 प्रस्तावना

दोलनों का अध्ययन करते समय आपने पढ़ा है कि अनेक युगपत् दोलनों को आरोपित करने पर पिंड की परिणामी गति को अध्यारोपण सिद्धांत की सहायता से समझा जा सकता है। दो परस्पर लंबवत् आवर्ती दोलनों का पिंड पर रोपण करने पर पिंड जिस पथ का अनुरेखण करता है, वह **लिसाजू आकृति** कहलाता है। इन लिसाजू आकृतियों का आकार पिंड पर आरोपित युगपत् परस्पर लंबवत् दोलनों के आयाम, आवृत्ति तथा कलांतर संबंधों पर निर्भर करता है।

भौतिकी प्रयोगशाला में आप इन लिसाजू आकृतियों को कैथोड किरण दोलनदर्शी (Cathode Ray Oscilloscope), जिसे प्रायः CRO कहते हैं की सहायता से देख सकते हैं। यह एक अत्यंत बुनियादी और बहुमुखी यंत्र है जो प्रत्येक भौतिकी, इलेक्ट्रॉनिकी और विद्युत् अभियांत्रिकी प्रयोगशाला में उपलब्ध होता है।

CRO की सहायता से आप वोल्टता-आयाम, आवृत्ति, आर्वतकाल और तरंग के आकार जैसे सिग्नल के महत्वपूर्ण अभिलक्षणिक प्राचल माप सकते हैं। CRO के स्क्रीन पर दीप्त बिंदु की सहायता से निवेश वोल्टता का तात्कालिक मान हम ज्ञात कर सकते हैं। इसी कारण दोलनदर्शी को आलेखी (plotter) या अभिलेखी (recorder) के रूप में भी देखा जा सकता है।

इस प्रयोग में आप दोलनदर्शी के मूलभूत कार्यों के बारे में अध्ययन करेंगे। इसके x और y निवेशों पर दो ज्यावक्रीय तरंग सिग्नल लगाकर लिसाजू आकृतियां प्राप्त करेंगे और इन तरंगों के बीच कलांतर निर्धारित

करेंगे। ज्यावक्रीय तरंग सिग्नल जनित करने के लिए आवश्यक फलन जनित्र के बारे में भी आप जानकारी प्राप्त करेंगे।

अपेक्षित कौशल

यह प्रयोग करने के बाद, आप :

- ❖ CRO के अग्र पैनल पर विभिन्न नियंत्रकों के आधारभूत कार्य समझेंगे;
- ❖ दोलनदर्शी के स्क्रीन पर तरंगरूप/सिग्नल दर्शा सकेंगे;
- ❖ दो ज्यावक्रीय तरंग आरोपित करके लिसाजू आकृति प्राप्त कर सकेंगे; और
- ❖ दो ज्यावक्रीय तरंगों का कलांतर माप सकेंगे।

इस प्रयोग को करने के लिए आवश्यक उपकरण नीचे दिए गए हैं।

आवश्यक उपकरण

द्वैत किरणपुंज/अनुरेखी दोलनदर्शी (CRO), 2 फलन जनित्र, प्रतिरोध (1 k Ω), संधारित्र (0.5 μF), प्रतिरोध-बॉक्स (100 Ω – 10 k Ω), प्रयोग पट्ट (bread board), संबंधन तार, अनुरेखण कागज

10.2 कैथोड किरण दोलनदर्शी से परिचय

CRO का प्रयोग करने से पूर्व आपको इस के अग्र पैनल पर स्थित विभिन्न नियंत्रक घुंडियों के प्रचालन और कार्य के बारे में परिचित होना आवश्यक है। CRO में एक कैथोड किरण ट्यूब (CRT) और अनेक विशिष्ट इलेक्ट्रॉनिक परिपथों का समुच्चय होता है। CRT दोलनदर्शी का मुख्य घटक है। यह उच्च वेग का तीक्ष्ण फोकसित इलेक्ट्रॉन किरणपुंज उत्पन्न करता है जिसे सही वोल्टता द्वारा स्क्रीन पर कहीं भी पहुंचाया जा सकता है। दोलनदर्शी के अग्र पैनल में CRT स्क्रीन और विभिन्न नियंत्रक घुंडियां होती है जिनका उपयोग विभिन्न कार्यों के लिए होता है। इन नियंत्रक घुंडियों के कार्यों की चर्चा इस भाग के अंत में की गई है।

चित्र 10.1 में CRT का व्यवस्थात्मक निरूपण किया गया है। यह निर्वातित कांच का अन्वालोप है जिसके अनिवार्य घटक निम्नलिखित हैं :

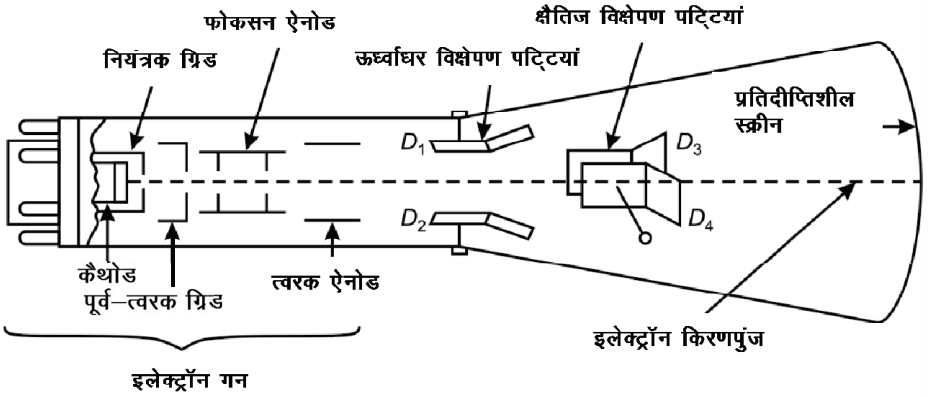
- इलेक्ट्रॉन गन;
- विक्षेपण पट्टिकाएं (deflection plates); और
- प्रतिदीप्तिशील (fluorescent) प्रदर्श स्क्रीन।

इलेक्ट्रॉन गन के घटक निम्नलिखित हैं :

- कैथोड या हीटर, जो इलेक्ट्रॉन जनित करता है;
- धारा नियंत्रण के लिए नियंत्रक ग्रिड;
- फोकसन इलेक्ट्रोड, जो इलेक्ट्रॉन पुंज को संकीर्ण पैंसिल किरणपुंज बनाता है; तथा

– त्वरक एवं पूर्व-त्वरक इलेक्ट्रोड जो इलेक्ट्रॉनों को उच्च वेग प्रदान करते हैं, जिनके स्क्रीन पर टकराने से द्वितीयक उत्सर्जन (secondary emission) हो सकता है।

विक्षेपण समाहार (deflection assembly) में ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज विक्षेपण पट्टिकाएं होती हैं। इनके बीच में कुछ दूरी होती है। CRT के स्क्रीन में ZnS जैसा प्रतिदीप्तिशील (fluorescent) पदार्थ होता है जो इलेक्ट्रॉन के आघात से प्रकाश जनित करता है।



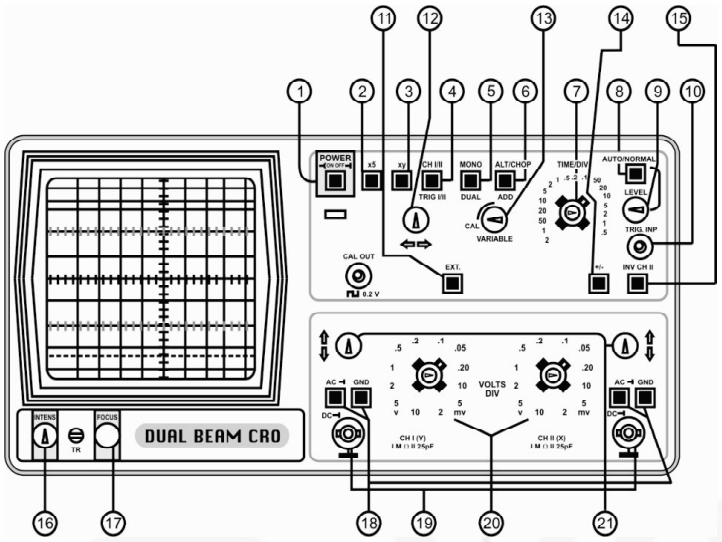
चित्र 10.1: CRT का व्यवस्थात्मक निरूपण।

CRO में इलेक्ट्रॉन गन से निकलने वाले इलेक्ट्रॉन किरणपुंज का स्क्रीन से टकराने से पहले विक्षेपण होता है। चूंकि इलेक्ट्रॉन आवेशित कण हैं, इसलिए इलेक्ट्रॉन किरणपुंज का विक्षेपण स्थिर वैद्युत (electrostatic) या चुंबकीय विधि से किया जा सकता है। अधिकांश दोलनदर्शियों में किरणपुंज का विक्षेपण स्थिर वैद्युततः होता है। आप यहां देख सकते हैं कि क्षैतिजतः स्थापित पट्टिकाओं D_1 और D_2 पर लगाया गया विभव किरणपुंज को ऊर्ध्वाधरतः विक्षेपित करता है जबकि ऊर्ध्वाधरतः स्थापित पट्टिकाओं D_3 और D_4 पर लगाया गया विभव किरणपुंज को क्षैतिजतः विक्षेपित करता है। यहां विक्षेपण का मान पट्टिकाओं पर लगाई वोल्टता के अनुपाती होता है। प्रायः एक CRT का प्रदर्श स्क्रीन लगभग 10 cm होता है और 100 V के विभव पर 2.5 cm विक्षेपण प्राप्त किया जा सकता है। वास्तव में, मापे जाने वाले सिग्नलों के आयाम 100 V से काफी कम होते हैं, इसलिए उचित विक्षेपण प्राप्त करने के लिए सिग्नल को प्रवर्धित किया जाता है। इसी कारण विक्षेपण पट्टिकाओं के प्रत्येक जोड़े के लिए विक्षेपण प्रवर्धक लगाए जाते हैं।

CRO के आंतरिक परिपथों की विस्तृत सूचना में न जाते हुए आप को यहां यह जानना पर्याप्त होगा कि **विद्युत् सिग्नल के समय के साथ ऊर्ध्वाधर परिवर्तन को दोलनदर्शी पर प्रदर्शित करने के लिए समय के साथ रैखिकतः परिवर्तित होने वाली आरादंती वोल्टता (स्वीप) क्षैतिज विक्षेपण पट्टिकाओं पर लगानी होगी।**

अत्यंत स्थायी अनुरेख प्राप्त करने के लिए दोलनदर्शियों में एक ट्रिगर लगाया जाता है। ट्रिगर का उपयोग करते समय हर बार जब स्वीप स्क्रीन की दाईं ओर चरम स्थिति पर पहुंच कर बाईं ओर प्रतिधाव (retrace) करता है तो CRO कुछ देर के लिए रुकता है। यह अगला अनुरेख प्रारंभ करने से पहले एक विशिष्ट घटना का इंतजार करता है। ट्रिगर घटना प्रायः निवेश तरंगरूप के निर्दिष्ट दिशा में (धन या ऋण) निर्दिष्ट देहली वोल्टता (threshold voltage) को पार करना होता है।

किसी दोलनदर्शी के उचित प्रचालन के लिए सभी नियंत्रकों को अग्र पैनल पर लगाया जाता है। चित्र 10.2 में प्रतिरूपी सामान्य द्वैत किरणपुंज दोलनदर्शी के अग्र पैनल पर स्थित विभिन्न नियंत्रकों का व्यवस्थात्मक निरूपण दिखाया गया है। द्वैत किरणपुंज CRO में दो अलग-अलग चैनलों पर दो सिग्नलों को एक साथ देखा जा सकता है। यहां हम यह बताना चाहेंगे कि इन नियंत्रकों के स्थान निर्धारण यंत्रों की बनावट के अनुसार बदल सकते हैं।



चित्र 10.2 : एक द्वैत किरणपुंज सामान्य CRO के अग्र पैनल का व्यवस्थात्मक निरूपण।

सारणी 10.1 में चित्र 10.2 में दिखाए गए प्रत्येक नियंत्रक के प्रकार्य दिए गए हैं।

सारणी 10.1: CRO अग्र पैनल पर लगे नियंत्रक एवं इनके कार्य

क्र.सं.	नियंत्रक	प्रकार्य
1.	Power(पावर)	पावर को ऑन/ऑफ करता है।
2.	× 5	सिग्नल का पांच गुना प्रवर्धन करता है।
3.	*X-Y*	इसे अंदर दबाने पर क्षैतिज पट्टिकाओं से समयाधार को काट दिया जाता है और CH-II के माध्यम से क्षैतिज सिग्नल अभिगमित होता है। इसका प्रयोग *X-Y* प्रदर्श के लिए किया जाता है।
4.	CH-I/CH-II/ Trig I/Trig II (चैनल-I/चैनल- II/ ट्रिगर-I/ट्रिगर- II)	जब यह बाहर होता है, तब CH-I का चयन कर इसे ट्रिगर करता है। दबाने पर यह CH-II का चयन कर उसे ट्रिगर करता है।
5.	Mono/Dual (एकल/द्वैत)	एकल/द्वैत किरणपुंज प्रचालन का चयन करने वाला स्विच।
6.	Alt/Chop/Add (वैकल्प/संकर्तन/ संकलन)	यह द्वैत विधा में विकल्प (ALT) या संकर्तन (CHOP) का चयन करता है। यदि एकल स्विच का चयन किया जाता है तो दोनों चैनलों पर सिग्नलों का संकलन या व्यवकलन हो सकता है।

क्र.सं.	नियंत्रक	प्रकार्य
7.	Time/Div. (समय / भाग)	यह समयाधार चाल का चयन करता है।
8.	AUTO/NORM (स्व- / सामान्य)	जब निवेश पर कोई सिग्नल न दिया गया हो तब AUTO विधा का प्रयोग अनुरेखण में सहायक होता है। सामान्य (NORM) स्थिति में नियंत्रक द्वारा ट्रिगर स्तर (Level) में परिवर्तन किया जा सकता है।
9.	LEVEL (स्तर)	निवेश सिग्नल के शिखर से शिखर आयाम में से किसी स्तर पर ट्रिगर स्थापित किया जा सकता है।
10.	TRIG IN (ट्रिगर निवेश)	यह वह सॉकेट है जिसके द्वारा EXT विधा में बाह्य ट्रिगर सिग्नल लगाया जा सकता है।
11.	EXT (बाह्य ट्रिगर)	TRIG IN सॉकेट से बाह्य ट्रिगर सिग्नल देना संभव करने वाला स्विच।
12.	*X*-POS (*X*-स्थिति)	यह घुंडी किरणपुंज अनुरेख की क्षैतिज स्थिति नियंत्रित करती है।
13.	VAR	TIME/DIV स्विच के दो चरणों के बीच समयाधार चाल नियंत्रित करता है।
14.	+/-	यह स्विच ट्रिगरन की प्रवणता का चयन करता है।
15.	INV CH.II (व्युत्क्रमित CH-II)	इस स्विच द्वारा CH-II के सिग्नल को व्युत्क्रमित किया जा सकता है।
16.	INTENS (तीव्रता)	यह अनुरेख की द्युति (brightness) नियंत्रित करता है।
17.	FOCUS (फोकस)	यह अनुरेख की तीक्ष्णता नियंत्रित करता है।
18.	DC/AC/GND (दिष्टकारी / प्रत्यावर्ती / भू-संपर्क)	प्रत्येक चैनल का युग्मन स्विच। AC विधा में सिग्नल को 0.1μF संधारित्र से युग्मित किया जाता है।
19.	CH-I (*Y*) और CH-II (*X*)	BNC संबंधक, CH-I और CH-II के लिए *Y*-निवेश संबंधनों का कार्य करते हैं। CH-II निवेश संबंधक *X-Y* नियंत्रक का प्रयोग करने पर क्षैतिज बाह्य सिग्नल के रूप में भी काम करता है।
20.	Volts/Div. (वोल्टता / भाग)	प्रत्येक चैनल की सुग्राहिता का चयन करने वाला स्विच।
21.	*Y*-Pos I और II *Y*-स्थिति (चैनल-I और चैनल-II)	इन नियंत्रकों का प्रयोग प्रत्येक चैनल के अनुरेख के ऊर्ध्वाधर विचलन के लिए किया जाता है।

आप प्रत्येक नियंत्रक की कार्यप्रणाली भली-भांति पढ़ें और समझें। इसके बाद ही आप देख पाएंगे कि अग्र पैनल पर लगे आधारभूत नियंत्रक किस प्रकार अनुरेख को प्रभावित करते हैं। इसके लिए, सबसे पहले आप दोलनदर्शी का पावर स्विच ऑन कीजिए और CRO स्क्रीन पर एक क्षैतिज रेखा प्राप्त कीजिए। (द्वैत किरणपुंज/अनुरेखी दोलनदर्शी में आपको दो क्षैतिज रेखाएं प्राप्त होनी चाहिए।) इस समय आप ऊर्ध्वाधर निवेश अनुभाग पर कोई संबंधन न करें। अब सारणी 10.2 में दिए गए नियंत्रकों का समायोजन कर अपने प्रेक्षणों को इसमें लिखें।

सारणी 10.2: CRO के अग्र पैनल पर कुछ आधारभूत नियंत्रकों के प्रेक्षित प्रभाव

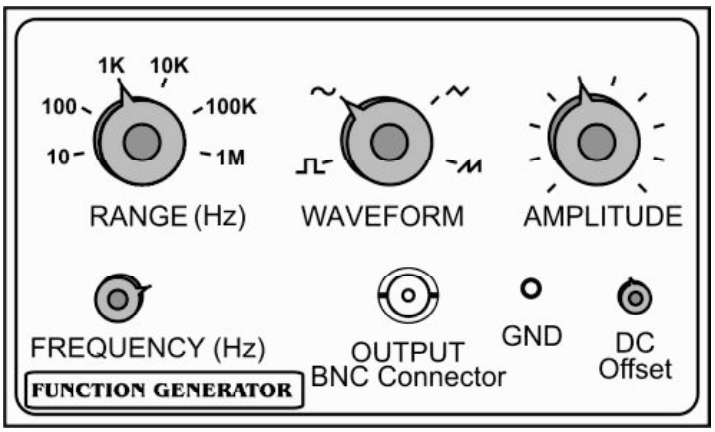
नियंत्रक	प्रेक्षित प्रभाव
तीव्रता	.....
फोकस	.....
Y-स्थिति	.....
X-स्थिति	.....

CRO के अग्र पैनल के प्रदर्श क्षेत्र पर सेंटीमीटर पैमाने की ग्रिड चिह्नित की होती है और प्रत्येक सेंटीमीटर को **भाग (Div)** कहते हैं। प्रत्येक भाग को आगे 5 भागों में बांटा जाता है; अतः स्क्रीन पर न्यूनतम लंबाई 2mm नापी जा सकती है। समय/भाग (TIME/DIV) और वोल्टता/भाग (VOLT/DIV) नियंत्रकों में चयन किये हुए परिसर का मान प्रदर्श क्षेत्र के 1 सेंटीमीटर के संगत होता है। उदाहरण के लिए, समय/भाग के 0.5ms/div का अर्थ है कि, समय (क्षैतिज) अक्ष पर 1 सेंटीमीटर लंबाई 0.5 मिलीसेकंड को दर्शाती है तथा वोल्टता/भाग के 1 V/div का अर्थ है कि ऊर्ध्वाधर *y*-अक्ष पर 1 cm लंबाई 1 V आयाम के बराबर है।

CRO से परिचित होने के बाद अब हम फलन जनित्र के बारे में चर्चा करेंगे, जिसकी आप को इस प्रयोग में आवश्यकता होगी।

10.3 फलन जनित्र

दोलनदर्शी की सहायता से आप दिष्ट-धारा और समय परिवर्ती वोल्टताओं का मापन कर सकते हैं। समय परिवर्ती वोल्टता जनित करने के लिए आपको ऐसे फलन जनित्र की आवश्यकता होगी जो समायोज्य आवृत्ति और आयाम के ज्यावक्रीय, त्रिभुजाकार अथवा वर्गाकार तरंगरूप जनित कर सकता है। फलन जनित्र अनुरूप अथवा अंकीय प्रारूपों में उपलब्ध होते हैं। एक प्रतिरूपी अनुरूप फलन जनित्र के अग्र पैनल का निरूपण चित्र 10.3 में दिखाया गया है।



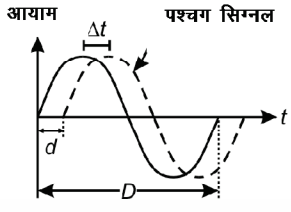
चित्र 10.3: प्रतिरूपी अनुरूप फलन जनित्र के अग्र पैनल का निरूपण।

एक फलन जनित्र की नियंत्रण घुंडियों की सूची सारणी 10.3 में दी गई है।

सारणी 10.3: एक प्रतिरूपी फलन जनित्र के नियंत्रक

क्र.सं.	नियंत्रक	प्रकार्य
1	WAVEFORM (तरंगरूप फलन वरित्र)	तरंगरूप / सिग्नल का चयन स्विच : वर्ग तरंग, ज्यावक्रीय, त्रिभुजाकार या आरादंती तरंगरूप
2	RANGE (Hz) (आवृत्ति परिसर)	आवृत्ति परिसर चयन स्विच (10-100-1k-10k-100k-1M) Hz
3	FREQUENCY (आवृत्ति)	आवृत्ति समायोजन घुंडी
4	AMPLITUDE (आयाम)	आयाम समायोजन घुंडी
5	OFF SET (ऑफ सेट)	प्रत्यावर्ती सिग्नल में दिष्टकारी वोल्टता अध्यारोपित करने के लिए
6	OUTPUT (निर्गम)	जनित निर्गम सिग्नल देने वाला BNC टर्मिनल

10.4 लिसाजू आकृति विधि से कलांतर निर्धारण



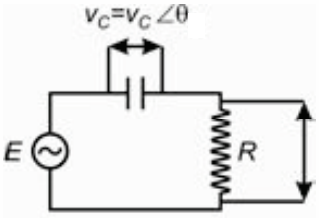
चित्र 10.4: दो ज्यावक्रीय सिग्नलों के बीच का कलांतर।

आप दोलनदर्शी की सहायता से लिसाजू आकृति विधि द्वारा समान आवृत्ति के दो सिग्नलों के बीच कलांतर ज्ञात कर सकते हैं। अब हम सरल परिपथ के उपयोग से कलांतर वाले सिग्नल प्राप्त करना सीखेंगे।

10.4.1 कलांतर सिग्नलों का जनन

चित्र 10.4 में दो ज्यावक्रीय तरंगरूप दिखाए हैं। इनका आवर्तकाल (time period) समान है; अर्थात् इनकी आवृत्ति समान हैं। परंतु आपने देखा होगा कि वे माध्य रेखा को अलग-अलग बिंदुओं पर छेदते हैं। इन बिंदुओं के बीच के समयांतर को कोणीय आवृत्ति से गुणा करने पर हमें दो तरंगों के बीच का **कलांतर** प्राप्त होता है।

यहां एक सिग्नल को निर्देश सिग्नल चुना जाता है, अर्थात् इसकी कला शून्य मानी जाती है। अतः यदि दूसरा सिग्नल निर्देश सिग्नल की बाईं ओर हो तो इसे θ कोण से अग्रग (leading) लिया जाता है और यदि यह निर्देश सिग्नल की दाईं ओर हो तो इसे पश्चग (lagging) लिया जाता है। अग्रग सिग्नल का कलांतर धनात्मक और पश्चग सिग्नल का ऋणात्मक होता है।



चित्र 10.5: कला विस्थापन परिपथ

समान आवृत्ति परंतु कलाओं में अंतर होने वाली दो ज्यावक्रीय तरंगें प्राप्त करने के लिए आप चित्र 10.5 में दिखाए गए परिपथ का प्रयोग करें। यह एक *R-C* परिपथ है और आपको +2 की भौतिकी से याद होगा कि किसी भी क्षण धारा *i* लगाई गई वोल्टता *E* से अग्रग होगी। यहां वोल्टता v_R और धारा *i* एक ही कला में हैं और संधारित्र वोल्टता v_c वोल्टता *E* के पश्चग होगी। अतः हमें कलांतर वाली दो ज्यावक्रीय तरंगे प्राप्त होगी।

10.4.2 लिसाजू आकृति से कलांतर परिकलन

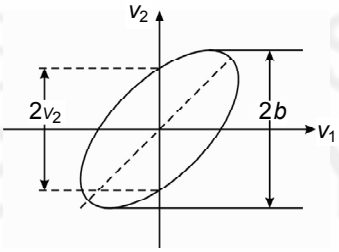
CRO की विक्षेपण पट्टिकाओं के दोनों युग्मों पर दो ज्यावक्रीय तरंग एक साथ लगाने से प्राप्त लिसाजू आकृति से इन दो तरंगों के बीच कलांतर मालूम किया जा सकता है। उस विधि को *X-Y* कला मापन कहा जाता है।

अब हम CRO के स्क्रीन पर लिसाजू आकृति के निर्माण की चर्चा करते हैं। मान लें कि समान आवृत्ति परंतु भिन्न कलांतर की ज्यावक्रीय तरंगों को अध्यारोपित किया गया है। यदि θ उनके कलांतर को प्रकट करता हो, तो इन्हें निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है :

$$v_1 = a \sin \omega t$$

और $$v_2 = b \sin (\omega t + \theta)$$

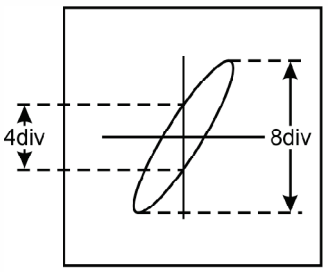
आप ऊर्ध्वाधर विक्षेपण पट्टिकाओं पर वोल्टता v_1 और क्षैतिज विक्षेपण पट्टिकाओं पर v_2 लगाएं। यांत्रिकी पाठ्यक्रम की इकाई 17 में आप पढ़ चुके हैं कि θ के मान के अनुसार परिणाम आकृति CRO स्क्रीन पर दीर्घवृत्त या सरल रेखा के रूप में प्राप्त होती है। इस प्रयोग में ध्यान रहे कि आपको दीर्घवृत्त आकृति प्राप्त करनी है, जैसा कि चित्र 10.6 में दिखाया गया है।



चित्र 10.6: लिसाजू आकृति की सहायता से कला मापन।

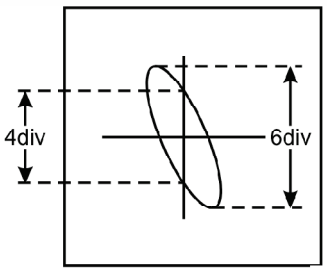
$t = 0$ पर $v_2 = b \sin \theta$ । अतः $\sin \theta = v_2 / b$ अर्थात् $\theta = \sin^{-1}(v_2 / b)$। ध्यान रहे कि *b* का मान v_2 के अधिकतम मान के संगत है।

चित्र 10.7 में एक CRO के स्क्रीन पर दो संभव अनुरेख दिखाए गए हैं। ये आकृतियां दो ज्यावक्रीय सिग्नलों के बीच संभव कलांतर को प्रदर्शित करती हैं।



$\theta = \sin^{-1} 4/8 = 30°$ **अथवा**
$360° - 30° = 330°$

(क)



$\theta = 180° - (\sin^{-1} 4/6) \simeq 138°$ **अथवा**
$360° - 138° = 222°$

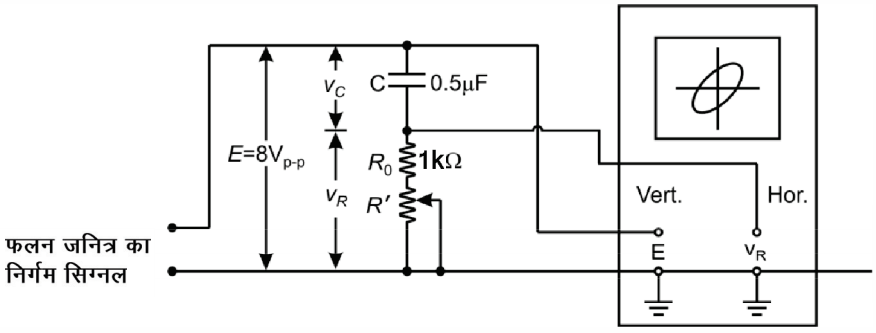
(ख)

चित्र 10.7: कला मापन।

यांत्रिकी पाठ्यक्रम की इकाई 17 में आप पढ़ चुके हैं कि x-y समतल के दूसरे और चौथे चतुर्थांशों में उपस्थित दीर्घवृत्त ($\pi - \sin^{-1}(v_2/b)$) कलांतर के संगत होता है।

कार्य-विधि

1. समान आवृत्ति की दो ज्यावक्रीय तरंगों/सिग्नलों के बीच कलांतर प्राप्त करने के लिए आप चित्र 10.8 में दिखाया हुआ परिपथ बनाए।
2. CRO की *x-y* विधा का चयन करें और दो सिग्नल CRO के ऊर्ध्वाधर एवं क्षैतिज (*y* और *x*) निवेशों को परिपथ में दर्शाए अनुसार लागू करें। इससे आप को CRO स्क्रीन पर दीर्घवृत्त की आकृति प्राप्त होगी।



चित्र 10.8: दो ज्यावक्रीय तरंगों/सिग्नलों के बीच कला मापन का परिपथ।

3. दीर्घवृत्त को अनुरेखण कागज़ पर अनुरेखित करें और एक ग्राफ़-पेपर पर ध्यानपूर्वक केंद्रीभूत करके चिपकाएं।
4. $2v_2$ और $2b$ मापें और चित्र 10.7 में दिखाए अनुसार θ परिकलित करें।
5. अब आप R_0 का मान 1 kΩ अचर रखकर प्रतिरोध बॉक्स की सहायता से R' में परिवर्तन करके कुल प्रतिरोध R का मान निश्चित करें।
6. प्रेक्षण सारणी 10.4 में प्रत्येक स्थिति में R', R, v_2 और b के मान लिखें।
7. कला-कोण θ का मान परिकलित करें।
8. इस प्रकार R' के कम से कम 3 मानों के लिए प्रेक्षण लें।

प्रेक्षण सारणी 10.4: लिसाजू आकृतियों से कलांतर निर्धारण

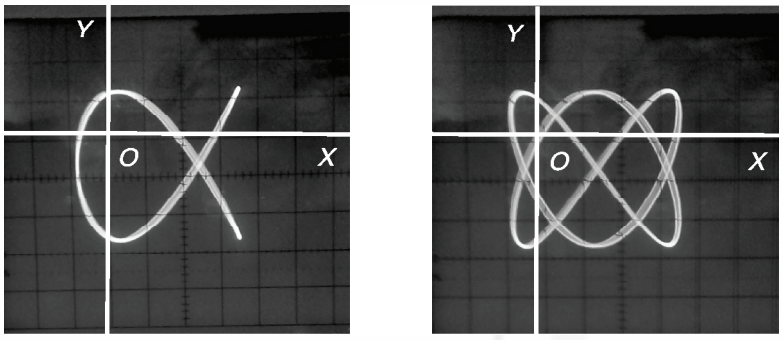
नियत प्रतिरोध, R_0 = 1000 Ω

प्रतिरोध बॉक्स में चयित प्रतिरोध R' (Ω)	$R = R_0 + R'$ (Ω)	v_2	b	$\theta = \sin^{-1}(v_2/b)$
0	1000			
1000	2000			
2000	3000			

समान आवृत्ति वाले दो ज्यावक्रीय तरंगों से बनी लिसाजू आकृतियों को देखने के बाद अब आप असमान आवृत्तियों वाले ज्यावक्रों से बनी लिसाजू आकृतियों के बारे में पढ़ेंगे।

10.5 असमान आवृत्ति वाले ज्यावक्रों की लिसाजू आकृतियां

आपने यांत्रिकी के पाठ्यक्रम में पढ़ा है कि असमान आवृत्तियों की दो तरंगों को लंबवत् लागू करने पर भी लिसाजू आकृतियां देखी जा सकती हैं। मान लें कि ω_x आवृत्ति *x*-निवेश पर और ω_y आवृत्ति *y*-निवेश पर लागू की गयी है। यदि ω_x और ω_y के बीच संबंध $m\omega_x = n\omega_y$ (यहां *m* एवं *n* पूर्णांक संख्याएं हैं) है, तो CRO के स्क्रीन पर प्रेक्षित लिसाजू आकृति *x*-अक्ष को अधिकतम *n*-बार (या इसके गुणज) और *y*-अक्ष को अधिकतम *m*-बार (या इसके गुणज) काटेगी। चित्र 10.9क और ख में इसका उदाहरण दिखाया गया है।



(क) (ख)

चित्र 10.9: $2\omega_x = 3\omega_y$ **के संगत लिसाजू आकृतियां।**

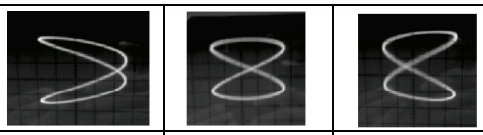
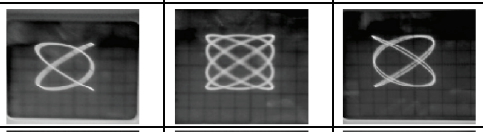
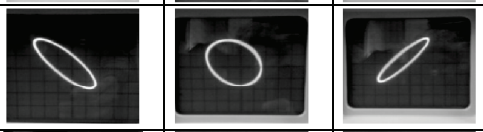
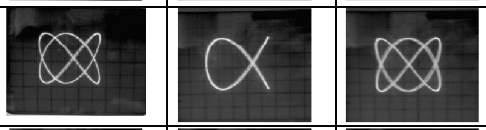
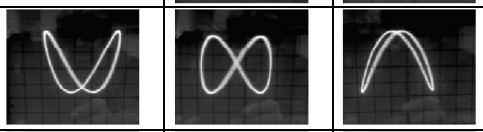
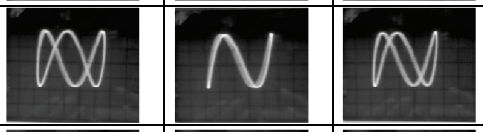
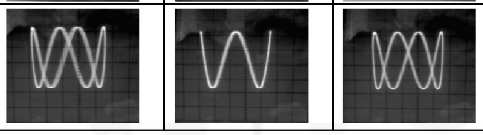
चित्र 10.9क में आकृति *x*-अक्ष को अधिकतम 3 बार और *y*-अक्ष को अधिकतम 2 बार काटती है। इसका अर्थ है कि समान आवर्त काल में *OY*-अक्ष के समांतर तीन कम्पन तथा *OX*-अक्ष के समांतर दो कम्पन होते हैं। अतः ω_x और ω_y की आवृत्तियों के बीच का संबंध $2\omega_x = 3\omega_y$ है।

अब चित्र 10.9ख में आकृति *x*-अक्ष को अधिकतम 6 बिंदुओं पर तथा *y*-अक्ष को अधिकतम चार बिंदुओं पर काटती है। यहाँ भी आवृत्ति संबंध $4\omega_x = 6\omega_y$ अर्थात् $2\omega_x = 3\omega_y$ है।

x-अक्ष और *y*-अक्ष को दी गयी आवृत्तियों के अनुपात को बदलकर आप विभिन्न लिसाजू आकृतियां देख सकते हैं।

प्रयोग के इस भाग को करने के लिए आपको एक द्वैत अनुरेखी दोलनदर्शी तथा दो फलन जनित्रों की आवश्यकता होगी। प्रयोग करने के लिए निम्नलिखित चरणों का अनुसरण करें :

1. दो फलन जनित्रों को CRO के चैनेल-I और चैनल-II निवेशों को जोड़े। CRO के प्रचालन की *x-y* विधा का चयन करें। फलन जनित्रों पर ज्यावक्र तरंगरूप का चयन करें और इनकी आवृत्तियां सुनिश्चित करें।
2. अब दोनों फलन जनित्रों की आवृत्तियों को समायोजित करके आप विभिन्न लिसाजू आकृतियां देख सकेंगे। इन आकृतियों के कुछ उदाहरण चित्र 10.10 में दिए हैं।
3. CRO स्क्रीन पर स्थिर आकृति प्राप्त करें और इसे अनुरेखण पेपर पर अनुरेखित करें।
4. इस अनुरेखित आकृति पर *x* और *y* अक्षों पर लागू आवृत्तियां भी लिखें। यह सुनिश्चित करें कि इन आकृतियों से संबंधित आवृत्तियों के अनुपात चित्र 10.10 के *m*:*n* अनुपात से मेल खाते हैं।

Patterns	Frequency to *x*-channel	Frequency to *y*-channel	अनुपात $\omega_x : \omega_y$
	4000 Hz	2000 Hz	2:1
	4000 Hz	3000 Hz	4:3
	2000 Hz	2000 Hz	1:1
	2000 Hz	3000 Hz	2:3
	2000 Hz	4000 Hz	1:2
	1000 Hz	3000 Hz	1:3
	1000 Hz	4000 Hz	1:4

चित्र **10.10**: ω_x और ω_y के विभिन्न अनुपातों के संगत लिसाजू आकृतियां।

10.6 शब्दावली

Accelerating	त्वरक
Bread board	प्रयोग पट्ट
Brightness	द्युति
Control knob	नियंत्रक घुंडी
Deflection assembly	विक्षेपण समाहार
Deflection plates	विक्षेपण पट्टिकाएं
Display	प्रदर्श
Fluorescent screen	प्रतिदीप्तिशील स्क्रीन
Saw tooth waveform	आरादंती तरंगरूप
Secondary emission	द्वितीयक उत्सर्जन
Sharpness	तीक्ष्णता
Threshold voltage	देहली वोल्टता
Time base	समयाधार
Time period	आवर्तकाल
Trace	अनुरेख
Waveform	तरंगरूप