इग्नू
जन-जन का
विश्वविद्यालय

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
विज्ञान विद्यापीठ

BPHCT-131
यांत्रिकी

खंड

4

आवर्ती दोलन

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति

प्रो. अजय घटक (सेवानिवृत्त)
आई.आई.टी. दिल्ली
नई दिल्ली

डॉ. नरेश कुमार (सेवानिवृत्त)
हिन्दू कॉलेज,
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

डा. प्रगति अशधीर
हिन्दू कॉलेज,
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

प्रो. सुरेश गर्ग
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय, नई दिल्ली

डॉ. शुभलक्ष्मी लाम्बा
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय, नई दिल्ली

प्रो. विजयश्री
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
नई दिल्ली

प्रो. सुदीप रंजन झा
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
नई दिल्ली

प्रो. एस. गोखले
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
नई दिल्ली

डॉ. संजय गुप्ता
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
नई दिल्ली

खंड निर्माण दल

प्रो. एस. सी. गर्ग (इकाई 16 से 19)
विज्ञान विद्यापीठ
इग्नू, नई दिल्ली

प्रो. सुदीप रंजन झा (इकाई 16 से 19)
विज्ञान विद्यापीठ
इग्नू, नई दिल्ली

पाठ्यक्रम समन्वयक : डॉ. शुभलक्ष्मी लांबा और प्रो. सुदीप रंजन झा

खंड मुद्रण

सुनील कुमार
सहायक कुलसचिव (प्रकाशन), इग्नू

अगस्त, 2019

ISBN: 978-93-89499-98-8

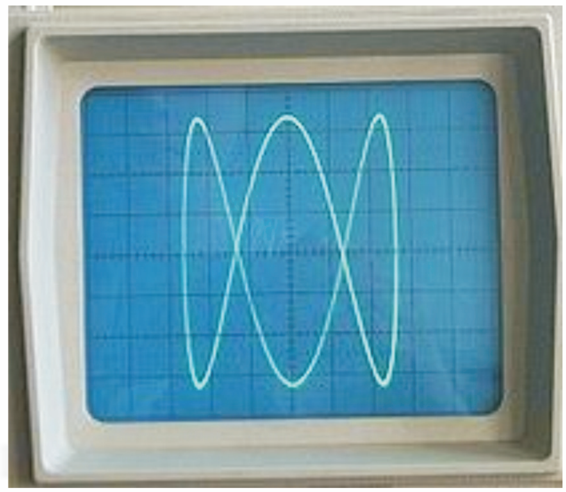
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय के पाठ्यक्रमों के विषय में और अधिक जानकारी विश्वविद्यालय के कार्यालय मैदान गढ़ी, नई दिल्ली–110 068 और इग्नू की वेबसाइट www.ignou.ac.in से प्राप्त की जा सकती है।

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की ओर से प्रो. पूर्णिमा मितल, निदेशक, विज्ञान विद्यापीठ द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित।
लेज़र टाईपसेटिंगः टेसा मीडिया एण्ड कम्प्यूटर्स,

विषय सूची

खंड 4 : आवर्ती दोलन

इस खंड में आप किसी वियुक्त निकाय की दोलनी गति और तरंग गति का अध्ययन करेंगे। हमने अपनी चर्चा मुख्यतः यांत्रिक दोलकों की दोलनी गति तक ही सीमित रखी है। परंतु, चर्चाओं के आधार पर जो गणितीय तकनीकें विकसित की गई हैं वे अन्य प्रकार के भौतिक निकायों जैसेकि वैद्युत निकायों पर भी लागू की जा सकती हैं। आगे, हमने पहले आदर्श तथा आपेक्षाकृत सरल निकायों के दोलनों की चर्चा की है और उसके बाद हम क्रमशः अधिक वास्तविक तथा गणितीय रूप से जटिल दोलनों की ओर बढ़े हैं। अतः हमने पहले एक आदर्श यांत्रिक दोलक की दोलनी गति का विश्लेषण किया है और उसके बाद दोलनों के अध्यारोपण तथा अवमंदित दोलन की चर्चा की है। अंत में हमने तरंग निर्माण और संचरण की चर्चा की है।



इकाई 16 में आप एक आदर्श कमानी-द्रव्यमान निकाय के दोलनों का अध्ययन करेंगे और इसके आधार पर **सरल आवर्त गति (SHM)** के मूलभूत अभिलक्षणों को जानेंगे। आप यह भी सीखेंगे कि **SHM** के लिए जिन गणितीय तकनीकों का विकास किया गया, उनके आधार पर दोलनी निकायों के संगत ऊर्जा का निर्धारण किस प्रकार करते हैं।

इकाई 17 में आप **अध्यारोपण सिद्धांत** का अध्ययन करेंगे और सीखेंगे कि किस प्रकार इस सिद्धांत का उपयोग कर किसी पिंड की, जिस पर एक ही समय में दो या दो से अधिक आवर्ती दोलन आरोपित किए गए हैं, दोलनी गति का विश्लेषण किया जा सकता है। आप यह भी जानेंगे कि जब किसी पिंड पर दो परस्पर लंबवत् दोलनों को आरोपित किया जाता है तो उसकी दोलनी गति विभिन्न रोचक पथों, जिन्हें **लिसाजू आकृतियां** कहते हैं, के अनुदिश होती है।

जैसाकि आप जानते हैं, रैखिक और दोलनी दोनों ही प्रकार की गतियां, वास्तविक जगत में घर्षण बल के कारण अवमंदित होती हैं। उदाहरण के लिए, किसी झूले की दोलनी गति वायु घर्षण के कारण धीरे-धीरे खत्म हो जाती है। अतः, वास्तविक दोलकों की गति को ठीक से समझने के लिए हमें इस बात की जानकारी होनी चाहिए कि **अवमंदक बल उनकी दोलनी गति को किस प्रकार प्रभावित करता है।** यह **इकाई 18** की विषयवस्तु है जहां हमने दोलक की गति पर अवमंदन के प्रभाव का विश्लेषण किया है। इस इकाई में हमने अवमंदन से संबंधित विभिन्न प्राचलों को परिभाषित भी किया है और उनके लिए उपयुक्त गणितीय व्यंजक भी व्युत्पन्न किए हैं। ये प्राचल किसी दोलनी निकाय में विद्यमान अवमंदन को अभिलक्षित करते हैं।

इकाई 19 में हमने तरंग गति की चर्चा की है। **तरंग क्या होती है?** हममें से अधिकांश लोग जब तरंग के बारे में सोचते हैं तो हमारे सामने समुद्र अथवा तालाब अथवा झील में जल की सतह पर संचारित तरंगों का दृश्य सामने आता है। परंतु, विज्ञान में तरंग शब्द का प्रयोग एक सामान्य/जनक शब्द की तरह होता

है जिसका अर्थ है दोलनों अथवा कंपनों के कारण उत्पन्न **क्षोभ** का संचरण। जल की सतह पर उठने वाली तरंगों में स्थिर जल सतह पर किसी पिंड के गिरने के फलस्वरूप उत्पन्न क्षोभ, तरंग की भांति संचारित होता है। इसी प्रकार, हम एक दूसरे को इसलिए सुन पाते हैं क्योंकि हमारे वाक-तंतु अपने आस-पास के क्षेत्र में क्षोभ उत्पन्न करते हैं जो ध्वनि तरंगों के रूप में संचारित होता है। किसी एंटेना में इलेक्ट्रानों की दोलनी गति के कारण आस-पास के क्षेत्र में वैद्युत एवं चुंबकीय क्षेत्रों के परिमाणों में परिवर्तन अथवा क्षोभ, विद्युत्-चुंबकीय तरंगों के रूप में संचारित होता है। दोलन और तरंग परिघटनाएं परस्पर संबंधित हैं और इनके काफी अभिलक्षण जैसे कि आयाम, आवृत्ति तथा कला सर्वनिष्ठ हैं। **इकाई 19** में आप तरंगों का निर्माण और संचरण का अध्ययन करेंगे। इस इकाई में आप तरंगों को ग्राफीय और गणितीय रूप में निरूपित करना सीखेंगे। साथ ही, आप तरंगों की कला और कला अंतर की संकल्पना के बारे में भी अध्ययन करेंगे।

हमें आशा है कि आपको दोलनी एवं तरंग गति का अध्ययन करने में आनंद आयेगा। आपकी सफलता के लिए हमारी शुभकामनाएं आपके साथ है।

यह फूको-लोलक का चित्र है जो मिलान, इटली के विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी संग्रहालय में रखा है। यह लोलक, जिसका नाम फ्रांसीसी भौतिकीविद् लिओन फूको के नाम पर रखा गया है, एक सरल लोलक है जो पृथ्वी के घूर्णन को प्रदर्शित करता है। (चित्र का स्रोत : commons.wikimedia.org)

इकाई 16

सरल आवर्त गति

इकाई की रूपरेखा

अध्ययन निर्देशिका

इस इकाई में आप सरल आवर्त गति (SHM) का वर्णन करना सीखेंगे। इस इकाई की विषयवस्तु को समझने के लिए आपको अपने स्कूल में पढ़े यांत्रिकी, अवकल गणित तथा अवकल समीकरणों की कुछ संकल्पनाओं को ताज़ा करने की आवश्यकता होगी। विशेष रूप से, आपको इस इकाई को पढ़ने से पहले कलन में प्रयुक्त अवकलज की संकल्पना को फिर से दोहरा लेना चाहिए। आप जानते हैं कि हम किसी पिंड की गति का वर्णन न्यूटन के द्वितीय गति नियम के आधार पर करते हैं जिसके लिए उस पर लग रहे बल की जानकारी होनी चाहिए। आपको दोलनी गति के लिए जिम्मेदार बल की प्रकृति पर ध्यान देना चाहिए। एक सरल आवर्ती दोलक का गति समीकरण द्वितीय कोटि रैखिक अवकल समीकरण होता है तथा इस पाठ्यक्रम की इकाई 4 में आप इसे हल करना सीख चुके हैं। दोलनी निकाय की जटिलता के अनुरूप ही अवकल समीकरणों के हल प्राप्त करने के लिए विभिन्न गणितीय तकनीकों का उपयोग किया जाता है। परंतु, हम चाहेंगे कि आप गति समीकरण के हल के आधार पर निकाले गए भौतिक निष्कर्षों पर अधिक ध्यान दें।

इस बात से कोई फर्क नहीं पड़ता कि आपके द्वारा प्रस्तावित सिद्धांत कितना सुंदर है या आप कितने कुशाग्र बुद्धि हैं। यदि वह प्रायोगिक परिणामों के संगत नहीं है तो वह सिद्धांत गलत है।

रिचर्ड पी. फाइनमैन

16.1 परिचय

अपने स्कूल के भौतिकी पाठ्यक्रम में अपने विभिन्न प्रकार की गतियों, जैसेकि सरल रेखीय गति, समतल में गति तथा आवर्ती गति के विषय में पढ़ा है। आप गिरते हुए पिंडों, ग्रहों और उपग्रहों की गति से भी परिचित हैं। विरामावस्था से सीधे नीचे गिराया गया पिंड एक सरल रेखा में (पृथ्वी के आकर्षण बल के प्रभाव में) स्वतंत्र रूप से गिरता है। किसी वायुयान से गिराया गया खाने का पैकेट अथवा गेंदबाज द्वारा स्टम्पों की ओर फेंकी गई क्रिकेट गेंद एक वक्र के अनुदिश गति करती है। ग्रहों और उपग्रहों की गति आवर्ती होती है।

आपने दीवार घड़ी के लोलक, झूले और किसी *वायलिन* अथवा सितार अथवा *गिटार* के तारों की गति को देखा होगा। ये दोलनी गति के उदाहरण हैं। आप इस पाठ्यक्रम के खंड 2 में यांत्रिकी के नियमों का उपयोग करके सरलरेखीय गति और समतल में गति का विश्लेषण करना सीख चुके हैं। **दोलनी गति का विश्लेषण भी यांत्रिकी के नियमों का उपयोग करके किया जा सकता है**। इस प्रकार के विश्लेषण से दोलनी गति के विशिष्ट लक्षण स्पष्ट हो जाते हैं। साथ ही, तरंग परिघटना को समझने के लिए दोलनी गति का अध्ययन आवश्यक है, क्योंकि तरंगें, परस्पर जुड़े दोलनकारी निकायों के बीच होने वाले ऊर्जा विनिमय के कारण उत्पन्न होती है।

इस इकाई की विषयवस्तु **सरल आवर्त गति (SHM)** है। सरल आवर्त गति, दोलनी गति का सरलतम उदाहरण है। SHM का अध्ययन निम्नलिखित कारणों से महत्त्वपूर्ण हैं : (i) यदि साम्यावस्था से विस्थापन का मान कम हो तो विविध यांत्रिक निकायों की दोलनी गति वास्तव में SHM ही होती है; (ii) SHM की समझ के आधार पर हम जटिल दोलनी गतियों का विश्लेषण भी SHM के पदों में कर सकते हैं। **इसके अतिरिक्त, विभिन्न भौतिक निकायों की दोलनी गति को कुछ सन्निकटनों के तहत SHM कहा जा सकता है।**

भाग 16.2 में पहले आप कमानी-द्रव्यमान निकाय की दोलनी गति का अध्ययन करेंगे और यह समझेंगे कि किन स्थितियों में इसकी गति को SHM कहा जा सकता है। अनुभाग 16.3 में आप कमानी-द्रव्यमान निकाय का गति का समीकरण स्थापित करना सीखेंगे तथा तात्क्षणिक विस्थापन और समय के बीच संबंध प्राप्त करेंगे। इस संबंध का उपयोग करके आप किसी दोलक के वेग, त्वरण तथा कला के लिए व्यंजक प्राप्त कर सकेंगे। दोलित कमानी-द्रव्यमान निकाय की ऊर्जा के लिए व्यंजक की व्युत्पत्ति भाग 16.4 की विषयवस्तु है।

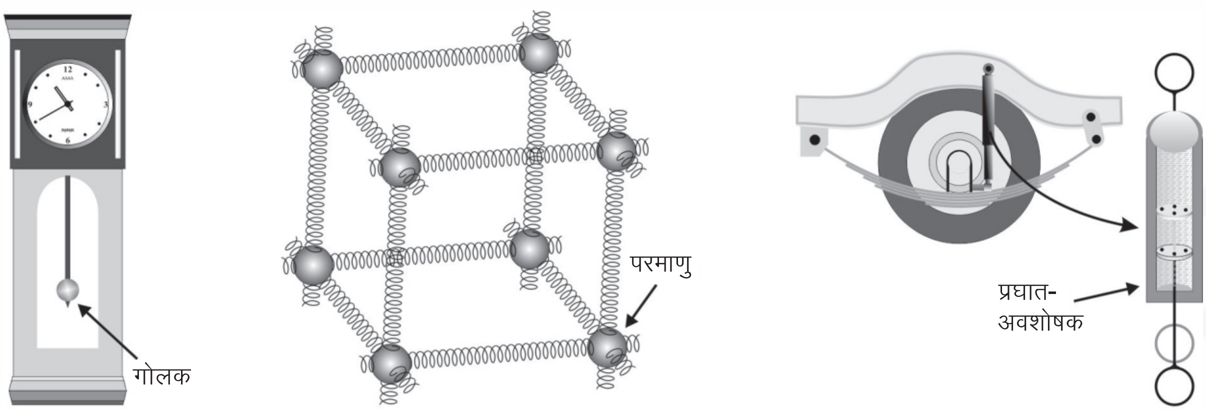
उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- किसी निकाय की गति के सरल आवर्त गति कहलाने की मूलभूत कसौटियों का उल्लेख कर सकेंगे;
- सरल आवर्ती दोलक का गति का समीकरण स्थापित कर सकेंगे;
- किसी दोलक का आयाम, आवर्त काल एवं कला को परिभाषित कर सकेंगे;
- किसी दोलक के वेग और त्वरण के व्यंजक व्युत्पन्न कर सकेंगे; और
- सरल आवर्त गति कर रहे किसी पिंड की स्थितिज ऊर्जा, गतिज ऊर्जा एवं कुल ऊर्जा के व्यंजक प्राप्त कर सकेंगे।

16.2 सरल आवर्त गति : मूल अभिलक्षण

आवर्ती गति हमें अपने दैनिक जीवन में काफी देखने को मिलती है। उदाहरण के लिए, घड़ी की दोनों सुइयाँ एक निश्चित समय गुजरने के बाद एक विशिष्ट स्थिति पर आ जाती है। इसी प्रकार, हमारे हृदय की धड़कन, हमारे श्वास-प्रश्वास, सूर्य के इर्द-गिर्द पृथ्वी की गति तथा पृथ्वी के परितः चन्द्रमा की गति आवर्ती गति के कुछ सुपरिचित उदाहरण हैं। **जब आवर्ती गति करता हुआ कोई पिंड एक नियत बिंदु के दोनों ओर गति करता है तो उसकी गति को कम्पन या दोलनी गति कहा जाता है।** इसलिए हम कहते हैं कि घड़ी की सुइयों की गति आवर्ती तो है, परंतु दोलनी नहीं। आवर्ती गति की तरह ही दोलनी गति भी एक सामान्य परिघटना है। दोलनी गति के सुपरिचित उदाहरण हैं लोलक घड़ी का दोलनकारी गोलक, इंजन का पिस्टन, प्रघात अवशोषक में पिस्टन की गति, किसी संगीत वाद्य के कम्पनशील तन्तु, किसी ठोस में परमाणु, आदि। यहाँ तक कि विशाल भवनों एवं पुलों में भी कभी-कभी दोलनी गति होती है। चित्र 16.1 में दोलनी गति करने वाले कुछ निकाय दर्शाए गए हैं।



(क) (ख) (ग)

चित्र 16.1 : दोलनी गति करने वाले कुछ प्रारूपिक निकायः क) लोलक घड़ी का गोलक; ख) ठोस में परमाणु (एक-दूसरे के साथ अंतरापरमाणुक बल, जिन्हें यहां काल्पनिक कमानियों द्वारा निरूपित किया गया है, के कारण जुड़े हुए); ग) प्रघात-अवशोषक।

प्रत्येक दोलित पिंड की गति माध्यम वायु, तरल अथवा किसी अन्य प्रकार के प्रतिरोध के कारण समाप्त हो जाती है। हमारे दैनिक जीवन में दिखने वाली दोलनी गतियां समान्यतया जटिल होती हैं। SHM सरलतम दोलनी गति है। सरल आवर्त दोलन करने वाले दोलनकारी निकाय को **सरल आवर्ती दोलक** कहते हैं। हमारा विश्वास है कि +2 कक्षाओं में आपने दोलनी गति के विषय में काफ़ी कुछ पढ़ा होगा। फिर भी, संपूर्णता की दृष्टि से हम एक सरल दोलनी निकाय – कमानी एवं द्रव्यमान निकाय – की चर्चा करेंगे।

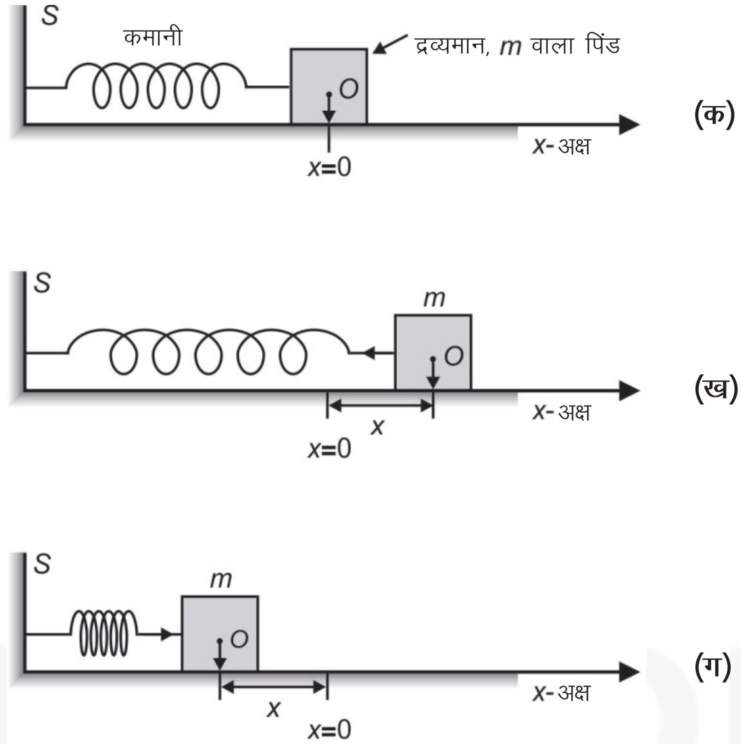
16.2.1 कमानी-द्रव्यमान निकाय का दोलन

चित्र 16.2क देखें। यह एक ऐसे कमानी-द्रव्यमान निकाय को दर्शाता है जिसमें कमानी का द्रव्यमान नगण्य है और जिसका एक सिरा किसी दृढ़ आधार S पर जड़ दिया गया है और दूसरे सिरे पर m द्रव्यमान वाला पिंड लगा है। (कमानी का द्रव्यमान नगण्य तब कहा जाता है जब उस पर लगे द्रव्यमान की अपेक्षा उसका अपना द्रव्यमान बहुत कम हो)। हम मान लेते हैं कि यह निकाय एक क्षैतिज, घर्षणविहीन पृष्ठ पर रखा हुआ है।

यदि कमानी का विस्तार (अथवा संपीडन) इसकी प्रत्यास्थता सीमा में हुआ हो तो उस पर हुक का नियम लागू होता है। इसका अर्थ है कि प्रत्यानयन बल, कमानी के विस्तार के रैखिकतः समानुपाती है। दूसरे शब्दों में, हुक नियम को हम तभी लागू कर सकते हैं जब कमानी का विस्थान अथवा संपीड़न 'कम' हो जिससे कि विस्थापन कमानी की प्रत्यास्थता सीमा से अधिक न हो जाए। समीकरण (16.1) बृहत् विस्थापनों के लिए मान्य नही होता। वास्तव में, ऐसी अवस्था में F और x में जटिल संबंध होता है।

इस निकाय की गति के विश्लेषण के लिए हम एक ऐसा निर्देश तंत्र चुनते हैं जिसका *x*-अक्ष कमानी की लंबाई के अनुदिश है। जब पिंड विरामावस्था में है तो हम इस पर एक बिंदु *O* अंकित कर देते हैं और इस बिन्दु को निर्देश तंत्र का मूल बिंदु मान लेते हैं। अर्थात् साम्यावस्था में, जैसाकि चित्र 16.2क में दर्शाया गया है, बिंदु *O*, $x = 0$ पर स्थित है।

इस तथ्य को समझने के लिए कि एक नियत बल, लंबी कमानी में, छोटी कमानी की तुलना में अधिक खिंचवा उत्पन्न करेगा, कल्पना करें कि एक कमानी को काटकर दो कमानियां बनाई गई हैं जिसमें छोटी कमानी में फेरों की संख्या 10 है तथा लंबी कमानी में 20 है। मान लें कि 10 फेरों वाली कमानी, एक नियत बल लगने के कारण 20 cm विस्तारित हो जाती है। इस विस्तार के लिए यह आवश्यक है कि प्रत्येक फेरा, 2 cm से विस्तारित हो। आगे, मान लें कि कमानी के बड़े भाग, जिसमें 20 फेरे हैं को भी 20 cm से विस्तारित किया जाता है। इस स्थिति में प्रत्येक फेरा केवल 1 cm ही विस्तारित होगा। किसी एक फेरे को 1 cm विस्तारित करने में लगा बल इसे 2 cm से विस्तारित करने में लगे बल से कम होगा। अतः, बराबर विस्तार उत्पन्न करने के लिए हमें छोटी कमानी पर अधिक बल लगाना पड़ेगा। विलोमतः, यदि एक ही प्रकार की दो असमान लंबाइयों वाली कमानियों पर बराबर बल लगाया जाए तो कमानियों में विस्तार असमान होगा।



चित्र 16.2 : आदर्श दोलक के रूप में एक कमानी-द्रव्यमान निकाय : क) साम्य अभिविन्यासः ख) विस्तारित अभिविन्यास; ग) संपीडित अभिविन्यास।

अब हम द्रव्यमान को अनुदैर्घ्यतः धनात्मक *x*-अक्ष के अनुदिश खींचते हैं, ताकि कमानी की लंबाई में *x* दूरी की वृद्धि हो, और फिर छोड़ देते हैं (चित्र 16.2ख)। ऐसा करने पर आप क्या प्रेक्षित करेंगे? कमानी-द्रव्यमान निकाय साम्यावस्था ($x = 0$) के इर्द-गिर्द गति करता है। अर्थात् निकाय दोलनी गति करता है।

दोलनों की प्रकृति को समझने के लिए **ध्यान दें कि प्रत्यास्थता के कारण कमानी में प्रत्यानयन बल *F* कार्य करता है जिसकी प्रकृति द्रव्यमान को वापस साम्य स्थिति की ओर लाने की होती है।** जब कमानी को खींचा जाता है (चित्र 16.2ख) तो प्रत्यानयन बल कमानी को संपीडित करता है लेकिन जब कमानी को संपीडित किया जाता है (चित्र 16.2ग) तो प्रत्यानयन बल कमानी की लंबाई में वृद्धि करता है। (आप कमानी को जितना अधिक खीचेंगे/संपीडित करेंगे, प्रत्यानयन बल उतना ही अधिक होगा।) **इस प्रकार हम पाते हैं कि प्रत्यानयन बल की दिशा सदैव पिंड के विस्थापन की दिशा के विपरीत होती है।**

प्रत्यानयन बल का परिमाण निर्धारित करने के लिए हम याद करते हैं कि यदि कमानी की लंबाई वृद्धि कम हो तो **हुक का नियम मान्य होता है** (पृष्ठ 9 पर दी गई हाशिये पर टिप्पणी पढ़ें)। ऐसी स्थिति में प्रत्यानयन बल का परिमाण (*F*) कमानी की लंबाई में हुई वृद्धि, *x* के रैखिकतः समानुपाती होता है और हम लिख सकते हैं :

$$F = -kx \qquad (16.1)$$

समीकरण (16.1) में ऋण चिह्न यह इंगित करता है कि प्रत्यानयन बल कमानी के साथ जुड़े द्रव्यमान के विस्थापन का विरोध करता है। ध्यान दें कि प्रत्यानयन बल का

परिमाण, विस्थापन x का फलन है। अतः, यह बल परिवर्ती है। राशि k को **कमानी नियतांक** अथवा **बल नियतांक** कहा जाता है। कमानी नियतांक कमानी की दुर्नम्यता (stiffness) का मापक है। x के किसी दिए गए मान के लिए अधिक दुर्नम्य कमानी, द्रव्यमान पर अधिक प्रत्यानयन बल लगाएगी। कमानी नियंताक का मान कमानी के पदार्थ के घनत्व एवं आयतन प्रत्यास्थता गुणांक जैसे भौतिक गुणधर्मों पर निर्भर करता है। परंतु यदि एक कमानी को काट कर दो असमान लंबाइयों वाली **कमानियां** बनाई जाएं और इन दो कमानियों में प्रत्येक पर बराबर बर लगाया जाए तो लंबी कमानी का खिंचवा/संपीडन छोटी कमानी की तुलना में अधिक होगा (पृष्ठ 10 पर हाशिये पर टिप्पणी पढ़ें)। आंकिकतः, कमानी नियतांक इकाई, लंबाई वृद्धि के लिए कमानी द्वारा द्रव्यमान पर लगाए गए प्रत्यानयन बल के परिमाण के बराबर होता है। इसका SI मात्रक Nm^{-1} है।

विवेचना को सरल रखने के लिए हम केवल उन दोलनों तक सीमित रहेंगे जिनके लिए समीकरण (16.1) वैध है। इस मान्यता को **लघु दोलन सन्निकटन** कहा जाता है।

समीकरण (16.1) द्वारा व्यक्त प्रत्यानयन बल के कारण द्रव्यमान m में उत्पन्न त्वरण का मान हम न्यूटन के गति के द्वितीय नियम द्वारा प्राप्त कर सकते हैं :

$$F = ma_c$$

समीकरण (16.1) का उपयोग करके हम लिख सकते हैं :

$$-kx = ma_c$$

अथवा
$$a_c = -\left(\frac{k}{m}\right)x \qquad (16.2)$$

समीकरण 16.2 दर्शाता है कि कमानी से जुड़े द्रव्यमान का त्वरण (i) विस्थापन के समानुपाती है (क्योंकि (k/m) एक नियतांक है), तथा (ii) विस्थापन की विपरीत दिशा में होता है (जैसाकि समीकरण के दाहिने ओर के ऋण चिन्ह से स्पष्ट है)। जब किसी दोलित पिंड की गति के त्वरण और विस्थापन इन दो विशिष्ट लक्षणों से अभिलक्षित हों तो हम कहते हैं कि वह पिंड सरल आवर्त गति कर रहा है। अतः, हम निम्नलिखित निष्कर्ष निकाल सकते हैं :

ध्यान दें

न्यूटन के गति के द्वितीय नियम को सदिश रूप में निम्नवत् लिखा जाता है :

$$\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}_c$$

जहाँ बल $\vec{\mathbf{F}}$ तथा त्वरण $\vec{\mathbf{a}}_c$ सदिश राशियाँ हैं। क्योंकि, कमानी-द्रव्यमान निकाय की गति एक-विमीय है। हमने न्यूटन के गति के द्वितीय नियम को अदिश रूप में लिखा है।

निम्नलिखित दो अभिलक्षणों वाली किसी भी दोलनी गति को **सरल आवर्त गति** कहा जाता है :

- पिंड का त्वरण, साम्य स्थिति से उसके विस्थापन के समानुपाती होता है।
- त्वरण की दिशा सदैव विस्थापन की दिशा के विपरीत, अर्थात् साम्य स्थिति की ओर होती है।

कभी न भूलें

अब आप पूछ सकते हैं कि **कमानी-द्रव्यमान निकाय दोलन क्यों करता है?** इस प्रश्न का उत्तर जानने के लिए हम गौर करते हैं कि जब हम द्रव्यमान को खींचते हैं तो कमानी की लंबाई में वृद्धि होती है। कमानी का प्रत्यानयन बल द्रव्यमान को साम्यावस्था की ओर लाने की चेष्टा करता है। इस प्रक्रिया में द्रव्यमान में गतिज ऊर्जा आ जाती है। इस गतिज ऊर्जा के कारण द्रव्यमान साम्यावस्था पर आ जाता है और जड़त्व के कारण यह साम्य स्थिति को पार कर जाता है। जब द्रव्यमान साम्यावस्था को पार करके दूसरी ओर जाने लगता है तो कमानी संपीडित हो जाती है और फिर एक प्रत्यानयन बल लगता है पर इस बार यह विपरीत दिशा में लगता है। समय के साथ इस प्रक्रम की पुनरावृत्ति होती रहती है। अतः, हम निम्नलिखित निष्कर्ष निकाल सकते हैं :

> कमानी-द्रव्यमान निकाय की दोलनी गति इस निकाय के दो आन्तरिक गुणों का परिणाम है : (कमानी की) प्रत्यास्थता एवं द्रव्यमान का (गतिज) जड़त्व।

अब आप निम्नलिखित बोध प्रश्न का उत्तर दें ताकि आपको कमानी-द्रव्यमान निकाय से जुड़ी विभिन्न राशियों के आंकिक मानों का आभास हो सके।

बोध प्रश्न 1 – कमानी-नियतांक तथा इसका निर्धारण

क) मान लें कि एक कमानी को दो भागों A तथा B में काट दिया जाता है। भाग A की लंबाई मूल कमानी की लंबाई की एक-तिहाई है तथा भाग B की लंबाई मूल कमानी की लंबाई की दो-तिहाई। A तथा B भागों के एक छोर को दृढ़ दीवार से जोड़ दिया गया है।

i) यदि A तथा B के मुक्त छोरों पर बराबर बल आरोपित किया जाए तो क्या दोनों कमानियों का विस्थापन बराबर होगा?

ii) यदि नहीं, तो कौन-सी कमानी में विस्थापन अधिक होगा?

iii) किस कमानी के कमानी-नियतांक का मान अधिक होगा?

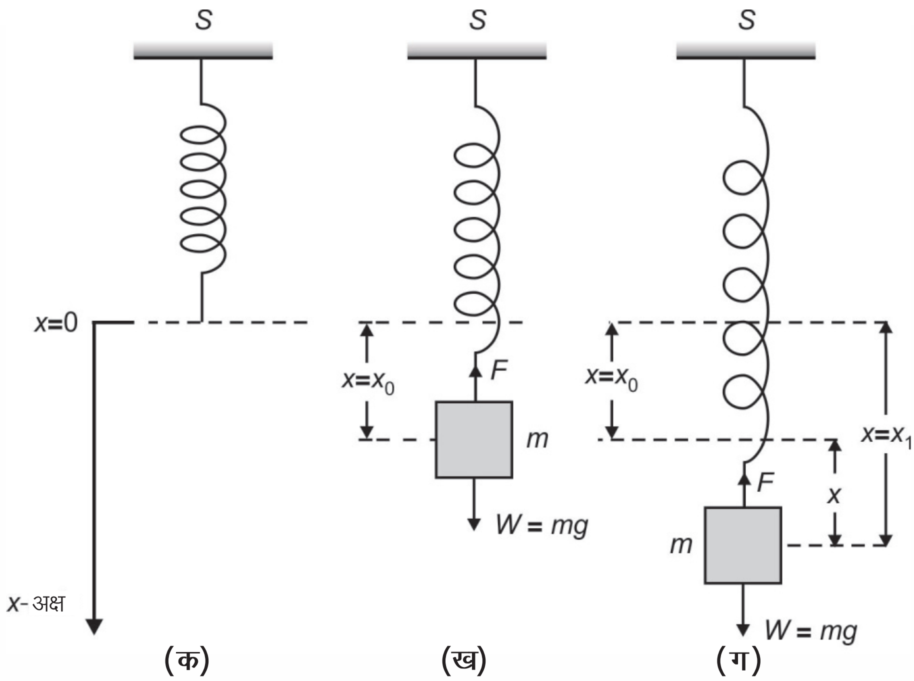
ख) मान लीजिए कि चित्र 16.2क में दर्शाई गई कमानी पर 2 N बल लगाने से उसकी लंबाई में 5 cm की वृद्धि होती है। इस कमानी का कमानी-नियतांक परिकलित करें। यदि कमानी पर 2.5 N बल लगाया जाए तो कमानी में होने वाले संपीडन का परिमाण परिकलित करें।

अभी तक हमने क्षैतिजतः संरेखित कमानी-द्रव्यमान निकाय की दोलनी गति पर विचार किया और पाया कि यदि आरोपित बल के कारण उसका विस्थापन लघु हो तो वह सरल आवर्त गति करता है। अब आप पूछ सकते हैं : **यदि हम कमानी-द्रव्यमान निकाय को एक दृढ़ आधार से ऊर्ध्वाधरतः लटकायें तो क्या इसकी गति भिन्न होगी? इस स्थिति में निकाय पर कौन-कौन से बल कार्य करेंगे?** आइए, अब इस दोलक की चर्चा करें।

ऊर्ध्वाधरतः संरेखित कमानी-द्रव्यमान निकाय

चित्र 16.3 देखें जिसमें दृढ़ आधार S से ऊर्ध्वाधरतः लटके कमानी-द्रव्यमान निकाय को दिखाया गया है। क्षैतिजतः संरेखित कमानी-द्रव्यमान निकाय के विपरीत, यहां हमें ऊर्ध्वाधरतः लटके द्रव्यमान पर गुरुत्व के कारण लगने वाले बल को भी गणना में शामिल करना होगा। (हम कमानी के द्रव्यमान को लटके हुए द्रव्यमान की तुलना में नगण्य मानकर छोड़ देते हैं।) **ध्यान दें कि द्रव्यमान पर एक साथ दो बल आरोपित होंगे : कमानी के कारण प्रत्यानयन बल तथा गुरुत्व के कारण बल**। अब सवाल यह है कि **द्रव्यमान के दोलन की प्रकृति क्या होगी?**

ऊर्ध्वाधरतः लटके कमानी-द्रव्यमान निकाय की गति का विश्लेषण करने के लिए हम मान लेते हैं कि x-अक्ष कमानी की लंबाई के अनुदिश है। जब कमानी से कोई द्रव्यमान नहीं जुड़ा है तो हम इसके निम्नतम बिंदु को अपना संदर्भ बिंदु $x = x_0$ मान लेते हैं (चित्र 16.3क)। जब कमानी से द्रव्यमान m को लटकाया जाता है तो कमानी $x = x_0$ तक खिंच जाती है और निकाय विराम में आ जाता है। इसका अर्थ है कि संदर्भ बिंदु $x = x_0$ पर स्थानान्तरित हो जाता है (चित्र 16.3ख)। आप सहमत होंगे कि इस स्थिति में द्रव्यमान



चित्र 16.3 : एक ऊर्ध्वाधरतः लटका हुआ कमानी-द्रव्यमान निकाय क) कमानी, जब इससे कोई द्रव्यमान नहीं लटकाया गया है; ख) द्रव्यमान *m* को कमानी से जोड़ने के बाद इसकी साम्यावस्था; ग) साम्यावस्था से विस्थापित कमानी-द्रव्यमान निकाय।

m का भार mg ऊपर की ओर कार्य करने वाले प्रत्यानयन बल kx_0 को संतुलित करता है और इसलिए हम लिख सकते हैं कि

$$mg - kx_0 = 0$$

या
$$mg = kx_0 \tag{16.3}$$

अब हम, कमानी को और नीचे की ओर $x = x_1$ तक खींचकर (चित्र 16.3ग) छोड़ देते हैं। ऐसा करने पर निकाय, बिंदु $x = x_0$ के दोनों ओर ऊपर-नीचे दोलन करने लगता है। अब प्रश्न यह है **कि हम इस गति की व्याख्या कैसे करें**? इसे समझने के लिए हम गौर करते हैं कि जिस क्षण पर हम द्रव्यमान को छोड़ते हैं तब इस पर कुल प्रत्यानयन बल kx_1 होता है जिसकी दिशा ऊपर की ओर है। इसका अर्थ है कि द्रव्यमान पर नीचे की ओर लगने वाला कुल बल भी kx_1 है। परंतु नीचे की ओर लगने वाले कुल बल में बाह्य बल और गुरुत्व बल शामिल हैं। अतः, द्रव्यमान m पर नीचे की ओर लगने वाला कुल प्रभावी बल F' है :

$$F' = kx_1 - mg$$

समीकरण (16.3) का उपयोग करके हम लिख सकते हैं कि

$$F' = kx_1 - kx_0 = k(x_1 - x_0) = kx$$

जहां $x = x_1 - x_0$ । ध्यान दें कि F' उस बल के बराबर है जो कमानी, द्रव्यमान पर उसे छोड़े जाने के बाद लगाती है और कमानी द्वारा लगाए गए बल की दिशा ऊपर की ओर है। अतः, हम प्रत्यानयन बल को निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$F = -kx$$

ध्यान दें कि **ऊर्ध्वाधर दोलन** करते हुए द्रव्यमान पर लगने वाले नेट प्रत्यानयन बल का स्वरूप समीकरण (16.1) के समान है। **इसलिए, हम कह सकते हैं कि ऊर्ध्वाधरतः संरेखित कमानी-द्रव्यमान निकाय की दोलनी गति सरल आवर्त गति होती है और गुरुत्व बल दोलनों की प्रकृति को प्रभावित नहीं करता।** गुरुत्व का केवल उतना ही प्रभाव होता है कि निकाय की साम्यावस्था स्थिति स्थानातंरित हो जाती है।

समीकरण (16.1) **कमानी-द्रव्यमान निकाय द्वारा अनुपालित बल नियम देता है।** अब हम किसी सरल आवर्त दोलक का गति समीकरण प्राप्त करने के लिए न्यूटन के द्वितीय गति नियम का उपयोग करते हैं। गति समीकरण हमें इन प्रश्नों के उत्तर प्राप्त करने में सहायता करता है : किसी दोलक की सरल आवर्त गति समय के साथ किस प्रकार विकसित होती है? किसी क्षण विशेष या बिंदु विशेष पर दोलक के वेग और त्वरण क्या हैं? एक दोलन पूर्ण करने में दोलक को कितना समय लगता है?

16.3 सरल आवर्त गति का अवकल समीकरण

चित्र 16.2ख में दिखाए गए आदर्श कमानी-द्रव्यमान निकाय की गति पर पुनर्विचार करें। मान लें कि किसी क्षण t पर, साम्य स्थिति से द्रव्यमान m का विस्थापन x है। द्रव्यमान पर लगने वाला बल, प्रत्यानयन बल F है जो समीकरण (16.1) द्वारा निरूपित किया गया है। हम द्रव्यमान का त्वरण a_c न्यूटन के गति के द्वितीय नियम का उपयोग करके ज्ञात कर सकते हैं :

$$F = ma_c$$

इस परिणाम को समीकरण (16.1) के साथ संयोजित करने पर हम पाते हैं कि

$$ma_c = -kx \qquad (16.4\text{क})$$

चूंकि एक-विम गति के लिए त्वरण का व्यंजक है

$$a_c = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

अतः, हम समीकरण (16.4क) को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad (16.4\text{ख})$$

या

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (16.4\text{ग})$$

समीकरण (16.4ग) सरल आवर्त दोलक का गति का समीकरण है। ध्यान दें कि (k/m) का मात्रक $\text{N m}^{-1}\,\text{kg}^{-1} = (\text{kg m s}^{-2})(\text{m}^{-1}\,\text{kg}^{-1}) = \text{s}^{-2}$ है। इसका अर्थ है कि हम (k/m) के स्थान पर ω_0^2 लिख सकते हैं, जहाँ ω_0 **कोणीय आवृत्ति** है तथा इसकी इकाई s^{-1} एवं विमा T^{-1} है। यहाँ T समय है।

अब आप पूछ सकते हैं कि ω_0 की भौतिक सार्थकता क्या है? क्या आप SHM से संबंधित किसी ऐसी भौतिक राशि के बारे में सोच सकते हैं जिसकी विमा समय की व्युत्क्रम हो?

ω_0 के पदों में समीकरण (16.4ग) निम्न रूप ले लेता है :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (16.5)$$

ध्यान दें

वेग $\vec{\mathbf{v}}$ को विस्थापन $\vec{\mathbf{x}}$ के समय के साथ परिवर्तन की दर के रूप में परिभाषित किया जाता है। गणितीय रूप से हम लिख सकते हैं:

$$\vec{\mathbf{v}} = d\vec{\mathbf{x}}/dt$$

इसी तरह, त्वरण को समय के साथ वेग के परिवर्तन की दर के रूप में परिभाषित किया जाता है। अतः, हम लिख सकते हैं कि

$$\vec{\mathbf{a}}_c = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{\mathbf{x}}}{dt^2}$$

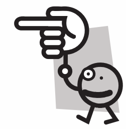
ध्यान दें कि विस्थापन, वेग एवं त्वरण सदिश राशियां हैं तथा इन्हें उनके संगत प्रतीकों को मोटा करके और उनके ऊपर तीर लगा कर दिखाया जाता है ताकि अदिश राशियों जैसे समय t से इनकी भिन्नता प्रकट की जा सके। और क्योंकि हम एक-विम गति पर ही चर्चा कर रहे हैं इसलिए हम विभिन्न सदिश राशियों के परिमाण तक सीमित रह सकते हैं। अतः, हम लिख सकते हैं :

$$v = dx/dt$$

तथा $a_c = d^2x/dt^2$

जहाँ $\omega_0 = \sqrt{k/m}$। समीकरण (16.5) सरल आवर्त गति करने वाले दोलक के गति समीकरण का एक दूसरा रूप है। ध्यान दें कि समीकरण (16.5) एक रैखिक द्वितीय कोटि समघात अवकल समीकरण है और **एक-विम सरल आवर्त गति निरूपित करता है।** यहां यह बताना आवश्यक हैं कि यद्यपि हमने समीकरण (16.5) को कमानी-द्रव्यमान निकाय के लिए व्युत्पन्न किया है, यह सार्वत्रिक रूप से सरल आवर्त गति का वर्णन करता है। अतः, हम कह सकते हैं :

> बल नियतांक k वाली कमानी से जुड़े द्रव्यमान m की सरल आवर्त गति का वर्णन करने वाला अवकल समीकरण है : $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2\, x = 0$



कभी न भूलें

आप समीकरण (16.5) को इस पाठ्यक्रम की इकाई 4 में हल करना सीख चुके हैं। आप समीकरण (4.4ख) से जानते हैं कि अवकल समीकरण (16.5) का व्यापक हल निम्नवत् व्यक्त होता है :

$$x\,(t) = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t \qquad (16.6\text{क})$$

जहां C_1 तथा C_2 स्वेच्छ नियतांक है। आपने इकाई 4 में पढ़ा है कि नियतांकों C_1 तथा C_2 के उपयुक्त मानों के लिए व्यापक हल को निम्नलिखित समीकरणों (16.6ख से च) द्वारा व्यक्त किसी भी रूप में लिखा जा सकता है :

$$x(t) = a \sin(\omega_0 t + \phi) \qquad (16.6\text{ख})$$

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t + \phi) \qquad (16.6\text{ग})$$

$$x\,(t) = a \sin(\omega_0 t - \phi) \qquad (16.6\text{घ})$$

$$x\,(t) = a \cos(\omega_0 t - \phi) \qquad (16.6\text{च})$$

जहां a, ω_0 तथा ϕ नियतांक हैं।

आगे पढ़ने से पहले निम्नलिखित बोध प्रश्न को हल कर आपको सुनिश्चित कर लेना चाहिए कि उपरोक्त हल अवकल समीकरण (16.5) को संतुष्ट करते हैं।

बोध प्रश्न 2 – सरल आवर्त गति के अवकल समीकरण के हल

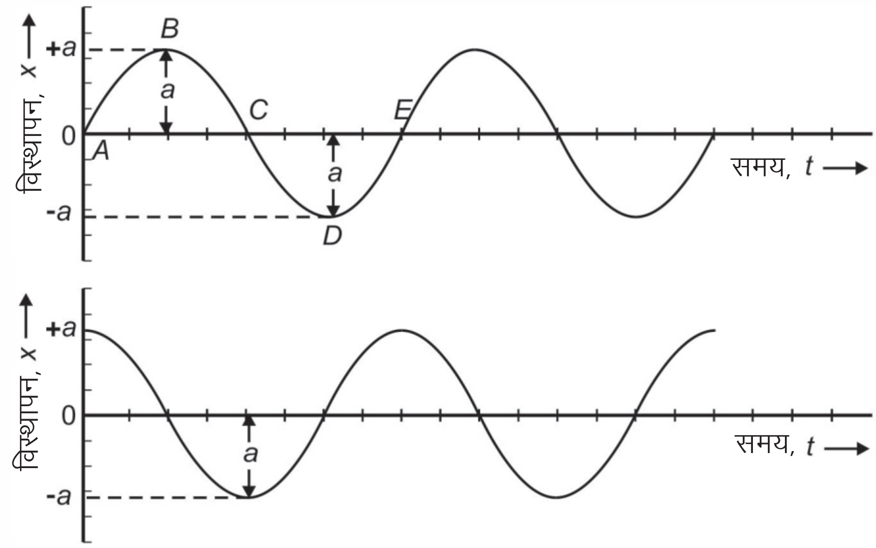
सिद्ध करें कि समीकरणों (16.6ख, ग, घ, च) द्वारा व्यक्त हल समीकरण (16.5) को संतुष्ट करते हैं।

समीकरणों (16.6ख, ग, घ, च) से आप देख सकते हैं कि विस्थापन में समय के साथ परिवर्तन ज्या या कोज्या फलन के रूप में होता है। अतः, सरल आवर्त गति को **ज्यावक्रीय गति** भी कहते हैं। शीघ्र ही हम इनके भौतिक महत्त्व को समझेंगे।

ध्यान दें कि

- हम अपनी चर्चा में समीकरणों (16.6ख, ग, घ, च) में से किसी भी एक व्यंजक का उपयोग कर सकते हैं;
- द्रव्यमान-कमानी निकाय के गति समीकरण के हल से हमें समय के फलन के रूप में द्रव्यमान का विस्थापन प्राप्त होता है; तथा
- इसके हल से हम सरल आवर्त गति करने वाले द्रव्यमान के लिए वेग, त्वरण, ऊर्जा आदि भौतिक राशियां प्राप्त कर सकते हैं तथा समीकरण (16.5) में आने वाले प्राचल ω_0 का भौतिक महत्त्व ज्ञात कर सकते हैं। आप यह इस इकाई में आगे पढ़ेंगे।

समीकरणों (16.6 ख और ग) के आधार पर दोलक के विस्थापन x के समय t के साथ परिवर्तन के आलेख क्रमशः चित्र 16.4क और 16.4ख में दिखाए गए हैं। सरलता के लिए हमने इन आलेखों को आरेखित करने के लिए $\phi=0$ मान लिया है। आप देखेंगे कि इन दोनों ही आलेखों में t के साथ x के परिवर्तन के गुणात्मक लक्षण एक जैसे हैं।



चित्र 16.4: सरल आवर्त गति करते पिंड का क) समीकरण (16.6 ख); तथा ख) समीकरण (16.6 ग) के अनुरूप विस्थापन-समय आलेख।

चित्र 16.4क में हम देख सकते हैं कि $t=0$ पर दोलनकारी द्रव्यमान अपनी साम्यावस्था (अर्थात् $x=0$) पर है जिसे चित्र में बिंदु A द्वारा निरूपित किया गया है। जैसे-जैसे समय बीतता है, विस्थापन का मान बढ़ता है और वह अधिकतम धनात्मक मान, a प्राप्त करता है। विस्थापन के इस मान को आलेख में बिंदु B द्वारा निरूपित किया गया है। समय का मान और बढ़ने पर विस्थापन का मान घटने लगता है। घटते हुए विस्थापन का मान पहले शून्य (आलेख में बिंदु C) फिर ऋणात्मक x-दिशा में बढ़ते हुए अधिकतम मान (आलेख में बिंदु D) प्राप्त करता है और फिर से शून्य (आलेख में बिंदु E) मान प्राप्त करता है जो साम्यावस्था के संगत मान है। बिंदु E से आगे, विस्थापन के समय के साथ परिवर्तन के आलेख की पुनरावृत्ति होती है। आप मानेंगे कि दोलन कर रहे द्रव्यमान की वास्तविक गति चित्र 16.4क के आलेख द्वारा सटिक तरह से निरूपित होती है। चित्र 16.4ख में दिखाए गए विस्थापन-समय आलेख की प्रकृति चित्र 16.4क में दिखाए गए आलेख जैसी ही है। अंतर केवल इतना है कि इस स्थिति में $t = 0$ पर द्रव्यमान का धनात्मक x दिशा में विस्थापन अधिकतम है।

आइये, अब हम प्राचलों a, ω_0 एवं ϕ के भौतिक अर्थ समझें। अचर राशि a को गति का **आयाम** कहते हैं; यह दोलक के विस्थापन x का अधिकतम संभावित मान है। चूंकि ज्या अथवा कोज्या फलनों के मान केवल +1 एवं −1 के बीच ही हो सकते हैं, दोलक की गति भी पूरी तरह से $+a$ एवं $-a$ की सीमाओं के बीच ही होती है (देखें चित्र 16.4)। ω_0 एवं ϕ का भौतिक अर्थ समझने के लिए हमें दोलक की कला का अर्थ समझना होगा। इसके लिए हमें दोलक के वेग एवं त्वरण निर्धारित करने की आवश्यकता है। आइए, अब इनकी चर्चा करें।

16.3.1 दोलक का वेग एवं त्वरण

स्कूल की भौतिकी में आप पढ़ चुके हैं कि तात्क्षणिक वेग, विस्थापन x का समय के सापेक्ष प्रथम अवकलज होता है। इसलिए, समीकरण (16.6क) का उपयोग करके दोलित द्रव्यमान के तात्क्षणिक वेग के लिए हम लिख सकते हैं:

$$v = \frac{dx}{dt} = a\,\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \qquad (16.7क)$$

ध्यान दें कि $a\omega_0$ दोलक के वेग का अधिकतम मान है, क्योंकि $\cos(\omega t + \phi)$ का अधिकतम मान $+1$ हो सकता है। हम दोलक के वेग को इसके विस्थापन के पदों में भी व्यक्त कर सकते हैं। समीकरण (16.7क) के दोनों पक्षों का वर्ग करने पर हम पाते हैं कि

$$v^2 = \omega_0^2 a^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi)$$

$$= \omega_0^2 a^2 (1 - \sin^2(\omega_0 t + \phi)) = \omega_0^2 (a^2 - x^2)$$

अतः $$v = \omega_0 \sqrt{(a^2 - x^2)} \qquad (16.7ख)$$

चूंकि, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$, हम समीकरण (16.7क) को निम्न रूप में भी लिख सकते हैं:

$$v = a\,\omega_0 \sin\left[\frac{\pi}{2} + (\omega_0 t + \phi)\right] \qquad (16.7ग)$$

ध्यान दें कि विस्थापन तथा वेग के व्यंजकों में ज्या फलनों के कोणांकों में $(\pi/2)$ का अंतर है।

चूंकि त्वरण, समय के साथ वेग में होने वाले परिवर्तन की दर है, इसलिए, समीकरण (16.7क) से हमें त्वरण का निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होता है :

$$a_c = \frac{dv}{dt} = -a\,\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \phi) \qquad (16.8क)$$

$$= a\,\omega_0^2 \sin[\pi + (\omega_0 t + \phi)] \qquad (16.8ख)$$

चूँकि $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$ । ध्यान दें कि $a\omega_0^2$ त्वरण का अधिकतम मान है। समीकरण (16.8क) और समीकरण (16.6ख) को संयोजित कर हम त्वरण को विस्थापन के पदों में व्यक्त कर सकते हैं :

$$a_c = -\omega_0^2 x \qquad (16.9)$$

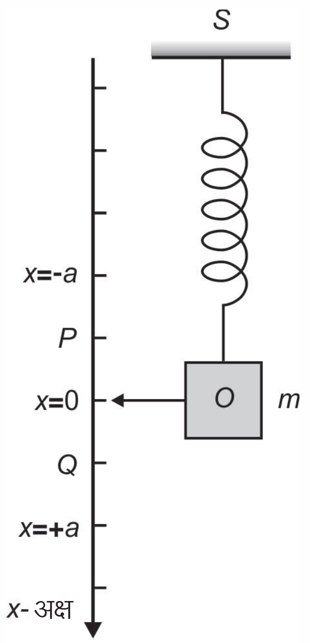
अतः हम पाते हैं कि यदि हमें $x(t)$ मालूम हो तो हम वेग तथा त्वरण के मान आसानी से प्राप्त कर सकते हैं। आगे बढ़ने से पहले आइए इस भाग के महत्त्वपूर्ण परिणामों की पुनरावृत्ति कर लें।

दोहराएं

- विस्थापन के पदों में किसी आवर्ती दोलक के वेग एवं त्वरण के व्यंजक हैं :
  $v = \omega_0 \sqrt{(a^2 - x^2)}$ और $a_c = \omega_0^2 x$
- किसी आवर्ती दोलक के वेग एवं त्वरण के अधिकतम मान क्रमशः $a\omega_0$ तथा $a\omega_0^2$ होते हैं।

16.3.2 दोलक की कला

उपरोक्त चर्चा के आधार पर अब आप यह जान गए हैं कि कोई दोलक अपनी साम्यावस्था के दोनों ओर गति करता है और इस गति के दौरान यह साम्यावस्था से बार-बार गुजरता है। अब आप चित्र 16.5 को देखिए। मान लें कि $x = 0$ कमानी-द्रव्यमान



चित्र 16.5: ऊर्ध्वाधरतः दोलायमान कमानी-द्रव्यमान निकाय।

निकाय की उस साम्यावस्था को निरूपित करता है जब कमानी से द्रव्यमान m स्वतंत्रतापूर्वक लटका हुआ है। यदि द्रव्यमान m को नीचे की ओर खींच कर छोड़ दिया जाए तो यह ऊर्ध्वाधरतः दोलन करने लगता है। दोलन के दौरान दोलक $x = 0$ से $x = a$ (अधिकतम विस्थापन) की ओर जाते हुए और फिर $x = a$ से $x = 0$ की ओर लौटते हुए बिंदु Q से होकर गुजरता है। ध्यान दें कि इन दो क्षणों पर विस्थापन का मान तो समान है परंतु गति की दिशा अलग है : $x = 0$ से $x = a$ की ओर जाते समय द्रव्यमान साम्यावस्था से दूर जाता है जबकि $x = a$ से $x = 0$ की ओर गति करते समय द्रव्यमान साम्यावस्था की ओर आता है। इसक अर्थ यह है कि इन दो क्षणों में (बिंदु Q पर) दोलक के वेग का मान भिन्न है (क्योंकि वेग एक सदिश राशि है)। **इसलिए हम कह सकते हैं कि इन दो क्षणों पर द्रव्यमान m की गति की अवस्थाएं भिन्न हैं। किसी दोलक की गति की अवस्था उसके विस्थान और वेग द्वारा निर्दिष्ट होती है।**

यदि t_1 एवं t_2 क्षणों पर दोलनकारी द्रव्यमान $x = 0$ से $x = a$ की दिशा में जाते हुए बिन्दु Q से गुजरता है तो आप मानेंगे कि इन क्षणों पर दोलक का विस्थापन तथा वेग समान हैं। **ऐसी स्थिति में हम कहते हैं कि दोलक इन दो क्षणों पर गति की समान अवस्थाओं में है। यदि किसी दोलक की गति की अवस्था किन्हीं दो क्षणों, माना कि t_1 एवं t_2, पर समान होती है तो हम कह सकते हैं कि दोलक इन दो क्षणों पर एक ही कला में है।**

अतः, किसी बिंदु Q पर गति की अवस्था का उल्लेख हम यह कह कर करते हैं कि जब भी कोई दोलक $x = 0$ से $x = a$ की ओर जाता हुआ अथवा $x = a$ से $x = 0$ की ओर जाता हुआ बिन्दु Q से गुजरता है तो हर बार उन क्षणों पर वह समान कला में होता है। यही बात $x = a$ और $x = -a$ के बीच स्थित किसी अन्य बिन्दु जैसे कि बिन्दु P के लिए भी लागू होती है।

दूसरे शब्दों में, हम कह सकते हैं कि यदि किन्हीं दो क्षणों पर दोलक समान कला में है तो इसके विस्थापन एवं वेग इन दो क्षणों पर समान होते हैं। **ऐसे दो क्रमिक क्षणों, जिन पर किसी दोलक की कला समान होती है, के बीच का समयांतराल दोलन का आवर्तकाल कहलाता है।** अतः यदि किसी दोलक का आवर्तकाल T हो, तो हम लिख सकते है :

$$x(t) = x(t+T) \tag{16.10}$$

ध्यान दें कि समीकरण (16.10) हमें **विस्थापन की आवर्तिता** (periodicity) **की शर्त के विषय में** बताता है : किसी दोलायमान द्रव्यमान का किसी क्षण t पर जितना विस्थापन $x(t)$ होता है उतना ही विस्थापन $x(t+T)$, क्षण $(t+T)$ पर होता है। आगे, आवर्तकाल की उपरोक्त परिभाषा के आधार पर हम कह सकते हैं कि आवर्तिता की यह शर्त दोलक के तात्क्षणिक वेग पर भी लागू होनी चाहिए :

$$v(t) = v(t+T) \tag{16.11}$$

ये दो उपरोक्त आवर्तिता प्रतिबंध (समीकरण (16.10) और (16.11)) हमें अचर ω_0 का भौतिक अभिप्राय समझने में मदद करते हैं। समीकरण (16.10) तथा (16.6ख) को संयोजित कर हम लिख सकते हैं कि :

$$a\sin(\omega_0 t + \phi) = a\sin(\omega_0 t + \phi + \omega_0 T)$$

यदि हम मान लें कि $\theta = \omega_0 t + \phi$, तो हम लिख सकते हैं

$$\sin\theta = \sin(\theta + \omega_0 T) \qquad (16.12क)$$

इसी प्रकार, समीकरण (16.11) एवं समीकरण (16.7क) के आधार पर हम लिख सकते हैं

$$a\,\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi) = a\,\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi + \omega_0 T)$$

चर θ के पदों में हम उपरोक्त समीकरण को निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं :

$$\cos\theta = \cos(\theta + \omega_0 T) \qquad (16.12ख)$$

ध्यान दें कि समीकरण (16.10) और (16.11) अथवा समीकरण (16.12क) और (16.12ख) साथ-साथ मान्य होने चाहिए। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों है? ऐसा इसलिए है क्योंकि हम दोलक की ऐसी दो गति अवस्थाओं पर विचार कर रहे हैं जिनके बीच समयांतराल आवर्तकाल T है। अब सरल त्रिकोणमिति के अपने ज्ञान के आधार पर क्या आप बता सकते हैं कि आवर्तिता के ये दोनों प्रतिबंध एक साथ कब लागू होंगे? हम जानते हैं कि ज्या एवं कोज्या फलनों की आवर्तिता 2π होती है, अर्थात् $\sin(2\pi + \theta) = \sin\theta$ तथा $\cos(2\pi + \theta) = \cos\theta$ । अतः, विस्थापन और वेग एक साथ तभी आवर्ती होंगे जब

$$2\pi + \theta = \theta + \omega_0 T \qquad (16.13)$$

अतः समीकरण (16.13) से हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad (16.14)$$

जहां $f = (1/T)$ दोलक की **आवृत्ति** है। **किसी दोलक की आवृत्ति को इसके द्वारा एक सेकंड में किए गए दोलनों की संख्या के रूप में परिभाषित किया जाता है।** समीकरण (16.14) हमें आवर्तकाल (अथवा आवृत्ति) के पदों में ω_0 देता है। ω_0 को **कोणीय आवृत्ति** कहते हैं।

अब आप थोड़ा रुकें और सोचें कि अब तक आपने क्या-क्या पढ़ा और समझा? याद करें कि कला की संकल्पना का उपयोग करके हम ω_0 के भौतिक अभिप्राय को समझने में समर्थ हुए है। इसके अतिरिक्त, एक दोलक की कला की चर्चा का एक महत्त्वपूर्ण पक्ष यह है कि हमने आवर्तिता के लिए एक उभयनिष्ठ प्रतिबंध (समीकरण 16.13) प्राप्त कर लिया है।

आपने ध्यान दिया होगा कि गुणक $(\omega_0 t + \phi)$ विस्थापन एवं वेग के व्यंजकों में ज्या एवं कोज्या फलनों के कोणांकों के रूप में आता है। साथ ही, यह गुणक T एवं ω_0 के बीच संबंध प्राप्त करने में भी एक महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाता है। अतः, इसको कला के माप के रूप में लिया जाता है। अतः

$$\text{सरल आवर्त गति करते किसी दोलक की कला} = \omega_0 t + \phi \qquad (16.15)$$

जहां ϕ एक नियतांक है, जिसे **प्रारंभिक कला** या **कला नियतांक** कहते हैं। यह सरल आवर्त गति की कालावधि (**epoch**) भी कहलाती है।

आगे बढ़ने से पहले, आइए, विस्थापन, आयाम, कला, दोलनकला तथा आवृत्ति की परिभाषाओं को दोहरा लें।

दोहराएं

- किसी दोलक का **विस्थापन**, साम्यावस्था के सापेक्ष दोलक की तात्क्षणिक स्थिति है।
- साम्यावस्था के दोनों ओर विस्थापन के अधिकतम मान को दोलन का **आयाम** कहते हैं।
- किसी दोलक की **कला**, उसकी तात्क्षणिक गति की अवस्था बताती है।
- **आवर्तकाल**, समय के उन क्रमागत क्षणों का अंतराल है जिन पर दोलक की कला समान होती है।
- दोलक की **आवृत्ति** उसके द्वारा एक सेकंड में किए गए पूर्ण दोलनों की संख्या है।

अब दोलक के विस्थापन, वेग तथा त्वरण के व्यंजकों का ग्राफिय निरूपण समझने के लिए चित्र 16.6 देखें। इसमें एक दोलक के विस्थापन, वेग एवं त्वरण को समय के सापेक्ष क्रमशः समीकरणों (16.6ख), (16.7क) तथा (16.8क) के आधार पर आरेखित किया गया है। सरलता के लिए हमने प्रारंभिक कला $\phi = 0$ ली है।

आइए, चित्र 16.6 में दिए गए विस्थापन-समय (x-t) एवं वेग-समय (v-t) आलेखों की तुलना करें। आप देखेंगे कि वेग v अपना अधिकतम और न्यूनतम मान, विस्थापन x से चौथाई आवर्तकाल (अर्थात् $T/4$) पहले ही प्राप्त कर लेता है। क्योंकि चौथाई आवर्तकाल के संगत कला-अंतर $\pi/2$ रेडियन या 90° है, हम पाते हैं कि वेग, विस्थापन से $\pi/2$ रेडियन आगे रहता है। यह बात समीकरणों (16.7ग) और (16.6ख) की तुलना करने पर भी स्पष्ट हो जाती है।

इसी प्रकार, विस्थापन एवं वेग के आलेखों की तुलना त्वरण के आलेख से करने पर आप इस निष्कर्ष पर पहुँचेंगे कि **त्वरण, विस्थापन से π तथा वेग से $\pi/2$ रेडियन आगे रहता है।** यह भी समीकरण (16.8ख) की क्रमशः समीकरणों (16.6ख) और (16.7ग) से तुलना करने पर स्पष्ट हो जाता है।

आगे बढ़ने से पहले आइये, सरल आवर्त गति से जुड़े प्राचलों के सांख्यिक मानों का बोध करने के लिए कुछ उदाहरण हल करें।

उदाहरण *16.1* : किसी दोलक की कला

चित्र 16.1 में दर्शाया गया द्रव्यमान m, सरल आवर्त गति करता है जिसके आयाम का मान a है। समय का मापन उस क्षण से किया जाता है जब यह द्रव्यमान (i) $x = a$, (ii) $x = -a$, तथा (iii) $x = a/\sqrt{2}$ पर है। यदि इस दोलक का विस्थापन निम्नलिखित समीकरण से व्यक्त हो

$$x = a \sin(\omega_0 t + \phi)$$

तो इसकी प्रारंभिक कला, ϕ का मान परिकलित करें।

हल ■ (i) यह दिया गया है कि समय उस क्षण से मापा जाता है जब $x = a$ है। इसका तात्पर्य यह है कि $t = 0$ पर $x = a$ है। अतः, विस्थापन का व्यंजक होगा :

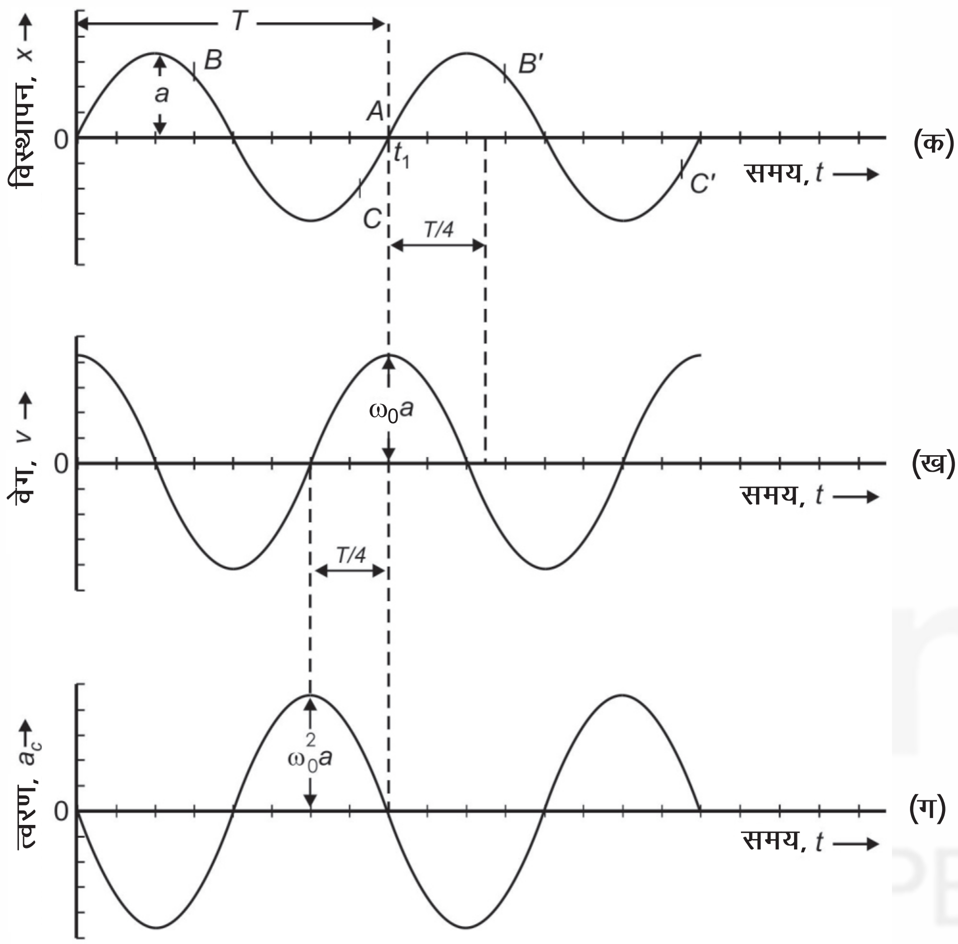
$$a = a\sin\phi \quad \Rightarrow \quad \sin\phi = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi = \pi/2$$

(ii) यहाँ $t = 0$ पर $x = -a$ है। अतः, विस्थापन का व्यंजक निम्न रूप लेता है :

$$-a = a\sin\phi \quad \Rightarrow \quad \sin\phi = -1 \quad \Rightarrow \quad \phi = 3\pi/2$$

(iii) इस स्थिति में, $t = 0$ पर $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ है। इसलिए, विस्थापन के समीकरण में इन मानों को रखने पर हम पाते हैं :

$$\frac{a}{\sqrt{2}} = a\sin\phi \quad \Rightarrow \quad \sin\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{\pi}{4}$$



चित्र 16.6 : आवर्ती दोलक के क) विस्थापन; ख) वेग; ग) त्वरण में समय के साथ होने वाले परिवर्तन।

उदाहरण *16.2* : दोलक का आयाम, दोलनकाल तथा विस्थापन

सरल आवर्त गति करते किसी पिंड का विस्थापन निम्न समीकरण द्वारा व्यक्त होता है :

$$x = 0.01 \cos 4\pi\,(t + 0.0625)\ \text{m}$$

दोलक के निम्नलिखित प्राचलों के मान परिकलित करें : i) दोलन गति का आयाम, ii) दोलनकाल, iii) अधिकतम वेग, iv) अधिकतम त्वरण, तथा v) पिंड का प्रारंभिक विस्थापन।

हल ■ सरल आवर्त गति करते हुए किसी दोलक के विस्थापन के लिए समीकरण (16.6ख) मानक व्यंजक है :

$$x = a\sin(\omega_0 t + \phi)$$

विस्थापन के इस व्यंजक की तुलना प्रश्न में दिए गए व्यंजक से करने पर, हम लिख सकते हैं

i) आयाम $a = 0.01\,\text{m}$; कोणीय आवृत्ति $\omega_0 = 4\pi$

ii) हम जानते हैं कि दोलक का आवर्तकाल $T = 2\pi/\omega_0$ होता है। अतः $\omega_0 = 4\pi$ का मान प्रतिस्थापित करने पर हमें T का निम्न परिणाम प्राप्त होता है।

$$\text{आवर्तकाल, } T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{4\pi} = 0.5\,\text{s}$$

iii) समीकरण (16.7क) के आधार पर हम लिख सकते हैं :

अधिकतम वेग $= \omega_0 a = (4\pi\,\text{s}^{-1}) \times (0.01\,\text{m}) = 0.13\,\text{ms}^{-1}$

iv) समीकरण (16.8क) के आधार पर हम लिख सकते हैं :

अधिकतम त्वरण $= \omega_0^2 a = (4\pi)^2\,\text{s}^{-2} \times (0.01\,\text{m}) = 1.6\,\text{ms}^{-2}$

v) $t = 0$ पर दोलक के विस्थापन का मान प्रारंभिक विस्थापन x_0 कहलाता है। विस्थापन के दिए गए व्यंजक में $t = 0$ रखने पर हमें निम्न परिणाम प्राप्त होता है :

$$x_0 = (0.01\,\text{m}) \times \cos(4\pi \times 0.0625)$$
$$= 0.01 \times \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{m} = 7.1 \times 10^{-3}\,\text{m}$$

उदाहरण 16.3 : दोलक का आयाम तथा आवर्तकाल

सरल आवर्त गति कर रहे एक पिंड के वेग $10\,\text{cms}^{-1}$ तथा $24\,\text{cms}^{-1}$ हैं जब उसका विस्थापन क्रमशः 12 cm तथा 5 cm है। दोलनों का आयाम तथा आवर्तकाल परिकलित करें।

हल ■ (क) सरल आवर्त गति करते हुए किसी दोलक के विस्थापन के लिए समीकरण (16.6 ख) मानक व्यंजक है। यदि हम आरंभिक कला, ϕ का मान शून्य मान लें तो हम समीकरण (16.6ख) को निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$x(t) = a \sin\omega_0 t$$

अतः, पिंड के तात्क्षणिक वेग का व्यंजक होगा :

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega_0 a \cos\omega_0 t$$

अतः,
$$v^2 = \omega_0^2 a^2 \cos^2\omega_0 t = \omega_0^2 a^2 (1 - \sin^2\omega_0 t) = \omega_0^2 (a^2 - x^2) \quad \text{(i)}$$

अब मान लें कि विस्थापन x_1 तथा x_2 पर पिंड के वेग क्रमशः v_1 तथा v_2 हैं। तब समीकरण (i) की सहायता से हम लिख सकते हैं :

$$v_1^2 = \omega_0^2 (a^2 - x_1^2) \quad \text{(ii)}$$

और
$$v_2^2 = \omega_0^2 (a^2 - x_2^2) \quad \text{(iii)}$$

समीकरण (ii) से ω_0^2 का मान समीकरण (iii) में रखने पर हम पाते हैं :

$$v_2^2 = \frac{v_1^2 (a^2 - x_2^2)}{(a^2 - x_1^2)}$$

या $$v_2^2 a^2 - v_2^2 x_1^2 = v_1^2 a^2 - v_1^2 x_2^2$$

a^2 वाले पदों को एक साथ रखने पर हम पाते हैं :

$$a^2 (v_2^2 - v_1^2) = v_2^2 x_1^2 - v_1^2 x_2^2$$

अतः, $$a^2 = \frac{v_2^2 x_1^2 - v_1^2 x_2^2}{v_2^2 - v_1^2} \qquad \text{(iv)}$$

आगे, प्रश्न के अनुसार $v_1 = 10\text{ cms}^{-1}$, $v_2 = 24\text{ cms}^{-1}$, $x_1 = 12\text{ cm}$ और $x_2 = 5\text{ cm}$

v_1, v_2 तथा x_1, x_2 के इन मानों को समीकरण (iv) में रखने पर हम पाते हैं :

$$a^2 = \frac{(24\text{ cms}^{-1})^2\ (12\text{ cm})^2 - (10\text{ cms}^{-1})^2\ (5\text{ cm})^2}{(24\text{ cms}^{-1})^2 - (10\text{ cms}^{-1})^2} = 169\text{ cm}^2$$

अतः, $a = 13\text{ cm}$

v_1 और x_1 के मानों के साथ a का यह मान समीकरण (ii) में रखने पर हम पाते हैं :

$$\omega_0^2 = \frac{v_1^2}{(a^2 - x_1^2)} = \frac{(10\text{ cms}^{-1})^2}{(13\text{ cm})^2 - (12\text{ cm})^2} = 4\text{s}^{-2}$$

हमें सरल आवर्त गति का आवर्तकाल, समीकरण (16.14) से प्राप्त होता है :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi\text{ s} = 3.14\text{ s}$$

अतः, हम पाते हैं कि सरल आवर्त गति का आयाम 13 cm तथा दोलनकाल 3.14 s है।

सरल आवर्त गति से संबंधित मूलभूत प्राचलों के अपने ज्ञान को जाँचने के लिए अब आप एक बोध प्रश्न (SAQ) हल करें।

बोध प्रश्न 3 – सरल आवर्त गति से संबंधित प्राचल

क) सिद्ध करें कि किसी कमानी-द्रव्यमान निकाय की दोलन आवृत्ति को नीचे दिए गए व्यंजक द्वारा व्यक्त किया जा सकता है :

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}$$

ख) एक सरल आवर्ती दोलक का दोलन निम्न समीकरण द्वारा व्यक्त किया जाता है :

$$x(t) = 0.4\sin(0.1t + 0.5)$$

जहां x एवं t क्रमशः मीटर एवं सेकंड में व्यक्त किए गए हैं। दोलक का आयाम, आवर्तकाल एवं आवृत्ति, अधिकतम वेग, अधिकतम त्वरण तथा प्रारंभिक विस्थापन परिकलित करें।

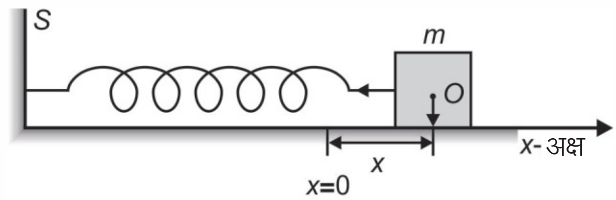
अब जबकि आपने सरल आवर्त गति के लिए गति का समीकरण प्राप्त करना सीख लिया है और एक दोलक के वेग और त्वरण के व्यंजक ज्ञात कर लिए हैं, आप आगे का विश्लेषण सीख सकते हैं। सरल आवर्त गति से जुड़ी एक महत्वपूर्ण राशि ऊर्जा है। अब आप उसके बारे में पढ़ेंगे।

ध्यान दें

दोलक के विस्थापन के लिए चाहे हम समीकरण (16.6ख), समीकरण (16.6ग), समीकरण (16.6घ) या समीकरण (16.6च) का उपयोग करें सरल आवर्त गति के गणितीय विश्लेषण में कोई अंतर नहीं होता। इन समीकरणों की तुल्यता दर्शाने के लिए हमने अनुभाग 16.4 में विस्थापन के लिए कोज्या निरूपण का उपयोग किया है। आप अपने आपको आश्वस्त कर सकते हैं कि दोलक के विस्थापन के लिए ज्या निरूपण का उपयोग करने पर भी वही अंतिम परिणाम प्राप्त होता है।

16.4 सरल आवर्त गति में ऊर्जा

सरल आवर्त गति करते हुए किसी भी यांत्रिक निकाय में स्थितिज ऊर्जा एवं गतिज ऊर्जा होती है। सरल आवर्त गति के लिए इन ऊर्जाओं की उत्पत्ति को गुणात्मक रूप से समझने के लिए, चित्र 16.7 देखें, जिसमें एक कमानी-द्रव्यमान निकाय दिखाया गया है। पहले हम कमानी-द्रव्यमान निकाय की स्थितिज ऊर्जा का व्यंजक व्युत्पन्न करेंगे। आप जानते हैं कि जब द्रव्यमान दोलन करता है तो कमानी क्रमिक रूप से विस्तारित और संपीडित होती है। दोलन के दौरान, केवल उस क्षण को छोड़कर जब द्रव्यमान साम्यावस्था ($x = 0$) पर होता है, हर समय कमानी, द्रव्यमान पर एक प्रत्यानयन बल लगाती है। इस बल के कारण कमानी में ऊर्जा **प्रत्यास्थ स्थितिज ऊजा** ($P.E.$) के रूप में संग्रहित होती है।



चित्र 16.7 : कमानी-द्रव्यमान निकाय की तात्कालिक स्थिति जबकि द्रव्यमान साम्यावस्था से x दूरी पर विस्थापित है।

कमानी-द्रव्यमान निकाय की स्थितिज ऊर्जा का व्यंजक प्राप्त करने के लिए मान लीजिए कि द्रव्यमान को इसकी साम्यावस्था $x = 0$ से दूरी x तक विस्थापित किया गया है (चित्र 16.7)। स्कूल की भौतिकी के अपने ज्ञान के आधार पर आपको स्मरण होगा कि द्रव्यमान m को x दूरी से विस्तारित करने में कमानी द्वारा किए गए कार्य का व्यंजक निम्नलिखित है :

$$W = \int_0^x F\,dx$$

दिए गए निकाय के लिए, दूरी x से विस्तारित कमानी द्वारा आरोपित बल है :

$$F = -kx$$

अतः,
$$W = \int_0^x (-kx)\,dx = -\left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^x = -\frac{1}{2}kx^2$$

ध्यान दें कि स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन तथा ऋणात्मक कार्य की बराबरी केवल तभी बैध होती है जब बल संरक्षी होता है। आदर्श कमानी के लिए लागू हुक का नियम एक-विमीय संरक्षी बल का उदाहरण है।

हम (कमानी की) प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा में आए परिवर्तन को कमानी द्वारा द्रव्यमान पर किए गए कार्य के ऋणात्मक मान के बराबर लिख सकते हैं। यदि $(P.E.)_i$ एवं $(P.E.)_f$ क्रमशः कमानी की साम्य स्थिति $(x = 0)$ से x दूरी तक विस्थापित करने की प्रक्रिया में इसकी प्रारंभिक एवं अंतिम स्थितिज ऊर्जाओं के मान हों तो कमानी की स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन, $\Delta\ (P.E.)$ को हम निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$(P.E.)_f - (P.E.)_i = -(-1/2)\,kx^2 = (1/2)\,kx^2$$

यदि हम $x = 0$ पर $(P.E.)_i = 0$ तथा $(P.E.)_f = (P.E.)$ मान लें तो हमें निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होता है :

$$P.E. = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (16.16)$$

अब आप पूछ सकते हैं : **क्या कमानी की स्थितिज ऊर्जा समय के साथ परिवर्तित होती है?** इसकी जांच करने के लिए हम समीकरण (16.6 ग) से विस्थापन x का मान समीकरण (16.16) में प्रतिस्थापित करते हैं। ऐसा करने पर हमें निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होता है :

$$P.E. = \frac{1}{2}\, ka^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) \qquad (16.17)$$

समीकरण (16.17) दर्शाता है कि कमानी-द्रव्यमान निकाय की *P.E.* समय के साथ ज्यावक्रीय रूप से परिवर्तित होती है। $\phi = 0$ के लिए, समय $t = 0$, पर स्थितिज ऊर्जा का मान $(1/2)ka^2$ होता है।

कमानी-द्रव्यमान निकाय की गतिज ऊर्जा का व्यंजक प्राप्त करने के लिए हम कमानी-द्रव्यमान निकाय के उस विन्यास की कल्पना करते हैं जब द्रव्यमान को इसके विस्थापित स्थान x से छोड़ा जाता है। हम जानते हैं कि कमानी के प्रत्यानयन बल के कारण द्रव्यमान साम्यावस्था की ओर गतिमान होगा। आप पुछ सकते हैं कि जब द्रव्यमान साम्यावस्था की ओर गतिमान होता है तो इस प्रक्रिया में x के परिमाण तथा निकाय में संग्रहित स्थितिज ऊर्जा का क्या होता है? x का मान कम होता जाता है जिसके परिणामस्वरूप *P.E.* भी कम होती जाती है।

अब प्रश्न उठता है कि लुप्त स्थितिज ऊर्जा का क्या हुआ? यह द्रव्यमान की गतिज ऊर्जा (*K.E.*) में परिवर्तित हो जाती है। इस प्रक्रिया को समझने के लिए ध्यान दें कि जिस क्षण द्रव्यमान को मुक्त किया जाता है उस क्षण वह स्थिर होता है। अतः, इसका वेग और गतिज ऊर्जा (*K.E.*) शून्य होते हैं। जैसे-जैसे यह साम्यावस्था की ओर बढ़ता है, इसका वेग धीरे-धीरे बढ़ता है। अर्थात्, इसकी *K.E.* बढ़ती है। इसलिए, हम कह सकते हैं कि द्रव्यमान को मुक्त करने पर कमानी में संग्रहित स्थितिज ऊर्जा कम होने लगती है परंतु द्रव्यमान की गतिज ऊर्जा बढ़ने लगती है। अतः, हम कह सकते हैं कि द्रव्यमान को छोड़ देने के बाद **कमानी की स्थितिज ऊर्जा धीरे-धीरे द्रव्यमान की गतिज ऊर्जा में रूपांतरित होती रहती है।** यदि घर्षण आदि के कारण ऊर्जा क्षय नहीं हो तो यह रूपांतरण शत-प्रतिशत होगा।

आगे, आप जानते हैं कि चाल v से गतिमान द्रव्यमान m की गतिज ऊर्जा का समीकरण है : $K.E. = (1/2)mv^2$। कमानी-द्रव्यमान निकाय के लिए द्रव्यमान के विस्थापन, x को समीकरण (16.6 ग) द्वारा निरूपित किया जा सकता है। अतः, द्रव्यमान के वेग $v(= dx/dt)$ को हम निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$v = -a\,\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$$

K.E. के व्यंजक में वेग v के इस मान का प्रयोग करने पर हमें कमानी-द्रव्यमान निकाय की तात्क्षणिक गतिज ऊर्जा, *K.E.* निम्नवत् प्राप्त होती है :

$$K.E. = (1/2)m\omega_0^2\, a^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi)$$

या

$$K.E. = (1/2)ka^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi) \qquad (16.18)$$

क्योंकि $k = \omega_0^2 m$। ध्यान दें कि $\phi = 0$ तथा $t = 0$ के लिए *K.E.* का मान $(1/2)ka^2$ होगा।

समीकरण (16.18) की सहायता से हम *K.E.* को विस्थापन x के पदों में निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$K.E. = (1/2)ka^2\,[1 - \cos^2(\omega_0 t + \phi)]$$

चूंकि $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ उपरोक्त व्यंजक को सरलीकृत करने पर हम पाते हैं कि

$$K.E. = (1/2)ka^2 - (1/2)ka^2\cos^2(\omega_0 t + \phi) = (1/2)ka^2 - (1/2)kx^2$$

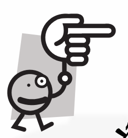
$$K.E. = (1/2)\,k\,(a^2 - x^2) \qquad (16.19)$$

समीकरण (16.19) दर्शाता है कि किसी दोलक की *K.E.*

- उस समय अधिकतम होती है जब यह साम्यावस्था ($x = 0$) से गुजरता है; तथा
- *K.E.* का अधिकतम मान $(1/2)\,ka^2$ है।

स्कूल की भौतिकी से आप जानते हैं कि किसी निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा उसकी स्थितिज ऊर्जा और गतिज ऊर्जा का योग होती है। अतः, समीकरणों (16.17) और (16.18) का उपयोग कर हम किसी क्षण t पर दोलक की कुल यांत्रिक ऊर्जा E प्राप्त कर सकते हैं :

$$\begin{aligned} E &= P.E. + K.E. \\ &= (1/2)\,ka^2\cos^2(\omega_0 t + \phi) + (1/2)\,ka^2\sin^2(\omega_0 t + \phi) \\ &= (1/2)ka^2 \end{aligned} \qquad (16.20)$$


कभी न भूलें

समीकरण (16.20) से स्पष्ट है कि **कमानी-द्रव्यमान निकाय की कुल ऊर्जा**

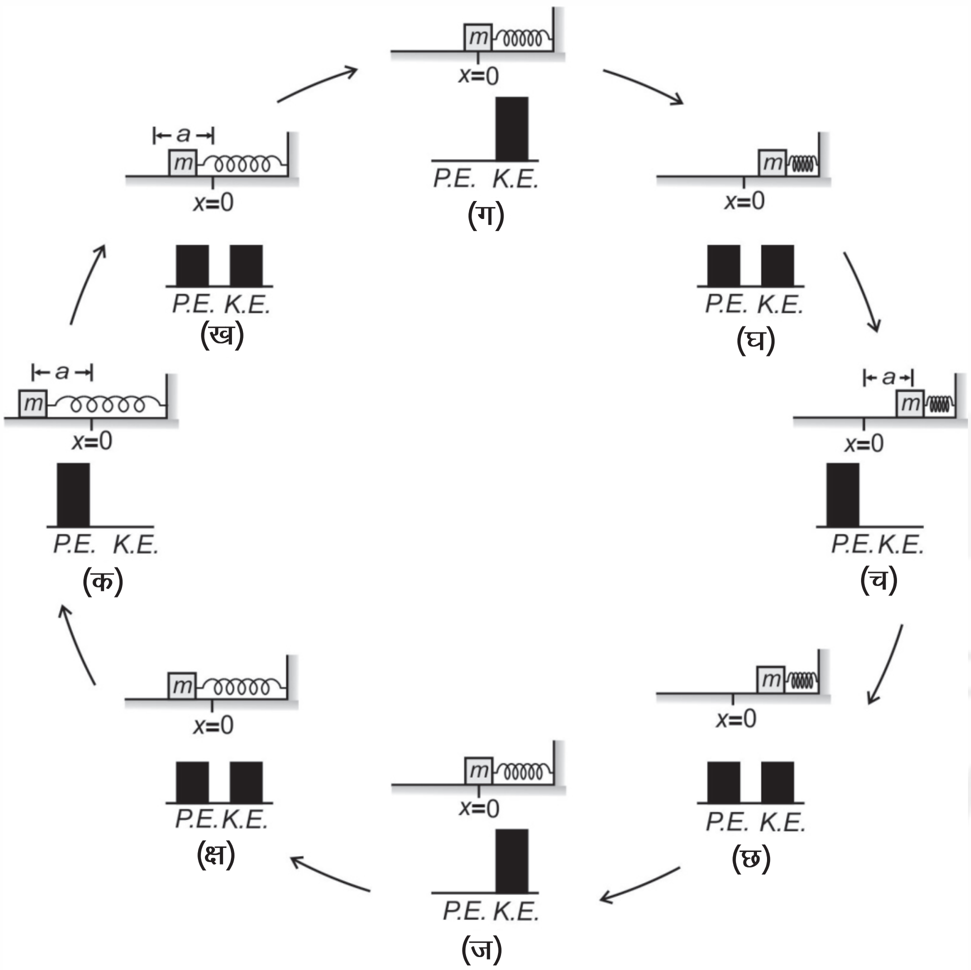
- समय के साथ परिवर्तित नहीं होती; और
- इसका मान आयाम के वर्ग के समानुपाती है।

कमानी-द्रव्यमान निकाय की दोलन गति के विश्लेषण से हम इस परिणाम पर पहुंचते हैं कि *किसी दोलक की स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन के साथ-साथ उसकी गतिज ऊर्जा तो परिवर्तित होती है परंतु निकाय की कुल ऊर्जा अचर रहती है।*

स्थितिज ऊर्जा और गतिज ऊर्जा के परस्पर रूपांतरण को समझने के लिए आइए हम कमानी-द्रव्यमान निकाय के एक पूर्ण दोलन के दौरान कुछ प्रतिनिधि क्षणों पर इसकी ऊर्जाओं पर विचार करें। चित्र 16.8क उस स्थिति का चित्रण करता है जब कमानी खिंची हुई है और द्रव्यमान का विस्थापन $x = a$ अधिकतम है। समीकरण (16.16) और समीकरण (16.19) से हम जानते हैं कि इस क्षण पर निकाय की ऊर्जा पूर्णतः स्थितिज है, जो कि कमानी की स्थितिज ऊर्जा है और द्रव्यमान की गतिज ऊर्जा शून्य होती है। यहाँ तथ्य *P.E.* एवं *K.E.* शलाकाओं द्वारा दर्शाया गया है। आप देख सकते हैं कि *P.E.* के संगत शलाका की ऊँचाई अधिकतम है जबकि *K.E.* शलाका की ऊंचाई शून्य है।

जब $x = a$ से द्रव्यमान को छोड़ा जाता है, तब कमानी में संग्रहित *P.E.* कम होने लगती है (क्योंकि $P.E. \propto x^2$), और द्रव्यमान को हस्तान्तरित हो जाती है जिससे इसकी *K.E.* बढ़ने लगती है। जब द्रव्यमान $x = a$ एवं $x = 0$ के बीच होता है, जैसा कि चित्र 16.8ख में दर्शाया गया है, तो कमानी की *P.E.* का कुछ भाग द्रव्यमान की *K.E.* में हस्तांतरित हो जाती है। अर्थात् निकाय की ऊर्जा अंशतः स्थितिज और अंशतः गतिज होती है। इसे चित्र 16.8ख की अंशतः पूरित शलाकाओं द्वारा दर्शाया गया है। जब द्रव्यमान साम्यावस्था $x = 0$ पर पहुंचता है तो निकाय की ऊर्जा पूर्णतः गतिज हो जाती है और समीकरण (16.16) के अनुसार इसकी स्थितिज ऊर्जा शून्य हो जाती है। यह स्थिति चित्र 16.8ग में दर्शाई गई है। संगत शलाकाएं दर्शाती हैं कि *P.E.* शून्य है और *K.E.* अधिकतम है। अब द्रव्यमान, जिसमें गतिज ऊर्जा है, जड़त्व के कारण, विपरीत दिशा में $x = 0$ के पार चला

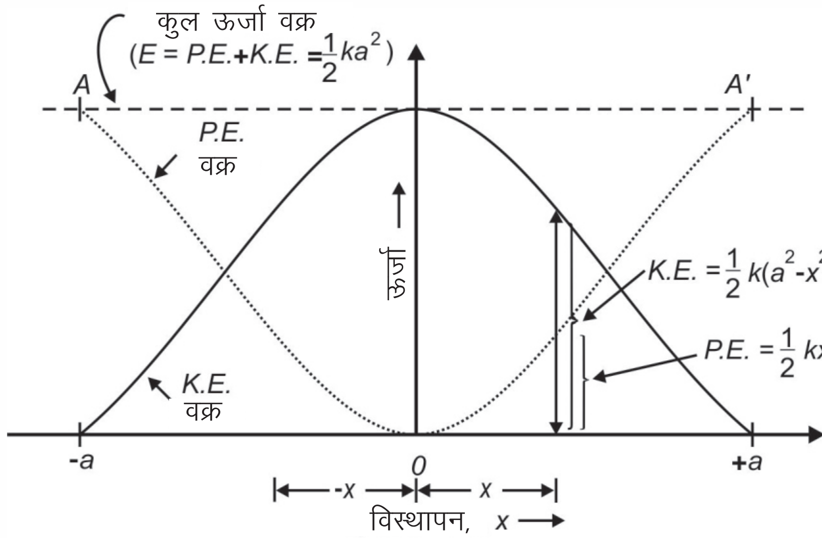
जाता है। इसके परिणामस्वरूप यह कमानी को संपीडित करने लगता है तथा इसकी गजिज ऊर्जा कम होने लगती है और कमानी की स्थितिज ऊर्जा में रूपांतरित होने लगती है। जब द्रव्यमान विपरीत दिशा में अधिकतम विस्थापन ($x = -a$) की स्थिति में पहुँचता है जो इसकी *K.E.* शून्य हो जाती है और कमानी की *P.E.* अधिकतम हो जाती है, जैसा कि चित्र 16.8च में दर्शाया गया है। *P.E.* और *K.E.* का यह पारस्परिक रूपांतरण आगे भी जारी रहता है, जैसा कि चित्र 16.8च से 16.8क तक चित्रित किया गया है। इसलिए, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि **जैसे-जैसे द्रव्यमान दोलन करता है, कमानी-द्रव्यमान निकाय की ऊर्जा स्थितिज एवं गतिज रूपों में क्रमिक रूप से परिवर्तित होती रहती है परंतु कुल ऊर्जा अचर रहती है**।



चित्र 16.8: एक पूर्ण दोलन के दौरान विभिन्न क्षणों पर कमानी-द्रव्यमान निकाय में ऊर्जा रूपांतरण। स्थितिज और गतिज ऊर्जा के मानों को दर्शाने वाली शलाकाएं $t = T/8$ समयांतराल पर दर्शाई गई हैं।

चित्र 16.9 में *P.E.* एवं *K.E.* को विस्थापन x के फलन के रूप में क्रमशः समीकरण (16.16) और समीकरण (16.19) के आधार पर आलेखित किया गया है। इस आलेख में आप ध्यान दें कि :

- *P.E.* वक्र तथा *K.E.* वक्र दोनों ही के आकार परवलयिक (parabolic) हैं;
- ये वक्र मूल बिंदु के परितः सममित हैं; तथा
- *P.E.* तथा *K.E.* के आलेख एक दूसरे के उलटे हैं।



चित्र 16.9: समीकरणों (16.16), (16.19) और (16.20) पर आधारित स्थितिज ऊर्जा (*P.E.*), **गतिज ऊर्जा** (*K.E.*) **एवं कुल ऊर्जा** (E) **का विस्थापन** x **के सापेक्ष आलेख।**

ध्यान दें कि चित्र 16.9 में कुल ऊर्जा E क्षैतिज रेखा AA' द्वारा निरूपित है। x के किसी मान के लिए कुल ऊर्जा, गतिज एवं स्थितिज ऊर्जाओं का योग होती है और इसका मान $(1/2)\,ka^2$ के बराबर है। बिंदुओं A तथा A' पर यह क्षैतिज रेखा *P.E.* वक्र को स्पर्श करती है उन्हें **वर्तन बिंदु (turning points)** कहते हैं। वर्तन बिंदुओं के संगत

- दोलक के वेग का मान शून्य होता है जबकि इसके त्वरण का मान अधिकतम होता है (समीकरण 16.9)।
- दोलनकारी द्रव्यमान के विस्थापन x का मान, साम्यावस्था के परितः, अधिकतम (अर्थात्, $x = \pm a$) है।
- दोलक की कुल ऊर्जा पूर्णतः स्थितिज होती है, अर्थात, *K.E.* शून्य होती है।

अभी तक हमने कमानी-द्रव्यमान निकाय को एक आदर्श सरल आवर्ती दोलक मानते हुए सरल आवर्त गति की ऊर्जा तथा इसकी *P.E.* के *K.E.* और *K.E.* के *P.E.* में रूपांतरण का वर्णन किया। लेकिन यह **निष्कर्ष सरल आवर्त गति करने वाले प्रत्येक यान्त्रिक निकाय के लिए व्यापक रूप में मान्य है**। आइये, अब हम इन निश्कर्शों का उपयोग एक सरल आवर्ती दोलक की ऊर्जा के परिकलन के लिए करें।

उदाहरण *16.4* : आवर्ती दोलक की ऊर्जा

एक 0.5 kg द्रव्यमान वाला पिंड सरल आवर्त गति कर रहा है। इसका आयाम 10 cm है और आवर्तकाल 0.1 s है। इसकी स्थितिज ऊर्जा एवं गतिज ऊर्जा का परिकलन करें, जब क) यह साम्य स्थिति से 5 cm की दूरी पर है; तथा ख) t का मान $T/8$ एवं $T/2$ है। यह मान लें कि दोलनों की प्रारंभिक कला शून्य है।

हल ■ प्रश्न के अनुसार, $m = 0.5$ kg, $a = 10$ cm $= 0.1$ m, तथा $T = 0.1$ s।

क) विस्थापन x के पदों में सरल आवर्त गति करने वाली किसी पिंड की स्थितिज ऊर्जा का व्यंजक समीकरण (16.16) द्वारा व्यक्त होता है :

$$P.E. = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \text{(i)}$$

हमें $x = 0.05$ m पर *P.E.* का मान परिकलित करना है। आगे, k का मान परिकलित करने के लिए प्रयुक्त होने वाला समीकरण है :

$$\omega_0^2 = k/m \qquad \Rightarrow \qquad k = \omega_0^2 m \qquad \text{(ii)}$$

आगे, हम जानते हैं कि

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.1\,\text{s}} \qquad \text{(iii)}$$

समीकरण (iii) से ω_0 का मान समीकरण (ii) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$$k = \left(\frac{2\pi}{0.1\,\text{s}}\right)^2 \times (0.5\text{ kg}) \qquad \text{(iv)}$$

समीकरण (iv) से k का मान समीकरण (i) में प्रतिस्थापित करने और $x = 0.05$ m रखने पर हमें प्राप्त होता है :

$$P.E. = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{0.1\text{s}}\right)^2 \times (0.5\text{ kg}) \times (0.05\text{ m})^2 = 2.47\text{ J}$$

सरल आवर्त गति करते हुए पिंड की गतिज ऊर्जा समीकरण (16.19) द्वारा व्यक्त होती है :

$$K.E. = \frac{1}{2}k(a^2 - x^2)$$

k, a एवं x के मान प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$K.E. = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{0.1\,\text{s}}\right)^2 \times (0.5\text{ kg})\,[(0.1\text{ m})^2 - (0.05\text{ m})^2] = 7.41\text{J}$$

ख) सरल आवर्त गति करने वाले पिंड की स्थितिज ऊर्जा समीकरण (16.17) द्वारा व्यक्त होती है :

$$P.E. = \frac{1}{2}ka^2\cos^2(\omega_0 t + \phi)$$

चूँकि प्रारंभिक कला $\phi = 0$ है, इसलिए

$$P.E. = \frac{1}{2}ka^2\cos^2\omega_0 t$$

$t = T/8$ के लिए हम लिख सकते हैं :

$$P.E. = \frac{1}{2}ka^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{2\pi}{0.1\,\text{s}}\right)^2 \times (0.5\text{ kg}) \times (0.1\text{ m})^2 \times \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 24.2\text{ J}$$

तात्क्षणिक गतिज ऊर्जा, समीकरण (16.18) द्वारा व्यक्त होती है :

$$K.E. = \frac{1}{2}ka^2\sin^2(\omega_0 t + \phi)$$

अतः, $\phi = 0$ के लिए

$$K.E. = \frac{1}{2}ka^2\sin^2(\omega_0 t)$$

k, a, ω_0 एवं $t(=T/8)$, के मान प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न परिणाम प्राप्त होता है :

$$K.E. = \frac{1}{2}\times\left(\frac{2\pi}{0.1\,\text{s}}\right)^2 \times (0.5\,\text{kg})\times(0.1\,\text{m})^2\times\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 24.2\,\text{J}$$

इसी प्रकार, समय $t = T/2$ पर $P.E.$ एवं $K.E.$ के मान होंगे :

$$P.E. = \frac{1}{2}ka^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T}\times\frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2}ka^2\cos^2(\pi)$$

$$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{2\pi}{0.1\,\text{s}}\right)^2 \times (0.5\,\text{kg})\times(0.1\,\text{m})^2\times 1 = 4.39\times10^{-2}\,\text{J}$$

तथा $$K.E. = \frac{1}{2}ka^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}\times\frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2}ka^2\sin^2(\pi)$$

$$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{2\pi}{0.1\,\text{s}}\right)^2 \times (0.5\,\text{kg})^2\times(0.1\,\text{m})^2\times 0 = 0$$

ध्यान दें कि $t = T/8$ पर दोलक के $P.E.$ एवं $K.E.$ बराबर हैं तथा $t = T/2$ पर $K.E.$ शून्य है। आप इन मानों की तुलना चित्र 16.8 में आलेखित कमानी-द्रव्यमान निकाय की भौतिक स्थितियों से करें। आप देख सकते हैं कि $t = T/8$ के लिए प्राप्त परिणाम चित्र 16.8ख में चित्रित स्थिति के संगत है तथा $t = T/2$ के लिए प्राप्त परिणाम चित्र 16.8च में चित्रित स्थिति के संगत है।

आगे बढ़ने से पहले आप एक बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 4 – आवर्ती दोलक की ऊर्जा

क) विस्थापन का वह मान ज्ञात करें जिसके लिए दोलक की $K.E.$, $P.E.$ के बराबर हो जाती है।

ख) किसी कमानी-द्रव्यमान निकाय में एक $25\ \text{Nm}^{-1}$ बल नियतांक मान वाली कमानी से 0.55 kg का द्रव्यमान लटकाया गया है। द्रव्यमान को $x = 40$ mm से विरामावस्था से छोड़ा गया है। निकाय की $P.E.$ एवं $K.E.$ का परिकलन (i) $x = 20$ mm तथा (ii) $t = T/4$ पर कीजिए। मान लिजिए कि प्रारंभिक कला शून्य है।

ग) सिद्ध करें कि $P.E.$ तथा $K.E.$ का आवर्तकाल $T/2$ है।

ध्यान दें

$P.E.$ एवं $K.E.$ का मान धनात्मक बने रहने का कारण यह है कि स्थितिज ऊर्जा x^2 के और गतिज ऊर्जा v^2 के समानुपाती होती है।

16.4.1 सरल आवर्त गति की औसत ऊर्जा

चित्र 16.6 देखें। आप पायेंगे कि प्रत्येक आलेख में पहले अर्द्धचक्र के दौरान वक्र और समय अक्ष के बीच का क्षेत्रफल दूसरे अर्द्धचक्र के दौरान संगत क्षेत्रफल के बराबर है। परंतु ये दोनों क्षेत्रफल क्षैतिज अक्ष के विपरीत पार्श्वों (sides) में हैं। इसका अर्थ है कि दोलन के एक संपूर्ण चक्र में, इन क्षेत्रफलों का योग शून्य होगा। हम कह सकते हैं कि एक संपूर्ण चक्र में विस्थापन, वेग एवं त्वरण में से प्रत्येक का औसत मान शून्य होगा।

परंतु दोलक की $P.E.$ एवं $K.E.$ के लिए स्थिति भिन्न है। चित्र 16.9 देखकर आप कहेंगे कि $P.E.$ एवं $K.E.$ के समय के सापेक्ष खींचे गए आलेख स्पष्टतः केवल ऊपरी अर्द्ध भाग

में ही हैं। अर्थात् वक्र के अंतर्गत क्षेत्र का क्षेत्रफल पूरे चक्र के दौरान धनात्मक रहता है। इससे यह संकेत मिलता है कि हम गतिज एवं स्थितिज ऊर्जाओं के औसत मानों के बारे में बात कर सकते हैं। आइए, अब हम इन राशियों के व्यंजक प्राप्त करना सीखेंगे।

एक पूर्ण चक्र में गतिज ऊर्जा के औसत मान को हम नीचे दिए गए व्यंजक द्वारा परिभाषित करते हैं :

$$<K.E.> = \frac{\int_0^T (K.E.)\,dt}{T}$$

समीकरण (16.18) से $K.E.$ का मान उपरोक्त व्यंजक में प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होता है :

$$<K.E.> = \frac{ka^2}{2T}\int_0^T \sin^2(\omega_0 t + \phi)\,dt$$

इस समीकरण में समाकल का मान $T/2$ है (हाशिये में दी गई टिप्पणी पढ़ें)। इसलिए सरल आवर्त गति करते पिंड की औसत गतिज ऊर्जा निम्नलिखित होगी :

$$<K.E.> = \frac{ka^2}{4} \qquad (16.21)$$

उपरोक्त चरणों का अनुकरण कर आप औसत स्थितिज ऊर्जा का व्यंजक भी प्राप्त कर सकते हैं। सरल आवर्त गति करते हुए पिंड की एक पूर्ण चक्र में औसत स्थितिज ऊर्जा है :

$$<P.E.> = \frac{ka^2}{4} \qquad (16.22)$$

समीकरण (16.21) एवं (16.22) दर्शाते हैं कि दोलन के एक पूर्ण चक्र में आवर्ती दोलक की औसत गतिज ऊर्जा इसकी औसत स्थितिज ऊर्जा के बराबर है। औसत गतिज ऊर्जा एवं औसत स्थितिज ऊर्जा का योग है :

$$<K.E.> + <P.E.> = (1/4)ka^2 + (1/4)ka^2 = (1/2)ka^2 = E, \text{ कुल ऊर्जा}$$

उपरोक्त परिणाम के आधार पर हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि किसी आवर्ती दोलक की औसत $K.E.$ और औसत $P.E.$ का योग इसकी कुल ऊर्जा के बराबर होता है (समीकरण 16.20)।

समाकल $I = \int_0^T \sin^2(\omega_0 t + \phi)\,dt$ को हल करने के लिए हम मान लेते हैं कि $\phi = 0$ है। अतः, हम लिख सकते हैं कि

$$I = \int_0^T \sin^2(\omega_0 t)\,dt$$

आगे, हम जानते हैं कि

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

I, के व्यंजक में इस संबंध का उपयोग करने पर हम पाते हैं :

$$I = \int_0^T \sin^2(\omega_0 t)\,dt$$

$$= \int_0^T \left[\frac{1-\cos 2(\omega_0 t)}{2}\right] dt$$

$$= \int_0^T \frac{1}{2}\,dt - \int_0^T \left[\frac{\cos 2(\omega_0 t)}{2}\right] dt$$

$$= \frac{T}{2} - \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{2}\sin 2(\omega_0 t)\right]_0^T$$

$$= \frac{T}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\left[\sin 2\left(\frac{2\pi}{T} \times T\right) - \sin 2(0)\right]$$

$$= T/2$$

आगे बढ़ने से पहले आइए इस भाग के महत्वपूर्ण परिणाम को दोहरा लें :

दोहराएं

दोलक की स्थितिज तथा गतिज ऊर्जा

- किसी दोलक की स्थितिज ऊर्जा ($P.E.$) तथा गतिज ऊर्जा ($K.E.$) समय के साथ परिवर्तित होती है परंतु इसकी कुल ऊर्जा नियत रहती है।
- किसी दोलक की $P.E.$ तथा $K.E.$ तथा कुल ऊर्जा E के व्यंजक निम्नलिखित हैं :

$$P.E. = \frac{1}{2}kx^2$$

$$K.E. = \frac{1}{2}(a^2 - x^2) \quad \text{तथा} \quad E = \frac{1}{2}ka^2$$

- दोलक की औसत स्थितिज ऊर्जा तथा औसत गतिज ऊर्जा के मान बराबर होते हैं : $<P.E.> = \frac{1}{4}ka^2 = <K.E.>$
- औसत $P.E.$ तथा औसत $K.E.$ का योग दोलक की कुल ऊर्जा के बराबर होता है: $<K.E.> + <P.E.> = \frac{1}{4}ka^2 + \frac{1}{4}ka^1 = \frac{1}{2}ka^2 = E$

अब आप एक बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 5 – सरल आवर्ती दोलक की औसत ऊर्जा

किसी सरल आवर्ती दोलक का आयाम 40 cm है। सिद्ध करें कि जब विस्थापन 20cm है तो दोलक की तात्क्षणिक गतिज ऊर्जा इसकी औसत गतिज ऊर्जा से अधिक है।

आइए, अब हम इस इकाई में आपने जो कुछ पढ़ा उसका सारांश दें।

16.5 सारांश

अवधारणा	विवरण
सरल आवर्त गति	■ दोलनी गति **सरल आवर्त गति** कहलाती है यदि (i) त्वरण विस्थापन के समानुपाती हो तथा (ii) त्वरण की दिशा, विस्थापन की दिशा के विपरीत हो।
गति समीकरण	■ सरल आवर्त गति को निरूपित करने वाला **गति समीकरण** अथवा **अवकल समीकरण** है : $$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2\, x = 0$$
हल	■ सरल आवर्त गति के अवकल समीकरण के **हल** निम्न हैं : $$x(t) = \begin{cases} a\sin(\omega_0 t + \phi) \\ a\cos(\omega_0 t + \phi) \\ a\sin(\omega_0 t - \phi) \\ a\cos(\omega_0 t - \phi) \end{cases}$$
वेग	■ सरल आवर्त गति करने वाले किसी पिंड के **वेग** v तथा **त्वरण** a_c के व्यंजक हैं : $$v = \omega_0\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{तथा} \quad a_c = -\,\omega_0^2 x$$
कला	■ किसी दोलक की **कला,** उसकी **गति की अवस्था** बताती है। किन्हीं दो क्षणों पर यदि किसी दोलक की गति की अवस्थाएँ (अर्थात् उन क्षणों पर विस्थापन तथा वेग के मान) समान हैं तो दोलक उन क्षणों पर समान कला में होता है।
आवर्तकाल	■ सरल आवर्त गति करने वाले किसी पिंड के **आवर्तकाल** तथा **आवृत्ति** के व्यंजक निम्नवत् हैं : $$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{तथा} \quad f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T}$$
स्थितिज और गतिज ऊर्जा	■ किसी सरल आवर्ती दोलक में **स्थितिज ऊर्जा** तथा **गतिज ऊर्जा** होती है। *P.E.* तथा *K.E.* के व्यंजक निम्नवत् हैं : $$P.E. = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}ka^2\cos^2(\omega_0 t + \phi)$$

$$K.E. = \frac{1}{2}k(a^2 - x^2) = \frac{1}{2}ka^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi)$$

कुल ऊर्जा

■ एक सरल आवर्त दोलक की **कुल** ऊर्जा का व्यंजक निम्नवत् है :

$$E = P.E. + K.E. = \frac{1}{2}\ ka^2$$

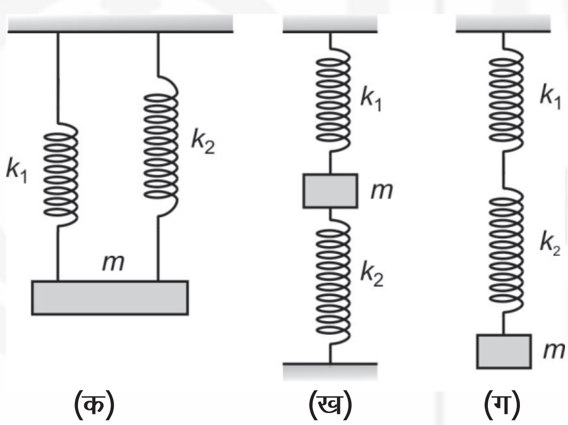
औसत गतिज ऊर्जा और औसत स्थितिज ऊर्जा

■ सरल आवर्ती दोलक की **औसत गतिज ऊर्जा** तथा **औसत स्थितिज ऊर्जा** के बराबर होती है जिसका परिमान $\frac{1}{4}ka^2$ होता है।

16.6 अंत में कुछ प्रश्न

1. एक पिंड सरल आवर्त गति करता है जिसके आयाम, आवृत्ति तथा आरंभिक कला के मान क्रमशः 65 mm, $4.0\,s^{-1}$ तथा शून्य हैं। पिंड के विस्थापन, वेग तथा त्वरण के व्यंजक लिखें। साथ ही, इन प्राचलों के मान $t = 1.5$ s पर परिकलित करें।

2. बल नियतांक k_1 तथा k_2 वाली दो कमानियां तीन विभिन्न प्रकारों से एक दूसरे से जुड़ी हैं जैसा कि चित्र 16.10 में दिखाया गया है। प्रत्येक स्थिति में दोलन का आवर्तकाल परिकलित करें।



चित्र 16.10 : कमानी-द्रव्यमान निकाय की तीन विभिन्न व्यवस्थाएं।

3. एक पिंड सरल आवर्त गति करता है जिसकी आवृत्ति, $f = 0.45$ Hz, प्रारंभिक विस्थापन 0.025 m तथा प्रारंभिक वेग $1.5\ ms^{-1}$ है। पिंड के दोलन का आयाम, अधिकतम वेग तथा अधिकतम त्वरण परिकलित करें।

4. क्षैतिजतः रखे एक सरल आवर्ती दोलक का द्रव्यमान, दोलन का आयाम, आवृत्ति तथा आरंभिक कला क्रमशः 0.5 kg, 5 cm, 60 दोलन प्रति मिनट तथा $(\pi / 3)$ rad है। किसी क्षण t पर दोलक के विस्थापन का व्यंजक लिखें। साथ ही, दोलक के बल नियताकं तथा यात्रिक ऊर्जा का मान परिकलित करें।

5. यदि एक आवर्त दोलक के लिए विस्थापन x_1 तथा x_2 के संगत वेग के मान क्रमशः v_1 तथा v_2 हैं तो इसके आयाम तथा आवर्तकाल प्राप्त करें।

6. द्रव्यमान $m = 0.5$ kg, बल नियतांक $k = 25\ \text{Nm}^{-1}$ तथा यांत्रिक ऊर्जा 25 mJ वाला एक कमानी-द्रव्यमान निकाय सरल आवर्त गति करता है। इसके क) दोलनों का आयाम, ख) द्रव्यमान का अधिकतम वेग, ग) वेग का मान जब विस्थापन 15 mm है, तथा घ) साम्य स्थिति से द्रव्यमान की दूरी, जब उसके वेग का मान $0.2\ \text{ms}^{-1}$ है, परिकलित करें।

7. एक रबड़ पैड प्रत्यास्थ कमानी की तरह व्यवहार करता है। जब इस पर 100 g का एक द्रव्यमान रखा जाता है तो यह 1 cm संपीडित हो जाता है। इसके बाद हम द्रव्यमान को धीरे से नीचे की ओर दबाकर छोड़ देते हैं जिसके कारण यह दोलन करने लगता है। दोलन की आवृत्ति परिकलित करें।

16.7 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. क) i) प्रश्न के आधार पर हम जानते हैं कि कमानियां *A* तथा *B* एक ही कमानी के दो भाग हैं तथा कमानी *A* में फेरों की संख्या (इसकी लंबाई, मूल कमानी की लंबाई का एक-तिहाई है) कमानी *B* में फेरों की संख्या से कम है। अतः, यदि इन दो कमानियों के मुक्त सिरों पर बराबर बल आरोपित किया जाए तो उनका विस्तार एक-दूसरे के बराबर नहीं होगा।

ii) कमानी *B* अधिक विस्तारित होगी क्योंकि इसकी लंबाई (अथवा इसमें फेरों की संख्या) कमानी *A* की लंबाई से अधिक है।

iii) समीकरण (16.1) से हम पाते हैं कि कमानी नियतांक, *k* विस्तार, *x* का व्युत्क्रमानुपाती है। अतः, बराबर बल आरोपित करने पर कमानी *A* में, कमानी *B* की तुलना में कम विस्तार होगा। अतः, कमानी *A* का कमानी नियतांक अधिक होगा।

ख) समीकरण (16.1) के आधार पर हम कमानी (अथवा बल) नियतांक को निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$k = \frac{\text{बल}}{\text{विस्थापन}} = \frac{2.0\ \text{N}}{5.0 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 40\ \text{Nm}^{-1}$$

मान लें कि जब 2.5 N परिमाण का बल लगता है तो कमानी का संपीडन x' है। अतः, समीकरण (16.1) से हम पाते हैं :

$$x' = \frac{\text{बल}}{\text{विस्थापन}} = \frac{2.5\ \text{N}}{40\ \text{Nm}^{-1}} = 6.3 \times 10^{-2}\ \text{m}$$

2. समीकरण (16.5) सरल आवर्त गति का अवकल समीकरण है :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

आइए पहले समीकरण (16.6क) द्वारा व्यक्त हल पर विचार करें :

$$x(t) = a \sin(\omega_0 t + \phi)$$

उपरोक्त को *t* के सापेक्ष दो बार अवकलित करने पर हम पाते हैं :

$$\frac{dx}{dt} = \omega_0 a \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 a \sin(\omega_0 t + \phi) = -\omega_0^2 x \quad \text{तथा} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

अतः, समीकरण (16.6ख), समीकरण (16.5) को संतुष्ट करता है। समीकरण (16.6ग) द्वारा व्यक्त हल है :

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t + \phi)$$

अतः, $\dfrac{dx}{dt} = -\omega_0^2 a \sin(\omega_0 t + \phi)$ तथा $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 a\cos(\omega_0 t + \phi)$

अतः, $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$

समीकरण (16.6घ) निम्नवत् है :

$$x(t) = a\sin(\omega_0 t - \phi)$$

$$\frac{dx}{dt} = \omega_0 a\cos(\omega_0 t - \phi) \quad \text{और} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x$$

अतः, $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$

समीकरण (16.6च) निम्नवत् है :

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t - \phi)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\omega_0 a\sin(\omega_0 t - \phi) \quad \text{और} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 a\cos(\omega_0 t - \phi)$$

$$= -\omega_0^2 x$$

अतः, $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$

3\. क) समीकरण (16.14) से हम जानते हैं कि आवृत्ति, $f = \omega_0 / 2\pi$। परंतु हमने कोणीय आवृत्ति ω_0 को निम्नवत् परिभाषित किया है [देखें समीकरण (16.5)]:

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

अतः हम लिख सकते हैं

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

ख) प्रश्न के अनुसार, एक सरल आवर्ती दोलक के विस्थापन का व्यंजक है :

$$x(t) = 0.4\sin(0.1t + 0.5)$$

इस समीकरण की तुलना सरल आवर्त गति के मानक समीकरण

$$x(t) = a\sin(\omega_0 t + \phi)$$

से करने पर हम लिख सकते हैं कि

i) दोलन का आयाम, $a = 0.4\text{ m}$

ii) आवर्तकाल, $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{2\pi}{0.1\text{ s}^{-1}} = 62.8\text{ s}$

iii) आवृत्ति, $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{62.8\text{ s}} = 0.01\text{ s}^{-1}$

iv) अधिकतम वेग $= \omega_0 a = (0.1\,s^{-1}) \times (0.4\,m) = 0.04\,ms^{-1}$

v) अधिकतम त्वरण $= \omega_0^2 a = (0.1\,s^{-1})^2 \times (0.4\,m) = 0.004\,ms^{-2}$

vi) मान लें कि आरंभिक विस्थापन x_0 समय $t = 0$ पर विस्थापन का मान है। अतः $x(t)$ के दिए गए व्यंजक में $t = 0$ रखने पर हम पाते हैं कि

$$x(t = 0) = 0.4 \sin(0.5) = 0.2\,m$$

4.क) मान लें कि जब विस्थापन का मान x है तब सरल आवर्ती दोलक के $K.E.$ तथा $P.E.$ के मान बराबर हैं। समीकरण (16.16) तथा (16.19) द्वारा व्यक्त $P.E.$ तथा $K.E.$ के व्यंजक होते हैं :

$$P.E. = \frac{1}{2} kx^2 \qquad \text{(i)}$$

तथा
$$K.E. = \frac{1}{2} k\,(a^2 - x^2) \qquad \text{(ii)}$$

चूंकि $P.E.$ तथा $K.E.$ के मान बराबर हैं, समीकरण (i) तथा (ii) से हम लिख सकते हैं :

$$a^2 - x^2 = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$$

ख) प्रश्न के अनुसार,

$$m = 0.55\,kg; \;\; k = 25\,Nm^{-1}$$

चूंकि द्रव्यमान को $x = 40\,mm$ से विरामावस्था से छोड़ा जाता है, दोलन का आयाम $a = 40\,mm = 0.04\,m$ होगा।

i) हमें $P.E.$ तथा $K.E.$ का मान मालूम करना है जब द्रव्यमान का विस्थापन, $x = 20\,mm = 0.02\,m$ है। समीकरण (16.16) से हम लिख सकते हैं :

$$P.E. = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \times (25\,Nm^{-1}) \times (0.02\,m)^2 = 5 \times 10^{-3}\,J$$

$K.E.$ के लिए समीकरण (16.19) से हम पाते हैं :

$$K.E. = \frac{1}{2}k\,(a^2 - x^2)$$

$$= \frac{1}{2} \times (25\,Nm^{-1}) \times [(0.04\,m)^2 - (0.02\,m)^2] = 1.5 \times 10^{-2}\,J$$

ii) हमें $t = T/4$ पर $P.E.$ तथा $K.E.$ के मान निर्धारित करने हैं जबकि आरंभिक कला $\phi = 0$ है। समीकरण (16.17) से हम लिख सकते हैं,

$$P.E. = \frac{1}{2}ka^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

$$= \frac{1}{2} \times (25\,Nm^{-1}) \times (0.04\,m)^2 \times \cos^2\left(\frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{4}\right) = 0$$

क्योंकि $\cos(\pi/2) = 0$ । समीकरण (16.18) द्वारा व्यक्त $K.E.$ का व्यंजक है:

$$K.E. = \frac{1}{2}ka^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

$$= \frac{1}{2} \times (25\,Nm^{-1}) \times (0.04\,m)^2 \times \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{4}\right) = 2 \times 10^{-2}\,J$$

ग) समीकरण (16.17) तथा (16.18) से हम देखते हैं कि $P.E.$ तथा $K.E.$ ज्यावक्रीय रूप से परिवर्तित होते हैं। चूंकि दोलक का आवर्तकाल $2\pi/\omega_0$ है, हमें यह सिद्ध करना

है कि स्थितिज ऊर्जा का आवर्तकाल $(T/2)$ अथवा π/ω_0 होगा। अतः, समीकरण (16.17) का उपयोग कर हम $t = \left(t + \frac{\pi}{\omega_0}\right)$ पर $P.E.$ को निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$P.E.\left(t = t + \frac{\pi}{\omega_0}\right) = \left(\frac{1}{2}\right) ka^2 \cos^2\left[\omega_0\left(t + \frac{\pi}{\omega_0}\right) + \phi\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) ka^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi + \pi)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) ka^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) = P.E.(t)$$

इसी प्रकार, आप सिद्ध कर सकते हैं कि गतिज ऊर्जा का आवर्तकाल π/ω_0 होगा। इसका अर्थ है कि एक पूर्ण दोलन में द्रव्यमान तथा कमानी के बीच ऊर्जा का रूपांतरण दो बार होता है।

5. सरल आवर्ती दोलक के लिए $K.E.$ का व्यंजक समीकरण (16.19) द्वारा व्यक्त होता है :

$$K.E. = \frac{1}{2}k(a^2 - x^2)$$

हमें मालूम है कि दोलन का आयाम $a = 40$ cm $= 0.4$ m है। अतः, $x = 20$ cm $= 0.2$ m के लिए हम लिख सकते हैं :

$$K.E. = \frac{1}{2}k\,[(0.4\text{ m})^2 - (0.2\text{ m})^2] = 0.06\,k\,\text{m}^2 \qquad \text{(i)}$$

और, दोलक की औसत गतिज ऊर्जा समीकरण (16.21) द्वारा व्यक्त होती है :

$$\langle K.E.\rangle = \frac{1}{4}ka^2 = \frac{1}{4}k(0.4\text{ m})^2 = 0.04\,k\,\text{m}^2 \qquad \text{(ii)}$$

समीकरणों (i) और (ii) की तुलना करने पर हम पाते हैं कि निकाय की $K.E.$, $x = 20$ cm पर उसके औसत मान से अधिक है।

अंत में कुछ प्रश्न

1. सरल आवर्त गति करने वाले किसी पिंड के विस्थापन, वेग और त्वरण के व्यंजक क्रमशः समीकरणों (16.6क), (16.7क) तथा (16.8क) द्वारा निरूपित होते हैं :

$$x(t) = a\sin(\omega_0 t + \phi) \qquad \text{(i)}$$

$$v(t) = \omega_0 a\cos(\omega_0 t + \phi) \qquad \text{(ii)}$$

तथा $$a_c(t) = -\omega_0^2 a\sin(\omega_0 t + \phi) \qquad \text{(iii)}$$

प्रश्न के अनुसार, आयाम $a = 0.065$ m, कोणीय आवृत्ति $\omega_0 = 4.0\text{ s}^{-1}$ तथा आरंभिक कला, $\phi = 0$। इन मानों को समीकरणों (i), (ii) तथा (iii) में रखने पर हम पाते हैं कि

$$x(t) = (0.065\text{ m})\sin((4\text{ s}^{-1})t) \qquad \text{(iv)}$$

$$v(t) = (4\text{ s}^{-1}) \times (0.065\text{ m})\cos((4\text{ s}^{-1})t) \qquad \text{(v)}$$

तथा $$a_c(t) = -(4\text{ s}^{-1})^2 \times (0.065\text{ m})\sin((4\text{ s}^{-1})t) \qquad \text{(vi)}$$

ध्यान दें कि ω_0, (rad) s^{-1} में है और हमें ज्या तथा कोज्या फलनों के कोणांक को डिग्री में व्यक्त करना है जिसके लिए हम π (rad) = 180° संबंध का उपयोग करते हैं। समीकरणों (iv), (v) तथा (vi) में $t = 1.5\,s$ रखने पर हम पाते हैं कि

$$x(t = 1.5\text{ s}) = (0.065\text{ m})\ \sin[(4\,\text{rad s}^{-1}) \times (1.5\text{ s})]$$

$$= (0.065\text{m})\ \sin(343.6°) = -1.84 \times 10^{-2}\text{ m}$$

$$v(t = 1.5\text{ s}) = (4\,\text{s}^{-1}) \times (0.065\text{ m})\ \cos[(4\,\text{rad s}^{-1}) \times (1.5\,\text{s})]$$

$$= (4\,\text{s}^{-1}) \times (0.065\text{ m})\ \cos(343.6°) = 0.25\text{ ms}^{-1}$$

$$a_c(t = 1.5\text{ s}) = -(4\,\text{s}^{-1})^2 \times (0.065\text{ m})\ \sin[(4\,\text{s}^{-1}) \times (1.5\,\text{s})] = 0.29\text{ ms}^{-2}$$

2. क) इस व्यवस्था में दोनों कमानियां बराबर दूरी x से विस्थापित होंगी और प्रत्यानयन बल का व्यंजक होगा :

$$F = -k_1 x - k_2 x \qquad \text{(i)}$$

अतः, गति समीकरण (समीकरण 16.4ख) निम्नवत् परिवर्तित हो जाएगा

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + (k_1 + k_2)x = 0 \qquad \text{(ii)}$$

इसके संगत कोणीय आवृत्ति का मान होगा :

$$\omega_0 = \left[\frac{(k_1 + k_2)}{m}\right]^{1/2}$$

अतः, निकाय के दोलन का आवर्तकाल निम्नलिखित होगा :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} \qquad \text{(iii)}$$

ख) इस व्यवस्था में यदि द्रव्यमान ऊपर या नीचे की ओर x दूरी से विस्थापित होता है तो प्रत्यानयन बलों के व्यंजक होंगे :

$$F_1 = -k_1\,x \quad \text{और} \quad F_2 = -k_2\,x$$

अतः, द्रव्यमान पर आरोपित नेट प्रत्यानयन बल है :

$$F = -k_1\,x - k_2\,x \qquad \text{(iv)}$$

ध्यान दें कि समीकरण (iv) समीकरण (i) के समान हैं। अतः, दोलन का गति समीकरण तथा आवर्तकाल क्रमशः समीकरणों (ii) तथा (iii) द्वारा व्यक्त होंगे।

ग) इस स्थिति में दो कमानियां श्रेणी में जुड़ी हैं। जब द्रव्यमान का विस्थापन x है तो दोनों कमानियां बराबर प्रत्यानयन बल लगाएगी। परंतु कमानियों के विस्तार भिन्न होंगे क्योंकि इनके कमानी नियतांक k_1 तथा k_2 भिन्न हैं। मान लें कि ये विस्थापन क्रमशः x_1 तथा x_2 हैं। चूंकि प्रत्यानयन बल, F बराबर है, हम लिख सकते हैं :

$$F = -k_1\,x_1 = -k_2\,x_2$$

कमानी का कुल विस्तार है :

$$x = x_1 + x_2$$

जिसे हम निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$x = -(F/k_1) - (F/k_2) = -[(1/k_1) + (1/k_2)]F$$

अतः, $F = -[x/\{(1/k_1) + (1/k_2)\}] = -k'x$

जहां $k' = [1/\{(1/k_1) + (1/k_2)\}]$

निकाय का प्रभावी कमानी नियतांक है। अतः, निकाय के दोलन का आवर्तकाल निम्न होगा :

$$T = 2\pi\sqrt{m/k'} = 2\pi\sqrt{m\,[(1/k_1) + (1/k_2)]}$$

3. सरल आवर्त गति करने वाले पिंड के वेग का व्यंजक है :

$$v = \omega_0\sqrt{a^2 - x^2}$$

अतः, $v^2 = \omega_0^2(a^2 - x^2)$

अथवा $a = \sqrt{(v^2/\omega_0^2) + x^2}$ (i)

प्रश्न के अनुसार, $f = 0.45$ Hz $x = 0.025$ m तथा $v = 1.5\ \text{ms}^{-1}$। अतः,

$$\omega_0 = 2\pi f = (2 \times 3.14 \times 0.45\ \text{s}^{-1}) = 2.83\,\text{s}^{-1}$$

v, ω_0 तथा x के मान समीकरण (i) में रखने पर हम पाते हैं :

$$a = \sqrt{\frac{(1.5\ \text{ms}^{-1})^2}{(2.83\ \text{s}^{-1})^2} + (0.025\ \text{m})^2} = 0.53\ \text{m}$$

हम जानते हैं कि अधिकतम वेग, v_{max} का व्यंजक है :

$$v_{max} = \omega_0\, a = (2.83\ \text{s}^{-1}) \times (0.53\ \text{m}) = 1.5\ \text{ms}^{-1}$$

अधिकतम त्वरण $(a_c)_{max}$ का व्यंजक है :

$$(a_c)_{max} = \omega_0^2\, a = (2.83\ \text{s}^{-1})^2 \times (0.53\ \text{m}) = 4.24\ \text{ms}^{-2}$$

4. किसी सरल आवर्ती दोलक के विस्थापन का किसी क्षण t पर व्यंजक समीकरण (16.6 ख) द्वारा व्यक्त होता है:

$$x(t) = a\sin(\omega_0 t + \phi) \qquad \text{(i)}$$

प्रश्न के अनुसार $m = 0.5$ kg तथा $\phi = \pi/3$ और आयाम $a = 5\,\text{cm} = 0.05$ m। साथ ही हमें मालूम है कि आवृत्ति $f = 60$ दोलन प्रति मिनट। अतः,

$$f = \frac{60}{60\,\text{s}} = 1\ \text{s}^{-1}$$

अतः, कोणीय आवृत्ति $\omega_0 = 2\pi f = 2\pi\ \text{s}^{-1}$। a, ω_0 तथा ϕ के मान समीकरण (i) में रखने पर हम पाते हैं :

$$x(t) = (0.05\ \text{m})\sin\left[2\pi t + \frac{\pi}{3}\right]$$

बल नियतांक का निर्धारण करने के लिए हम निम्न व्यंजक का उपयोग करते हैं :

$$k = \omega_0^2\, m = (2\pi\ \text{s}^{-1})^2 \times (0.5\ \text{kg}) = 19.7\ \text{Nm}^{-1}$$

दोलक की कुल यांत्रिक ऊर्जा समीकरण (16.20) द्वारा व्यक्त होती है :

$$E = \frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}(19.7\ \text{Nm}^{-2}) \times (0.05\,\text{m})^2 = 2.46 \times 10^{-2}\ \text{J}$$

5. सरल आवर्त गति करने वाले किसी पिंड के विस्थापन का व्यंजक है :

$$x = a\cos(\omega_0 t + \phi)$$

अतः,
$$v = \frac{dx}{dt} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi) = -a\omega_0\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

जब विस्थापन x_1 तथा वेग v_1 है तो हम लिख सकते हैं :

$$v_1/a\omega_0 = -\sqrt{1-(x_1^2/a^2)} \qquad \text{(i)}$$

उसी प्रकार, जब विस्थापन x_2 तथा वेग v_2 है तो हम लिख सकते हैं :

$$v_2/a\omega_0 = -\sqrt{1-(x_2^2/a^2)} \qquad \text{(ii)}$$

समीकरण (i) तथा (ii) को वर्ग करने पर हम पाते हैं :

$$(v_1/a\omega_0)^2 = 1-(x_1^2/a^2) \qquad \text{(iii)}$$

तथा
$$(v_2/a\omega_0)^2 = 1-(x_2^2/a^2) \qquad \text{(iv)}$$

समीकरण (iv) को समीकरण (iii) से घटाने पर हम पाते हैं :

$$\frac{1}{(a\omega_0)^2}[v_1^2 - v_2^2] = \frac{x_2^2 - x_1^2}{a^2}$$

इस समीकरण को सरलीकृत कर हम निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{v_1^2 - v_2^2}{x_2^2 - x_1^2}}$$

समीकरण (i) में ω_0 के इस मान का उपयोग कर आप सिद्ध कर सकते हैं कि दोलन के आयाम का व्यंजक निम्नलिखित है :

$$a = \sqrt{\frac{v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}$$

6. हमें दिया गया है कि $m = 0.5$ kg, $k = 25\ \text{Nm}^{-1}$ तथा $E = 25 \times 10^{-3}$ J ।

क) दोलन का आयाम परिकलित करने के लिए हम दोलक की कुल ऊर्जा के व्यंजक (समीकरण 16.20) का उपयोग करते हैं :

$$E = \frac{1}{2}ka^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2 \times (25 \times 10^{-3}\ \text{J})}{25\ \text{Nm}^{-1}}} = 0.044\ \text{m}$$

ख) समीकरण (16.7क) से हम जानते हैं कि दोलक के अधिकतम वेग का व्यंजक है :

$$v_{max} = \omega_0 a = (\sqrt{k/m})\,a$$

$$= \sqrt{\frac{(25\text{Nm}^{-1})}{0.5\ \text{kg}}} \times (0.044\ \text{m}) = 0.014\ \text{ms}^{-1}$$

ग) किसी दोलक के विस्थापन और वेग में संबंध समीकरण (16.7ख) द्वारा व्यक्त होता है :

$$v = \omega_0 \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{k/m}\,.\sqrt{a^2 - x^2}$$

अतः, $x = 15\text{ mm} = 0.015\text{ m}$ पर द्रव्यमान का वेग होगा :

$$v = \sqrt{\frac{25\text{ Nm}^{-1}}{0.5\text{ kg}}} \times \sqrt{(0.044\text{ m})^2 - (0.015\text{ m})^2} = 0.29\text{ ms}^{-1}$$

घ) वेग 0.2 ms^{-1} के संगत विस्थापन परिकलित करने के लिए हम फिर समीकरण (16.7ख) का उपयोग करते हैं :

$$v^2 = \omega_0^2 (a^2 - x^2) \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = a^2 - \frac{v^2}{\omega_0^2}$$

अथवा $x^2 = (0.044\text{ m})^2 - \dfrac{(0.2\text{ ms}^{-1})^2 \times 0.5\text{ kg}}{25\text{ Nm}^{-1}} = 0.001\text{ m}^2$

अतः, $x = 0.031\text{ m}$

7. चूंकि $\text{m} = 100\text{ g}$, अतः, हम रबड़ पैड पर लगने वाले विरूपण बल को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$F = mg = (0.1\text{ kg}) \times (9.8\text{ ms}^{-2}) = 0.98\text{ N}$$

न्यूटन के गति के तीसरे नियम के आधार पर हम कह सकते हैं कि यह विरूपण बल, परिमाण में रबड़ पैड द्वारा आरोपित प्रत्यानयन बल के बराबर है। चूंकि संपीडन का मान $1\text{ cm} = 0.01\text{ m}$, है, रबड़ पैड का बल नियतांक होगा :

$$k = \frac{0.98\text{ N}}{0.01\text{ m}} = 98\text{ Nm}^{-1}$$

अतः, दोलन की आवृत्ति है :

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{98\text{ Nm}^{-1}}{0.1\text{ kg}}} = 4.98\text{ Hz}$$

उपरोक्त फोटोग्राफ लिसाजू आकृतियों का है जो तब उत्पन्न होती हैं जब धागे से लटका हुआ एक बालू से भरा डिब्बा, जिसकी तली में एक छेद है, मुक्त रूप से दोलन करता है। छेद से गिरने वाला बालू, डिब्बे के नीचे की सतह पर उपरोक्त आकृतियां बनाता है। इस प्रकार के वक्रों का गहन अध्ययन फ्रेंच गणितज्ञ जूल्य एन्तोइन लिसाजू (1822-1880) ने वर्ष 1857 में किया था। इसी कारण इन आकृतियों या वक्रों को लिसाजू आकृतियां कहते हैं।
(चित्र का स्रोतः commons.wikimedia.org)

इकाई 17

आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण

इकाई की रूपरेखा

अध्ययन निर्देशिका

इस इकाई की आधारभूत संकल्पना अध्यारोपण सिद्धांत है जिसके आधार पर हम विभिन्न प्रकार की प्राकृतिक परिघटनाओं का विश्लेषण करते हैं। इस इकाई के अधिकांश भाग में यह चर्चा की गई है कि जब किसी पिंड पर दो सरल आवर्ती दोलन एक साथ प्रभावी होते हैं तो इस सिद्धांत का उपयोग कर पिंड की परिणामी गति की प्रकृति का निर्धारण कैसे किया जाता है। इसके लिए हम त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं से जुड़े बीजगणित का उपयोग करते हैं। इसलिए, आप अपने स्कूली गणित, विशेषकर त्रिकोणमिति तथा निर्देशांक ज्यामिति की संकल्पनाओं को दोहरा लें। इस इकाई के अध्ययन के दौरान बीजगणित में निहित भौतिकी को नज़रअंदाज़ न करें। आपको चाहिए कि दोलनों के अध्यारोपण के प्रत्येक प्रकरण का अध्ययन करने के पश्चात् आप कुछ देर के लिए रुकें और सोचें कि परिणामी गति के लिए प्राप्त व्यंजकों के भौतिक अर्थ क्या है। हम आशा करते हैं कि आप इन समीकरणों द्वारा निरूपित भौतिक स्थितियों को बेहतर समझ के लिए उनके संगत आलेखों की प्रकृति को समझने के लिए उपयुक्त समय देंगे।

"किसी भी विषय वस्तु को अनिच्छा से पढ़ने का हमारी याददाश्त पर काफी प्रतिकूल असर होता है क्योंकि हम जब कुछ भी पढ़ते हैं उसे ठीक से समझ अथवा याद नहीं रख पाते।"

लियोनार्डो दा विंसी

17.1 परिचय

इकाई 16 में, आपने सरल आवर्त गति (SHM) की मूल अवधारणाओं को पढ़ा। आपने जाना कि किसी पिंड की गति सरल आवर्त गति तब होती है जब उसका त्वरण उसके विस्थापन के समानुपाती हो और त्वरण की दिशा विस्थापन की दिशा के विपरीत हो। एक कमानी-द्रव्यमान निकाय के लिए हमने द्रव्यमान पर लगने वाले बल के आधार पर उसका गति समीकरण स्थापित किया और गति समीकरण को हल कर हमने दोलनकारी पिंड का विस्थापन, समय के एक फलन के रूप में प्राप्त किया।

जैसा कि आप अब जानते हैं, सरल आवर्त गति, दोलनी गति का एक आदर्श मॉडल है। संगीतवाद्यों के तारों तथा हमारे कान के पर्दे जैसे प्राकृतिक निकायों की कंपन गति अपेक्षाकृत बहुत जटिल होती है क्योंकि उन पर एक ही समय में अनेक दोलन प्रभावी होते हैं। **इसलिए एक तर्कसंगत प्रश्न यह उठता है : यदि किसी पिंड पर एक साथ एक से अधिक दोलन आरोपित हों तो हम पिंड की परिणामी गति का निर्धारण किस प्रकार करते हैं?** अध्यारोपण के सिद्धांत का उपयोग कर हम इस प्रश्न का उत्तर पा सकते हैं। अगर हम यह मान लें कि एक ही समय में आरोपित सभी दोलन, सरल आवर्ती हैं तो परिणामी गति का विश्लेषण सरल ढंग से किया जा सकता है। जैसाकि हमने आपको पिछली इकाई में बताया था, सरल आवर्त गति के आदर्श मॉडल के विभिन्न लाभों में से एक लाभ यह भी है कि हम किसी जटिल दोलन को उपयुक्त आयाम एवं आवृत्ति वाले दो अथवा दो से अधिक सरल आवर्ती दोलनों के योग के रूप में निरूपित कर सकते हैं। इसके विपरीत, जब एक साथ, दो या अधिक आवर्ती दोलन किसी पिंड पर आरोपित होते हैं तो पिंड की परिणामी गति काफ़ी जटिल होती है। इस परिणामी गति की प्रकृति का अन्वेषण ही इस इकाई की विषय वस्तु है।

भाग 17.2 में आप अध्यारोपण सिद्धांत का अध्ययन करेंगे। आप जानते हैं कि अध्यारोपित होने वाले दोलनों के आयाम, आवृत्ति और कला जैसे भौतिक प्राचलों के मान बराबर भी हो सकते हैं और भिन्न भी। अध्यारोपित दोलनों के इन प्राचलों में परस्पर संबंध, पिंड की परिणामी गति की प्रकृति निर्धारित करती है। भाग 17.3 में आप किसी पिंड पर अध्यारोपित होने वाले समान और असमान आवृत्तियों के दो **संरेख** (एक ही सरल रेखा में) दोलनों के कारण पिंड की परिणामी गति मालूम करने के लिए अध्यारोपण सिद्धांत का उपयोग करना सीखेंगे। भाग 17.4 में हमने उस अवस्था की चर्चा की है जब किसी पिंड पर एक साथ समान या असमान आवृत्तियों वाले दो **परस्पर लंबवत्** दोलन आरोपित होते हैं। आप इस स्थिति के लिए परिणामी दोलन के पथ के लिए व्यंजक प्राप्त करना सीखेंगे। इन पथों को लिसाजू-आकृतियां कहते हैं।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- अध्यारोपण का सिद्धांत बता सकेंगे;
- उन प्रतिबंधों को समझा सकेंगे जिनके तहत दो या अधिक दोलनों के लिए अध्यारोपण के सिद्धांत का उपयोग किया जा सकता है;
- अध्यारोपण सिद्धांत का उपयोग कर उस पिंड की गति का विश्लेषण कर सकेंगे जिस पर समान आवृत्ति तथा असमान आवृत्तियों वाले संरेख आवर्ती दोलन एक साथ आरोपित हैं;
- किसी पिंड, जिस पर दो परस्पर लंबवत् दोलन एक साथ आरोपित हैं, की परिणामी

गति निर्धारित करने के लिए अध्यारोपण का सिद्धांत लागू कर सकेंगे; तथा

- लिसाजू की आकृतियों का बनना समझा सकेंगे।

17.2 अध्यारोपण का सिद्धांत

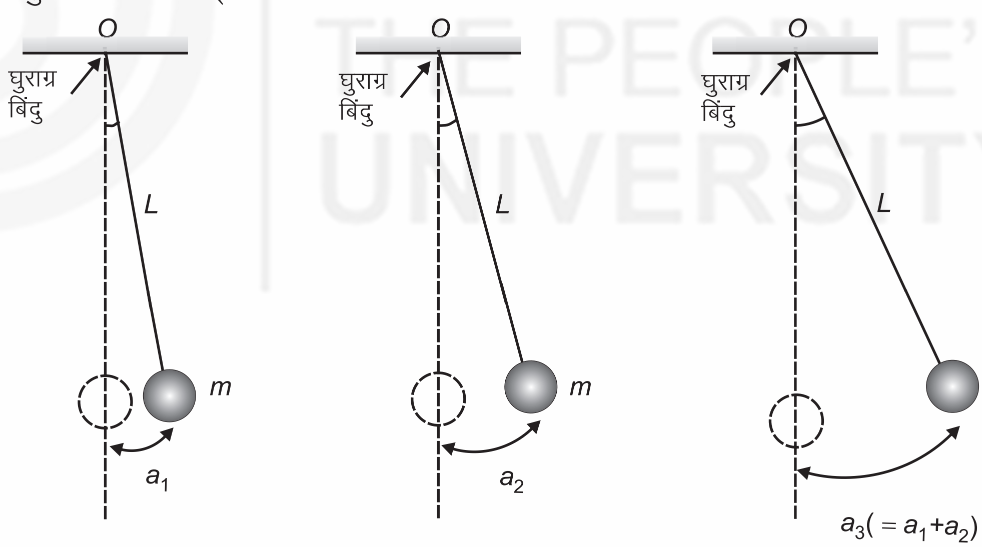
ध्यान दें

अध्यारोपण सिद्धांत एक व्यापक सिद्धांत है जो भौतिक विज्ञान की कई शाखाओं में विविध भौतिक प्रक्रमों के लिए वैध है। इनमें से कुछ शाखाएं हैं : यांत्रिकी, विद्युत् एवं चुम्बकत्व, प्रकाशिकी तथा क्वांटम यांत्रिकी। किन्तु यहां हम इस सिद्धांत के विवेचन को यांत्रिक निकायों के दोलनों के अध्यारोपण तक ही सीमित रखेंगे।

इकाई 16 में आप पढ़ चुके हैं कि यदि किसी दोलनकारी पिंड पर लगने वाला बल, इसके विस्थापन के समानुपाती हो और विस्थापन की विपरीत दिशा में लगता हो तो इसकी दोलनी गति सरल आवर्त गति होती है। उदाहरण के लिए, कमानी-द्रव्यमान निकाय के द्रव्यमान पर कमानी के कारण लगने वाला प्रत्यानयन बल, $F\,(=-kx)$ इसे सरल आवर्त गति प्रदान करता है। इसी तरह अपनी स्कूली भौतिकी में आपने पढ़ा होगा कि सरल लोलक की दोलनी गति के लिए गोलक के भार का स्पर्शरेखीय घटक प्रत्यानयन बल प्रदान करता है।

ऐसी अनेक भौतिक स्थितियां होती हैं जब किसी पिंड पर दो या दो से अधिक आवर्ती बल (अथवा आवर्ती दोलन) एकसाथ आरोपित होते हैं। उदाहरण के लिए, कल्पना करें कि आप बाजार में खड़े हैं जहां बहुत शोर-गुल है। ऐसी स्थिति में आपके कान के डायफ्राम पर एक साथ कई सारे आवर्ती दोलन आरोपित होंगे। प्रत्येक आवर्ती दोलन आपके कान के डायफ्राम को अपनी दिशा में गति देने की चेष्टा करेगा। ऐसी स्थिति में डायफ्राम की परिणामी गति का निर्धारण दोलनों के अध्यारोपण सिद्धांत के आधार पर किया जा सकता है। अध्यारोपण सिद्धांत के अनुसार, **किसी क्षण विशेष पर, किसी ऐसे पिंड का विस्थापन जिस पर दो या अधिक आवर्ती दोलन एक-साथ आरोपित हों, उन विस्थापनों के योग के बराबर होगा जो इस पिंड पर आवर्ती दोलनों के अलग-अलग आरोपित होने के कारण होते हैं।** इस कथन का अर्थ स्पष्ट करने के लिए, आइये, सरल लोलक को लेकर कुछ प्रयोग करें जिनमें लोलक लघु कोण सन्निकट्टन के अंतर्गत सरल आवर्त गति करता है।

सरल लोलक की दोलनी गति के सरल आवर्त गति होने की शर्त यह है कि दोलन कोण θ का मान इतना हो कि हम $\sin\theta \sim \theta$ मान सकें। इस शर्त के लघु कोण सन्निकट्टन कहते हैं।



चित्र 17.1: विभिन्न प्रारंभिक प्रतिबंधों के अंतर्गत सरल लोलक : क) प्रारंभिक विस्थापन $= a_1$, प्रारंभिक वेग $= 0$; ख) प्रारंभिक विस्थापन $= a_2$, प्रारंभिक वेग $= 0$; ग) प्रारंभिक विस्थापन $= a_3\,(= a_1 + a_2)$, प्रारंभिक वेग $= 0$।

मान लें कि किसी सरल लोलक का गोलक केवल एक तल में दोलन कर सकता है। इस गोलक को क्षण $t = 0$ पर विरामावस्था से छोड़ा जाता है और इसका प्रारंभिक विस्थापन a_1 है (चित्र 17.1क)। अतः, लोलक की गति का **प्रारंभिक प्रतिबंध** (अर्थात्

$t = 0$ पर विस्थापन एवं वेग के मान) हैः विस्थापन $x = a_1$ तथा वेग $v = 0$। मान लीजिए कि बाद के किसी क्षण t_1 पर गोलक के विस्थापन का मान x_1 है।

आइये, अब इस प्रयोग को **प्रारंभिक प्रतिबंधों के एक अन्य समुच्चय के लिए दोहराएं** : प्रारंभिक विस्थापन $x = a_2$, एवं प्रारंभिक वेग $v = 0$, जैसाकि चित्र 17.1ख में दिखाया गया है। जब गोलक इन प्रारंभिक प्रतिबंधों के तहत दोलन करता है तो मान लीजिए कि समान समयान्तराल t_1 में मापित विस्थापन का मान x_2 है।

आइये, **अब इस प्रयोग को एक बार फिर से करें जिसमें प्रारंभिक प्रतिबंध उपरोक्त दो प्रयोगों के प्रारंभिक प्रतिबंधों के योग (या अध्यारोपण) के बराबर हैं।** इसका तात्पर्य यह है कि गोलक का प्रांरभिक विस्थापन a_3 उपरोक्त दो प्रयोगों के प्रारंभिक विस्थापनों a_1 एवं a_2 के योग के बराबर है, अर्थात् $a_3 = (a_1 + a_2)$ है और प्रारंभिक वेग $v = 0$ है जैसाकि चित्र 17.1ग में दिखाया गया है। **यहां यह मान लिया गया है कि इस प्रारंभिक प्रतिबंध के अंतर्गत लोलक दो दोलनों के संयुक्त प्रभाव में दोलन करता है जो उपरोक्त दो प्रयोगों में वर्णित लोलकों के दोलनों द्वारा निरूपित होते हैं।** अतः, अध्यारोपण सिद्धांत के अनुसार इस प्रयोग में समान समयान्तराल t_1 के बाद विस्थापन x_3 का मान $(x_1 + x_2)$ के बराबर होना चाहिए। दूसरे शब्दों में, परिणामी विस्थापन x_3, अलग-अलग विस्थापनों x_1 एवं x_2 के योग के बराबर है।

अतः, हम अध्यारोपण सिद्धांत को निम्नलिखित रूप से अभिव्यक्त कर सकते हैंः

दो या दो से अधिक आवर्ती विस्थापनों के अध्यारोपण के कारण उत्पन्न परिणामी विस्थापन, प्रत्येक क्षण, एकल विस्थापनों के बीजगणितीय योग के बराबर होता है।

कभी न भूलें

अध्यारोपण सिद्धांत की वैधता सार्वभौमिक है। हम इसे व्यापकीकृत कर सकते हैंः **परिणामी प्रभाव एकल प्रभावों का योग होता है**।

आगे बढ़ने से पहले, आइए, इस भाग की मुख्य बातों को दोहरा लें।

दोहराएं

- जब किसी पिंड पर दो या दो से अधिक आवर्ती दोलन एक साथ आरोपित होते हैं तो पिंड की परिणामी गति अध्यारोपण सिद्धांत द्वारा निर्धारित होती है।
- अध्यारोपण सिद्धांत के अनुसार, परिणामी विस्थापन, एकल विस्थापनों का बीजगणितीय योग होता है। यदि $x_1(t)$ तथा $x_2(t)$ अध्यारोपित दोलनों के एकल विस्थापन हैं तो परिणामी विस्थापन $x(t)$ निम्नवत् होता है :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

रैखिकता और अध्यारोपण सिद्धांत

जैसा हमने ऊपर उल्लेख किया है, अध्यारोपण सिद्धांत एक व्यापक सिद्धांत है। यह व्यापक इस अर्थ में है कि भौतिकी की अनेक शाखाओं के विभिन्न प्रक्रमों के लिए इसे वैध पाया गया है। **परंतु यहां यह बताना आवश्यक है कि यह सिद्धांत केवल उन्हीं प्रक्रमों के लिए वैध है जिनको रैखिक समघात साधारण अवकल समीकरणों द्वारा व्यक्त किया जा सकता है**। इस कथन को समझने के लिए, आइए, कमानी-द्रव्यमान निकाय के गति समीकरण, समीकरण (16.5) पर विचार करें :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (17.1)$$

इकाई 4 से याद करें कि समीकरण (17.1) एक रैखिक समघात साधारण अवकल समीकरण है। इसमें चर x अथवा इसके अवकलज $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}$ इत्यादि के प्रथम घात से अधिक घात वाला कोई पद नहीं है। आप जानते हैं कि वह अवकल समीकरण जिसमें चर अथवा उसके अवकलज (जैसे कि $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}$ इत्यादि) के केवल प्रथम घात के पद हों, **रैखिक अवकल समीकरण** कहलाता है। (यदि किसी अवकल समीकरण में चर अथवा उसके अवकलज के प्रथम घात से अधिक घात वाले पद हों तो उसे अरैखिक समीकरण कहते हैं।)

आगे, इस अवकल समीकरण में चर-रहित (शून्य के अलावा) कोई पद नहीं है। अतः, उसे **समघात अवकल समीकरण** कहते हैं। अतः, हम पाते हैं कि कमानी-द्रव्यमान निकाय, जो एक सरल आवर्ती दोलक है, का गति समीकरण एक रैखिक समघात साधारण अवकल समीकरण है।

अब आप पूछ सकते हैं : इस तथ्य का सैद्धांतिक आधार क्या है कि हम अध्यारोपण सिद्धांत का प्रयोग तभी कर सकते हैं यदि निकाय की गति रैखिक समघात अवकल साधारण समीकरण द्वारा व्यक्त हो? इस तथ्य का सैद्धांतिक आधार रैखिक समघात साधारण अवकल समीकरणों का वह गुणधर्म है जिसके अनुसार किसी रैखिक समघात अवकल साधारण समीकरण के दो स्वतंत्र हलों का योग भी उस समीकरण का एक हल होता है।

इस गुणधर्म को समझने के लिए हम कमानी-द्रव्यमान निकाय के गति समीकरण [(समीकरण (17.1)] पर फिर से विचार करते हैं। ध्यान दें कि समीकरण (17.1) एक द्वितीय कोटि का रैखिक समघात साधारण अवकल समीकरण है। आप इस पाठ्यक्रम के खंड 1 के इकाई 4 में पढ़ चुके हैं कि **द्वितीय कोटि अवकल समीकरण के एकघाततः स्वतंत्र दो हल होंगे। ऐसे अवकल समीकरणों का एक विशेष गुणधर्म यह होता है कि इनके दो एकघाततः स्वतंत्र हलों का योग भी इनका एक हल होता है।** इस गुणधर्म का अर्थ समझने के लिए मान लें कि $x_1(t)$ तथा $x_2(t)$ समीकरण (17.1) के दो भिन्न हल हैं। अतः, $x_1(t)$ तथा $x_2(t)$ समीकरण (17.1) को संतुष्ट करेंगे और हम लिख सकते हैं :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\omega_0^2 x_1 \tag{17.2}$$

तथा

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\omega_0^2 x_2 \tag{17.3}$$

समीकरणों (17.2) और (17.3) को जोड़ने पर हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{d^2(x_1+x_2)}{dt^2} = -\omega_0^2 (x_1+x_2) \tag{17.4}$$

समीकरण (17.4) से स्पष्ट है कि $x_1(t)+x_2(t)$ भी समीकरण (17.1) का एक हल है। अतः, हम पाते हैं कि यदि $x_1(t)$ एवं $x_2(t)$ समीकरण (17.1) के दो भिन्न हल हैं तो उनका योग $\{x_1(t)+x_2(t)\}$ भी इसका हल होगा। अतः, हम पाते हैं कि द्वितीय कोटि अवकल समीकरण का गुणधर्म, अध्यारोपण सिद्धांत को सैद्धांतिक आधार प्रदान करता है। क्योंकि अध्यारोपण सिद्धांत के अनुसार, यदि दो आवर्ती दोलन, जिनके विस्थापनों को $x_1(t)$ एवं $x_2(t)$ द्वारा व्यक्त किया गया हो, किसी पिंड पर एकसाथ आरोपित हों तो हम पिंड के परिणामी गति के विस्थापन, $x(t)$ को निम्नवत् व्यक्त कर सकते हैं :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \tag{17.5}$$

आपको आवर्ती दोलनों के गति समीकरणों की रैखिकता और अध्यारोपण सिद्धांत में संबंध को अच्छी तरह समझ लेना चाहिए। अब हम इस सिद्धांत का उपयोग कर किसी पिंड, जिस पर एक साथ दो या दो से अधिक आवर्ती दोलन आरोपित हैं, की परिणामी गति की चर्चा करेंगे।

जब दो आवर्ती दोलन किसी पिंड पर एकसाथ आरोपित होते हैं तो हम यह आशा करते हैं कि पिंड की परिणामी गति अध्यारोपित दोलनों के आयाम, आवृत्ति एवं कला जैसे भौतिक प्राचलों पर निर्भर करेगी। साथ ही, यह इस बात पर भी निर्भर करेगी कि अध्यारोपित दोलन संरेख है या परस्पर लंबवत्। आइए, हम आगे की चर्चा की शुरुआत दो संरेख दोलनों के अध्यारोपण से करते हैं।

17.3 दो संरेख आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण

जब किसी पिंड पर दो संरेख आवर्ती दोलन एकसाथ प्रभावी होते हैं तो दोनों इसे एक ही रेखा के अनुदिश विस्थापित करेंगे। अतः, हम आशा करते हैं कि परिणामी गति भी उसी सरल रेखा के अनुदिश होगी। परंतु अध्यारोपित दोलनों के आयाम, आवृत्ति और कला, परिणामी गति को अलग अलग तरह से प्रभावित कर सकते हैं। यहां हम आयामों, आवृत्तियों और कलाओं पर निर्भर निम्नलिखित प्रारूपिक स्थितियों पर, बढ़ती हुई जटिलता के आधार पर, विचार करेंगेः समान आवृत्ति परंतु भिन्न आयामों के दोलन; तथा असमान आयामों और असमान आवृत्तियों के दोलन।

17.3.1 समान आवृत्ति वाले संरेख दोलन

भाग 16.3.1 से आपको याद होगा कि यदि कोई पिंड सरल आवर्ती गति करता है तो क्षण t पर उसके विस्थापन $x\,(t)$ को निम्नवत् निरूपित किया जा सकता है :

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t + \phi) \qquad (17.6)$$

जहां a, ω_0 एवं ϕ क्रमशः दोलन के आयाम, आवृत्ति एवं प्रारंभिक कला हैं। प्रस्तुत प्रकरण में हम ऐसे दो आवर्ती दोलनों के अध्यारोपण की चर्चा करेंगे जिनकी आवृत्तियां तो समान हैं परंतु उनके आयाम असमान हैं। **इसके अतिरिक्त, हम यह भी मान लेते हैं कि इन दोनों दोलनों की प्रारंभिक कलाओं में π का अंतर है।** ऐसे दोलनों को विपरीत कलाओं वाले दोलन कहते हैं। इन अनुमानों के अंतर्गत हम क्षण t पर इन दो संरेख अध्यारोपित दोलनों के कारण पिंड के विस्थापनों $x_1(t)$ एवं $x_2(t)$ के लिए व्यजंक निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$x_1(t) = a_1 \cos \omega_0 t \qquad (17.7)$$

और

$$x_2(t) = a_2 \cos(\omega_0 t + \pi) = -\,a_2 \cos \omega_0 t \qquad (17.8)$$

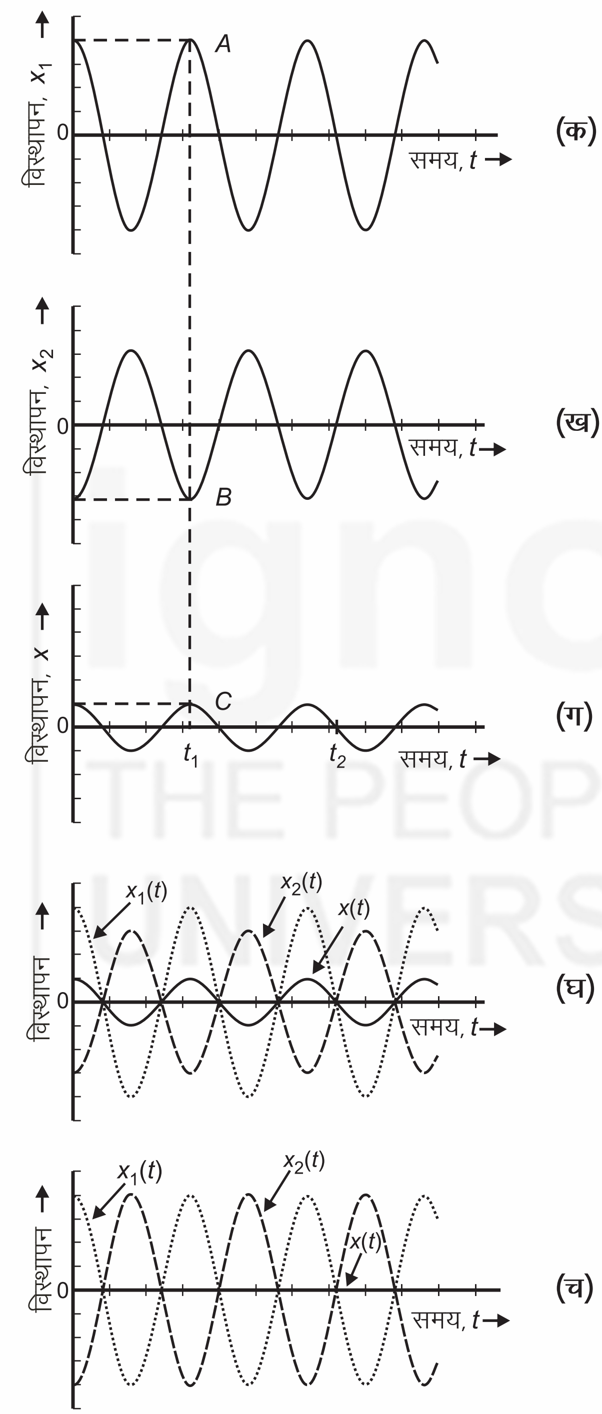
आगे, अध्यारोपण सिद्धांत का उपयोग करके हम किसी दिए गए क्षण t पर पिंड के परिणामी विस्थापन $x(t)$ को निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

समीकरणों (17.7) और (17.8) से $x_1(t)$ एवं $x_2(t)$ के मान प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं :

$$x(t) = a_1 \cos \omega_0 t - a_2 \cos \omega_0 t = (a_1 - a_2)\cos \omega_0 t \qquad (17.9)$$

समीकरण (17.9) पिंड की परिणामी गति का विस्थापन-समय संबंध बताता है। समीकरण (17.9) की तुलना समीकरण (17.6) से करने पर हम पाते हैं कि जब दो संरेख दोलनों, जिनकी प्रारंभिक कलाओं में π का अंतर हो, को किसी पिंड पर एक साथ आरोपित किया जाता है तो पिंड की परिणामी गति सरल आवर्त रहती है, परंतु इसके आयाम का मान $(a_1 - a_2)$ होता है, तथा इसकी आरंभिक कला का मान शून्य होता है। **समीकरण (17.9) यह भी बताता है कि यदि अध्यारोपित दोलनों के आयाम बराबर हों, अर्थात् $a_1 = a_2$ हो, तो परिणामी विस्थापन हर समय शून्य होता है।**



चित्र 17.2: दो संरेख दोलनों और विभिन्न स्थितियों में उनके अध्यारोपण के लिए विस्थापन-समय आलेख: क) $x_1(t)$; ख) $x_2(t)$; ग) परिणामी विस्थापन $x(t)$ जो $x_1(t)$ तथा $x_2(t)$ को अध्यारोपित करने पर प्राप्त होता है जब $a_1 \neq a_2$ हो; घ) $a_1 \neq a_2$ तथा कला अंतर π स्थिति के लिए $x_1(t)$, $x_2(t)$ तथा $x(t)$; च) $a_1 = a_2$ तथा कला अंतर π के लिए $x_1(t)$, $x_2(t)$ तथा $x(t)$ ।

इन दोनों स्थितियों को दर्शाने वाले विस्थापन-समय आलेख चित्र 17.2 में दिखाए गए हैं। चित्र 17.2 क तथा 17.2 ख क्रमशः समीकरणों (17.7) तथा (17.8) द्वारा निरूपित आवर्त्ती दोलनों के विस्थापन-समय आलेख हैं। ये आलेख, क्रमशः दोलनों $x_1(t)$ तथा $x_2(t)$ को निरूपित करते हैं। चित्र 17.2 ग, समीकरण (17.9) द्वारा निरूपित परिणामी दोलन का विस्थापन-समय आलेख है। इन चित्रों में आप देखेंगे कि किसी भी क्षण परिणामी दोलन के विस्थापन, $x(t)$ का मान, उस क्षण अध्यारोपित प्रत्येक दोलन के विस्थापन $x_1(t)$ तथा $x_2(t)$, के योग के बराबर है। आगे पढ़ने से पहले t के भिन्न मानों के लिए आप चित्र 17.2क, 17.2ख और 17.2ग का ध्यानपूर्वक अवलोकन कर इस तथ्य की सत्यता के बारे में स्वयं को संतुष्ट करें।

चित्र 17.2 घ में तीनों विस्थापन-समय आलेखों $x_1(t)$, $x_2(t)$ और $x(t)$ को एक ही आलेख में दिखाया गया है। आगे, चित्र 17.2 च में $x_1(t)$, $x_2(t)$ और $x(t)$ को उस स्थिति के लिए आलेखित किया गया है जब $a_1 = a_2$ है। ध्यान दें कि इस स्थिति में परिणामी विस्थापन x-अक्ष (समय-अक्ष) के अनुदिश है जिसका अर्थ यह है कि दोलक के परिणामी विस्थापन का मान सदैव शून्य रहता है।

उपरोक्त चर्चा में हमने यह माना था कि दो अध्यारोपी संरेख दोलनों के बीच कलांतर का मान π है, जिसका अर्थ है कि ये दोनों दोलन विपरीत कला में है। आइए, अब समकला परंतु असमान आयामों वाले दोलनों के अध्यारोपण पर विचार करें। (आपको याद होगा कि समकला स्थिति को प्रांरभिक कला अंतर, $\phi = 2n\pi;\ n = 0, 1, 2, ...$ लेकर सुनिश्चित किया जाता है।) नीचे दिए गए उदाहरण में इस स्थिति की चर्चा की गई है।

उदाहरण *17.1* : समान-कला वाले दो संरेख दोलनों का अध्यारोपण

आयामों a_1 एवं a_2 और आवृत्ति ω_0 वाले दो संरेख आवर्ती दोलन समान कला में हैं। सिद्ध करें कि इनके अध्यारोपण के फलस्वरूप आयाम $|a_1 + a_2|$ वाला आवर्ती दोलन प्राप्त होता है।

हल ■ समान कला वाले दो संरेख आवर्ती दोलनों, जिनके आयाम भिन्न हैं और आवृत्ति समान है, को हम निम्नवत् निरूपित कर सकते हैं :

$$x_1(t) = a_1 \cos \omega_0 t$$

और $$x_2(t) = a_2 \cos \omega_0 t$$

अध्यारोपण सिद्धांत के अनुसार, परिणामी दोलन के विस्थापन का व्यंजक होगा:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = (a_1 + a_2) \cos \omega_0 t$$

उपरोक्त व्यंजक से स्पष्ट है कि परिणामी विस्थापन $x(t)$, समय के साथ ज्यावक्रीय रूप से परिवर्तित होता है जो आवर्ती दोलनों का अभिलक्षण है। अतः, समान कला वाले दो आवर्ती दोलनों के अध्यारोपण के फलस्वरूप एक आवर्ती दोलन उत्पन्न होता है। इसके अतिरिक्त हम यह भी जानते हैं कि कोज्या (cosine) फलन का मान +1 से –1 के बीच परिवर्तित होता है। अतः, परिणामी दोलन का आयाम $|a_1 + a_2|$ होगा।

आइए, अब हम ऐसे दो संरेख आवर्ती दोलनों के अध्यारोपण पर विचार करें जिनकी **आवृत्ति समान है, परन्तु उनके आयाम और प्रारंभिक कलाएं भिन्न हैं। ध्यान दें कि यह समान आवृत्ति के दो संरेख आवर्ती दोलनों के अध्यारोपण का सर्वाधिक सामान्य प्रकरण है क्योंकि हमने उनके आयामों तथा प्रारंभिक कलाओं के मानों पर कोई प्रतिबंध नहीं रखा है।** मान लें कि पहले दोलन का आयाम a_1 और प्रारंभिक कला ϕ_1 है तथा दूसरे दोलन का आयाम a_2 एवं प्रारंभिक कला ϕ_2 है। यह भी मान लें कि दोनों दोलनों की कोणीय आवृत्ति बराबर है और इसका मान ω_0 है। इस स्थिति में हम इन दोलनों के विस्थापनों $x_1(t)$ एवं $x_2(t)$ के व्यंजक निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$x_1(t) = a_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) \tag{17.10}$$

तथा

$$x_2(t) = a_2 \cos(\omega_0 t + \phi_2) \tag{17.11}$$

इन दोलनों पर अध्यारोपण सिद्धांत लागू करने पर हम परिणामी विस्थापन $x(t)$ को निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$= a_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) + a_2 \cos(\omega_0 t + \phi_2)$$

$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

दो कोणों के योग के कोज्या सूत्र (हाशिए में दी गई टिप्पणी पढ़ें) का उपयोग करके हम लिख सकते हैं :

$$x(t) = a_1 \cos\omega_0 t \cos\phi_1 - a_1 \sin\omega_0 t \sin\phi_1$$
$$+ a_2 \cos\omega_0 t \cos\phi_2 - a_2 \sin\omega_0 t \sin\phi_2$$

$\cos\omega_0 t$ तथा $\sin\omega_0 t$ के गुणांकों को एक साथ लाकर हम लिख सकते हैं :

$$x(t) = (a_1 \cos\phi_1 + a_2 \cos\phi_2)\cos\omega_0 t$$
$$- (a_1 \sin\phi_1 + a_2 \sin\phi_2)\sin\omega_0 t \tag{17.12}$$

चूँकि a_1, a_2, ϕ_1 तथा ϕ_2 नियतांक हैं, उनसे युक्त पदों को हम नए नियतांकों a एवं δ के पदों में इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$a_1 \cos\phi_1 + a_2 \cos\phi_2 = a\cos\delta \tag{17.13}$$

तथा

$$a_1 \sin\phi_1 + a_2 \sin\phi_2 = a\sin\delta \tag{17.14}$$

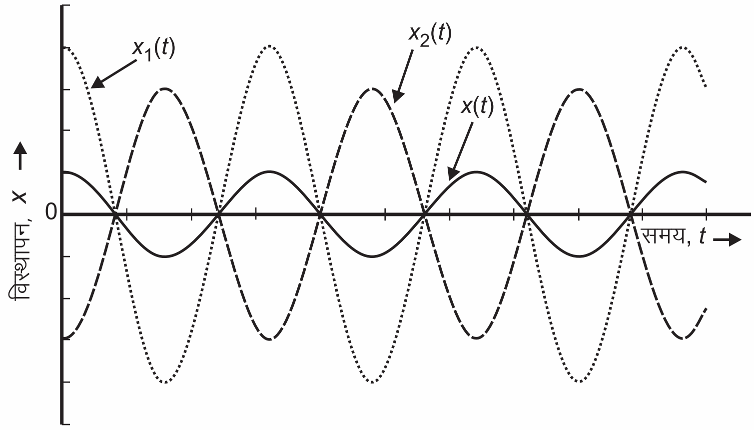
समीकरणों (17.13) एवं (17.14) के मान समीकरण (17.12) में प्रतिस्थापित करने पर हमें परिणामी दोलन का अभीष्ट व्यंजक प्राप्त होता है :

$$x(t) = a\cos\delta\cos\omega_0 t - a\sin\delta\sin\omega_0 t$$
$$= a\cos(\omega_0 t + \delta) \tag{17.15}$$

नियतांकों a तथा δ को अध्यारोपित दोलनों के आयाम तथा आरंभिक कला के पदों में व्यक्त किया जा सकता है। यह आप थोड़ी ही देर में सीखेंगे।

ध्यान दें कि समीकरण (17.15) का स्वरूप वही है जो समीकरण (17.10) या समीकरण (17.11) का है। परिणामी दोलन (समीकरण (17.15)) की आवृत्ति अध्यारोपित दोलनों की आवृत्ति के बराबर है। परन्तु इसके आयाम और प्रारंभिक कला उनसे भिन्न हैं। **अतः, हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि परिणामी दोलन भी एक सरल आवर्ती दोलन है परंतु इसके आयाम और प्रारंभिक कला, अध्यारोपित दोलनों से भिन्न हैं।**

अध्यारोपित दोलनों $x_1(t)$ तथा $x_2(t)$ और उनके अध्यारोपण के फलस्वरूप प्राप्त परिणामी दोलन $x(t)$ के विस्थापन-समय आलेख चित्र 17.3 में दिखाए गए हैं।



चित्र 17.3: समान आवृत्ति परन्तु भिन्न आयामों तथा प्रारंभिक कलाओं वाले दो संरेख दोलनों के अध्यारोपण का ग्राफीय निरुपण। सरलता के लिए हमने दोलनों के बीच कलांतर का मान π लिया है।

आइये, अब परिणामी दोलन के आयाम एवं कला को अध्यारोपित दोलनों के आयामों a_1, a_2 तथा प्रारंभिक कलाओं ϕ_1 एवं ϕ_2 के पदों में व्यक्त करें। इसके लिए हम समीकरण (17.13) एवं (17.14) का वर्ग लेकर उनको जोड़ते हैं। ऐसा करने पर जो व्यंजक प्राप्त होता है उसे सरल करने पर हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है :

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)} \qquad (17.16)$$

इसी प्रकार, समीकरण (17.14) को समीकरण (17.13) से विभाजित करने पर परिणामी दोलन की कला δ का व्यंजक प्राप्त होता है:

$$\delta = \tan^{-1}\left[\frac{a_1 \sin\phi_1 + a_2 \sin\phi_2}{a_1 \cos\phi_1 + a_2 \cos\phi_2}\right] \qquad (17.17)$$

उस विशिष्ट स्थिति में जब $a_1 = a_2$ अर्थात् अध्यारोपित दोलनों के आयाम बराबर हों, तो समीकरण (17.16) का स्वरूप निम्नवत् हो जाता है (व्युत्पत्ति के लिए हाशिये में दी गई टिप्पणी पढ़ें) :

$$a = 2a_1 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \qquad (17.18)$$

जहां $\phi = \phi_1 - \phi_2$ है। यहां ϕ अध्यारोपित दोलनों की प्रारंभिक कलाओं के बीच अंतर है। इस भाग के महत्त्वपूर्ण परिणामों को हम इस प्रकार लिख सकते हैं :

यदि हम $a_1 = a_2$ और $\phi = \phi_1 - \phi_2$ लें तो समीकरण (17.16) को निम्नवत् लिख सकते हैं :

$a^2 = 2a_1^2 + 2a_1^2 \cos\phi$

$\quad = 2a_1^2 (1 + \cos\phi)$

जहां $\phi = \phi_1 - \phi_2$ अध्यारोपित दोलनों के बीच कलांतर निरूपित करता है। संबंध $\cos 2\phi = 2\cos^2\phi - 1$ का उपयोग करने पर a^2 का उपरोक्त व्यंजक निम्नवत् परिवर्तित हो जाता है:

$a^2 = 2a_1^2 \times 2\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$

$\quad = 4a_1^2 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$

अतः $a = 2a_1 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$

दोहराएं

- यदि दो अध्यारोपित आवर्ती दोलनों की आवृत्तियां बराबर हों, तो परिणामी गति सरल आवर्त गति होती है।
- जब दो समान आवृत्ति, ω_0 परंतु भिन्न आयामों a_1 एवं a_2 तथा प्रारंभिक कलाओं ϕ_1 एवं ϕ_2 वाले संरेख आवर्ती दोलनों को अध्यारोपित किया जाता है तो परिणामी गति भी उसी सरल रेखा के अनुदिश सरल आवर्त गति होती है। परिणामी दोलन के आयाम a तथा कला δ के व्यंजक निम्नलिखित हैं :

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

तथा $$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{a_1 \sin\phi_1 + a_2 \sin\phi_2}{a_1 \cos\phi_1 + a_2 \cos\phi_2}\right)$$

हम आशा करते हैं कि आप अब एक ऐसे पिंड के विस्थापन के लिए व्यंजक व्युत्पन्न कर सकते हैं जिस पर दो समान आवृत्ति और विभिन्न आयामों तथा प्रारंभिक कलाओं वाले दो संरेख आवर्ती दोलन एक साथ आरोपित होते हैं। आपने ध्यान दिया होगा कि परिणामी गति की प्रकृति, अध्यारोपित दोलनों के आयामों तथा प्रारंभिक कलाओं के बीच के संबंधों द्वारा निर्धारित होती है।

नीचे दिए गए उदाहरण में आप देखेंगे कि अध्यारोपित दोलनों के बीच का कलांतर, परिणामी दोलन के आयाम को किस प्रकार प्रभावित करता है।

उदाहरण *17.2* : समान आवृत्ति, यादृच्छिक आयामों एवं कलाओं वाले दो आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण

दो संरेख आवर्ती दोलनों की आवृत्ति ω_0 है तथा उनके आयाम a_1 एवं a_2 और प्रारंभिक कलाएं ϕ_1 एवं ϕ_2 हैं। सिद्ध करें कि यदि इन दोलनों में कलांतर $(\phi_1 - \phi_2)$ का मान $2n\pi$ हो (जहां n एक पूर्णांक है) और इन्हें अध्यारोपित किया जाए तो परिणामी गति का आयाम $(a_1 + a_2)$ होगा। यदि $(\phi_1 - \phi_2) = (2n+1)\pi$ हो तो परिणामी आयाम का मान क्या होगा?

हल ■ समीकरण (17.16) से हम जानते हैं कि आयामों a_1 एवं a_2 तथा प्रारंभिक कलाओं ϕ_1 एवं ϕ_2 वाले दो आवर्ती दोलनों के अध्यारोपण के कारण उत्पन्न परिणामी गति के आयाम का व्यंजक निम्नवत् होता है :

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \qquad \text{(i)}$$

आप जानते हैं कि यदि $(\phi_1 - \phi_2) = 2n\pi,$, तो $\cos(\phi_1 - \phi_2) = 1$। कलांतर के इस मान के लिए हम समीकरण (i) को निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 = (a_1 + a_2)^2$$

अतः $$a = \pm(a_1 + a_2) = (a_1 + a_2) \qquad \text{(ii)}$$

आप देख सकते हैं कि a के ऋणात्मक मान को छोड़ दिया गया है, क्योंकि यह भौतिक रूप से अमान्य स्थिति का द्योतक है।

यदि कलांतर $(\phi_1 - \phi_2) = (2n+1)\pi$ हो तो $\cos(\phi_1 - \phi_2) = -1$। अतः, हम कलांतर के इस मान के लिए समीकरण (i) को निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 = (a_1 - a_2)^2$$

अतः, $$a = |a_1 - a_2| \qquad \text{(iii)}$$

समीकरणों (ii) तथा (iii) के आधार पर हम इस निष्कर्ष पर पहुंचते हैं कि परिणामी गति का आयाम, अध्यारोपित दोलनो के बीच के कलातरं पर निर्भर करता है।

ऊपर दी गई धारणाओं की अपनी समझ की जांच करने के लिए आपको एक बोध प्रश्न हल करना चाहिए।

बोध प्रश्न 1 – आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण

मान लें कि किसी पिंड पर दो आवर्ती दोलन, जिनमें से प्रत्येक की आवृत्ति ω_0 है तथा आयाम 5 cm एवं 3 cm हैं, एक ही दिशा में आरोपित होते हैं। यदि इन दोलनों के बीच प्रारंभिक कलांतर का मान $(\pi/2)$ हो तो परिणामी दोलन का आयाम और उसकी कला परिकलित करें।

वास्तविक भौतिक स्थितियों में हमें भिन्न-भिन्न आवृत्तियों वाले दो या उससे अधिक आवर्ती दोलनों के अध्यारोपण का विश्लेषण करना पड़ता है। उदाहरण के लिए, किसी सभा में मानव कर्ण पटल पर एकसाथ भिन्न आवृत्तियों वाले अनेक दोलन आरोपित होते हैं तथा उसे जटिल तरीके से दोलित करते हैं। **अतः, आप जानना चाहेंगे** : क्या उपरोक्त निष्कर्ष उस स्थिति के लिए भी वैध होंगे जब दो अध्यारोपित संरेख दोलनों की आवृत्तियां बराबर नहीं हैं? आइए, इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त करें।

17.3.2 असमान आवृत्तियों वाले संरेख दोलन

मान लें कि दो संरेख आवर्ती दोलनों, जिनके आयाम a_1 तथा a_2 हैं और आवृत्तियां ω_1 तथा $\omega_2 (< \omega_1)$ हैं, को अध्यारोपित किया जाता है। मान लें कि इनके व्यंजक निम्नवत् हैं :

$$x_1(t) = a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \qquad (17.19\text{क})$$

तथा
$$x_2(t) = a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \qquad (17.19\text{ख})$$

इन दोलनों के बीच कलांतर का मान होगा :

$$\phi = (\omega_1 - \omega_2)t + (\phi_1 - \phi_2) \qquad (17.19\text{ग})$$

ध्यान दें कि समीकरण (17.19ग) का पहला पद $(\omega_1 - \omega_2)t$ तो समय के साथ परिवर्तित होता है परंतु द्वितीय पद $(\phi_1 - \phi_2)$ अचर बना रहता है। चूंकि प्रस्तुत प्रकरण में हम यह जानना चाहते हैं कि परिणामी दोलन का स्वरूप समय के साथ किस प्रकार परिवर्तित होता है, अतः, प्रारंभिक कलांतर, $(\phi_1 - \phi_2)$ की यहां कोई विशेष भूमिका नहीं होगी। अतः, हम यह मान सकते हैं कि इन दो दोलनों की प्रारंभिक कलाएं शून्य हैं : $\phi_1 = 0 = \phi_2$

अतः, समीकरण (17.19क) तथा (17.19ख) निम्नवत् लिखे जा सकते हैं :

$$x_1(t) = a_1 \cos \omega_1 t \qquad (17.20\text{क})$$

तथा
$$x_2(t) = a_2 \cos \omega_2 t \qquad (17.20\text{ख})$$

यदि इन दो संरेख दोलनों को अध्यारोपित किया जाए तो हम परिणामी दोलन के विस्थापन $x(t)$ का व्यंजक, अध्यारोपण सिद्धांत के आधार पर, निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ &= a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t \end{aligned} \qquad (17.21)$$

समीकरण (17.21) को भौतिक दृष्टि से अधिक सार्थक रूप से व्यक्त करने के लिए हम दो नए पद परिभाषित करते हैं, जो हैं **औसत कोणीय आवृत्ति,**

$$\omega_a = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \qquad (17.22)$$

तथा **मॉडुलित कोणीय आवृत्ति**

$$\omega_m = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \qquad (17.23)$$

यदि हम समीकरणों (17.22) और (17.23) की सहायता से ω_1 तथा ω_2 को ω_a तथा ω_m के पदों में व्यक्त करें तो समीकरण (17.21) को अपेक्षाकृत सरल रूप में लिखा जा सकता है :

$$\omega_1 = \omega_a + \omega_m \tag{17.24}$$

तथा
$$\omega_2 = \omega_a - \omega_m \tag{17.25}$$

समीकरणों (17.24) तथा (17.25) को समीकरण (17.21) में रखने पर हमें मिलता है :

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 \cos(\omega_a + \omega_m)t + a_2 \cos(\omega_a - \omega_m)t \\ &= a_1[\cos\omega_a t \cos\omega_m t - \sin\omega_a t \sin\omega_m t] \\ &+ a_2[\cos\omega_a t \cos\omega_m t + \sin\omega_a t \sin\omega_m t] \end{aligned}$$

$\cos\omega_a t \cos\omega_m t$ तथा $\sin\omega_a t \sin\omega_m t$ के पदों को एक साथ रखने पर हमें निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होता है :

$$x(t) = (a_1 + a_2)\cos\omega_a t \cos\omega_m t - (a_1 - a_2)\sin\omega_a t \sin\omega_m t \tag{17.26}$$

अब हम निम्नलिखित प्रतिस्थापनाएं करते हैं :

$$(a_1 + a_2)\cos\omega_m t = a_m \cos\theta_m \tag{17.27क}$$

तथा
$$(a_1 - a_2)\sin\omega_m t = a_m \sin\theta_m \tag{17.27ख}$$

जहां a_m तथा θ_m नियतांक हैं जिन्हें हमें निर्धारित करना है।

समीकरणों (17.27क) तथा (17.27ख) को समीकरण (17.26) में रखने पर हम पाते हैं :

$$\begin{aligned} x(t) &= a_m \cos\omega_a t \cos\theta_m - a_m \sin\omega_a t \sin\theta_m \\ &= a_m \cos(\omega_a t + \theta_m) \end{aligned} \tag{17.28}$$

माडुलित आयाम a_m तथा कला नियतांक θ_m के पदों में समीकरण (17.28) परिणामी दोलन का व्यंजक है। a_m के लिए a_1, a_2, ω_1 तथा ω_2 के पदों में व्यंजक प्राप्त करने के लिए हम समीकरणों (17.27क) तथा (17.27ख) का उपयोग करते हैं :

$$\begin{aligned} a_m^2(\cos^2\theta_m + \sin^2\theta_m) &= (a_1 + a_2)^2 \cos^2\omega_m t + (a_1 - a_2)^2 \sin^2\omega_m t \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2)\cos^2\omega_m t + (a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2)\sin^2\omega_m t \\ &= (a_1^2 + a_2^2) + 2a_1 a_2(\cos^2\omega_m t - \sin^2\omega_m t) \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos 2\omega_m t \end{aligned}$$

अतः,

$$a_m = [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos 2\omega_m t]^{1/2} \tag{17.29}$$

इसी प्रकार, समीकरणों (17.27क) तथा (17.27ख) का उपयोग कर हम लिख सकते हैं :

$$\tan\theta_m = \frac{(a_1 - a_2)\sin\omega_m t}{(a_1 + a_2)\cos\omega_m t}$$

अथवा
$$\theta_m = \tan^{-1}\left[\frac{(a_1 - a_2)\sin\omega_m t}{(a_1 + a_2)\cos\omega_m t}\right] \tag{17.30}$$

आइये, अब उपरोक्त परिणामों के आधार पर निकाले जा सकने वाले कुछ निष्कर्षों की चर्चा करें :

- यदि अध्यारोपित दोलनों के आयाम बराबर हैं, अर्थात्, $a_1 = a_2$ है तो समीकरण (17.30) से हमें $\theta_m = 0$ प्राप्त होता है, क्योंकि समीकरण के अंश का मान शून्य हो

जाता है। आगे, $a_1 = a_2$ के लिए संबंध $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ का उपयोग करके आप सत्यापित कर सकते हैं कि समीकरण (17.29) निम्नवत् परिवर्तित हो जाता है :

$$a_m(t) = [a^2 + a^2 + 2a^2(2\cos^2\omega_m t - 1)]^{1/2}$$
$$= 2a\cos\omega_m t \qquad (17.31)$$

समीकरण (17.28) में $\theta_m = 0$ प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$x(t) = a_m \cos\omega_a t \qquad (17.32)$$

जहां $a_m = 2a\cos\omega_m t$

अतः, अपेक्षाकृत सरल स्थितियों के लिए, जब अध्यारोपित दोलनों के **आयाम बराबर हों** परंतु उनकी आवृत्तियां भिन्न हों तो परिणामी दोलन के विस्थापन का व्यंजक समीकरण (17.32) द्वारा व्यक्त होता है और माडुलित आयाम समीकरण (17.31) द्वारा व्यक्त होता है।

- आप गौर करें कि समीकरण (17.28) द्वारा निरूपित परिणामी दोलन का व्यंजक सरल आवर्त गति करते किसी पिंड के विस्थापन के समान दिखता है। परंतु यह समानता भ्रमित करने वाली है। समीकरण (17.28) द्वारा निरूपित परिणामी दोलन सरल आवर्त गति को निरूपित नहीं करता क्योंकि इसका आयाम (समीकीण (17.29)) समय के साथ परिवर्तित होता है। परंतु, परिणामी दोलन आवर्तकाल T के कुछ मानों के लिए आवर्ती होगा, अर्थात् $x(t) = x(t+T)$ होगा। ऐसा आवर्तकाल T के उन मानों के लिए होगा जो निम्नलिखित शर्तें पूरी करते हैं :

$$\omega_1 T = 2\pi n_1$$

तथा $$\omega_2 T = 2\pi n_2$$

जहां n_1 तथा n_2 पूर्णांक हैं। अतः, इसका अर्थ यह है कि परिणामी दोलन आवर्ती होगा, यदि इसके आवर्तकाल

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} n_1 = n_1 T_1$$

तथा $$T = \frac{2\pi}{\omega_2} n_2 = n_2 T_2$$

अतः, परिणामी दोलन के आवर्ती होने की शर्त को हम निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$n_1 T_1 = n_2 T_2$$

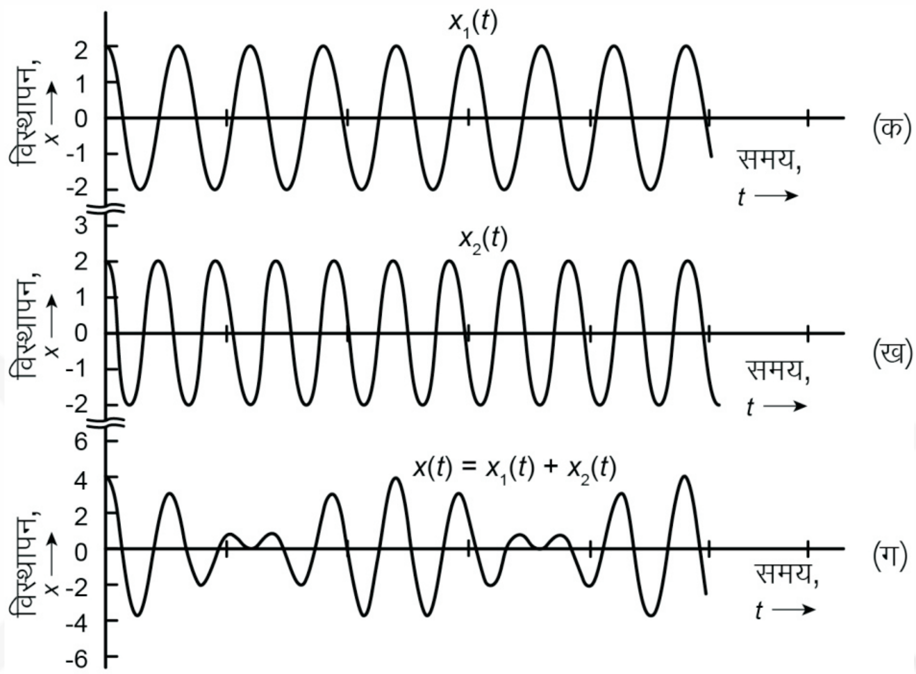
अथवा $$n_1\omega_2 = n_2\omega_1 \qquad (17.33)$$

- जब अध्यारोपित दोलनों की आवृत्तियां लगभग बराबर होती हैं, अर्थात् $\omega_1 \approx \omega_2$ तो समीकरणों (17.22) और (17.23) से हम पाते हैं कि $\omega_m << \omega_a$। इसका अर्थ यह है कि परिणामी गति के आयाम का माडुलन (परिवर्तन), दोलन की औसत आवृत्ति, ω_a से काफी धीमी दर से होता है। अतः, परिणामी आयाम को परिणामी दोलन के आवर्तकाल $(2\pi/\omega_a)$ अंतराल में लगभग नियत माना जा सकता है। इन परिस्थितियों में, परिणामी दोलन को आवर्ती दोलन, जिसकी आवृत्ति ω_a है, माना जा सकता है।

आगे, जब दो आवर्ती दोलनों, जिनकी आवृत्तियां लगभग बराबर ($\omega_1 \approx \omega_2$) हैं, को अध्यारोपित किया जाता है तो हमें परिणामी दोलन के आयाम में आवर्ती परिवर्तन

दिखता है। आयाम में इस आवर्ती परिवर्तन को **विस्पंद** कहते हैं। ध्वनि के लिए विस्पंद परिघटना सरलता से सुनी जा सकती है। जब ध्वनि के दो स्रोत, जैसेकि स्वरित्र द्विभुज, जिनकी आवृत्तियां लगभग बराबर हों, एक ही समय में कंपन करते हैं तो हमें परिणामी ध्वनि की तीव्रता में आवर्ती उतार-चढ़ाव सुनने में आता है। ध्वनि की तीव्रता में इस उतार-चढ़ाव को, जो आयाम के परिवर्तन के कारण होता है, विस्पंद कहते हैं।

विस्पंद के ग्राफीय निरुपण के लिए, आइये, हम दो ऐसे अध्यारोपित दोलनों पर विचार करें जिनके आयाम बराबर हैं और जिनकी आवृत्तियां लगभग बराबर हैं। दो इस प्रकार के दोलन चित्र 17.4क और 17.4ख में दिखाए गए हैं। जब इन दोलनों को अध्यारोपित किया जाता है तो प्राप्त परिणामी दोलन चित्र 17.4ग में दिखाया गया है। चित्र 17.4ग में आप गौर करें कि आयाम, समय के साथ, आवर्ती रूप से परिवर्तित होता है। आयाम में होने वाले इस आवर्ती परिवर्तन के कारण ही विस्पंद उत्पन्न होता है।



चित्र 17.4: दो बराबर आयामों और लगभग बराबर आवृत्तियों वाले दो दोलनों के अध्यारोपण के फलस्वरूप उत्पन्न विस्पंद; क) और ख) घटक दोलनों को निरुपित करता है; ग) समय के साथ परिवर्तित आयाम वाले परिणामी दोलन को निरुपित करता है।

अब आप जानना चाहेंगे कि विस्पंदों की आवर्तिता अथवा विस्पंद आवृत्ति, अध्यारोपित दोलनों की आवृत्तियों से किस प्रकार संबंधित है? इस प्रश्न का उत्तर जानने के लिए हमें दो क्रमागत आयाम उच्चिष्ठों अथवा आयाम निम्निष्ठों के बीच के समयांतराल का मान निर्धारित करना होगा (चित्र 17.4)।

माडुलित आयाम के व्यंजक (समीकरण (17.29)) से हम पाते हैं कि इसका मान अधिकतम $(= a_1 + a_2)$ होगा यदि

$$\cos 2\omega_m t = 1$$

इसका अर्थ है कि ω_m को निम्नलिखित शर्त पूरी करनी चाहिए :

$$2\omega_m t = 2n\pi; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

समीकरण (17.23) का उपयोग करके उपरोक्त शर्त को हम निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$(\omega_1 - \omega_2)t = 2n\pi; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

चूंकि कोणीय आवृत्ति, $\omega = 2\pi f$, जहां f दोलन की आवृत्ति है, उपरोक्त शर्त को f के पदों में हम इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$(f_1 - f_2)t = n; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

अतः, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि परिणामी आयाम का मान, समय t के नीचे दिए गए मानों पर अधिकतम होगा :

$$t = 0,\ \frac{1}{(f_1 - f_2)},\ \frac{2}{(f_1 - f_2)},\ \ldots,\ \frac{n}{(f_1 - f_2)} \tag{17.34}$$

जहाँ $f_1 = (\omega_1 / 2\pi)$ तथा $f_2 = (\omega_2 / 2\pi)$ अध्यारोपित आवर्ती दोलनों की आवृत्तियां हैं।

इसी प्रकार, आप सिद्ध कर सकते हैं कि परिणामी दोलन के आयाम का मान न्यूनतम $(= |a_1 - a_2|)$ तब होता है जब :

$$\cos 2\omega_m t = -1$$

उपरोक्त स्थिति के लिए आवश्यक है कि ω_m निम्नलिखित शर्त पूरा करे :

$$2\omega_m t = (2n+1)\pi; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

अतः, परिणामी आयाम का मान, समय t के निम्नलिखित मानों पर न्यूनतम होगा :

$$t = \frac{1}{2(f_1 - f_2)},\ \frac{3}{2(f_1 - f_2)},\ \frac{5}{2(f_1 - f_2)},\ \ldots,\ \frac{(2n+1)}{2(f_1 - f_2)} \tag{17.35}$$

समीकरणों (17.34) और (17.35) से स्पष्ट है कि परिणामी दोलन के आयाम के दो क्रमागत उच्चिष्ठों अथवा निम्निष्ठों के बीच के समयांतराल का मान बराबर होता है। किसी आयाम उच्चिष्ठ और उसके बाद वाले आयाम निम्निष्ठ के बीच के समयांतराल को एक विस्पंद कहते हैं। परंतु, **विस्पंद आवर्तकाल** को दो क्रमागत विस्पंदों के बीच के समयांतराल के रूप में परिभाषित करते हैं:

$$t_b = \frac{1}{(f_1 - f_2)}$$

अतः, **विस्पंद आवृत्ति** का व्यंजक होगा :

$$f_b = |f_1 - f_2| \tag{17.36}$$

समीकरण (17.36) से स्पष्ट है कि विस्पंद आवृत्ति, अध्यारोपित दोलनों की आवृत्तियों के अंतर के बराबर होती है।

अब, आगे बढ़ने से पूर्व, आप एक बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 2 – भिन्न आवृत्तियों वाले संरेख दोलनों का अध्यारोपण

क) किसी कण पर निम्नलिखित दो संरेख आवर्ती दोलन एकसाथ आरोपित हैं :

$$x_1(t) = 0.05 \cos(5\pi t)\ \text{m};\ x_2(t) = 0.03 \cos(3\pi t)\ \text{m}$$

समय $t = 5\,\text{s}$ पर परिणामी गति के आयाम तथा कला परिकलित करें।

ख) 385 Hz तथा 389 Hz आवृत्ति मानों वाले दो स्वरित्र द्विभुजों को एक साथ ध्वनित किया जाता है। विस्पंद आवृत्ति परिकलित करें।

आगे बढ़ने से पहले आइए, हम इस भाग के मुख्य बिंदुओं को एक बार दोहरा लें।

दोहराएं

- जब असमान आवृत्तियों वाले दो संरेख दोलनों को अध्यारोपित किया जाता है तो परिणामी गति सरल आवर्त गति नहीं होती क्योंकि परिणामी आयाम माडुलित होता है (अर्थात्, समय के साथ परिवर्तित होता है)।
- परंतु, परिणामी गति आवर्ती होती है यदि अध्यारोपित दोलनों की कोणीय आवृत्तियाँ ω_1 तथा ω_2, निम्नलिखित शर्त पूरी करें :

$$n_1 \omega_2 = n_2 \omega_1$$

- जब $\omega_1 \approx \omega_2$, तब $\omega_m << \omega_a$। ऐसी स्थिति में, परिणामी गति लगभग सरल आवर्त होती है जिसकी आवृत्ति ω_a होती है।
- जब आवृत्तियों का मान लगभग बराबर होता है ($\omega_1 \approx \omega_2$) तो परिणामी गति के आयाम में होने वाले आवर्ती परिवर्तन के कारण विस्पंद उत्पन्न होता है। विस्पंद आवृत्ति का व्यंजक है :

$$f_b = |f_1 - f_2|$$

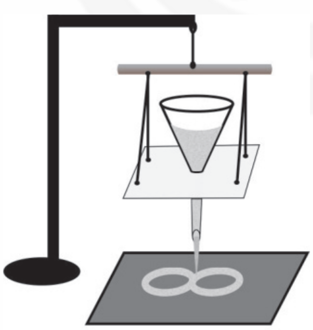
अभी तक हमने अपनी चर्चा को एकविम आवर्ती दोलनों तक सीमित रखा है। परन्तु द्वि-विम (2-D) दोलनी गति भी संभव है। ऐसी गति को प्रेक्षित करने के लिए आपको निम्नलिखित गतिविधि करनी चाहिए।

गतिविधि

द्वि-विम अध्यारोपण

एक संकरी नली वाली कीप लें और इसको रेत से भर लें। इसको चित्र 17.5 में दिखाई गई व्यवस्था के अनुसार गत्ते के एक आयताकार टुकड़े से लटका दें। यह ध्यान रखें कि कीप से रेत न गिरे। यह कीप अब दो परस्पर लंबवत् दिशाओं में स्वतंत्र रूप से दोलन कर सकता है।

कीप को *x*-दिशा में विस्थापित करें और फिर इसे *y*-दिशा में आवेग देकर मुक्त करें। साथ ही, कीप से रेत गिरने दें। जब कीप दोलन करता है तो आप देखेंगे कि रेत फर्श पर एक विशेश आकृति के अनुदिश गिरना शुरू हो जाता है। रेत जो आकृति बनाता है उसे ध्यान से देखें। क्या यह आकृति वक्राकार है?



चित्र 17.5: द्वि-विम अध्यारोपण : परिणामी पथ का अनुरेखन।

17.4 दो परस्पर लंबवत् आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण: लिसाजू आकृतियां

इस इकाई में अब तक की गई चर्चा से आप यह जानते हैं कि दोलनों के अध्यारोपण के फलस्वरूप उत्पन्न परिणामी गति की प्रकृति और उसका पथ, अध्यारोपित दोलनों के आवृत्ति, आयाम और प्रारंभिक कला जैसे भौतिक प्राचलों पर निर्भर करता है। दो संरेख दोलनों के अध्यारोपण की चर्चा हम भाग 17.3 में कर चुके हैं। अब हम अध्यारोपण सिद्धांत के आधार पर द्वि-विम अध्यारोपण की व्याख्या करेंगे। पहले हम उस स्थिति पर विचार करते हैं जब अध्यारोपित परस्पर लंबवत् दोलनों की आवृत्तियां समान हैं।

17.4.1 समान आवृत्ति वाले परस्पर लंबवत् दोलन

आइए, दो लम्बकोणीय (अर्थात् परस्पर लंबवत्) – एक x-अक्ष के अनुदिश और दूसरा y-अक्ष के अनुदिश – दोलनों पर विचार करें : मान लें कि इन दो दोलनों की कोणीय आवृत्तियां(ω_0) बराबर हैं तथा आयाम a_1 एवं a_2 भिन्न हैं, जहां $a_1 > a_2$। इन दोलनों को निम्नलिखित समीकरणों द्वारा निरूपित किया जा सकता है :

$$x(t) = a_1 \cos\omega_0 t \tag{17.37}$$

तथा

$$y(t) = a_2 \cos(\omega_0 t + \phi) \tag{17.38}$$

ध्यान दें कि यहां हमने x-अक्ष एवं y-अक्ष के अनुदिश दोलनों की प्रारंभिक कलाओं के मान क्रमशः शून्य एवं ϕ लिए हैं।

अब, हम उस स्थिति में किसी कण के दोलन की प्रकृति जानना चाहते हैं जब ये दोनों दोलन उस पर एकसाथ प्रभावी हों। साथ ही, हम यह भी जानना चाहते हैं कि ऐसी स्थिति में उस कण द्वारा अनुसरित पथ कैसा होगा? परिणामी दोलन की प्रकृति जानने के लिए हम यहां भी वही मापदण्ड अपनाएंगे जो संरेख दोलनों के अध्यारोपण के लिए मान्य है (अनुभाग 17.3.2)। इस मापदण्ड के अनुसार, यदि $n_1\,\omega_2 = n_2\,\omega_1$ जहां n_1 एवं n_2 पूर्णांक हैं तथा ω_1 एवं ω_2 अध्यारोपित दोलनों की कोणीय आवृत्तियां हैं, तो परिणामी गति आवर्ती होती है। परंतु, प्रस्तुत प्रकरण में दो अध्यारोपी दोलनों की आवृत्तियां बराबर हैं। इसका अर्थ है : $n_1 = 1 = n_2$। अतः हम कह सकते हैं कि परिणामी दोलन आवर्ती होगा।

आगे, कण की परिणामी गति का पथ निर्धारित करने के लिए हमें x-अक्ष और y-अक्ष के अनुदिश तात्क्षणिक विस्थापनों में संबंध ज्ञात करना होगा। इस संबंध को हम समीकरणों (17.37) एवं (17.38) में t युक्त पदों के विलोपन द्वारा प्राप्त कर सकते हैं। गणितीय सरलता के लिए, आइए, पहले प्रारंभिक कला अंतर के कुछ प्रतिरूपी मानों के लिए परिणामी दोलन के पथ के लिए व्यंजक व्युत्पन्न करें। हम क्रमशः सरल से कठिन स्थितियों की चर्चा करेंगे।

स्थिति 1 : $\phi = 0$ अथवा π

जब दोलनों के बीच प्रारंभिक कलांतर शून्य होता है अर्थात् जब $\phi = 0$ है तो हम हम समीकरणों (17.37) एवं (17.38) को निम्नवत् व्यक्त कर सकते हैं :

$$x(t) = a_1 \cos\omega_0 t \quad \text{तथा} \quad y(t) = a_2 \cos\omega_0 t$$

उपरोक्त समीकरणों में यदि हम $\cos\omega_0 t$ का मान y के व्यंजक में x / a_1 प्रतिस्थापित करें तो हम t को इस समीकरण से विलुप्त कर सकते हैं :

$$y(t) = a_2\left(\frac{x}{a_1}\right)$$

अथवा

$$y = \frac{a_2}{a_1}x \tag{17.39}$$

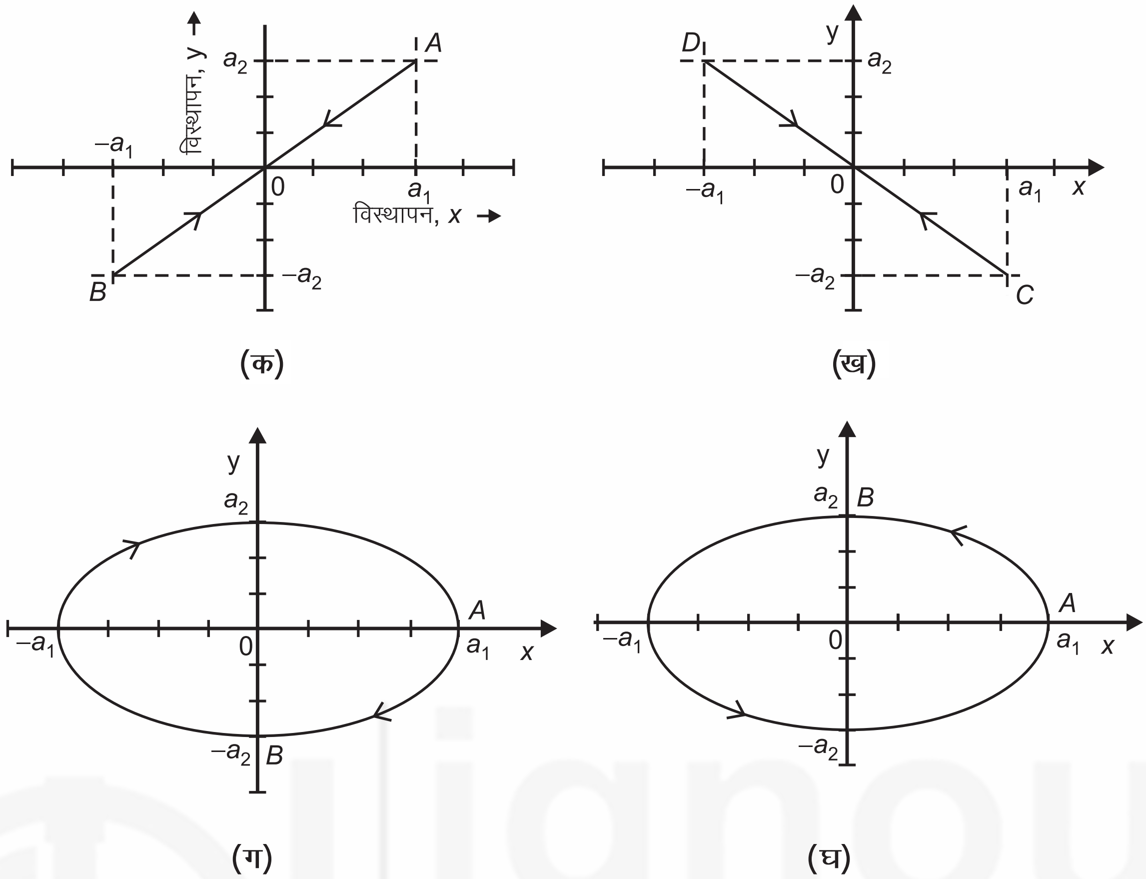
सरल रेखा का समीकरण निम्नवत होता है :

$y = mx + c$

जहां m रेखा की प्रवणता तथा c इसका y-अक्ष पर अन्तःखंड है। समीकरण (17.39) में $c = 0$ है।

क्या आपको यह समीकरण जाना–पहचाना लगता है? यह मूल बिन्दु से गुज़रने वाली तथा धन प्रवणता ($= a_2/a_1$) वाली **सरल रेखा** का समीकरण है। इसलिए हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि ''**दो समान आवृत्ति और समकला वाले परस्पर लंबवत् दोलनों के अध्यारोपण के कारण उत्पन्न परिणामी गति एक सरल रेखा**

के अनुदिश होती है (चित्र 17.6क)। चित्र 17.6 में लगे तीर के निशान पथ के अनुदिश कण की गति दिशा दर्शाते हैं।



चित्र 17.6 : किसी पिंड के परिणामी गति के पथों का अनुरेखण जब इस पिंड पर दो परस्पर लंबवत् आवर्ती दोलन, जिनकी आवृत्तियां बराबर हैं परंतु जिनके आयाम भिन्न हैं और जिनके प्रारंभिक कलांतरों के मान भी अलग-अलग हैं, एकसाथ आरोपित हैं : क) $\phi = 0$; **ख)** $\phi = \pi$; **ग)** $\phi = (\pi / 2)$; **और घ)** $\phi = (3\pi / 2)$ **।**

यह सुनिश्चित करने के लिए कि परिणामी गति दोलनी है या नहीं, आइये, हम $\phi = 0$ के लिए समीकरणों (17.37) एवं (17.38) का उपयोग करके गति की दिशा का निर्धारण करें। इन समीकरणों से हम पाते हैं कि $\omega_0 t = 0$ के लिए $x = a_1$ तथा $y = a_2$। यह स्थिति चित्र 17.6क में बिन्दु A द्वारा निरूपित होती है। $\omega_0 t = \pi/2$ के लिए $x = 0$ एवं $y = 0$ । यह स्थिति निर्देशांक अक्षों के मूल बिन्दु को निरूपित करती है। जब $\omega_0 t = \pi$ हो तो हम पाते हैं कि $x = -a_1$ और $y = -a_2$ जो चित्र 17.6क में बिन्दु B को निरूपित करता है। इसके आगे आप स्वयं यह गणना करके देख सकते हैं कि $\omega_0 t$ के π और 2π के बीच के मानों के लिए पिंड, पथ BA के अनुदिश गति करता है और $\omega_0 t = 2\pi$ के लिए यह बिन्दु A पर लौट आता है और पिंड का एक दोलन पूरा हो जाता है।

आगे, $\phi = \pi$ के लिए समीकरण (17.37) एवं (17.38) निम्नवत् परिवर्तित हो जाते हैं :

$$x(t) = a_1 \cos \omega_0 t$$

तथा $$y(t) = -a_2 \cos \omega_0 t$$

अब y के व्यंजक में फिर से $\cos \omega_0 t = (x / a_1)$ रखने पर हम पाते हैं :

$$y = -\frac{a_2}{a_1}x \tag{17.40}$$

समीकरण (17.40) दर्शाता है कि पिंड की परिणामी गति द्वारा अनुरेखित पथ एक सरल रेखा के अनुदिश है तथा इसकी प्रवणता ऋणात्मक है। यह गति चित्र 17.6ख में विकर्ण *CD* के अनुदिश है।

स्थिति 2 : $\phi = \pi/2$

इस स्थिति में, दोलनों के तात्क्षणिक विस्थापनों के व्यंजक (समीकरण (17.37) एवं समीकरण (17.38)) निम्नवत् हो जाते हैं :

$$x(t) = a_1 \cos\omega_0 t \tag{17.41}$$

तथा
$$y(t) = a_2 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = -a_2 \sin\omega_0 t \tag{17.42}$$

समीकरणों (17.42) एवं (17.42) को दोनों ओर वर्ग करके जोड़ने पर हम पाते हैं :

$$\frac{x^2(t)}{a_1^2} + \frac{y^2(t)}{a_2^2} = \cos^2\omega_0 t + \sin^2\omega_0 t$$

या
$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1 \tag{17.43}$$

समीकरण (17.43) एक **दीर्घवृत्त** को निरूपित करता है जिसमें a_1 एवं a_2 क्रमशः इस दीर्घवृत्त की अर्द्ध-दीर्घ अक्ष और अर्द्ध-लघु अक्ष हैं। अतः, हम इस निष्कर्ष पर पहुंचते हैं कि **जब समान आवृत्ति परंतु असमान आयामों एवं $\pi/2$ प्रारंभिक कलांतर वाले दो लंबकोणीय दोलनों को अध्यारोपित किया जाता है, तो परिणामी गति एक ऐसे दीर्घवृत्त के अनुदिश होती है जिसके मुख्य अक्ष *x* एवं *y*-अक्षों के अनुदिश होते हैं** (चित्र 17.6ग)।

दीर्घवृत्तीय पथ के अनुदिश परिणामी गति की दिशा ज्ञात करने के लिए समीकरणों (17.41) एवं (17.42) से हम देखते हैं कि समय $t = 0$ पर $x = a_1$ एवं $y = 0$। इसका तात्पर्य यह है कि आरंभ में पिंड चित्र 17.6ग में बिंदु *A* पर है। फिर जैसे-जैसे समय का मान $t = 0$ से बढ़ता है, *x* अपने धनात्मक अधिकतम मान से कम होने लगता है और *y* अधिकाधिक ऋणात्मक मान ग्रहण करने लगता है। **इसका अर्थ है कि दीर्घवृत्त, बिन्दु *A* से बिन्दु *B* की ओर अनुरेखित होता है (चित्र 17.6ग देखें)। अतः, हम कह सकते हैं कि दीर्घवृत्त दक्षिणावर्त दिशा में अनुरेखित होता है।**

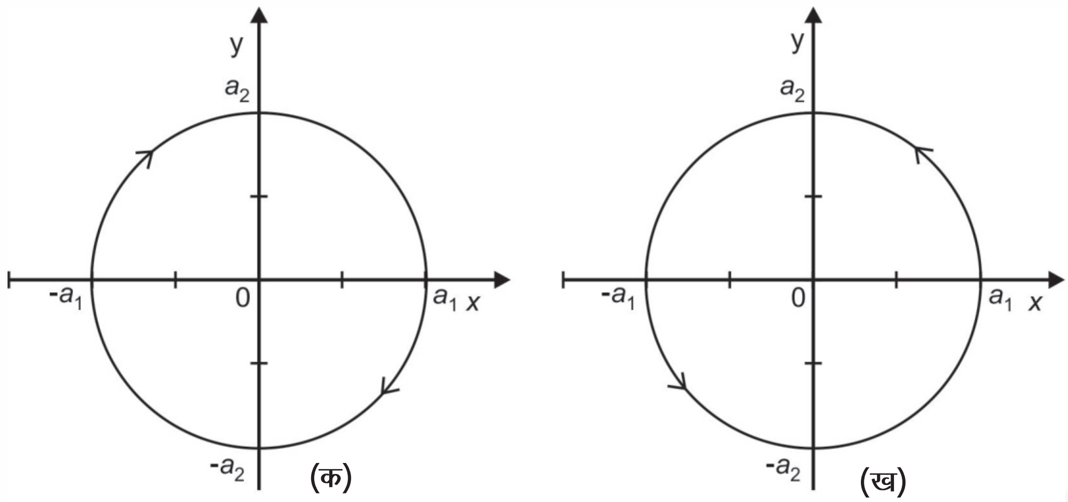
इसी प्रकार $\phi = 3\pi/2$ के लिए आप परिणामी गति द्वारा अनुरेखित पथ का समीकरण प्राप्त कर सकते हैं। आप स्वयं को संतुष्ट कर लें कि इस स्थिति में भी परिणामी गति का पथ दीर्घवृत्ताकार है। परन्तु गति वामावर्त दिशा में होगी (चित्र 17.6घ)।

इन पथों से बनी आकृतियों को **लिसाजू आकृतियां** कहा जाता है।

अभी तक हमने दो समान आवृत्ति परन्तु असमान आयामों और भिन्न-भिन्न प्रारंभिक कलांतरों वाले परस्पर लंबवत् दोलनों के अध्यारोपण का विश्लेषण किया है। संभवतः आप यह जानना चाहेंगे कि **यदि उनके आयाम भी बराबर हों तो क्या होगा?** जब आयाम a_1 एवं a_2 बराबर हों, अर्थात् $a_1 = a_2 = a$, हो तो समीकरण (17.43) का परिवर्तित रूप निम्नवत् हो जाता है :

$$x^2(t) + y^2(t) = a^2 \tag{17.44}$$

याद कीजिए कि आपने स्कूल में गणित में पढ़ा था कि समीकरण (17.44) एक ऐसे वृत्त को निरूपित करता है जिसकी त्रिज्या a है। **इसका अर्थ यह हुआ कि जब समान आवृत्ति, समान आयाम एवं प्रारंभिक कलांतर $\phi = \pi/2$ वाले दो परस्पर लंबवत् दोलन अध्यारोपित होते हैं तो परिणामी गति एक वृत्त के अनुदिश होती है (देखें चित्र 17.7क)** और यह पथ दक्षिणावर्त दिशा में अनुरेखित होता है। इसी प्रकार, यदि $\phi = 3\pi/2$ तथा $a_1 = a_2$ हो तो परिणामी गति का पथ वृत्ताकार तो होगा परंतु यह वामावर्त दिशा में अनुरेखित होगा जैसाकि चित्र 17.7ख में दिखाया गया है।



चित्र 17.7: समान आवृत्ति, समान आयाम और प्रारंभिक कलांतर क) $\phi = \pi/2$; ख) $\phi = 3\pi/2$ वाले दो परस्पर लंबवत् दोलनों के अध्यारोपण के फलस्वरूप किसी पिंड की परिणामी गति का पथ आलेख।

आगे बढ़ने से पहले आपको एक बोध प्रश्न का उत्तर देना चाहिए :

बोध प्रश्न 3 – समान आवृत्ति वाले दो लंबकोणीय दोलनों का अध्यारोपण

किसी कण पर नीचे दिए गए दो लम्बकोणीय दोलन एकसाथ कार्यरत हैं :

$$x(t) = 0.02 \cos(5\pi t) \text{ m} \quad \text{तथा} \quad y(t) = 0.02 \cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}$$

पिंड के परिणामी गति द्वारा अनुरेखित पथ निर्धारित करें।

अभी तक इस भाग में आपने प्रारंभिक कलांतर ϕ के कुछ विशेष रूप से सरल मानों के लिए किसी पिंड के परिणामी दोलनों की प्रकृति के बारे में जाना। आप पूछ सकते हैं: यदि ϕ का कोई यदिृच्छिक मान लिया जाए तो परिणामी गति किस प्रकार की होगी? इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त करने के लिए हम दो समान आवृत्ति परंतु असमान आयामों और यादृच्छिक कलांतरों वाले परस्पर लम्बकोणीय दोलनों के अध्यारोपण की व्यापक स्थिति का विश्लेषण करते हैं।

स्थिति 3 : व्यापक स्थिति

मान लें कि अध्यारोपित दोलनों के बीच प्रारंभिक कलांतर ϕ है। परिणामी दोलन द्वारा अनुरेखित पथ का व्यंजक प्राप्त करने के लिए हमें समीकरणों (17.37) एवं (17.38) से t को विलुप्त करना होगा। इसलिए, हम समीकरण (17.38) को निम्नवत् लिखते हैं :

$$\frac{y(t)}{a_2} = \cos(\omega_0 t + \phi) = \cos\omega_0 t \cos\phi - \sin\omega_0 t \sin\phi \qquad (17.45)$$

समीकरण (17.37) से हम लिख सकते हैं :

$$\cos\omega_0 t = \frac{x(t)}{a_1} \quad \Rightarrow \quad \sin\omega_0 t = \sqrt{1-\frac{x^2(t)}{a_1^2}}$$

x एवं y-दिशाओं के अनुदिश कण के विस्थापनों के बीच समय-मुक्त संबंध प्राप्त करने के लिए $\cos\omega_0 t$ एवं $\sin\omega_0 t$ के ये मान हम समीकरण (17.45) में प्रतिस्थापित करते हैं। ऐसा करने पर हमें निम्न व्यंजक प्राप्त होता है :

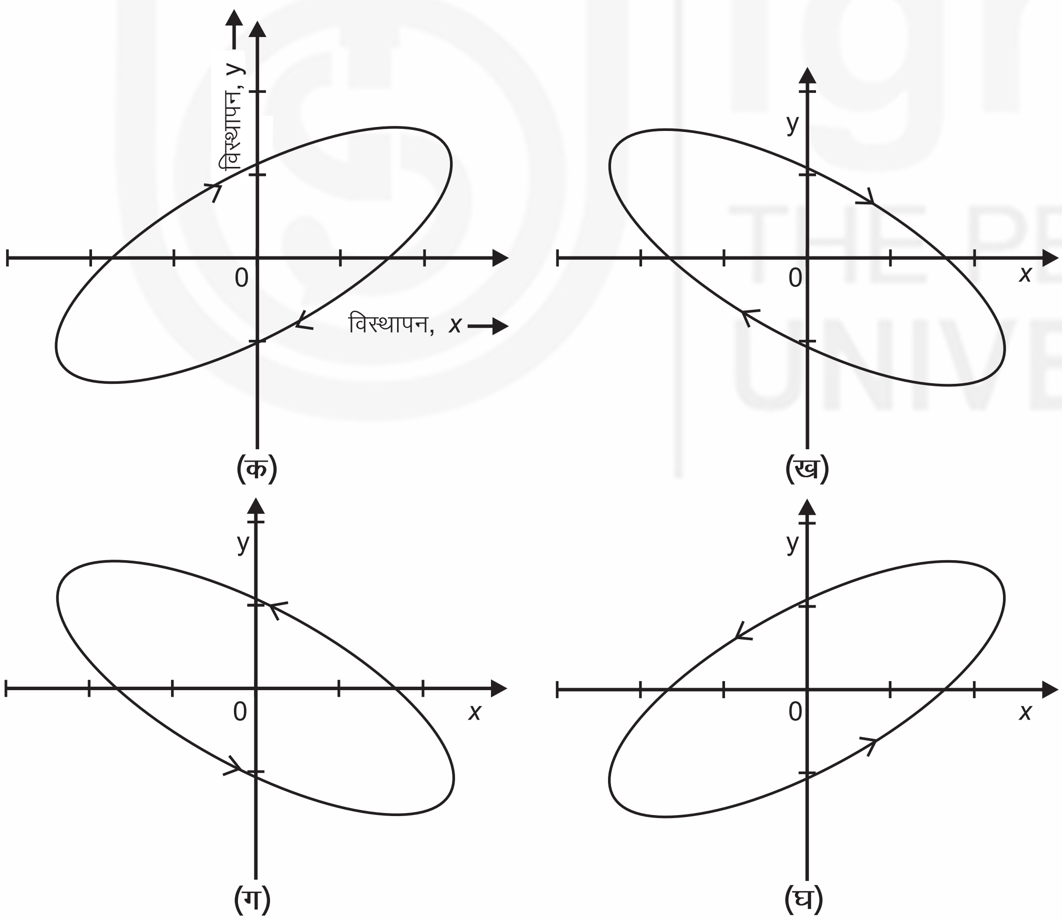
$$\frac{y(t)}{a_2} = \frac{x(t)\cos\phi}{a_1} - \sqrt{1-\frac{x^2(t)}{a_1^2}}\,\sin\phi$$

या
$$\frac{x(t)}{a_1}\cos\phi - \frac{y(t)}{a_2} = \sqrt{1-\frac{x^2(t)}{a_1^2}}\,\sin\phi$$

उपरोक्त समीकरण के दोनों पक्षों का वर्ग करके पदों को पुनर्व्यवस्थित करें तो परिणामी पथ के लिए हमें निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होता है :

$$\frac{x^2(t)}{a_1^2} + \frac{y^2(t)}{a_2^2} - 2\frac{x(t)\,y(t)}{a_1 a_2}\cos\phi = \sin^2\phi \tag{17.46}$$

समीकरण (17.46) एक दीर्घवृत्त का व्यापक समीकरण है जिसके अक्ष, निर्देशांक अक्षों से कोण बनाते हैं। **इसलिए, हम पाते हैं कि जब दो समान आवृत्ति परन्तु भिन्न**



चित्र 17.8: समान आवृत्ति परंतु भिन्न आयामों और प्रारंभिक कलांतर ϕ के भिन्न मानों वाले दो परस्पर लंबवत् आवर्ती दोलनों के अध्यारोपण के फलस्वरूप उत्पन्न परिणामी गति के पथ का आलेख : ϕ = क) $\pi/4$; ख) $3\pi/4$; ग) $5\pi/4$; घ) $7\pi/4$।

आयामों तथा प्रारंभिक कलाओं वाले परस्पर लंबवत् आवर्ती दोलन अध्यारोपित होते हैं तो परिणामी गति एक दीर्घवृत्ताकार पथ के अनुदिश होती है। ϕ के 0 एवं 2π के बीच के कुछ प्रारूपिक मानों के लिए परिणामी दोलन द्वारा अनुरेखित पथ चित्र 17.8 में दर्शाए गए हैं। आप ध्यान दें कि चित्र 17.6 और 17.7 में $\phi = 0$, $\pi/2$, π तथा $3\pi/2$ मानों के संगत परिणामी पथ दिखाए जा चुके हैं। आप यह भी ध्यान दें कि $\phi = 0$ तथा π के लिए परिणामी पथ सरल रेखा के अनुदिश होते हैं न कि दीर्घवृत्ताकार।

चित्र 17.8 में दर्शाए गए परिणामी गति के पथों को कैथोड-किरण-ऑसिलोस्कोप (CRO) की सहायता से आसानी से प्रेक्षित किया जा सकता है। भौतिकी प्रयोगशाला में कार्य करते हुए आपको CRO का उपयोग कर दो परस्पर लंबवत् दोलनों (जिन्हें प्रत्यावर्ती ज्यावक्रीय वोल्टता सिग्नलों द्वारा निरूपित किया जाता है) के अध्यारोपण के फलस्वरूप उत्पन्न परिणामी पथ आरेखित करने का अवसर मिलेगा। इसके लिए दो भिन्न प्रत्यावर्ती (AC) ज्यावक्रीय वोल्टताओं को ऑसिलोस्कोप के *XX* (क्षैतिज प्लेट) एवं *YY* (ऊर्ध्वाधर प्लेट) प्लेटों पर आरोपित किया जाता है। ऐसी स्थिति में एक इलेक्ट्रॉन किरण पुंज एक ही समय दो प्रत्यावर्ती वोल्टताओं (जो आवर्ती बल के समतुल्य हैं) के प्रभाव में गति करता है। अतः, इलेक्ट्रॉन किरण पुंज द्वारा अनुरेखित पथ दो लम्बकोणीय आवर्ती दोलनों के अध्यारोपण की परिणामी गति के पथ के अनुरूप है। जब आरोपित प्रत्यावर्ती वोल्टताएं समान आवृत्ति की होती हैं तो हमें सिग्नलों (वोल्टताओं) की कलाओं और आयामों के समंजन से चित्र 17.8 में दर्शाए गए विभिन्न प्रकार के वक्र प्राप्त होते हैं। आगे, ध्यान दें कि इलेक्ट्रॉन द्वारा अनुरेखित पथ, जो चित्र 17.8 में दिखाए गए आलेखों जैसे होते हैं, परस्पर लंबवत् अध्यारोपित सिग्नलों के बीच कलांतर के कुछ प्रारूपिक मानों (जो $\pi/4$ के पूर्णांक गुणज हैं) के लिए होते हैं। परंतु, भौतिकी प्रयोगशाला में CRO का उपयोग कर हम अनुरेखित दीर्घवृत्त के आकार का विश्लेषण कर अध्यारोपित सिग्नलों के बीच कलांतर के यादृच्छिक मान का निर्धारण भी कर सकते हैं। आपको यांत्रिकी के प्रयोगशाला पाठ्यक्रम में ऐसा करने का अवसर मिलेगा।

उपर्युक्त निष्कर्षों को स्पष्ट करने के लिए, आइये, एक उदाहरण को हल करें।

उदाहरण *17.3* : समान आवृत्ति के लम्बकोणीय दोलनों का अध्यारोपण

ऑसिलोस्कोप में *XX* एवं *YY* प्लेटों के बीच आरोपित, परस्पर लंबवत्, ज्यावक्रीय रूप से परिवर्तित होती दो वोल्टताओं के कारण इलेक्ट्रॉनों का विस्थापन नीचे दिए समीकरणों के अनुसार व्यक्त किया जाता है :

$$x(t) = 4\cos 2\pi f t \quad \text{तथा} \quad y(t) = 4\cos\left(2\pi f t + \frac{\pi}{6}\right)$$

ऑसिलोस्कोप के पर्दे पर प्रेक्षित इलेक्ट्रॉन किरण पुंज का परिणामी पथ निर्धारित करें।

हल ■ x और y के दिए गए व्यंजकों से हम पाते हैं :

$$a_1 = 4 \text{ इकाई}; \quad a_2 = 4 \text{ इकाई तथा } \phi = \pi/6$$

इन दो लम्बकोणीय वोल्टताओं के अध्यारोपण के कारण ऑसिलोस्कोप के पर्दे पर इलेक्ट्रॉन किरण पुंज का पथ निर्धारित करने के लिए हम समीकरण (17.46) का उपयोग करते हैं। समीकरण (17.46) में a_1, a_2 एवं ϕ के मान प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं :

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{4^2}-\frac{2xy}{4\times 4}\cos\frac{\pi}{6}=\sin^2\frac{\pi}{6} \quad \text{तथा} \quad \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}-\frac{2xy}{16}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{4}$$

या $$x^2+y^2-\sqrt{3}\,xy-4=0$$

यह एक दीर्घवृत्त का समीकरण है। इसलिए, ऑसिलोस्कोप के पर्दे पर प्रेक्षित इलेक्ट्रॉन किरण पुंज का परिणामी पथ एक दीर्घवृत्त के अनुदिश होगा।

अब आप एक बोध प्रश्न हल करना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 4 – समान आवृत्ति वाले लंबकोणीय दोलनों का अध्यारोपण

किसी पिंड पर निम्नलिखित दो लंबकोणीय आवर्ती दोलन एकसाथ आरोपित होते हैं :

$$x(t)=0.03\sin(4\pi t)\,\text{m} \quad \text{तथा} \quad y(t)=0.04\sin(4\pi t+1.5\pi)\,\text{m}$$

पिंड की परिणामी गति के पथ का व्यंजक प्राप्त करें।

इस अनुभाग के महत्त्वपूर्ण निष्कर्ष नीचे दिए गए हैं।

दोहराएं

- जब समान आवृत्ती वाले दो परस्पर लंबवत् दोलन, $x(t)$ तथा $y(t)$, जिनके आयाम तथा प्रारंभिक कला भिन्न हैं, अध्यारोपित किये जाते हैं तो परिणामी विस्थापन के लिए निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होता है :

$$\frac{x^2(t)}{a_1^2}+\frac{y^2(t)}{a_2^2}-2\frac{x(t)\,y(t)}{a_1\,a_2}\cos\phi=\sin^2\phi$$

  जहाँ a_1 तथा a_2 अध्यारोपित दोलनों के आयाम हैं तथा ϕ उनके बीच कलांतर है। परिणामी पथ दीर्घवृत्तीय होता है।

- आरंभिक कलांतर के विशेष मानों के लिए, दीर्घवृत्ताकार पथ, सरल रेखीय ($\phi=0$ या π के लिए) तथा वृत्ताकार ($\phi=\pi/2$ एवं $a_1=a_2$ के लिए) पथों में परिवर्तित हो जाता है।

17.4.2 असमान आवृत्तियों वाले परस्पर लंबवत् दोलन

अब आप यह जानते हैं कि जब दो लंबकोणीय दोलनों, जिनकी आवृत्ति समान है, को अध्यारोपित किया जाता है तो परिणामी दोलन द्वारा अनुरेखित पथ की आकृति मूलतः उनकी प्रारंभिक कला पर निर्भर करती है। आइये, अब हम अपेक्षाकृत जटिल स्थितियों पर विचार करें, जिनमें दो लंबकोणीय दोलनों की आवृत्तियां भी असमान हैं। परंतु, यदि अध्यारोपित दोलनों की आवृत्तियों में 2:1 (अर्थात्, यदि $\omega_1=2\omega_0$, तब $\omega_2=\omega_0$) का अनुपात हो तो कण द्वारा अनुरेखित परिणामी पथ, कुछ प्रारूपी कलांतर ϕ, के मानों के लिए सरल होते हैं। इस प्रकार के दो लंबकोणीय दोलनों को निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$x(t)=a_1\cos(2\omega_0 t+\phi)$$

तथा $$y(t)=a_2\cos\omega_0 t$$

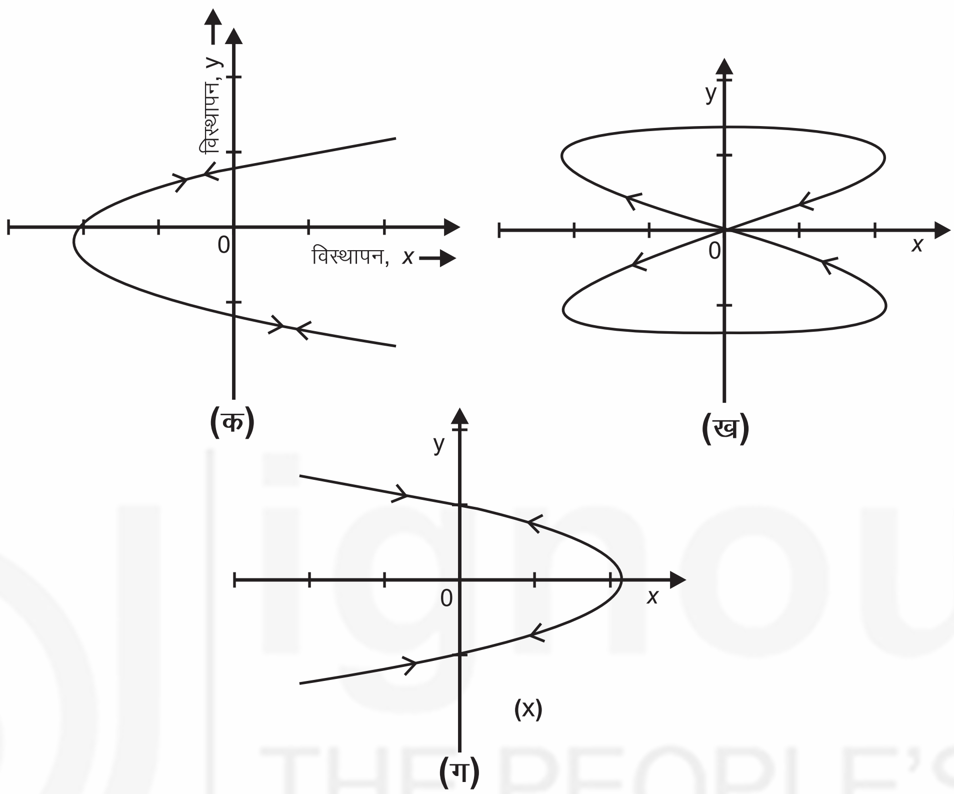
इन दो लंबकोणीय दोलनों के अध्यारोपण के फलस्वरूप उत्पन्न परिणामी गति द्वारा अनुरेखित पथ का व्यंजक कलांतर ϕ के कुछ दिए गए मानों के लिए निम्नवत् होता है (इन परिणामों की व्युत्पत्ति के लिए अंत में कुछ प्रश्न संख्या 4 देखें) :

i) $\phi = 0$

ϕ के इस मान के लिए परिणामी गति द्वारा अनुरेखित पथ का व्यंजक है :

$$y^2(t) = \frac{a_2^2}{2a_1}[(x(t) + a_1)] \tag{17.47}$$

समीकरण (17.47) एक परवलय को निरूपित करता है। अतः, यदि किसी पिंड पर आवृत्ति अनुपात 2:1 वाले दो लंबकोणीय दोलन आरोपित हों तो वह पिंड एक परवलयिक पथ अनुरेखित करेगा। इसे चित्र 17.9क में दिखाया गया है।



चित्र 17.9: आवृत्ति अनुपात 2:1 वाले दो परस्पर लंबकोणीय आवर्ती दोलनों के अध्यारोपण के कारण उत्पन्न परिणामी गति द्वारा अनुरेखित लिसाजू आकृतियाँ, जब उनके बीच प्रारंभिक कलांतरः क) $\phi = 0$; ख) $\pi/2$; ग) π हैं।

ii) $\phi = \frac{\pi}{2}$

$\phi = \frac{\pi}{2}$ के लिए हमें परिणामी दोलन की गति के लिए निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होता है :

$$\frac{4y^2(t)}{a_2^2}\left(\frac{y^2(t)}{a_2^2} - 1\right) + \frac{x^2(t)}{a_1^2} = 0 \tag{17.48}$$

समीकरण (17.48) एक ऐसा पथ निरूपित करता है जिसकी आकृति संख्या '8' से मिलती है, जैसाकि चित्र 17.9ख में दिखाया गया है।

iii) $\phi = \pi$

$\phi = \pi$ के लिए परिणामी दोलन द्वारा निरूपित पथ का समीकरण निम्नलिखित है:

$$y^2(t) = -\frac{a_2^2}{2a_1}(x(t) - a_1) \tag{17.49}$$

समीकरण (17.49) भी एक परवलय अनुरेखित करता है परंतु उसकी दिशा उस परवलय के विपरीत है जो हमें $\phi = 0$ के लिए प्राप्त हुआ था। समीकरण (17.49) द्वारा निरूपित परवलय चित्र 17.9ग में दिखाया गया है।

हम आशा करते हैं कि अब आप लिसाजू आकृतियों की उत्पत्ति का कारण समझ गए हैं। ϕ के कुछ विशिष्ट मानों के लिए हमने लिसाजू आकृतियों को उन लंबकोणीय दोलनों के लिए प्राप्त किया जिनकी आवृत्तियां 2:1 अनुपात में हैं।

यहां यह कहना उचित होगा कि डिजिटल आवृत्ति मापकों के उपयोग से पहले लिसाजू आकृतियां ही ध्वनि या रेडियो सिग्नलों की आवृत्ति ज्ञात करने के लिए उपयोग में लाई जाती थी। ऐसा करने के लिए ज्ञात आवृत्ति का एक सिग्नल ऑसीलोस्कोप की क्षैतिज प्लेटों के बीच आरोपित किया जाता था। और जिस सिग्नल की आवृत्ति मापी जानी होती थी उसे ऊर्ध्वाधर प्लेटों के बीच आरोपित किया जाता था। परिणामी लिसाजू आकृति का अवलोकन करके अज्ञात आवृत्ति का आकलन किया जाता था क्योंकि लिसाजू आकृति का स्वरूप आवृत्तियों के अनुपात का फलन होता है।

आइये, आपने इस इकाई में जो कुछ पढ़ा/सीखा है अब हम उसका सारांश दें।

17.5 सारांश

अवधारणा	विवरण
अध्यारोपण सिद्धांत	■ **अध्यारोपण सिद्धांत के अनुसार** जब दो या अधिक आवर्ती दोलन अध्यारोपित होते हैं तो परिणामी दोलन के विस्थापन का मान, किसी दिए गए समय t पर अध्यारोपित आवर्ती दोलनों के विस्थापनों के बीजगणितीय योग के बराबर होता है। यदि समय t पर $x_1(t)$ तथा $x_2(t)$ क्रमशः दो अध्यारोपित आवर्ती दोलनों के विस्थापन हैं तो इनके अध्यारोपण के फलस्वरूप उत्पन्न परिणामी विस्थापन, $x(t)$ निम्नवत् होता है: $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$
रैखिक अवकल समीकरण	■ अध्यारोपण सिद्धांत **केवल उन्हीं परिघटनाओं के लिए वैध होता है जिन्हें रैखिक अवकल समीकरणों** द्वारा निरूपित किया जा सकता है।
समान आवृत्ति वाले दो संरेख दोलनों का अध्यारोपण	■ जब समान आवृत्ति वाले निम्नलिखित दो संरेख आवर्ती दोलन $x_1(t) = a_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1)$ तथा $x_2(t) = a_2 \cos(\omega_0 t + \phi_2)$ अध्यारोपित होते हैं तो परिणामी दोलन को निम्नवत् निरूपित किया जाता है : $x(t) = a \cos(\omega_0 t + \delta)$, जहां $a = [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)]^{1/2}$ तथा $\delta = \tan^{-1}\left(\dfrac{a_1 \sin\phi_1 + a_2 \sin\phi_2}{a_1 \cos\phi_1 + a_2 \cos\phi_2}\right)$
असमान आवृत्तियों वाले दो संरेख दोलनों का अध्यारोपण	■ जब असमान आवृत्तियों वाले दो संरेख आवर्ती दोलनों को अध्यारोपित किया जाता है तो **परिणामी गति मॉडुलित** होती है और उसे निम्नवत् निरूपित करते हैं : $x(t) = a_m(t) \cos \omega_a t$ जहां **मॉडुलित आयाम**

$$a_m(t) = 2a\cos\omega_m t$$

मॉडुलित कोणीय आवृत्ति

$$\omega_m = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

तथा **औसत कोणीय आवृत्ति**

$$\omega_a = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

परस्पर लंबवत् आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण

- जब किसी पिंड पर दो परस्पर **लंबवत् आवर्ती दोलन** एकसाथ आरोपित होते हैं तो पिंड की परिणामी गति विभिन्न प्रकार के पथ अनुरेखित करती है। यदि दोलनों की आवृत्तियां बराबर होती हैं तो पथ का स्वरूप उनके प्रारंभिक कलांतर पर निर्भर करता है। सामान्यतः, परिणामी दोलन द्वारा अनुरेखित पथ दीर्घवृत्ताकार होता है परंतु अध्यारोपित दोलनों के आरंभिक कलांतर के कुछ विशिश्ट मानों के लिए यह दीर्घवृत्ताकार पथ सरल रेखा में परिवर्तित हो जाता है।

परस्पर लंबवत् असमान आवृत्तियों वाले आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण

- जब दो परस्पर लंबवत् असमान आवृत्तियों वाले आवर्ती दोलन, जिनके आरंभिक कलांतरों का मान भिन्न हों, किसी पिंड पर आरोपित होते हैं तो परिणामी पथ विभिन्न प्रकार के वक्र के रूप में होता है। इन वक्रीय पथों को **लिसाजू आकृतियां** कहते हैं।

17.6 अंत में कुछ प्रश्न

1. किसी सरल लोलक की गति निम्नलिखित अवकल समीकरण द्वारा व्यक्त होती है :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$$

इस अवकल समीकरण का हल निम्नलिखित आरंभिक प्रतिबंधों के अंतर्गत लिखें :

क) समय $t = 0$ पर $x = 3\,\text{cm}$ तथा $\frac{dx}{dt} = 0$

ख) समय $t = 0$ पर $x = 2\,\text{cm}$ तथा $\frac{dx}{dt} = 4\,\text{cm}\,\text{s}^{-1}$

उपरोक्त दो हलों को $x_1(t)$ तथा $x_2(t)$ द्वारा निरूपित कर सिद्ध करें कि विस्थापन $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$ के संगत आरंभिक प्रतिबंध, $x_1(t)$ तथा $x_2(t)$ के संगत आरंभिक प्रतिबंधों का अध्यारोपण है।

2. दो संरेख आवर्ती दोलन निम्नवत निरूपित किए गए हैं :

$$x_1(t) = 3\sin\left(20\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\,\text{cm}$$

तथा $$x_2(t) = 4\sin\left(20\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\,\text{cm}$$

इन दो संरेख दोलनों के अध्यारोपण के फलस्वरूप उत्पन्न परिणामी दोलन के आयाम, कला नियतांक तथा आवर्तकाल परिकलित करें।

3. किसी कण पर एकसाथ निम्नलिखित दो परस्पर लंबवत् दोलन आरोपित होते हैं :

क) $x = 3\sin\omega t$ cm, $y = 3\cos\omega t$ cm

ख) $x = \sin\omega t$ cm, $y = 4\sin(\omega t + \pi)$ cm

इस कण की गति का पथ निर्धारित करें।

4. असमान आयामों वाले दो परस्पर लंबवत् आवर्ती दोलनों की आवृत्तियों का अनुपात 2:1 है। जब इन दोलनों को एक ही समय किसी पिंड पर आरोपित किया जाता है तो पिंड की परिणामी गति द्वारा अनुरेखित पथ का व्यंजक प्राप्त करें यदि अध्यारोपित दोलनों के बीच के कलांतर, ϕ का मान (i) शून्य, (ii) $\pi/2$, तथा (iii) π हो।

17.7 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. समीकरण (17.16) से हम पाते हैं कि दो संरेख दोलनों के अध्यारोपण के फलस्वरूप उत्पन्न परिणामी दोलन के आयाम का व्यंजक निम्नवत् है :

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)} \qquad \text{(i)}$$

प्रश्न के अनुसार $a_1 = 5\,\text{cm} = 0.05\,\text{m};\ a_2 = 3\,\text{cm} = 0.03\,\text{m};\ \phi_1 = \left(\frac{\pi}{2}\right)$ तथा $\phi_2 = 0$। अतः, $(\phi_1 - \phi_2) = \frac{\pi}{2}$

समीकरण (i) में इन मानों को रखने पर हम पाते हैं,

$$a = \sqrt{(0.05\,\text{m})^2 + (0.03\,\text{m})^2 + 2(0.05\,\text{m})\times(0.03\,\text{m})\cos(\pi/2)} = 0.06\,\text{m}$$

आगे, समीकरण (17.17) से हम पाते हैं कि परिणामी दोलन की कला का व्यंजक है :

$$\delta = \tan^{-1}\left[\frac{a_1 \sin\phi_1 + a_2 \sin\phi_2}{a_1 \cos\phi_1 + a_2 \cos\phi_2}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{(0.05\,\text{m})\sin(\pi/2) + (0.03\,\text{m})\sin(0)}{(0.05\,\text{m})\cos(\pi/2) + (0.03\,\text{m})\cos(0)}\right] = 59.1° = 1.03\,\text{rad}$$

2. क) यह स्थिति ऐसी है जिसमें असमान आयाम तथा असमान आवृत्तियों वाले दो संरेख आवर्त दोलन अध्यारोपित होते हैं। अध्यारोपण के फलस्वरूप उत्पन्न परिणामी गति का आयाम समीकरण (17.29) द्वारा व्यक्त होता है :

$$a_m(t) = [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(2\omega_m t)]^{1/2} \qquad \text{(i)}$$

प्रश्न के अनुसार,

$a_1 = 0.05$ m; $a_2 = 0.03$ m; $\omega_1 = 5\pi$; $\omega_2 = 3\pi$ तथा $t = 5\,\text{s}$।

अतः $\omega_m = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi\,\text{s}^{-1}$

इन मानों को समीकरण (i) में रखने पर हम पाते हैं :

$$a_m(t = 5\,\text{s}) = [(0.05\text{ m})^2 + (0.03\text{ m})^2 + 2(0.05\text{ m}) \times (0.03\text{ m}) \times (\cos(2\times(\pi\,\text{s}^{-1})\times(5\,\text{s}))]^{1/2} = 0.08\text{ m}$$

परिणामी गति की कला समीकरण (17.30) द्वारा व्यक्त होती है :

$$\theta_m = \tan^{-1}\left[\frac{(a_1 - a_2)\sin(\omega_m t)}{(a_1 + a_2)\cos(\omega_m t)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{(0.05 - 0.03)\text{m} \times \sin(5\pi)}{(0.05 + 0.03)\text{m} \times \cos(5\pi)}\right] = 0$$

ख) समीकरण (17.36) से हम जानते हैं कि विस्पंद आवृत्ति, f_b का व्यंजक है :

$$f_b = |f_1 - f_2| = |385 - 389| = 4\text{Hz}$$

3. दिए गए व्यंजकों के आधार पर हम पाते हैं कि परस्पर लंबवत् दोलनों का आयाम बराबर ($= 0.02$ m) है, आवृत्ति समान ($=5\pi$) है तथा उनके बीच कलांतर का मान $\pi/2$ है अतः, समीकरण (17.43) के आधार पर हम परिणामी गति द्वारा अनुरेखित पथ का समीकरण निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$\frac{x^2}{(0.02\text{ m})^2} + \frac{y^2}{(0.02\text{ m})^2} = 1$$

अथवा $\quad x^2 + y^2 = (0.02\text{ m})^2$

अतः, पिंड 0.02 m त्रिज्या वाले वृत्ताकार पथ के अनुदिश गतिमान है।

4. $x(t)$ तथा $y(t)$ के व्यंजकों के आधार पर हम कह सकते हैं कि दो परस्पर लंबवत् दोलनों की आवृत्तियां बराबर हैं परंतु उनके आयामों के मान भिन्न ($a_1 = 0.03$ m तथा $a_2 = 0.04$ m) हैं तथा उनके बीच आरंभिक कलांतर 1.5π (=/) $3\pi/2$ है। आगे, समीकरण (17.46) वह व्यापक व्यंजक है जो उस पिंड की परिणामी गति के पथ को निरूपित करता है जिस पर एकसाथ दो परस्पर लंबवत् दोलन आरोपित हैं :

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - 2\frac{xy}{a_1 a_2}\cos\phi = \sin^2\phi$$

a_1, a_2 तथा ϕ के मानों को रखने पर हम पाते हैं :

$$\frac{x^2}{(0.03\text{ m})^2} + \frac{y^2}{(0.04\text{ m})^2} = 1$$

यह एक दीर्घवृत्त का समीकरण है। यह समीकरण बताता है कि परिणामी गति एक दीर्घवृत्ताकार पथ के अनुदिश होगी।

अंत में कुछ प्रश्न

1. सरल लोलक के लिए दिया गया अवकल समीकरण है :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0 \qquad \text{(i)}$$

सरल आवर्त गति के मानक समीकरण $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ से उपरोक्त समीकरण की तुलना करने पर हम पाते हैं कि $\omega_0 = 2\text{s}^{-1}$। अतः, दिए गए अवकल समीकरण का हल हम निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$x(t) = a\cos(2t + \phi) \qquad \text{(ii)}$$

इसे t के सापेक्ष अवकलित करने पर हम पाते हैं :

$$\frac{dx}{dt} = -2a\sin(2t+\phi) \qquad \text{(iii)}$$

क) दिए गए आरंभिक प्रतिबंध के अनुसार $t = 0$ पर $x = 3\,\text{cm}$ तथा $\frac{dx}{dt} = 0$ । अतः, समीकरणों (ii) और (iii) के आधार पर हम पाते हैं :

$$3\,\text{cm} = a\cos\phi \qquad \text{(iv)}$$

तथा $$0 = -2a\sin\phi \qquad \text{(v)}$$

समीकरण (v) से हम पाते हैं कि $\phi = 0$ क्योंकि a का मान नियत है। इस परिणाम को समीकरण (iv) में रखने पर हम पाते हैं कि $a = 3\,\text{cm}$

अतः, दिए गए अवकल समीकरण के पूर्ण हल को निम्नवत् लिख सकते हैं:

$$x_1(t) = 3\cos 2t\ \text{cm} \qquad \text{(vi)}$$

ख) आरंभिक प्रतिबंधों का दूसरा समुच्चय है: $t = 0$ पर $x = 2\,\text{cm}$ तथा $\frac{dx}{dt} = 4\,\text{cm s}^{-1}$ । समीकरणों (ii) तथा (iii) में इन मानों को रखने पर हम पाते हैं:

$$2\,\text{cm} = a\cos\phi \qquad \text{(vii)}$$

तथा $$4\,\text{cms}^{-1} = -2a\sin\phi \quad \Rightarrow \quad 2\,\text{cms}^{-1} = -a\sin\phi \qquad \text{(viii)}$$

समीकरण (viii) को समीकरण (vii) से विभाजित करने पर हम पाते है

$$\tan\phi = -1 \quad \Rightarrow \quad \phi = -\frac{\pi}{4}$$

समीकरण (vii) में $\phi = -\pi/4$ रखने पर हम पाते हैं : $a = 2\sqrt{2}$ cm

अतः, दिए गए आरंभिक प्रतिबंध के लिए हल निम्नवत् होगा :

$$x_2(t) = 2\sqrt{2}\cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)\text{cm} \qquad \text{(ix)}$$

चूंकि x_1 तथा x_2 के अध्यारोपण के फलस्वरूप हमें x_3 मिलता है, हम लिख सकते हैं:

$$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

समीकरण (vi) तथा (ix) से क्रमशः $x_1(t)$ तथा $x_2(t)$ का मान रखने पर हम पाते हैं :

$$x_3(t) = 3\cos 2t + 2\sqrt{2}\cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 3\cos 2t + 2\sqrt{2}\left[\cos 2t\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin 2t\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 3\cos 2t + 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2t\right)$$

$$= (5\cos 2t + 2\sin 2t)\ \text{cm} \qquad \text{(x)}$$

अब यदि हम x_1 तथा x_2 के संगत आरंभिक प्रतिबंधों को अध्यारोपित करते हैं तो हम लिख सकते हैं :

$t = 0$ पर $x = 5\,\text{cm}$ तथा $\frac{dx}{dt} = 4\,\text{cm s}^{-1}$ । समीकरण (ii) तथा (iii) में x तथा dx/dt के इन मानों को रखने पर हमें मिलता है :

$$5\,\text{cm} = a\cos\phi \qquad \text{(xi)}$$

तथा $4\,\text{cms}^{-1} = -2a\sin\phi$ (xii)

समीकरण (xii) को समीकरण (xi) से विभाजित करने पर हमें मिलता है :

$$\tan\phi = -2/5$$

अतः, हम लिख सकते हैं :

$$\sin\phi = -2/\sqrt{29} \quad \text{और} \quad \cos\phi = 5/\sqrt{29}$$

तथा $a = \sqrt{29}$ cm

अतः, आरंभिक प्रतिबंधों के दो समुच्चयों को अध्यारोपित करने पर हमें निम्नलिखित हल प्राप्त होता है :

$$x_3(t) = \sqrt{29}\cos(2t + \phi)$$

$$= \sqrt{29}\,[\cos 2t\cos\phi - \sin 2t\sin\phi]\ \text{cm}$$

$\cos\phi$ तथा $\sin\phi$ के मानों को रखने पर यह व्यंजक निम्नवत् रूप ले लेता है :

$$x_3(t) = (5\cos 2t + 2\sin 2t)\ \text{cm} \qquad \text{(xiii)}$$

अतः, हम पाते हैं कि समीकरण (xiii) द्वारा व्यक्त परिणामी विस्थापन $x_3(t)$ का मान वही है जो हमें $x_1(t)$ तथा $x_2(t)$ के अध्यारोपण के फलस्वरूप मिला था (समीकरण (x))।

2. कोज्या फलन के पदों में आवर्ती दोलनों के विस्थापनों $x_1(t)$ तथा $x_2(t)$ को हम निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$x_1(t) = 3\cos\left(20\pi t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)\text{cm} = 3\cos\left(20\pi t - \frac{\pi}{3}\right)\text{cm} \qquad \text{(i)}$$

तथा

$$x_2(t) = 4\cos\left(20\pi t + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)\text{cm} = 4\cos\left(20\pi t - \frac{\pi}{6}\right)\text{cm} \qquad \text{(ii)}$$

जब बराबर आवृत्ति वाले इन संरेख दोलनों को अध्यारोपित किया जाता है तो परिणामी दोलन का विस्थापन समीकरण (17.15) द्वारा व्यक्त होता है :

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t + \delta) \qquad \text{(iii)}$$

समीकरणों (i) तथा (ii) से हम पाते हैं कि $\omega_0 = 20\pi$ । परिणामी आयाम a का मान हम समीकरण (17.16) की मदद से प्राप्त कर सकते हैं :

$$a = [\,a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2\cos(\phi_1 - \phi_2)]^{1/2}$$

समीकरणों (i) तथा (ii) से a_1, a_2, ϕ_1 तथा ϕ_2 के मान रखने पर हम पाते हैं

$$a = \left(3^2 + 4^2 + \left(2\times 3\times 4\times\cos\frac{\pi}{6}\right)\right)^{1/2}\text{cm} = 6.77\ \text{cm}$$

समीकरण (17.17) की सहायता से हम परिणामी दोलन के कला नियतांक δ के लिए निम्न व्यंजक लिख सकते हैं :

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{3\sin(-\pi/3) + 4\sin(-\pi/6)}{3\cos(-\pi/3) + 4\cos(-\pi/6)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}+4}{3+4\sqrt{3}}\right) = -0.24\,\pi$$

अतः, परिणामी दोलन का व्यंजक प्राप्त करने के लिए हम समीकरण (iii) में ω_0, a तथा δ के मान रखते हैं :

$$x(t) = 6.77\cos(20\pi t - 0.24\pi)\ \text{cm}$$

3. क) प्रश्न के अनुसार

$$x(t) = 3\sin\omega t \text{ cm} \quad \text{तथा} \quad y(t) = 3\cos\omega t = 3\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm}$$

इन दोलनों के आयाम तथा इनकी आवृत्ति बराबर हैं परन्तु उनमें कलांतर $\pi/2$ है। अतः, समीकरण (17.44) के आधार पर हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि परिणामी गति एक वृत्त के अनुदिश होगी :

$$x^2 + y^2 = 9 \text{ cm}^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = (3 \text{ cm})^2$$

ख) प्रश्न के अनुसार

$$x(t) = \sin\omega t \text{ cm} \quad \text{तथा} \quad y(t) = 4\sin(\omega t + \pi) \text{ cm}$$

इन परस्पर लंबवत् दोलनों के आयाम भिन्न हैं ($a_1 = 1$ cm तथा $a_2 = 4$ cm), आवृत्ति ω का मान बराबर है और कलांतर का मान π है। अतः, समीकरण (17.46) में इन मानों को रखने पर हम पाते हैं :

$$x^2 + \frac{y^2}{16} + \frac{2xy}{4} = 0$$

या $$16x^2 + y^2 + 8xy = 0 \quad \Rightarrow \quad (4x + y)^2 = 0$$

अतः, परिणामी गति एक सरल रेखा के अनुदिश होगी जो निम्न समीकरण द्वारा व्यक्त होती है :

$$y = -4x$$

4. प्रश्न के अनुसार, दो परस्पर लंबवत् अध्यारोपित दोलनों की आवृत्तियां यदि ω_1 और ω_2 हों तब हम लिख सकते हैं कि

$\omega_1 = 2\omega_0$ और $\omega_2 = \omega_0$

अतः, परस्पर लंबवत् इन आवर्ती दोलनों को निम्नवत् निरूपित कर सकते हैं :

$x(t) = a_1\cos(2\omega_0 t + \phi)$ और $y(t) = a_2\cos\omega_0 t$

जहां, ϕ इन दोलनों के बीच कलांतर है।

i) $\phi = 0$ के लिए उपरोक्त व्यंजक निम्नवत् परिवर्तित हो जाते हैं :

$x(t) = a_1\cos 2\omega_0 t$ और $y(t) = a_2\cos\omega_0 t$

अतः, $x(t) = a_1\cos 2\omega_0 t = a_1(2\cos^2\omega_0 t - 1)$

$\cos\omega_0 t = y/a_2$, रखने पर उपरोक्त व्यंजक निम्नवत् परिवर्तित हो जाता है :

$$x = a_1[(2y^2/a_2^2) - 1]$$

अथवा $$(x/a_1) = (2y^2/a_2^2) - 1$$

अथवा $$y^2 = (a_2^2/2a_1)[x + a_1] \qquad \text{(i)}$$

समीकरण (i) परवलय का समीकरण है। अतः, परिणामी गति एक परवलय के अनुदिश होगी।

ii) $\phi = \pi/2$, के लिए $x(t)$ और $y(t)$ के व्यंजक निम्नवत् परिवर्तित हो जाएंगे :

$$x(t) = -a_1\sin 2\omega_0 t \quad \text{और} \quad y(t) = a_2\cos\omega_0 t \qquad \text{(ii)}$$

अतः हम $x(t)$ को निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$-(x/a_1) = 2\sin\omega_0 t\,\cos\omega_0 t$$

इस व्यंजक में

$\cos\omega_0 t = (y/a_2)$ और $\sin\omega_0 t = \sqrt{1-\cos^2\omega_0 t} = \sqrt{1-(y/a_2)^2}$

रखने पर हम समीकरण (ii) को निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$-(x/a_1) = (2y/a_2)\left(\sqrt{1-(y/a_2)^2}\right)$$

दोनों ओर वर्ग लेकर पदों को समायोजित करने पर हम पाते हैं :

$$\left(4y^2/a_2^2\right)\left[\left(y^2/a_2^2\right)-1\right]+\left[x^2/a_1^2\right]=0 \qquad \text{(iii)}$$

समीकरण (iii) एक ऐसे वक्र को निरूपित करता है जो अंक ''8'' के समान है।

iii) $\phi = \pi$ के लिए $x(t)$ और $y(t)$ के व्यंजक निम्नवत् परिवर्तित हो जाते हैं :

$x(t) = -a_1\cos 2\omega_0 t$ और $y(t) = a_2\cos\omega_0 t$

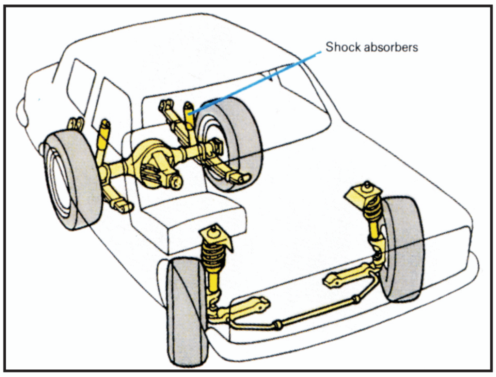
अथवा $(x/a_1) = 2\cos^2\omega_0 t - 1$

फिर से $\cos\omega_0 t = (y/a_2)$ रखने पर हम लिख सकते हैं कि

$(2y^2/a_2^2) = -(x/a_1)+1$

अथवा $y^2(t) = (a_2^2/2a_1)\,[x(t)-a_1]$ (iv)

समीकरण (iv) एक परवलय को निरूपित करता है परन्तु इसकी दिशा $\phi = 0$ के लिए प्राप्त समीकरण (i) द्वारा निरूपित परवलय से विपरीत है। अतः, इस स्थिति में भी परिणामी गति परवलय के अनुदिश होगी।



इस चित्र में एक कार के प्रत्येक पहिए के पास लगा प्रघात अवशोषक दिखाया गया है। प्रघात अवशोषक, अवमंदित दोलन का एक बहुत अच्छा उदाहरण है। इसमें मुख्य रूप से एक पिस्टन, जिसमें कुछ छिद्र होते हैं, होता है जो हाइड्रॉलिक द्रव (तेल) से भरी एक बेलनाकार नलिका में लगा होता है। जब पिस्टन इस हाइड्रॉलिक द्रव में ऊपर-नीचे गति करता है तो कार की कंपन गति काफी हद तक कम हो जाती है। प्रघात अवशोषक मोटर गाड़ी और मोटर साइकिल सस्पेंशन, वायुयान के जमीन पर उतरने के लिए आवश्यक यंत्रों तथा बड़े औद्योगिक यंत्रों को रखने की व्यवस्था का एक महत्वपूर्ण घटक होता है।

इकाई 18

अवमंदित दोलन

इकाई की रूपरेखा

अध्ययन निर्देशिका

इस खंड की पिछली दो इकाइयों में हमारी चर्चा सरल आवर्त गति करने वाले कुछ आदर्श भौतिक निकायों तक थी। इस इकाई में आप यह समझ सकेंगे कि वास्तविक भौतिक निकाय आदर्श नहीं होते। इस कारण से इनका गणितीय विश्लेषण कठिन होता है। अवमंदित दोलन का अध्ययन वास्तविक दोलनी निकायों के अध्ययन की दिशा में पहला कदम है। प्रायः अवमंदित दोलक की गति को हम द्वितीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरण द्वारा निरूपित करते हैं। आप अवमंदित दोलक के गति समीकरण को हल करने की विधि इस पाठ्यक्रम की इकाई 4 में सीख चुके हैं। यहां हम अपना ध्यान दोलक की गति पर अवमंदन के प्रभाव की भौतिक अनुसंगतियों पर केन्द्रित करेंगे। आपको याद होगा कि अवमंदित दोलक के गति समीकरण के हल में चरघातांकी तथा अतिपरवलयिक फलन होते हैं। अतः, यह अच्छा होगा कि आप इस तरह के फलनों संबंधी बीजगणित और अवकल गणित के अपने ज्ञान को ताजा कर लें। और एक बात, अवमंदन से जुड़े प्राचलों, जैसे लघुगणकीय अपक्षय, विश्रांति काल और गुणता कारक आदि से संबंधित प्रश्नों को ध्यानपूर्वक हल करें जिससे आपको इनके आंकिक मानों का ज्ञान हो।

"हमारे इन्द्रियजनित अनुभवों की अस्त-व्यस्त विविधता को तर्क संगत वैचारिक ढांचे में ढालने का प्रयास ही विज्ञान है।"

अल्बर्ट आइंस्टीन

18.1 परिचय

इकाई 16 में आपने सरल आवर्त गति (SHM) और इसके अभिलक्षणों का अध्ययन किया। आपको याद होगा कि सरल आवर्त गति कर रहे किसी यांत्रिक निकाय का विस्थापन-समय आलेख एक ज्या (या कोज्या) वक्र होता है और आवर्ती दोलक की कुल ऊर्जा समय के साथ अचर रहती है। इसका अर्थ यह है कि यदि ऐसे निकाय को जब एक बार दोलित कर दिया जाए तो यह अनिश्चित काल तक दोलन करता रहेगा। ऐसे दोलन को **मुक्त दोलन** कहते हैं। क्या आप किसी ऐसे वास्तविक भौतिक निकाय की कल्पना कर सकते हैं जो अनिश्चित काल तक दोलन करता रहता है? संभवतः ऐसा कोई निकाय नहीं है।

ध्यान दें

हवा या द्रव जैसे माध्यम में गतिशील निकाय द्वारा अनुभूत घर्षण बल को **कर्षण बल** कहते हैं।

व्यावहारिक जगत में किसी दोलनी निकाय के दोलनों का आयाम (और उसकी ऊर्जा), माध्यम में विद्यमान घर्षण बलों के कारण धीरे-धीरे कम होता जाता है। इस तथ्य को समझने के लिए आप एक झूले, सरल लोलक, या ऊर्ध्वाधर कमानी-द्रव्यमान निकाय के दोलनों पर विचार करें। इन सभी निकायों में दोलन धीरे-धीरे कम होते हुए समाप्त हो जाता है क्योंकि वायु इन पर एक **कर्षण बल** (drag force) लगाती है। इसका अर्थ यह हुआ कि समय के साथ प्रत्येक दोलनी निकाय की ऊर्जा का ह्रास होता है। निकाय की ऐसी गति को **अवमंदित गति** कहते हैं। अब आप पूछ सकते हैं : यह ऊर्जा जाती कहां है? दोलनी निकाय को अवमंदनकारी बल के विरुद्ध कार्य करना पड़ता है जिसके कारण ऊर्जा क्षयित होती है। **अर्थात्, एक दोलनी पिंड की ऊर्जा अवमंदन पर काबू पाने में खर्च हो जाती है।**

सामान्यतः अवमंदन के कारण ऊर्जा की व्यर्थ हानि होती है। इसलिए हम हमेशा इस हानि को कम करने की चेष्टा करते हैं। परन्तु कुछ अभियांत्रिक निकायों को हम जान-बूझकर अवमंदित करते हैं। इसका एक सुपरिचित उदाहरण है वाहनों में प्रयुक्त प्रघात-अवशोषक (shock absorber)। जब वाहन किसी खराब सड़क पर चलता है तो प्रघात-अवशोषक की कमानी में दोलन होने लगता है। प्रघात-अवशोषक की रचना इस प्रकार की होती है कि यह दोलनों को **अवमंदित** (अर्थात्, न्यूनतम) कर देता है और हम खराब सड़क पर भी सुगमता से यात्रा कर पाते हैं।

इस इकाई में आप अवमंदित गति के प्रमुख लक्षणों के विषय में पढ़ेंगे। भाग 18.2 में पहले आप अवमंदित दोलक के लिए गति समीकरण स्थापित करना सीखेंगे तथा इसके हलों की प्रबल अवमंदित, क्रांतिक अवमंदित और दुर्बल अवमंदित निकायों के लिए भौतिक अनुसंगतियों के बारे में पढ़ेंगे। (आप इस पाठ्यक्रम की इकाई 4 में अवमंदित निकाय के गति समीकरण को हल करना सीख चुके हैं)। इसलिए यहां हम केवल परिणाम ही लिखेंगे। आप देखेंगे कि यदि अवमंदन दुर्बल हो तो निकाय क्रमशः घटते हुए आयाम वाली दोलनी गति करता है। भाग 18.3 में आप दुर्बल अवमंदन को लघुगणकीय अपक्षय, विश्रांति काल एवं गुणता कारक जैसे प्राचलों के पदों में निरूपित करना सीखेंगे। आप इन प्राचलों के लिए व्यंजक प्राप्त करना भी सीखेंगे जिससे हमें किसी दोलक में विद्यमान अवमंदन का आंकिक माप मालूम करने में सहायता मिलती है।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- किसी अवमंदित आवर्ती दोलक के लिए गति समीकरण स्थापित कर सकेंगे;
- दुर्बलतः अवमंदित, क्रांतिकतः अवमंदित और प्रबलतः अवमंदित निकायों में अंतर बता सकेंगे;
- किसी दोलक के आयाम, आवर्तकाल एवं ऊर्जा पर अवमंदन के प्रभाव की चर्चा कर सकेंगे; तथा
- लघुगणकीय अपक्षय, विश्रांति काल एवं गुणता कारक के लिए व्यंजक प्राप्त कर सकेंगे।

18.2 अवमंदित दोलक का गति समीकरण

भाग 16.2 में आप पढ़ चुके हैं कि सरल अवर्त गति करते हुए किसी कमानी-द्रव्यमान निकाय के लिए बल नियम निम्नवत् होता है :

$$F = -kx$$

यहां F प्रत्यानयन बल का परिमाण तथा x निकाय का साम्यावस्था से तात्क्षणिक विस्थापन है। आपको याद होगा कि कमानी-द्रव्यमान निकाय (इकाई 16) की सरल आवर्त गति की चर्चा करते समय हमने घर्षण तथा वायु-कर्षण के प्रभावों की पूरी तरह उपेक्षा कर दी थी। **परंतु वास्तविकता यह है कि प्रत्येक व्यावहारिक दोलनी निकाय किसी-न-किसी प्रकार के घर्षण बल या अवमंदक बल को अवश्य महसूस करता है**। इस तरह के बल को **अवमंदक बल** कहते हैं। अतः, किसी भी वास्तविक दोलक के व्यवहार की अधिक यथार्थता से प्रागुक्ति करने के लिए हमें अवमंदित आवर्ती दोलक की गति का अध्ययन करना चाहिए।

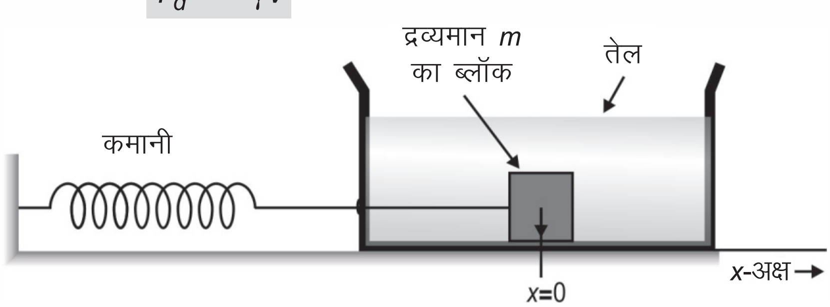
अवमंदित दोलक की गति की व्याख्या करने के लिए हम एक ऐसे कमानी-द्रव्यमान निकाय पर विचार करते हैं जिसमें द्रव्यमान एक **श्यान माध्यम**, जैसेकि किसी बर्तन में रखा तेल, में क्षैतिजतः दोलन करता है, जैसाकि चित्र 18.1 में दिखाया गया है। जब द्रव्यमान दोलन करता है तो यह एक अवमंदक बल अनुभूत करता है। आइए, इस अवमंदक बल को F_d से निर्दिष्ट करें। आम तौर पर इस बल का परिमाण ठीक-ठीक निर्धारित करना कठिन होता है। तथापि, **अल्प आयाम वाले दोलनों के लिए अवमंदक बल को स्टोक के नियम द्वारा निदर्शित किया जा सकता है**। अर्थात् हम F_d को द्रव्यमान के वेग के समानुपाती मानकर निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$F_d = -\gamma v \qquad (18.1)$$

स्टोक के नियम के अनुसार एक श्यान माध्यम में मुक्त रूप से गिर रहे त्रिज्या r वाले एक गोलाकार पिंड पर लगने वाला बल है:

$$F_d = 6\pi\eta r v$$

जहां η माध्यम का श्यानता गुणांक है और v पिंड का वेग है।



चित्र 18.1: एक अवमंदित कमानी-द्रव्यमान निकाय। ध्यान दें कि अवमंदन के लिए द्रव्यमान को एक श्यान माध्यम (तेल) में डुबाकर रखा गया है।

समीकरण (18.1) में दाहिने पक्ष के ऋण चिह्न का अभिप्राय यह है कि अवमंदन, गति का विरोध करता है। समानुपातिकता स्थिरांक γ को **अवमंदन गुणांक** या **अवमंदन नियतांक** कहते हैं। *आंकिक रूप में यह प्रति इकाई वेग के लिए लगने वाले बल के बराबर होता है* और इसे $(\text{N}/\text{ms}^{-1}) = (\text{kg ms}^{-2}/\text{ms}^{-1}) = \text{kg s}^{-1}$ के पदों में मापा जाता है। समीकरण (18.1) का अर्थ है कि जैसे-जैसे पिंड के वेग का मान बढ़ता है इस पर श्यान माध्यम के कारण इसकी गति का विरोध भी बढ़ेगा।

ध्यान दें कि जहां प्रत्यानयन बल विस्थापन के समानुपाती है, अवमंदक बल वेग के समानुपाती है।

गति समीकरण

अवमंदित दोलक का गति समीकरण स्थापित करने के लिए हम x-अक्ष को कमानी की लंबाई के अनुदिश लेते हैं (चित्र 18.1)। द्रव्यमान की साम्यावस्था स्थिति को हम मूल बिन्दु $x = 0$ मान लेते हैं। मान लें कि (कमानी-द्रव्यमान निकाय के) द्रव्यमान को अनुदैर्घ्यतः खींच कर छोड़ दिया जाता है। जैसे ही द्रव्यमान अपनी साम्यावस्था स्थिति से विस्थापित होता है इस पर प्रत्यानयन बल और अवमंदक बल एक साथ लगते हैं। हम इन बलों को निम्नवत् निरूपित करते हैं :

- **प्रत्यानयन बल** : $-k\,x$, जहां k **बल नियतांक** है; तथा
- **अवमंदक बल** : $-\gamma\, v$, जहां $v\ (= dx/dt)$ दोलक का तात्क्षणिक वेग तथा γ अवमंदन नियतांक है।

ध्यान दें कि **किसी अवमंदित दोलक के लिए बल नियम के व्यंजक में प्रत्यानयन बल और अवमंदन बल दोनों को ही सम्मिलित करना चाहिए।** इसलिए, हम बल नियम को निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$F = -kx - \gamma v = -kx - \gamma\,(dx/dt)$$

बल के इस व्यंजक का उपयोग न्यूटन के द्वितीय गति नियम में करने पर अवमंदित दोलक के गति समीकरण को हम निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$m(d^2x/dt^2) = -kx - \gamma(dx/dt) \qquad (18.2)$$

पदों को पुनर्व्यवस्थित करने और सभी पदों को m से विभाजित करने पर समीकरण (18.2) निम्नलिखित रूप ले लेता है :

$$(d^2x/dt^2) + 2b(dx/dt) + \omega_0^2\, x = 0 \qquad (18.3)$$

जहां $\omega_0^2 = (k/m)$ और $2b = (\gamma/m)$

ध्यान दें कि समीकरण (18.3) के दूसरे पद (अवमंदन पद) में हमने जान-बूझकर गुणक 2 रखा है। आप जल्दी ही देखेंगे कि इसके कारण समीकरण (18.3) के हल को सरल पदों में व्यक्त किया जा सकता है। साथ ही, ध्यान दें कि अचर b, जो **अवमंदन गुणक** कहलाता है की विमा T^{-1} है :

$$b = (\gamma/2m) = \text{बल}/(\text{वेग} \times \text{द्रव्यमान}) = (\text{MLT}^{-2}/\text{LT}^{-1}\text{M}) = \text{T}^{-1}$$

इस परिणाम से हम पाते हैं कि b का मात्रक s^{-1} है, जो कि वही है जो ω_0 का है।

क्या आपको समीकरण (16.5) एवं (18.3) द्वारा निरूपित अवकल समीकरणों में कोई समानता नज़र आती है? दोनों ही अवकल समीकरण रैखिक हैं, द्वितीय कोटि के हैं तथा अचर गुणांकों से युक्त समघात समीकरण हैं। यह समानता हमें अवमंदित दोलक की गति का विश्लेषण करने में मदद करेगी।

अवकल समीकरण का हल

इकाई 4 के समीकरण (4.34) से आप याद करें कि इस समीकरण (समीकरण (18.3)) के हल को हम निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$x(t) = \exp(-bt)\,[a_1 \exp\{(b^2 - \omega_0^2)^{1/2}\, t\} + a_2 \exp\{-(b^2 - \omega_0^2)^{1/2}\, t\}] \qquad (18.4)$$

उपरोक्त व्यंजक के आधार पर हम कह सकते हैं कि समीकरण (18.3) का हल **अवमंदक बल (अवमंदन गुणक b द्वारा निरूपित) तथा प्रत्यानयन बल (प्राचल k, अर्थात् ω_0^2 द्वारा निरूपित) की आपेक्षिक प्रबलताओं द्वारा निर्धारित होता है।**

आप गौर करें कि राशि $b^2 - \omega_0^2$ का मान ऋणात्मक, शून्य अथवा धनात्मक हो सकता है जो इस बात पर निर्भर करेगा कि अवमंदन गुणक b, कोणीय आवृत्ति ω_0 से क्रमशः कम है, इसके बराबर है या फिर इससे अधिक है। ये शर्तें निम्नलिखित तीन भिन्न प्रकार की अवमंदित गतियां उत्पन्न करती है :

- यदि $b > \omega_0$, तो निकाय को अपनी साम्यावस्था स्थिति पर लौटने में बहुत अधिक समय लगता है। ऐसी स्थिति में हम कहते हैं कि अवमंदन प्रबल है तथा निकाय को **प्रबलतः अवमंदित** या **अति अवमंदित** कहा जाता है।
- यदि $b = \omega_0$, तो निकाय अपनी साम्यावस्था पर **न्यूनतम समय** में लौट जाता है और तब हम कहते हैं कि निकाय **क्रांतिकतः अवमंदित** है। क्रांतिकतः अवमंदित निकाय अपनी साम्यावस्था स्थिति को कभी भी पार नहीं करता।
- यदि $b < \omega_0$, तो निकाय क्रमशः घटते आयाम वाली दोलनी गति करता है। ऐसी स्थिति में हम कहते हैं कि निकाय **दुर्बलतः अवमंदित** है। *दुर्बलतः अवमंदित गति के अध्ययन का भौतिकी में अत्यधिक महत्त्व है।*

अब आप निम्नलिखित उदाहरण को ध्यान से पढ़ें।

उदाहरण *18.1* : अवमंदित दोलक

0.5 kg द्रव्यमान वाले एक दोलनकारी पिंड का गति समीकरण निम्नवत् है :

$$(d^2x/dt^2) + 4(dx/dt) + 9x = 0$$

क) i) बल नियतांक k, ii) कोणीय आवृत्ति ω_0, iii) अवमंदन नियतांक γ तथा iv) अवमंदन गुणक b परिकलित करें।

ख) अवमंदन की प्रकृति कैसी है?

हल ■ क) अवमंदित आवर्ती दोलक की गति, समीकरण (18.3) द्वारा व्यक्त होता है :

$$(d^2x/dt^2) + 2b(dx/dt) + \omega_0^2 x = 0$$

इस समीकरण की तुलना दिए गए गति समीकरण से करने पर हम पाते हैं :

$$2b = 4\,\text{s}^{-1} \qquad \text{और} \qquad \omega_0^2 = 9\,\text{s}^{-2}$$

(i) बल नियतांक k की गणना के लिए हम निम्न संबंध का उपयोग करते हैं:

$$\omega_0^2 = (k/m) \;\Rightarrow\; k = \omega_0^2 m = (9\,\text{s}^{-2}) \times (0.5\,\text{kg}) = 4.5\ \text{kg}\,\text{s}^{-2}$$

(ii) कोणीय आवृत्ति ω_0 की गणना के लिए हम लिखते हैं :

$$\omega_0^2 = 9\,\text{s}^{-2} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = 3\,\text{s}^{-1}$$

(iii) अवमंदन नियतांक γ की गणना के लिए :

$$2b = (\gamma / m) \quad \Rightarrow \quad \gamma = 2bm = (4\,\text{s}^{-1}) \times (0.5\ \text{kg}) = 2\ \text{kg}\,\text{s}^{-1}$$

(iv) अवमंदन गुणक b की गणना के लिए :

$$2b = 4\,\text{s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad b = 2\,\text{s}^{-1}$$

ख) $b\,(= 2\text{s}^{-1})$ तथा $\omega_0\,(= 3\text{s}^{-1})$ के परिकलित मानों की तुलना करने पर हम पाते हैं कि $b < \omega_0$ है। यह दुर्बल अवमंदन की शर्त है। इसलिए दोलक की गति दुर्बलतः अवमंदित है।

उपरोक्त संकल्पनाओं की अपनी समझ को पुख्ता करने के लिए आपको निम्नलिखित बोध प्रश्न हल करना चाहिए।

बोध प्रश्न 1 – किसी दोलक के अवमंदन की प्रकृति निर्धारित करना

किसी दोलक का अवकल समीकरण निम्नलिखित है :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 20\frac{dx}{dt} + 25x = 0$$

बल नियतांक, अवमंदन नियतांक, कोणीय आवृत्ति तथा अवमंदन गुणक परिकलित करें। अवमंदन की प्रकृति कैसी है?

18.2.1 प्रबल अवमंदन

बोध प्रश्न 1 को हल करते हुए आपने देखा होगा कि दिया गया समीकरण प्रबलतः अवमंदित निकाय के संगत अदोलनी गति निरूपित करता है। प्रबलतः अवमंदित दोलक के गति समीकरण के हल को हम निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$x(t) = (v_0 / 2\beta)\, \exp\,(-bt)\, [\exp\,(\beta t) - \exp\,(-\beta t)]$$

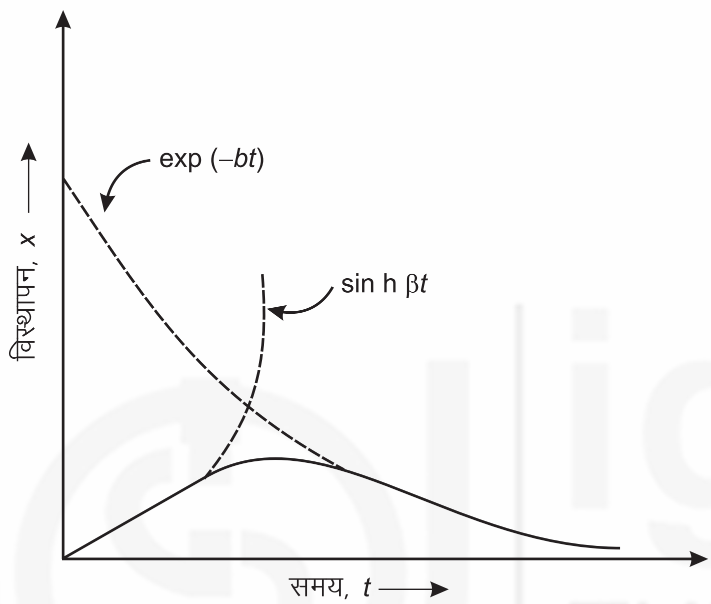
$$= (v_0/\beta)\ \exp\,(-bt)\, \sinh \beta t \qquad (18.5)$$

$\sinh \beta t = \dfrac{\exp(\beta t) - \exp(-\beta t)}{2}$ एक अतिपरवलयिक ज्यावक्रीय फलन है।

जहां $\beta = \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$

समीकरण (18.5) से हम देखते हैं कि $x(t)$ दो पदों, जिन्हें हम $\phi(t)$ एवं $\psi(t)$ मान लेते हैं, का गुणनफल है : $\phi(t) = \sinh\beta t$ एक वर्धमान अतिपरवलयिक फलन है और $\psi(t) = \exp\,(-bt)$ एक क्षयमान चरघातांकी फलन है। समीकरण (18.5) के दाहिनी ओर का चरघातांकी पद समय के साथ विस्थापन को कम करेगा जबकि अतिपरवलयिक पद की प्रवृत्ति इसे बढ़ाने की होगी। इसलिए प्रबलतः अवमंदित दोलक के विस्थापन में

समय के साथ परिवर्तन इन दो पदों की परस्पर क्रिया द्वारा निर्धारित होता है। चित्र 18.2 में इन दो पदों को अलग-अलग आलेखित किया गया है। ध्यान दें कि β एवं b नियतांक हैं और इनके मान समय के साथ क्रमशः फलनों $\phi(t)$ एवं $\psi(t)$ में होने वाले परिवर्तनों को प्रभावित नहीं करते। जब इन दो पदों को एक साथ आलेखित किया जाता है, जैसाकि चित्र 18.2 में संतत वक्र द्वारा दिखाया गया है, तो हमें एक अति-अवमंदित निकाय का विस्थापन-समय आलेख प्राप्त होता है। ध्यान दें कि प्रारंभ में तो विस्थापन, समय के साथ बढ़ता है, परंतु, शीघ्र ही चरघातांकी पद का प्रभाव बढ़ने लगता है और विस्थापन धीरे-धीरे कम होने लगता है। तथापि, **गति अदोलनी** रहती हैं क्योंकि $x(t)$ का मान कभी भी ऋणात्मक नहीं हो पाता। इस तरह की गति **रुद्ध-दोल** (dead beat) गति कहलाती है।



चित्र 18.2 : प्रबलतः-अवमंदित निकाय के विस्थापन का समय के साथ परिवर्तन।

अब आगे बढ़ने से पहले आप अति-अवमंदित निकाय से संबद्ध मुख्य परिणाम को दोहरा लें।

दोहराएं

> प्रबलतः-अवमंदित ($b > \omega_0$) निकाय की गति अदोलनी होती है। ऐसे निकाय का विस्थापन $x(t)$, एक क्षयमान चरघातांकी फलन तथा एक वर्धमान अतिपरवलयिक फलन की परस्पर क्रिया द्वारा निर्धारित होता है। गणितीय रूप में इसे हम निम्नवत् व्यक्त कर सकते हैं :
>
> $$x(t) = (v_0/\beta)\exp(-bt)\sinh\beta t$$

18.2.2 क्रांतिक अवमंदन

क्रांतिकतः अवमंदित दोलन को शर्त $b = \omega_0$ द्वारा अभिलक्षित किया जाता है। इसका अर्थ है कि $(b^2 - \omega_0^2) = 0$ और इस स्थिति के लिए समीकरण (18.4), जो समीकरण (18.3) का हल है, निम्नवत् परिवर्तित हो जाता है :

$$x(t) = (a_1 + a_2)\exp(-bt)$$

$$= a\exp(-bt) \qquad (18.6)$$

जहां $a = a_1 + a_2$ है।

आप सत्यापित (बोध प्रश्न 2) कर सकते हैं कि क्रांतिक अवमंदन के लिए समीकरण (18.3) का सामान्य हल निम्नलिखित है :

$$x(t) = (p + qt) \exp(-bt) \tag{18.7}$$

जहां p एवं q नियतांक हैं। ध्यान दें कि p की विमा लंबाई की और q की विमा वेग की हैं। प्रारंभिक प्रतिबंधों का उपयोग करके हम इन नियतांकों के मान ज्ञात कर सकते हैं।

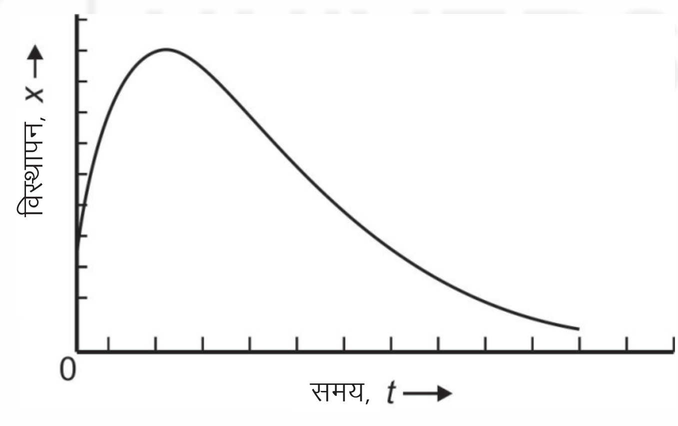
बोध प्रश्न 2 – क्रांतिकतः अवमंदित दोलक के अवकल समीकरण का हल

सिद्ध करें कि समीकरण (18.7) क्रांतिकतः अवमंदित दोलक के लिए समीकरण (18.3) का सम्पूर्ण हल निरूपित करता है।

क्रांतिकतः अवमंदित दोलक के लिए समीकरण (18.7) द्वारा व्यक्त सामान्य हल के आधार पर हम इसके व्यवहार के संबंध में निम्नलिखित निष्कर्ष निकाल सकते हैं:

- क्रांतिकतः अवमंदित दोलक के विस्थापन में समय के साथ होने वाला परिवर्तन अपक्षयी चरघातांकी पद द्वारा नियंत्रित होता है। **इसलिए दोलक को वापस साम्यावस्था में आने में लगने वाला समय न्यूनतम होता है**।
- विस्थापन का मान धनात्मक होता है। इसका अर्थ यह है कि क्रांतिकतः अवमंदित निकाय साम्यावस्था को पार नहीं करता या उसके दोनों ओर दोलन नहीं करता।

चित्र 18.3 में क्रांतिकतः अवमंदित निकाय के विस्थापन में समय के साथ होने वाला परिवर्तन दर्शाया गया है।



चित्र 18.3: क्रांतिकतः अवमंदित निकाय के लिए विस्थापन-समय आलेख।

कुछ आम तौर पर पाए जाने वाले क्रांतिकतः अवमंदित निकाय हैं: द्वार क्लोज़रों की दरवाज़ा बंद करने की युक्ति तथा वाहनों के प्रघात अवशोषक। द्वार क्लोज़र में प्रयुक्त कमानी के क्रांतिक अवमंदन के कारण दरवाजा न्यूनतम समय में सौम्य ढंग से बंद होता है। इसी प्रकार, सड़क में उभार या गड्ढों के कारण लगने वाले झटकों को प्रघात अवशोषक तेज़ी से अवमंदित कर देता है। क्रांतिकतः अवमंदित दोलनों के कुछ अन्य उदाहरण हैं वैद्युत एवं इलेक्ट्रॉनिक उपकरणों की संकेतक सुइयां।

अतः, क्रांतिकतः अवमंदित दोलन के लिए हम निम्नलिखित निष्कर्ष पर पहुँचते हैं :

दोहराएं

> क्रांतिकतः अवमंदित दोलक अपनी साम्यावस्था स्थिति में न्यूनतम समय में लौट आता है। इस प्रकार के दोलक के लिए तात्क्षणिक विस्थापन का व्यंजक है :
>
> $$x(t) = (p + qt)\exp(-bt)$$
>
> जहाँ p एवं q नियतांक हैं।

उपरोक्त चर्चा के आधार पर आप जानते हैं कि प्रबलतः अवमंदित तथा क्रांतिकतः अवमंदित निकाय बिना दोलन किए अपनी साम्यावस्था पर लौट जाते हैं। अतः आप पूछ सकते हैं कि **अति-अवमंदित निकाय और क्रांतिकतः अवमंदित निकाय में क्या अंतर है? क्रांतिकतः अवमंदित निकाय न्यूनतम संभव अवधि में साम्यावस्था स्थिति पर लौट आता है जबकि अति-अवमंदित निकाय बहुत ही धीरे-धीरे साम्यावस्था स्थिति में वापस लौटता है।**

भौतिकी में अति-अवमंदित एवं क्रांतिकतः अवमंदित दोलनों का सीमित अनुप्रयोग है। जिस अवमंदन का सर्वाधिक उपयोग है वह है दुर्बल अवमंदन। अब आप इसके विषय में पढ़ेंगे।

18.2.3 दुर्बल अवमंदन

जब $b < \omega_0$ होता है तो निकाय दुर्बलतः अवमंदित होता है और इस स्थिति में **अवमंदित दोलनी गति** उत्पन्न होती है।

दुर्बलतः अवमंदित निकाय के लिए समीकरण (18.3) का हल निम्नवत् होता है :

$$x(t) = (v_0/\omega_d)\exp(-bt)\cos[\omega_d t - (\pi/2)] = a(t)\sin\omega_d t \qquad (18.8)$$

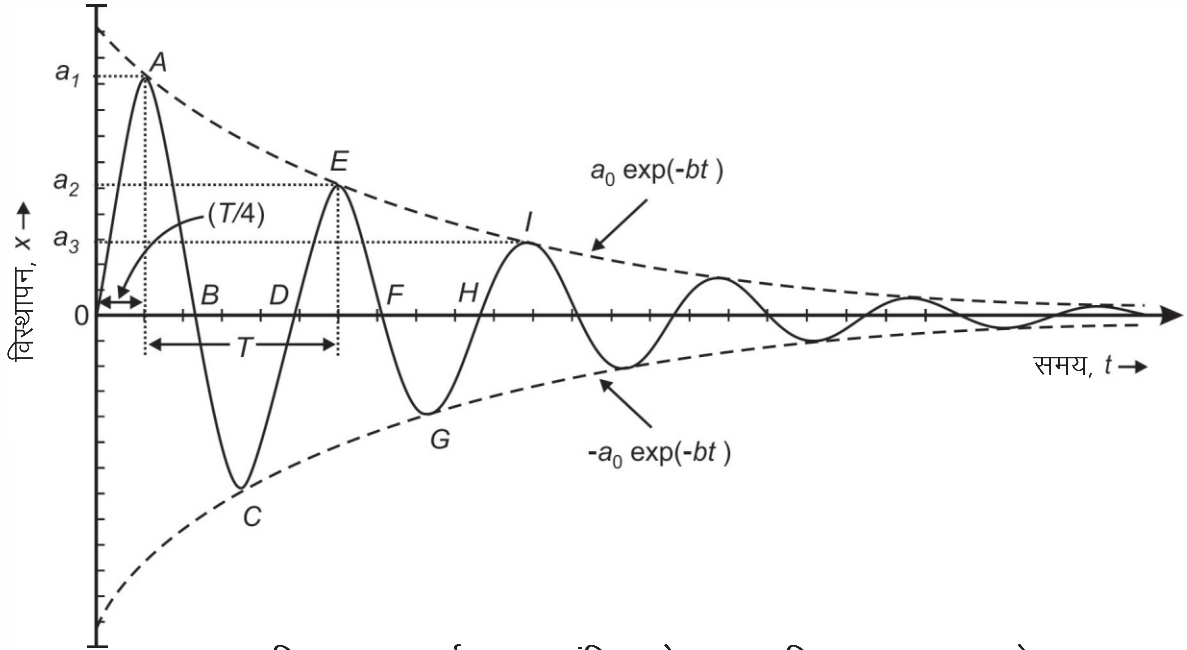
जहाँ
$$a(t) = (v_0/\omega_d)\exp(-bt) = a_0\exp(-bt) \qquad (18.9)$$

तथा अवमंदित दोलक की कोणीय आवृत्ति मुक्त दोलन की कोणीय आवृत्ति से कम होती है :

$$\omega_d = (\omega_0^2 - b^2)^{1/2} = \left[(k/m) - (\gamma^2/4m^2)\right]^{1/2} \qquad (18.10)$$

समीकरण (18.8) दुर्बल अवमंदन $(b < \omega_0)$ की स्थिति में समीकरण (18.3) का व्यापक हल है। ध्यान दें कि यह हल $\omega_d\,(< \omega_0)$ आवृत्ति वाली ज्यावक्रीय गति निरूपित करता है। तथापि, दोलनों का आयाम, $a(t)\,(= a_0\exp(-bt))$, पद $\exp(-bt)$ के कारण चरघातांकी रूप से समय के साथ कम होता जाता है। **इसलिए, हम कह सकते हैं कि दुर्बलतः अवमंदित निकाय की गति दोलनी तो होती है परंतु सरल आवर्ती नहीं।** इस प्रकार के दोलक का विस्थापन-समय आलेख चित्र 18.4 में दिखाया गया है। क्योंकि ज्या फलन का मान +1 एवं −1 के बीच रहता है, विस्थापन-समय वक्र $a_0\exp(-bt)$ तथा $-a_0\exp(-bt)$ के बीच रहता है।

दुर्बल अवमंदन का प्रभाव दोलन के आयाम के साथ-साथ दोलन की आवृत्ति पर भी पड़ता है। आप पूछ सकते हैं कि **चित्र 18.4 में दिखाई गई अवमंदित गति का**



चित्र 18.4 : दुर्बलतः अवमंदित दोलक का विस्थापन-समय आलेख।

आवर्तकाल क्या है? वास्तव मे, दुर्बलतः अवमंदित गति का आवर्तकाल परिभाषित करना कठिन है क्योंकि दुर्बलतः अवमंदित गति अपने-आप को दोहराती नहीं है। ऐसा इसलिए है क्योंकि आयाम का मान, मान लें कि जो समय t_1 पर A है, आने वाले किसी भी समय पर फिर से A के बराबर नहीं होता। **परंतु, सरल आवर्त गति (SHM) से तुलना कर हम अवमंदित दोलन के आवर्तकाल को उस समयांतराल के रूप में परिभाषित कर सकते हैं जो विस्थापन x के दो क्रमागत शून्य मानों के बीच का समयांतराल है।** अर्थात् चित्र 18.4 में बिंदुओं B तथा F के बीच का समयांतराल। आगे समीकरण (18.10) से यह स्पष्ट है कि अवमंदित दोलक की कोणीय आवृत्ति, ω_d इसके मुक्त दोलन की आवृत्ति ω_0 से कम होती है। **अतः, अवमंदन के कारण दोलक का आवर्तकाल बढ़ जाता है।** गणितीय रूप में हम एक दुर्बलतः अवमंदित दोलक के आवर्तकाल को निम्नवत् व्यक्त कर सकते हैं :

$$T_d = (2\pi / \omega_d)$$

$$= [2\pi / (\omega_0^2 - b^2)^{1/2}] = 2\pi / \sqrt{(k/m) - (\gamma^2 / 4m^2)} \qquad (18.11)$$

आगे बढ़ने से पहले आइए हम दुर्बलतः अवमंदित दोलक से संबंधित महत्त्वपूर्ण निष्कर्षों को दोहरा लें :

दोहराएं

- दुर्बलतः अवमंदित दोलक के तात्क्षणिक विस्थापन को निम्नलिखित समीकरण द्वारा व्यक्त करते हैं :

  $$x(t) = a(t) \sin \omega_d t$$

  जहां दोलक का आयाम, समय के साथ चरघातांकी रूप से घटता है :

  $$a(t) = a_0 \exp(-bt) \text{ और } a_0 = v_0 / \omega_d$$

- किसी दुर्बलतः अवमंदित निकाय की गति दोलनी तो होती है परंतु सरल आवर्ती नहीं होती। इसके आवर्तकाल का व्यंजक है :

  $$T_d = 2\pi / \sqrt{(k/m) - (\gamma^2 / 4m^2)}$$

दुर्बलतः अवमंदित निकाय से संबंधित विभिन्न राशियों का परिकलन सीखने के लिए अब आप नीचे दिए गए उदाहरण का ध्यानपूर्वक अध्ययन करें।

उदाहरण 18.2 : दुर्बलतः अवमंदित निकाय का दोलन

एक कमानी से लटके m द्रव्यमान वाले पिंड पर क्रमशः kx एवं $\gamma \dfrac{dx}{dt}$ परिमाण वाले प्रत्यानयन एवं घर्षण बल एक साथ कार्यरत हैं। इन बलों के प्रभाव में द्रव्यमान 0.5 Hz आवृत्ति से दोलन करता है और दोलन का आयाम 2 s में आधा हो जाता है। बल नियतांक k, अवमंदन नियतांक γ तथा अवमंदन गुणक b का मान परिकलित करें तथा निकाय के लिए अवकल समीकरण लिखें।

हल ■ चूंकि निकाय पर घर्षण (अथवा अवमंदन) बल कार्यरत है, यह एक अवमंदित निकाय है जो 0.5 Hz आवृत्ति से दोलन करता है। अतः, हम इस अवमंदित दोलक की कोणीय आवृत्ति ω_d को निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$\omega_d = 2\pi f = \pi \text{ s}^{-1}$$

चूंकि निकाय अवमंदित होते हुए भी दोलनी है, यह एक दुर्बलतः अवमंदित निकाय है। किसी क्षण t पर दुर्बलतः अवमंदित निकाय का आयाम, समीकरण (18.9) द्वारा व्यक्त होता है :

$$a(t) = a_0 \exp(-bt)$$

आगे, प्रश्न के अनुसार, दोलन का आयाम 2 s में आधा हो जाता है। इसलिए, हम लिख सकते हैं :

$$(1/2)\, a_0 = a_0 \exp(-2b)$$

या $$\exp(-2b) = 1/2 \quad \Rightarrow \quad \exp(2b) = 2$$

उपरोक्त व्यंजक के दोनों ओर के पदों का प्राकृतिक लघुगणक लेने पर हमें प्राप्त होता है :

$$b = (1/2) \ln 2$$

आगे, हम जानते हैं कि $b = \gamma / 2m$। इसलिए हम लिख सकते हैं :

$$(\gamma / 2m) = (2.303/2) \times \log_{10} 2 = (2.303 \times 0.3010)/2$$

या $$\gamma = 0.6932\, m \qquad \text{(i)}$$

k का मान परिकलित करने के लिए समीकरण (18.10) से आप याद करें कि

$$\omega_d^2 = (k/m) - (\gamma^2 / 4m^2)$$

इसको पुनर्व्यवस्थित करके हम लिख सकते हैं :

$$(k/m) = \omega_d^2 + (\gamma / 2m)^2 = \pi^2 + (0.3466)^2 = 9.98$$

अतः, $$k = 9.9\, m \qquad \text{(ii)}$$

अवमंदित आवर्ती दोलक का अवकल समीकरण, समीकरण (18.3) द्वारा व्यक्त होता है :

$$(d^2x/dt^2) + (\gamma/m)\,(dx/dt) + (k/m)\, x = 0$$

समीकरण (i) एवं समीकरण (ii) से क्रमशः (γ/m) एवं (k/m) के मान इस समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हमें द्रव्यमान m की गति को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण निम्नवत् प्राप्त होता है :

$$(d^2x/dt^2) + 0.693\,(dx/dt) + 9.98\, x = 0$$

अब आप एक बोध प्रश्न का उत्तर देना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 3 – अवमंदित तथा अनवमंदित दोलकों के आवर्तकालों की तुलना

किसी अवमंदित कमानी-द्रव्यमान निकाय के दोलन का आयाम 200 s में 10 cm से घटकर 2.5 cm रह जाता है। यदि यह दोलक इस समयांतराल में 100 दोलन पूरे करता है तो इसके आवर्तकाल की उन दो स्थितियों में तुलना करें जब यह अवमंदित है और जब यह अनवमंदित है।

अब तक आपने पढ़ा कि अति-अवमंदित तथा क्रांतिकतः अवमंदित निकायों की गति अदोलनी होती है। परंतु, दुर्बलतः अवमंदित निकाय की गति दोलनी होती है। इसके दोलन की आवृत्ति, मुक्त या अनवमंदित निकाय की तुलना में कम है। आपने यह भी ध्यान दिया होगा कि दुर्बलतः अवमंदित दोलक का आयाम समय के साथ कम होता जाता है तथा इसके कम होने की दर अवमंदन गुणक, b द्वारा अभिलक्षित होती है। आइये, अब हम दुर्बलतः अवमंदित दोलक की ऊर्जा की चर्चा करें।

दुर्बलतः अवमंदित दोलक की ऊर्जा

भाग 16.4.1 से आप याद करें कि किसी आवर्ती दोलक की औसत ऊर्जा, E_0 का मान निम्न व्यंजक द्वारा व्यक्त किया जाता है :

$$E_0 = (1/2)\,ka^2$$

जहां a दोलन का आयाम है। यह व्यंजक इंगित करता है कि आयाम का मान जितना अधिक होगा, दोलक की औसत ऊर्जा उतनी ही अधिक होगी। जब इस प्रकार के निकाय को अवमंदित किया जाता है तो वह अवमंदन के प्रभाव को नष्ट करने के लिए ऊर्जा व्यय करता है। निकाय की ऊर्जा में होने वाली यह हानि उसके दोलन के आयाम में धीरे-धीरे आने वाली कमी के रूप में प्रकट होती है।

चूंकि आयाम, दोलक की ऊर्जा का माप है, चित्र 18.4 से हमें दुर्बलतः अवमंदित निकाय में ऊर्जा क्षय का कुछ गुणात्मक अनुमान प्राप्त होता है। ध्यान दें कि समय के साथ दोलन धीरे-धीरे समाप्त हो जाते हैं। इसका अर्थ यह हुआ कि अवमंदक बल के विरुद्ध अवमंदित दोलनी निकाय में ऊर्जा हानि की दर अवमंदन गुणक, b के परिमाण द्वारा नियंत्रित होती है।

किसी दुर्बलतः अवमंदित निकाय की औसत ऊर्जा का व्यंजक प्राप्त करने के लिए हम इस तथ्य का उपयोग करते हैं कि किसी मुक्त दोलक की औसत ऊर्जा उसके आयाम के वर्ग के समानुपाती होती है। इस तर्क को दुर्बलतः अवमंदित दोलक के लिए लागू करने पर हम इसकी औसत ऊर्जा के व्यंजक को निम्नवत् लिख सकते हैं :

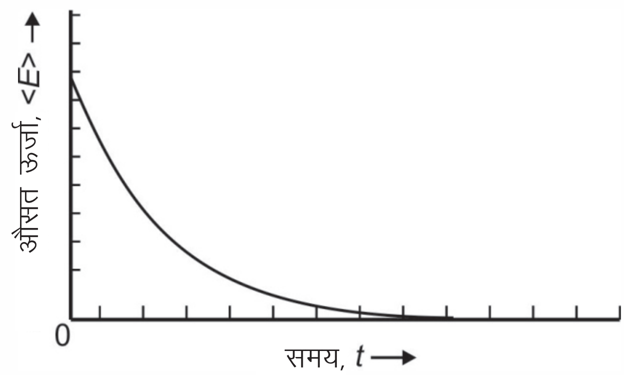
$$< E > \propto a^2 = Ca^2$$

जहां C समानुपातिकता नियतांक है। समीकरण (18.9) का उपयोग करने पर हमें निम्न व्यंजक प्राप्त होता है :

$$< E > = Ca_0^2 \exp(-2bt) = E_0 \exp(-2bt) \qquad (18.12)$$

जहां $E_0 = Ca_0^2$ अनवमंदित दोलक की ऊर्जा है।

समीकरण (18.12) दर्शाता है कि अवमंदित दोलक की **औसत ऊर्जा में कमी की दर** [exp (– 2*bt*)], **आयाम में कमी की दर** [exp (– *bt*)] **की तुलना में अधिक है।** चित्र 18.5 में हमने समय के साथ औसत ऊर्जा में होने वाले परिवर्तन को आरेखित किया है। यदि आप इसकी तुलना चित्र 18.4 में दर्शाए गए आलेख में डैशदार रेखा द्वारा दर्शाए गए इसके आवरण से करेंगे तो आप पाएंगे कि ऊर्जा वक्र की प्रवणता अपेक्षाकृत अधिक है।



चित्र 18.5 : दुर्बलतः अवमंदित निकाय की औसत ऊर्जा में समय के साथ होने वाला परिवर्तन।

अतः, हम निम्नलिखित निष्कर्ष निकाल सकते हैं।

दोहराएं

- एक दुर्बलतः अवमंदित दोलक की औसत ऊर्जा समय के साथ चरघातांकी रूप से घटती है :

$$< E > = E_0 \exp(-2bt)$$

- एक दुर्बलतः अवमंदित दोलक की औसत ऊर्जा में इसके आयाम की अपेक्षा अधिक तेज़ी से कमी आती है।

अब आप एक बोध प्रश्न का उत्तर देना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 4 – एक दुर्बलतः अवमंदित निकाय की गति

1 kg द्रव्यमान वाला एक पिंड एकविम गति करता है। इस पर 4 Nm^{-1} बल नियतांक वाला प्रत्यानयन बल तथा 0.6 Nm^{-1}s अवमंदन नियतांक वाला प्रतिरोधी बल एक साथ कार्यरत हैं।

i) क्या इसकी गति दोलनी होगी?

ii) अवमंदन नियतांक का वह मान परिकलित करें जिसके लिए गति क्रांतिकतः अवमंदित होगी।

iii) दिए गए बलों के लिए पिंड के द्रव्यमान के किस मान के लिए गति क्रांतिकतः अवमंदित हो जाएगी?

अब आप जानते हैं कि दुर्बलतः अवमंदित दोलक एक ऐसी दोलनी गति करते हैं जिसका आयाम समय के साथ लगातार कम होता जाता है। फिर भी, हमें जानना चाहिए कि निकाय में सक्रिय अवमंदन का परिमाण क्या है या वह किस सीमा तक अवमंदित है

चाहे यह अवमंदन क्षीण ही क्यों न हो। इसका कारण यह है कि दुर्बलतः अवमंदित दोलक में अवमंदन का संख्यात्मक माप विविध भौतिक निकायों की गति के अन्वेशण के लिए अत्यंत उपयोगी होता है। अतः, अवमंदित निकाय के अध्ययन का एक महत्त्वपूर्ण पक्ष है दुर्बल अवमंदन को अभिलक्षित करना तथा उसका संख्यात्मक माप प्राप्त करना।

अतः, अब आप इस विषय में पढ़ेंगे।

18.3 दुर्बल अवमंदन के अभिलक्षण

किसी निकाय में विद्यमान अवमंदन का संख्यात्मक आकलन प्राप्त करने के लिए हम तीन प्राचल परिभाषित करते हैं : लघुगणकीय अपक्षय (λ), विश्रांति काल (τ) और गुणता कारक (Q)। ये प्राचल कोणीय आवृत्ति ω_0 एवं अवमंदन गुणक, b के पदों में परिभाषित किए जाते हैं। निकाय की प्रकृति के अनुसार, अवमंदन का परिमाण निर्धारित करने के लिए हम इनमें से एक या अधिक प्राचलों का परिकलन करते हैं। अब हम इन प्राचलों की बारी-बारी चर्चा करेंगे।

18.3.1 लघुगणकीय अपक्षय

अवमंदन को अभिलक्षित करने की इस विधि में हम किसी निकाय में विद्यमान अवमंदन के परिमाण का निर्धारण, समय के साथ दोलन आयाम के ह्रास की दर के पदों में करते हैं। मान लें कि एक दुर्बलतः अवमंदित निकाय को, जो प्रारंभ में साम्यावस्था स्थिति में विरामावस्था में है, एक आवेग प्रदान किया गया है, अर्थात् $t = 0$, पर $x = 0$ तथा $v = v_0$ है। इस दोलक के तात्क्षणिक विस्थापन को दोलन के आवर्तकाल के पदों में निम्नवत् व्यक्त किया जा सकता है (हाशिए में दी गई टिप्पणी पढ़ें) :

$$x(t) = a(t)\sin(2\pi t/T)$$

जहां $a(t) = a_0 \exp(-bt)$ तथा a_0 मुक्त दोलन $(b = 0)$ का आयाम है।

दुर्बलतः अवमंदित निकाय के तात्क्षणिक विस्थान का व्यंजक समीकरण (18.8) द्वारा निरूपित होता है :

$x(t) = a(t) \sin \omega_d t$

b के न्यून मानों के लिए $\omega_d \approx \omega_0$, तथा हम लिख सकते हैं कि

$x(t) = a(t) \sin \omega_0 t$
$= a(t) \sin (2\pi t / 2T)$

अब दुर्बलतः अवमंदित दोलक के आयाम के घटने की दर का व्यंजक प्राप्त करने के लिए आप चित्र 18.4 को पुनः देखें। ध्यान दें कि $t = T/4$ पर विस्थापन बढ़ कर प्रथम उच्चिष्ठ (maximum) मान, जिसे बिंदु A द्वारा निरूपित किया गया है, पर पहुंच जाता है। मान लें कि बिंदु A के संगत आयाम का मान a_1 है। अतः, विस्थापन के उपरोक्त व्यंजक का उपयोग कर हम लिख सकते हैं :

$$x(T/4) = a_0 \exp(-bT/4)\sin[(2\pi/T)\times(T/4)]$$

या $$a_1 = a_0 \exp(-bT/4)$$

चूंकि $\sin(\pi/2) = 1$। एक पूर्ण दोलन, अर्थात् $((T/4)+T)$ समय के बाद विस्थापन फिर उच्चिष्ठ (चित्र 18.4 में बिंदु E) मान प्राप्त करता है। मान लें कि बिंदु E के संगत आयाम का मान a_2 है। ध्यान दें कि दोनों आयाम a_1 तथा a_2 एक ही दिशा/चतुर्थांश में स्थित हैं।

अतः $a(t)$ के व्यंजक में समय के लिए $t = (5T/4)$ का उपयोग करके हम आयाम a_2 के लिए लिख सकते हैं :

$$a_2 = a_0 \exp(-5bT/4)$$

विस्थापन के अगले अधिकतम मान, a_3 की प्राप्ति समय $((5T/4)+T)=(9T/4)$ पर होगी। इसके संगत आयाम (चित्र 18.4 में बिंदु I) a_3 को हम निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$a_3 = a_0 \exp(-9bT/4)$$

इसी प्रकार, हम लिख सकते हैं :

$$a_4 = a_0 \exp(-13bT/4)$$

ध्यान दें कि आवर्तकाल T के अंतर पर प्राप्त होने वाले दो क्रमागत आयामों का अनुपात नियत है :

$$(a_1/a_2)=(a_2/a_3)=(a_3/a_4)= \ldots \quad (a_{n-1}/a_n)=\exp(bT)=d \qquad (18.13)$$

नियतांक d, जो आवर्तकाल T से पृथक्कृत दो क्रमागत आयामों का अनुपात है, गति का अपक्षय कहलाता है। इस अपक्षय अथवा ह्रास का लघुगणक गति का लघुगणकीय अपक्षय कहलाता है। हम लघुगणकीय अपक्षय को λ द्वारा निरूपित करते हैं :

$$\lambda = \ln d = \ln(\exp(bT)) = bT = (\gamma T/2m) \qquad (18.14)$$

ध्यान दें कि λ, अवमंदन गुणक b के साथ-साथ दोलनी निकाय के आवर्तकाल T पर भी निर्भर करता है। समीकरणों (18.13) एवं (18.14) से हम इस निष्कर्ष पर पहुंचते हैं कि

$$(a_1/a_2)=d=\exp(\lambda)$$

$$(a_1/a_3)=(a_1/a_2)\times(a_2/a_3)=d^2=\exp(2\lambda)$$

और इसी प्रकार यह क्रम चलता रहता है। यह परिणाम दर्शाता है कि एक आवर्तकाल के बराबर समय से पृथक्कृत दो क्रमागत आयामों की जानकारी होने पर हम λ का मान ज्ञात कर सकते हैं। परंतु प्रयोगात्मक दृष्टि से n आवर्तकाल के अंतर पर प्राप्त दोलनों के आयामों की तुलना करना अधिक सुविधाजनक होता है। अर्थात् हम (a_1/a_n) का मान ज्ञात करते हैं। इस अनुपात और λ के बीच संबंध प्राप्त किया जा सकता है यदि हम इस अनुपात को निम्नवत् लिखें :

$$(a_1/a_n) = (a_1/a_2)\times(a_2/a_3)\times(a_3/a_4)\times\ldots\times(a_{n-1}/a_n) = \exp[(n-1)\lambda]$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेकर सरलीकरण करने पर हमें निम्न परिणाम प्राप्त होता है :

$$\lambda = [1/(n-1)]\ln(a_1/a_n) \qquad (18.15)$$

यदि आप n के विभिन्न मानों के लिए $\ln(a_1/a_n)$ को y-अक्ष के अनुदिश तथा $(n-1)$ को x-अक्ष के अनुदिश लेकर आलेख आरेखित करें तो आपको एक सरल रेखा प्राप्त होगी। इस सरल रेखा की प्रवणता, लघुगणकीय अपक्षय, λ का मान देती है।

आइये, उपरोक्त परिणामों का उपयोग समझने के लिए अब हम एक उदाहरण हल करें।

उदाहरण *18.3* : एक अवमंदित आवर्ती दोलक का लघुगणकीय अपक्षय

एक अवमंदित आवर्ती दोलक का प्रथम आयाम 20 cm है। 100 दोलनों के बाद आयाम का मान घटकर 2 cm रह जाता है। यदि दोलन का आवर्तकाल 4.6 s है

तो लघुगणकीय अपक्षय और अवमंदन गुणक परिकलित करें। यह भी ज्ञात करें कि कितने दोलनों के बाद आयाम 50 प्रतिशत कम हो जाता है।

हल ■ लघुगणकीय अपक्षय का व्यंजक समीकरण (18.15) द्वारा व्यक्त होता है :

$$\lambda = [1/(n-1)] \ln (a_1 / a_n)$$

प्रश्न के अनुसार, $a_1 = 20$ cm $a_n = 2$ cm और $n = 100$; अतः, हम लिख सकते हैं :

$$\lambda = (1/99) \ln (20\,\text{cm} / 2\,\text{cm}) = (1/99) \ln (10) = 0.023$$

अवमंदन गुणक b के पदों में लघुगणकीय अपक्षय, समीकरण (18.9) द्वारा व्यक्त होता है :

$$\lambda = bT$$

अतः अवमंदन गुणक, b का मान है :

$$b = (\lambda / T) = (0.023 / 4.6\,\text{s}) = 0.005\ \text{s}^{-1}$$

हम जानते हैं कि अवमंदित दोलक का आयाम समीकरण (18.9) द्वारा व्यक्त होता है :

$$a(t) = a_0 \exp(-bt)$$

मान लें कि प्रारंभिक आयाम a_0 है और t_1 सेकंड के बाद यह 50 प्रतिशत कम हो जाता है। ऐसी स्थिति में हम लिख सकते हैं :

$$[a(t_1) / a_0] = \exp(-bt_1)$$

$$(1/2) = \exp(-bt_1)$$

अथवा $$\exp(bt_1) = 2$$

उपरोक्त व्यंजक के दोनों ओर के पदों का लघुगणक लेने पर हमें प्राप्त होता है :

$$bt_1 = \ln (2)$$

अतः, $$t_1 = (\ln(2) / b) = (0.693 / 0.005\,\text{s}^{-1}) \cong 139\ \text{s}$$

चूंकि दोलन काल 4.6 s है, t_1 समय में पूरे होने वाले दोलनों की कुल संख्या है :

$$= (139\,\text{s}/4.6\,\text{s}) \cong 30$$

अतः 30 दोलनों के बाद इस अवमंदित दोलक का आयाम 50 प्रतिशत कम हो जाएगा।

आगे बढ़ने से पहले आपको एक बोध प्रश्न हल करना चाहिए।

बोध प्रश्न 5 – एक सरल लोलक का लघुगणकीय अपक्षय एवं अवमंदन गुणक

किसी सरल लोलक का आवर्तकाल 4 s एवं आयाम 5° है। 30 दोलनों के बाद इसका आयाम घटकर 3° हो जाता है। लघुगणकीय अपक्षय एवं अवमंदन गुणक परिकलित करें। साथ ही, यह भी परिकलित करें कि कितने दोलनों के बाद इसका आयाम 25 प्रतिशत कम हो जाएगा।

18.3.2 विश्रांति काल

विश्रांति काल एक अन्य प्राचल है जिसका उपयोग अवमंदन का परिमाणात्मक निरूपण करने के लिए होता है। विश्रांति काल को τ द्वारा निरूपित करते हैं। विश्रांति काल **वह समय है जिसमें अवमंदित दोलक के आयाम का मान घट कर उसके आरंभिक मान का e^{-1} $(= 0.368)$ गुना रह जाता है।** इसको समझने के लिए, याद करें कि किसी दुर्बलतः अवमंदित आवर्ती दोलक का आयाम समीकरण (18.9) द्वारा व्यक्त होता है :

$$a(t) = a_0 \exp(-bt)$$

अतः, $(t+\tau)$ समय के बाद आयाम को निम्नवत् व्यक्त कर सकते हैं :

$$a(t+\tau) = a_0 \exp[-b(t+\tau)]$$

$a\ (t+\tau)$ तथा $a(t)$ का अनुपात लेने पर हम पाते हैं :

$$[a(t+\tau)/a(t)] = \exp(-b\tau)$$

यदि हम यह मान लें कि $b\tau = 1$, तो हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है :

$$[a(t+\tau)/a(t)] = e^{-1} = (1/e) \qquad (18.16)$$

समीकरण (18.16) से स्पष्ट है कि $b = \tau^{-1}$ के लिए आयाम अपने प्रारंभिक मान का $1/e\ (= 0.368)$ गुना रह जाता है। **अतः, विश्रांति काल, τ एक ऐसा माप है जो इंगित करता है कि दुर्बलतः अवमंदित दोलक का दोलन कितनी शीघ्रता से कम होता है।**

निकाय का एक अन्य प्राचल जो अवमंदन का परिमाणात्मक माप देता है गुणता कारक, Q कहलाता है। आइये, अब इसके बारे में जानें।

18.3.3 गुणता कारक

गुणता कारक निकाय की **ऊर्जा-क्षय की दर** का माप है। किसी दुर्बलतः अवमंदित दोलक के गुणता कारक Q को हम निम्नवत् परिभाषित करते हैं :

$Q =$ (निकाय में संग्रहित ऊर्जा)/(प्रति रेडियन विस्थापन में क्षयित ऊर्जा) (18.17)

उपरोक्त परिभाषा से यह स्पष्ट है कि प्रति रेडियन ऊर्जा-क्षय जितना कम होगा, अवमंदित निकाय के लिए Q का मान उतना ही अधिक होगा। इसका तात्पर्य यह है कि यदि किसी निकाय के लिए Q का मान अधिक है तो निकाय में अवमंदन अपेक्षाकृत कम होता है तथा इस कारण ऊर्जा-क्षय भी कम होता है।

अब आप पूछ सकते हैं कि हमने गुणता कारक को **प्रति रेडियन ऊर्जा-क्षय** के पदों में क्यों परिभाषित किया है? इसका अर्थ समझने के लिए याद करें कि एक पूर्ण दोलन में कोई दोलक 2π रेडियन कोणीय दूरी तय करता है। अतः, एक पूर्ण दोलन चक्र में ऊर्जा-क्षय से तात्पर्य 2π रेडियन कोणीय दूरी तय करने में ऊर्जा-क्षय ही है। हमने प्रति चक्र ऊर्जा-क्षय के स्थान पर प्रति रेडियन ऊर्जा-क्षय गणितीय सुविधा की दृष्टि से लिया है और यह बात शीघ्र ही स्पष्ट हो जाएगी।

चर्चा को जारी रखने के लिए आप याद करें कि अवमंदित निकाय की औसत ऊर्जा समीकरण (18.12) द्वारा व्यक्त होती है :

$$\langle E \rangle = E_0 \exp(-2bt)$$

जहां E_0 अनवमंदित निकाय की ऊर्जा है।

आगे, मान लें कि E_1 किसी समय t पर अवमंदित दोलक की औसत ऊर्जा है तथा E_2 एक आवर्तकाल अर्थात् $(t+T)$ समय के बाद इसकी औसत ऊर्जा है। अतः, उपरोक्त समीकरण का उपयोग करके हम लिख सकते हैं :

$$E_1 = E_0 \exp(-2bt) \quad \text{तथा} \quad E_2 = E_0 \exp\{-2b(t+T)\}$$

चरघातांकीय फलन की घातांक श्रेणी विस्तार को निम्नवत् लिखा जाता है :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$x << 1$, के लिए

$$e^{-x} \cong 1 - x$$

दुर्बल अवमंदन के लिए हम मान सकते हैं कि $2\,bT << 1$ और हम लिख सकते हैं :

$$\exp(-2\,bT) = 1 - 2bT$$

अतः, E_2 एवं E_1 का अनुपात लेकर हम लिख सकते हैं (हाशिए में दी गई टिप्पणी पढ़ें) :

$$(E_2 / E_1) = \exp(-2\,bT) \cong 1 - 2\,bT$$

अथवा

$$(E_1 - E_2)/E_1 = 2\,bT \tag{18.18}$$

समीकरण (18.18) में बाएं पक्ष के पद का अंश दोलक द्वारा एक पूर्ण दोलन में हुई ऊर्जा-क्षय, $E_1 - E_2$ है। परंतु समीकरण (18.17) के अनुसार Q का व्यंजक लिखने के लिए हमें प्रति रेडियन ऊर्जा-क्षय का मान मालूम होना चाहिए। अतः, हम समीकरण (18.18) के दोनों पक्षों को 2π से विभाजित करके निम्नवत् लिखते हैं :

$$[(E_1)/[(E_1 - E_2)/2\pi]] = (1/2bT) \times 2\pi = (\omega_0 / 2b) \tag{18.19}$$

समीकरण (18.17) एवं (18.19) की तुलना करने पर हम लिख सकते हैं :

$$Q = (\omega_0 / 2b) \tag{18.20}$$

समीकरण (18.20) दुर्बलतः अवमंदित दोलक के **गुणता कारक** का वांछित व्यंजक है। ध्यान दें कि Q तथा b एक-दूसरे के व्युत्क्रमानुपाती हैं। अतः, जैसे-जैसे निकाय का अवमंदन बढ़ता है या अवमंदन गुणक b का मान बढ़ता है, गुणता कारक का मान कम होता जाता है। आगे, $\omega_0 (= \sqrt{k/m})$ तथा $2b\ (= \gamma / m)$ के मान समीकरण (18.20) में प्रतिस्थापित करने पर हम Q को निम्नवत् व्यक्त कर सकते हैं :

$$Q = (\omega_0 / 2b) = (m/\gamma) \times \sqrt{(k/m)} = \sqrt{(km/\gamma^2)} \tag{18.21}$$

समीकरण (18.21) अवमंदित दोलक के गुणता कारक को निकाय के द्रव्यमान m, बल नियतांक k एवं अवमंदन नियतांक γ के पदों में व्यक्त करता है। समीकरण (18.20) तथा समीकरण (18.21) से यह भी स्पष्ट है कि Q एक विमाविहीन राशि है। इस तथ्य के कारण इसको किसी भी दोलक के लिए परिभाषित किया जा सकता है चाहे वह यांत्रिक हो या फिर वैद्युत।

हम दोलक के गुणता कारक Q और इसके विश्रांति काल τ के बीच भी संबंध प्राप्त कर सकते हैं। भाग 18.3.2 में आप पढ़ चुके हैं कि $b = 1/\tau$। समीकरण (18.20) में b का यह मान प्रतिस्थापित करने पर हम लिख सकते हैं :

$$Q = (\omega_0 \tau / 2) \tag{18.22}$$

इस प्रकार, हम पाते हैं कि गुणता कारक एवं विश्रांति काल एक-दूसरे के समानुपाती हैं। यह अपेक्षित भी है क्योंकि ये दोनों ही प्राचल निकाय में अवमंदन का परिमाण लक्षित करते हैं।

उन दोलनी निकायों, जैसे कि द्वार बंद करने वाली युक्ति या प्रघात-अवशोषक, जहां अवमंदन की महत्त्वपूर्ण भूमिका होती है, गुणता कारक का मान लगभग 0.5 होता है। दूसरी ओर स्वरित्र द्विभुज के Q का मान लगभग 1000 होता है। क्या आप एक दोलनी निकाय के Q के मान का अनुमान लगा सकते हैं? समीकरण (18.20) से आप सरलता से इस निष्कर्ष पर पहुंच सकते हैं कि अनवमंदित दोलक ($b = 0$) के लिए Q का मान अनंत होता है।

अब हम इस भाग के महत्त्वपूर्ण परिणामों को एक बार दोहराएं।

दोहराएं

- एक आवर्तकाल समयांतराल से पृथक्कृत दो क्रमागत आयामों के अनुपात को दोलनी गति का अपक्षय कहते हैं। इस अपक्षय के लघुगणक को अवमंदित दोलनी गति का लघुगणकीय अपक्षय कहते हैं तथा इसे निम्नलिखित व्यंजक द्वारा व्यक्त किया जाता है :

  $$\lambda = [1/(n-1)] \ln (a_1 / a_n)$$

  जहाँ n पूर्ण दोलनों की संख्या है।
- विश्रांति काल, τ समय का वह मान है जिसमें अवमंदित दोलक का आयाम घटकर अपने आरंभिक मान का e^{-1} (= 0.368) गुना रह जाता है। इसका व्यंजक है : $\tau = 1/b$
- गुणता कारक Q को अवमंदित दोलक की ऊर्जा-क्षय की दर के रूप में परिभाषित करते हैं। इसका व्यंजक है : $Q = \omega_0 / 2b$

ऊपर बताए गए कुछ प्राचलों के प्रारूपिक मानों की जानकारी प्राप्त करने के लिए आपको नीचे दिए गए उदाहरण का ध्यानपूर्वक अध्ययन करना चाहिए।

उदाहरण *18.4*: एक तंतुयुक्त संगीत वाद्ययंत्र का विश्रांति काल और गुणता कारक

किसी तंतुयुक्त वाद्ययंत्र के तंतु के कर्षण के कारण उत्पन्न ध्वनि की तीव्रता 8s में घटकर आधी रह जाती है। तंतु की प्राकृतिक आवृत्ति 512 Hz है। (i) विश्रांति काल, (ii) गुणता कारक तथा (iii) ऊर्जा में प्रति दोलन आंशिक क्षय परिकलित करें।

हल ■ हम जानते हैं कि ध्वनि की तीव्रता $I(t)$, ध्वनि उत्पन्न करने वाले दोलनों की ऊर्जा $E(t)$ के समानुपाती होती है। अतः, हम लिख सकते हैं :

$$I(t) \propto E(t)$$

(i) समीकरण (18.12) में $b = \tau^{-1}$ का उपयोग कर हम लिख सकते हैं :

$$E(t) = E_0 \exp(-2t/\tau)$$

या $$[E(t)/E_0] = \exp(-2t/\tau)$$

अतः, $$\tau = [2t / \ln (E_0 / E(t)] = [16\,\text{s}/\ln(2)] = 23.1\ \text{s}$$

(ii) गुणता कारक Q का व्यंजक समीकरण (18.20) के अनुसार निम्नवत् है :

$$Q = (\omega_0 / 2b) = (\omega_0 \tau / 2) = \pi \times 512 \times 23.1 = 37137.5$$

(iii) समीकरण (18.18) का उपयोग कर हम ऊर्जा में होने वाले आंशिक क्षय को निम्नवत् व्यक्त कर सकते हैं :

$$(\Delta E / E) = (2\pi / Q) = (2\pi / 37137.5) = 1.69 \times 10^{-4}$$

अब आप एक बोध प्रश्न का उत्तर देना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 6 – अवमंदन को अभिलक्षित करने वाले प्राचल

एक द्रव्यमानहीन कमानी का ऊपरी सिरा एक दृढ़ आधार से बंधा है। इसके निचले सिरे पर 200 g द्रव्यमान की एक क्षैतिज चकती लगी है। यह देखा जाता है कि यह निकाय 10 Hz की आवृत्ति से दोलन करता है और इसके अवमंदित दोलनों का आयाम एक मिनट में अपने अवमंदन-रहित मान का आधा रह जाता है। (i) अवमंदन नियतांक, (ii) विश्रांति काल, (iii) निकाय का गुणता कारक तथा (iv) कमानी का बल नियतांक परिकलित करें।

आइए, अब इस इकाई में आपने जो कुछ पढ़ा है, उसका सारांश दें।

18.4 सारांश

अवधारणा	विवरण
अवमंदित दोलक का गति समीकरण	■ **अवमंदित दोलक** का **गति समीकरण** निम्नलिखित है : $$\frac{d^2x}{dt^2}+2b\frac{dx}{dt}+\omega_0^2\,x=0$$ जहां $2b=\gamma/m$ और $\omega_0^2=k/m$
प्रबल अवमंदन के लिए हल	■ **प्रबल अवमंदन** $(b>\omega_0)$ की स्थिति में उपरोक्त गति समीकरण का **हल** है : $$x(t)=(v_0/2\,\beta)\exp(-bt)[\exp(\beta t)-\exp(-\beta t)]$$ जहां $\beta=\sqrt{b^2-\omega_0^2}$
क्रांतिक अवमंदन	■ **क्रांतिक अवमंदन** $(b=\omega_0)$ की स्थिति में अवमंदित दोलक के तात्क्षणिक विस्थापन का व्यंजक है: $$x(t)=(p+qt)\exp(-bt)$$
दुर्बल अवमंदन	■ **दुर्बल अवमंदन** $(b<\omega_0)$ की स्थिति में अवमंदित दोलक के तात्क्षणिक विस्थापन का व्यंजक है: $$x(t)=a_0\exp(-bt)\cos(\omega_d t-\pi/2)=a(t)\sin\omega_d t$$
आयाम और औसत ऊर्जा	■ दुर्बलतः अवमंदित दोलक का **आयाम** तथा **औसत ऊर्जा** समय के साथ चरघातांकी रूप से घटते हैं : $$a(t)=a_0\exp(-bt)$$ और $$\langle E\rangle=E_0\exp(-2bt)$$ जहां a_0 दोलक का आरंभिक आयाम है तथा E_0 अनवमंदित दोलक की ऊर्जा है।

दुर्बलतः अवमंदित दोलक का आवर्तकाल

■ दुर्बलतः अवमंदित निकाय के **आवर्तकाल** का व्यंजक है :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{(\omega_0^2 - b^2)^{1/2}} = \frac{2\pi}{\left(\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}\right)^{1/2}}$$

दुर्बल अवमंदन के अभिलक्षण; लघुगणकीय अपक्षय

■ एक दुर्बलतः अवमंदित दोलक लघुगणकीय अपक्षय, विश्रांति काल तथा गुणता कारक द्वारा **अभिलक्षित** होता है। **लघुगणकीय अपक्षय** λ को एक आवर्तकाल से पृथक्कृत दो क्रमागत आयामों के अनुपात के लघुगणक के रूप में परिभाषित करते हैं। इसका व्यंजक है :

$$\lambda = \frac{1}{(n\text{-}1)} \ln\left(\frac{a_1}{a_n}\right)$$

विश्रांति काल

■ **विश्रांति काल** τ को उस समय के रूप में परिभाषित करते हैं जिसमें अवमंदित दोलक का आयाम, इसके अधिकतम मान का e^{-1} गुना अर्थात् अधिकतम मान का 36.8% रह जाता है। विश्रांति काल, τ और अवमंदन गुणक b परस्पर इस प्रकार संबंधित हैं : $\tau = 1/b$

गुणता कारक

■ किसी दुर्बलतः अवमंदित दोलक के **गुणता कारक** Q को निकाय में संचित ऊर्जा तथा प्रति रेडियन ऊर्जा-क्षय के अनुपात के रूप में परिभाषित करते हैं। इसका व्यंजक है :

$$Q = \frac{\omega_0}{2b} = \frac{\omega_0 \tau}{2}$$

18.5 अंत में कुछ प्रश्न

1. एक अवमंदित आवर्ती दोलक का गति समीकरण निम्नलिखित है :

   $$m(d^2x/dt^2) + \gamma(dx/dt) + kx = 0$$

   जिसमें $m = 0.25\ \text{kg}, \gamma = 0.070\ \text{kg s}^{-1}$ तथा $k = 85\ \text{Nm}^{-1}$ हैं। (i) दोलन का आवर्तकाल, (ii) दोलनों की संख्या जिसके बाद दोलक का आयाम घटकर उसके आरंभिक मान का आधा हो जाता है, (iii) दोलनों की संख्या, जिसके बाद दोलक की यांत्रिक ऊर्जा का मान इसके आरंभिक मान का आधा हो जाता है तथा (iv) दोलक का गुणता कारक परिकलित करें।

2. एक कमानी से जुड़ा ब्लॉक आरंभिक आयाम 12 cm के साथ दोलन करता है। 2.4 मिनट के बाद आयाम का मान घटकर 6 cm हो जाता है। (i) समय का वह मान परिकलित करें जिसके बाद आयाम का मान 3 cm रह जाएगा तथा (ii) इस गति के संगत अवमंदन नियतांक γ का मान परिकलित करें।

3. एक सरल लोलक का आवर्तकाल 2 s तथा इसका आयाम 5° है। 20 पूर्ण दोलनों के बाद इसका आयाम घटकर 4° रह जाता है। अवमंदन गुणक तथा विश्रांति काल परिकलित करें।

4. किसी सोनोमीटर तार का गुणता कारक 4,000 है। तार 300 Hz आवृत्ति से दोलन करता है। समय का वह मान परिकलित करें जिसके बाद इसके आयाम का मान अपने आरंभिक मान का आधा रह जाएगा।

5. यांत्रिक ऊर्जा की परिभाषा $E(t) = K.E.(t) + P.E.(t)$ से आरंभ कर सिद्ध करें कि किसी अवमंदित दोलक के लिए

$$E(t) = E_0 \exp(-2bt)$$

जहां E_0 अनवमंदित दोलक की ऊर्जा है।

6. 512 Hz आवृत्ति वाले स्वरित्र द्विभुज के गुणता कारक का मान 6×10^4 है। मान लें कि इसकी आरंभिक ऊर्जा का मान E_0 है। समय का वह मान परिकलित करें जिसके बाद इसकी ऊर्जा घटकर $E_0 e^{-1}$ रह जाती है। इस समय में स्वरित्र द्विभुज कितने दोलन करेगा?

7. एक कमानी का एक छोर दृढ़ आधार से बंधा है तथा इसके दूसरे छोर से 0.2 kg द्रव्यमान वाला एक डिब्बा जुड़ा है। जब 0.8 kg द्रव्यमान का एक पिंड डिब्बे में रखा जाता है तो निकाय प्रति सेकंड 4 दोलन करता है तथा 30 s में आयाम 2 cm से घटकर 1 cm हो जाता है। इस निकाय का (i) बल नियतांक, (ii) विश्रांति काल तथा (iii) गुणता कारक परिकलित करें।

8. एक श्यान द्रव माध्यम में 1 kg द्रव्यमान को ऊर्ध्वाधरतः $5\ \text{ms}^{-1}$ चाल से ऊपर खींचने में 60 N स्थायी बल लगता है। यह मान कर कि श्यानता का प्रभाव वेग के समानुपाती है, समानुपातिकता नियतांक परिकलित करें। इसी द्रव में इस द्रव्यमान को $50\ \text{Nm}^{-1}$ बल नियतांक वाली कमानी से लटकाया जाता है। कमानी का साम्य-वर्धन परिकलित करें। अब द्रव्यमान को नीचे की ओर खींच कर छोड़ दिया जाता है। जिसके फलस्वरूप द्रव्यमान लगातार घटते हुए आयाम वाली दोलनी गति करता है। अवमंदन नियतांक तथा दोलन का आवर्तकाल परिकलित करें। मान लें कि $g = 10\ \text{ms}^{-2}$ है।

18.6 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. दिए गए समीकरण की तुलना समीकरण (18.3), जो अवमंदित आवर्ती दोलक का गति समीकरण है, से करने पर हम पाते हैं कि $b = 10$ तथा $\omega_0 = 5$ है। चूंकि $b > \omega_0$, दिया गया समीकरण एक अदोलनी गति निरूपित करता है। अतः यह एक प्रबलतः अवमंदित दोलक है।

2. भाग 18.2.3 से हम जानते हैं कि

$$x(t) = a \exp(-bt)$$

समीकरण (18.3) का पूर्ण हल निरूपित नहीं करता। मान लें कि समीकरण (18.3) का एक अन्य हल निम्नवत् है :

$$x(t) = qt \exp(-bt)$$

$x(t)$ के उपरोक्त व्यंजक के आधार पर dx/dt तथा d^2x/dt^2 का मान परिकलित कर उन्हें समीकरण (18.3) में रखने पर हम पाते हैं कि यह समीकरण संतुष्ट होता है। अतः, अध्यारोपण सिद्धांत के अनुसार हम समीकरण (18.3) के पूर्ण हल को उपरोक्त हलों के योग के रूप में लिख सकते हैं :

$$x(t) = (p + qt) \exp(-bt)$$

ध्यान दें कि गुणक a को $(p + qt)$ द्वारा प्रतिस्थापित कर दिया गया है जहां p तथा q नियतांक हैं।

3. दिए गए अवमंदित कमानी-द्रव्यमान निकाय का आवर्तकाल

$$T_d = (200\,\text{s}/100) = 2\,\text{s} \qquad \text{(i)}$$

प्रश्न के अनुसार, अवमंदित होने के बावजूद निकाय दोलनी है। यह तभी संभव है जब निकाय दुर्बलतः अवमंदित हो। अतः हम लिख सकते हैं कि

$$T_d = (2\pi / \omega_d) = [2\pi / (\omega_0^2 - b^2)^{1/2}] \qquad \text{(ii)}$$

समीकरणों (i) तथा (ii) से हम पाते हैं कि $\omega_0^2 = \pi^2 + b^2$ अतः, अनवमंदित दोलक का आवर्तकाल हम निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$T = (2\pi / \omega_0) = [2\pi / (\pi^2 + b^2)^{1/2}] \qquad \text{(iii)}$$

b का मान परिकलित करने के लिए हम दुर्बलतः अवमंदित निकाय के लिए तात्क्षणिक आयाम के व्यंजक का उपयोग करते हैं :

$$a(t) = a_0 \exp(-bt)$$

दोनों ओर का लघुगणक लेने पर उपरोक्त व्यंजक निम्नवत् लिखा जा सकता है :

$$b = (1/t) \ln [a_0 / a(t)]$$

प्रश्न में दिए गए t, a_0 तथा a का मान रखने पर हम पाते हैं :

$$b = (1/200\,\text{s}) \ln (10\,\text{cm}/2.5\,\text{cm}) = (2.3/200\,\text{s}) \log_{10} 4 = 6.9 \times 10^{-3}\,\text{s}^{-1} \quad \text{(iv)}$$

समीकरण (iv) को समीकरण (iii) में रखने पर हमें निम्न परिणाम प्राप्त होता है :

$$T = (2\pi / [\pi^2 + (6.9 \times 10^{-3})^2]^{1/2}) \approx 2.0\,\text{s} \approx T_d$$

अतः, हम पाते हैं कि दुर्बलतः अवमंदित निकाय का आवर्तकाल दोनों ही स्थितियों – अवमंदन की उपस्थिति में तथा अवमंदन की अनुपस्थिति में – लगभग बराबर है।

4. प्रश्न के अनुसार, द्रव्यमान $m = 1\,\text{kg}$, बल नियतांक $k = 4\,\text{Nm}^{-1}$ तथा अवमंदन नियतांक $\gamma = 0.6\,\text{Nsm}^{-1}$ है। अतः, अवमंदन गुणक b का मान निम्नवत् होगा :

$$b = (\gamma / 2m) = (0.6\,\text{Nsm}^{-1} / 2\,\text{kg}) = 0.3\,\text{s}^{-1}$$

तथा अवमंदन की अनुपस्थिति में कोणीय आवृत्ति का मान निम्न होगा :

$$\omega_0 = \sqrt{(k/m)} = 2\,\text{s}^{-1}$$

i) इन परिमाणों से हम पाते हैं कि $\omega_0 > b$ है। इसका अर्थ है कि निकाय दुर्बलतः अवमंदित है तथा गति दोलनी है।

ii) अवमंदन गुणक b का मान परिवर्तित कर अवमंदन का परिमाण परिवर्तित किया जा सकता है। आगे, हम जानते हैं कि क्रांतिक अवमंदन की शर्त है : $\omega_0 = b$. अतः, क्रांतिक अवमंदन की स्थिति प्राप्त करने के लिए हमें b का मान इस प्रकार परिवर्तित करना होगा जिससे कि $b = 2\text{s}^{-1}$ $(= \omega_0)$ हो जाए। b के इस मान के संगत अवमंदन नियतांक γ का मान होगा :

$$\gamma = 2mb = 2 \times (1\,\text{kg}) \times (2\,\text{s}^{-1}) = 4\,\text{Nsm}^{-1}$$

iii) m का मान बदलकर तथा γ का मान अपरिवर्तित रखकर निकाय को क्रांतिकतः अवमंदित बनाया जा सकता है। यदि क्रांतिक अवमंदन की स्थिति के संगत

द्रव्यमान का नया मान m' है तथा γ का मान अपरिवर्तित है तो

$$\omega_0 = \sqrt{k/m'} \quad \text{तथा} \quad b = (\gamma/2m')$$

और, जैसा कि हम जानते हैं, क्रांतिकतः अवमंदित निकाय के लिए $\omega_0 = b$।
अतः, हम पाते हैं :

$$\sqrt{(k/m')} = (\gamma/2m')$$

$$m' = (\gamma^2/4k) = [(0.6\,\text{Ns m}^{-1})^2/4\times(4\,\text{N m}^{-1})] = 0.0225\ \text{kg} = 22.5\ \text{g}$$

5. हम जानते हैं कि लघुगणकीय अपक्षय λ का व्यंजक समीकरण (18.25) द्वारा व्यक्त होता है :

$$\lambda = [1/(n-1)]\ \ln(a_1/a_n)$$

प्रश्न के अनुसार, $a_1 = 5°$, $a_n = 3°$ तथा $n = 30$ अतः, हम लिख सकते हैं :

$$\lambda = (1/29)\ln(5°/3°) = (1/29)\ln(5/3)$$

$$= (0.511/29) = 0.018$$

आगे, अवमंदन गुणक b तथा लघुगणकीय अपक्षय, λ परस्पर समीकरण (18.24) द्वारा संबंधित है :

$$\lambda = bT \quad \Rightarrow \quad b = (\lambda/T) = (0.018/4\,\text{s}) = 0.01\,\text{s}^{-1}$$

दोलनों की वह संख्या जानने के लिए जिसमें आयाम 25% कम हो जाता है, हम समीकरण (18.10) का उपयोग करते हैं जो अवमंदित दोलक के आयाम का समय के साथ परिवर्तन व्यक्त करता है :

$$a(t) = a_0\ \exp(-bt)$$

मान लें कि समय t_1 में आयाम 25% कम हो जाता है। अतः, हम लिख सकते हैं :

$$\frac{a(t_1)}{a_0} = \frac{3}{4}$$

अतः $\quad (3/4) = \exp(-bt_1) \quad \Rightarrow \quad bt_1 = \ln(4/3)$

$\Rightarrow \quad t_1 = (1/b)\ln(4/3) = (0.285/0.01\,\text{s}^{-1}) \cong 57\ \text{s}$

अतः, 57 s में आयाम 25% कम हो जाएगा। चूंकि लोलक का आवर्तकाल 4 s है, इस समय अंतराल में किए गए पूर्ण दोलनों की संख्या होगी :

$$(57\,\text{s}/4\,\text{s}) \cong 14$$

अतः 14 दोलनों के बाद आयाम 25% कम हो जाएगा।

6. दुर्बलतः अवमंदित दोलक की कोणीय आवृत्ति का व्यंजक है :

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - b^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_0^2 = \omega_d^2 + b^2$$

आगे, अवमंदित दोलक की कोणीय आवृत्ति को निम्नवत् भी व्यक्त कर सकते हैं :

$$\omega_d = 2\pi f = 2\pi\times 10\ \text{s}^{-1} = 20\pi\ \text{s}^{-1}$$

मान लें कि अनवमंदित आयाम का मान a_0 है। समय t पर अवमंदित आयाम $a(t)$ का मान $a_0 \exp(-bt)$ है। वर्तमान स्थिति में $t = 60\,\text{s}$। अतः, हम लिख सकते हैं :

$$a(60\,\text{s}) = (a_0/2) = a_0 \exp(-60b)$$

$$\therefore \quad b = (1/60) \ln 2 = 0.01\,\text{s}^{-1}$$

i) प्रतिरोधी बल नियतांक या अवमंदन नियतांक का मान है :

$$\gamma = 2\,mb = 2 \times (0.2\,\text{kg}) \times (0.01\,\text{s}^{-1}) = 4.8 \times 10^{-3}\,\text{Nsm}^{-1}$$

ii) विश्रांति काल $\tau = (1/b) = (60/\ln 2) = 86.6\,\text{s}$

iii) गुणता कारक $Q = (\omega_d \tau/2)$

$$\therefore \quad Q = (20\pi\,\text{s}^{-1} \times 86.6\,\text{s})/2 = 2720$$

iv) कमानी का बल नियतांक

$$k = \omega_0^2 m = m\,(\omega_d^2 + b^2)$$

$$= (0.2\,\text{kg}) \times [(400\,\pi^2\,\text{s}^{-2}) + (.01\,\text{s}^{-1})^2] = 790\,\text{Nm}^{-1}$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. दिए गए अवमंदित आवर्ती दोलक के लिए $m = 0.25\,\text{kg}$, $\gamma = 0.070\,\text{kgs}^{-1}$ तथा $k = 85\,\text{Nm}^{-1}$ है। प्राचलों के इन मानों से स्पष्ट है कि $b < \omega_0$ जिसका अर्थ है कि अवमंदित दोलक, दुर्बलतः अवमंदित है।

   i) दुर्बलतः अवमंदित दोलक का आवर्तकाल समीकरण (18.11) द्वारा व्यक्त होता है :

$$T_d = 2\pi/\sqrt{(k/m) - (\gamma/2m)^2}$$

$$= (2\pi)/[((85\,\text{N m}^{-1})/(0.25\,\text{kg})) - ((0.070\,\text{kg s}^{-1})/(2 \times 0.25\,\text{kg}))^2]$$

$$= (2\pi/\sqrt{(340 - 1.96 \times 10^{-2})\,\text{s}^{-2}})$$

$$= (2\pi/18.44\,\text{s}^{-1}) = 0.34\,\text{s}$$

   ii) हम जानते हैं कि अवमंदित दोलक का आयाम निम्नवत् लिखा जा सकता है :

$$a(t) = a_0 \exp(-bt) = a_0 \exp(-\gamma t/2m)$$

   प्रश्न के अनुसार,

$$[a(t)/a_0] = (1/2) = \exp(-\gamma t/2m)$$

   उपरोक्त समीकरण के दोनों ओर लघुगणक लेने तथा पदों को पुर्नव्यवस्थित करने पर हम पाते हैं :

$$t = (2m \ln 2/\gamma) = (2 \times (0.25\,\text{kg}) \times 0.693)/(0.070\,\text{kg s}^{-1}) = 4.95\,\text{s}$$

   चूंकि दोलक का आवर्तकाल 0.34 s है, आयाम $4.95\,\text{s}/0.34\,\text{s} \approx 15$ दोलनों के बाद आधा हो जाएगा।

iii) समीकरण (18.12) से हम जानते हैं कि अवमंदित आवर्ती दोलक की औसत ऊर्जा का व्यंजक है :

$$< E > = E_0 \exp(-bt) = E_0 \exp(-\gamma t/2m)$$

$$\therefore \qquad [< E > / E_0] = \exp(-\gamma t/2m)$$

$[< E > / E_0] = (1/2)$ के लिए हम लिख सकते हैं :

$$\frac{1}{2} = \exp(-\gamma t/2m)$$

उपरोक्त व्यंजक के दोनों ओर प्राकृतिक लघुगणक लेने तथा पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर हम लिख सकते हैं :

$$t = (m\ln 2/\gamma) = [(0.25\,\text{kg}) \times 0.693]/0.070\,\text{kg s}^{-1} = 2.48\,\text{s}$$

चूंकि दोलक का आवर्तकाल $T = 0.34\,\text{s}$ है, हम पाते हैं कि दोलक की ऊर्जा का मान $2.48\,\text{s}/0.34 \approx 7$ दोलनों के बाद अपने आरंभिक मान का आधा हो जाएगा।

iv) समीकरण (18.22) से हम जानते हैं कि किसी अवमंदित आवर्ती दोलक के गुणता कारक Q का व्यंजक है :

$$Q = (\omega_0 m/\gamma)$$

क्योंकि $\tau = (1/b) = (2m/\gamma)$। विभिन्न राशियों के मान रखने पर हम पाते हैं :

$$Q = [(18.44\,\text{s}^{-1}) \times (0.25\,\text{kg})]/0.070\,\text{kg s}^{-1} \approx 66$$

ω_0 का मान i) के हल से लिया गया है जहां हमने निम्नलिखित संबंध का उपयोग किया है :

$$T = (2\pi/\omega_d) \approx (2\pi/\omega_0)$$

2. चूंकि दोलक का आयाम समय के साथ घटता है, यह एक अवमंदित दोलक है। आगे, किसी अवमंदित दोलक के आयाम का व्यंजक है :

$$a(t) = a_0 \exp(-bt) \qquad \text{(i)}$$

या $\qquad \exp(bt) = [a_0/a(t)] \quad \Rightarrow \quad b = (1/t)\ln[a_0/a(t)] \qquad$ (ii)

प्रश्न के अनुसार,

$$a(t = 2.4\text{ min}) = 6\text{ cm} = 0.06\text{ m}$$

$$a_0 = 12\text{ cm} = 0.12\text{ m}$$

$$t = 2.4\text{ min} = 144\,\text{s}$$

इन मानों को समीकरण (ii) में रखने पर हम पाते हैं : :

$$b = (1/144\,\text{s})\ln(0.12\text{ m}/0.06\text{ m}) = 4.81 \times 10^{-3}\,\text{s}^{-1}$$

i) समय का वह मान, जिसमें आयाम घटकर 3 cm हो जाता है, परिकलित करने के लिए हम लिखते हैं :

$$a(t) = 3\text{ cm} = 0.03\text{ m}$$

अतः समीकरण (i) से हम लिख सकते हैं :

$$a(t) = a_0 \exp(-bt)$$

$$t = (1/b)\ln[a_0 / a(t)] = (1/4.81\times 10^{-3}\ s^{-1})\ln(0.12\ m/0.03\ m)$$

$$= 288.2\ s = 4.8\ min$$

(ii) अवमंदन गुणक का व्यंजक है :

$$\gamma = 2bm$$

$$= 2\times(4.81\times 10^{-3}\ s^{-1})\times(1kg)$$

$$= 9.61\times 10^{-3}\ Nsm^{-1}$$

3. किसी सरल लोलक के आयाम (कोणीय विस्थापन) में अवमंदन के कारण उत्तरोत्तर कमी को निम्नवत् निरूपित कर सकते हैं :

$$\theta = \theta_0 \exp(-bt)$$

$$\Rightarrow \qquad b = (1/t)\ln(\theta_0/\theta)$$

प्रश्न के अनुसार, $\theta_0 = 5°$, $\theta(t) = 4°$ तथा $T = 2s$. । चूँकि आयाम के मान में क्षय 20 दोलनों के दौरान होता है, दोलक द्वारा इतने दोलन करने में लिया गया समय होगा : $20 \times 2s = 40$ s. अतः, $t = 40$ s.

$\theta_0, \theta(t)$ तथा t के मान रखने पर हम पाते हैं :

$$b = (1/40\ s)\ln(5/4) = 5.58\times 10^{-3}\ s^{-1}$$

तथा विश्रांति काल, τ निम्नवत् व्यक्त होता है :

$$\tau = (1/b) = 179.3\ s$$

4. चूँकि एक दुर्बलतः अवमंदित निकाय के गुणता कारक, Q का व्यंजक है : $Q = (\omega_0\tau/2)$, हम विश्रांति काल, τ को निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$\tau = (2Q/\omega_0) = (2\times 4000/2\pi\times 300\ s^{-1}) = 4.24\ s$$

आगे, समय t पर अवमंदित दोलक का आयाम, $a(t)$ का व्यंजक है :

$$a(t) = a_0 \exp(-bt) = a_0 \exp(-t/\tau)$$

अतः, $t = \tau \ln(a_0/a) = (4.24\ s)\times \ln(2) = 2.94$ s

5. प्रश्न के अनुसार,

$$E(t) = K.E.(t) + P.E.(t)$$

$$= (1/2)m\,(dx/dt))^2 + (1/2)\,kx^2 \qquad \text{(i)}$$

जहाँ dx/dt तात्क्षणिक वेग निरूपित करता है। एक दुर्बलतः अवमंदित आवर्ती दोलक के तात्क्षणिक विस्थापन का व्यंजक है :

$$x(t) = a_0 \exp(-bt)\cos(\omega_d + \phi)$$

उपरोक्त व्यंजक को समय के सापेक्ष अवकलित करने पर हमें तात्क्षणिक वेग प्राप्त होता है :

$$(dx/dt) = a_0 \exp(-bt)\,[b\cos(\omega_d t + \phi) + \omega_d \sin(\omega_d t + \phi)] \qquad \text{(ii)}$$

अतः, दिए गए दोलक की गतिज ऊर्जा है :

$$K.E. = (1/2)m\,(dx/dt)^2$$

$$= (1/2)\,m\,a_0^2\,\exp(-2bt)\,[b\cos(\omega_d t + \phi) + \omega_d \sin(\omega_d t + \phi)]^2$$

$$= (1/2)\,m\,a_0^2\,\exp(-2bt)\,[b^2\cos^2(\omega_d t + \phi)$$

$$+\,\omega_d^2 \sin^2(\omega_d t + \phi) + b\,\omega_d \sin 2(\omega_d t + \phi) \qquad \text{(iii)}$$

इसी तरह, दोलक की स्थितिज ऊर्जा है :

$$P.E. = (1/2)\,kx^2 = (1/2)\,m\,\omega_0^2\,x^2$$

x का मान रखने पर हमें प्राप्त होता है :

$$P.E. = (1/2)\,m a_0^2\,\omega_0^2\,\exp(-2bt)\cos^2(\omega_d t + \phi) \qquad \text{(iv)}$$

अतः, किसी समय t पर दोलक की कुल ऊर्जा का व्यंजक निम्न होगा :

$$E(t) = (1/2)\,m a_0^2\,\exp(-2bt)\,[(b^2 + \omega_0^2)\cos^2(\omega_d t + \phi)$$

$$+\,\omega_d^2\,\sin^2(\omega_d t + \phi) + b\omega_d\,\sin 2(\omega_d t + \phi)] \qquad \text{(v)}$$

जब अवमंदन दुर्बल होता है तो दोलन का आयाम एक पूर्ण दोलन की अवधि में ज्यादा नहीं बदलता। अतः, हम exp (– 2bt) पद को नियत मान सकते हैं। आगे, चूंकि

$$< \sin^2(\omega_d t + \phi) > = < \cos^2(\omega_d t + \phi) > = \frac{1}{2}$$

तथा $< \sin 2(\omega_d t + \phi) > = 0$, एक पूर्ण चक्र पर औसत लेने पर दुर्बलतः अवमंदित दोलक की ऊर्जा का मान निम्न होगा :

$$< E > = (1/2)\,m a_0^2\,\exp(-2bt) < [(b^2 + \omega_0^2)\cos^2(\omega_d t + \phi)$$

$$+\,\omega_d^2\,\sin^2(\omega_d t + \phi) + b\omega_d\,\sin 2(\omega_d t + \phi)] >$$

$$= (1/2)\,m a_0^2\,\exp(-2bt)\,[((b^2 + \omega_0^2)/2) + (\omega_d^2/2)]$$

चूंकि $\omega_d^2 = \omega_0^2 - b^2$, उपरोक्त व्यंजक निम्नवत् सरल हो जाता है :

$$< E > = (1/2)\,m a_0^2\;\omega_0^2\,\exp(-2bt) \qquad \text{(vi)}$$

इकाई 16 से हम जानते हैं कि किसी अनवमंदित दोलक की कुल ऊर्जा का व्यंजक $E_0 = (1/2)m a_0^2\,\omega_0^2$ है। अतः, हम लिख सकते हैं :

$$< E > = E_0\,\exp(-2bt)$$

6. किसी दुर्बलतः अवमंदित दोलक की औसत ऊर्जा का व्यंजक है :

$$< E > = E_0\,\exp(-2bt)$$

चूँकि $b = \dfrac{1}{\tau}$, हम लिख सकते हैं

$$< E > = E_0\,\exp(-2t/\tau)$$

जब $t = \tau/2$, $< E > = (E_0/e)$

अतः, समय $(\tau/2)$ में ऊर्जा का मान घट कर E_0e^{-1} हो जाएगा। τ का मान परिकलित करने के लिए हम गुणता कारक Q के व्यंजक $Q=(\omega_d\tau/2)$ का उपयोग करते हैं। अतः, हम लिख सकते हैं :

$$\tau=(2Q/\omega_d)=(2\times6\times10^4)/(2\pi\times512\,s^{-1})=(3\times10^4)/(256\pi\,s^{-1})=37.3\,s$$

अतः, 18.7 s में ऊर्जा का मान इसके आरंभिक मान का $1/e$ गुना रह जाएगा। इस समयांतराल में स्वरित्र द्विभुज द्वारा किए गए पूर्ण दोलनों की संख्या n का मान होगा :

$$n=f_d\times t=512\,s^{-1}\times18.7\,s=95.7\times10^2$$

7. i) प्रश्न के अनुसार, $\omega_0=2\pi f=2\times(3.14)\times4\ s^{-1}=25.1\,s^{-1}$

   हम यह भी जानते हैं कि

   $$\omega_0=\sqrt{(k/m)}\quad\Rightarrow\quad k=m\omega_0^2=(1\,kg)\times(25.1\,s)^2=630\ Nm^{-1}$$

   क्योंकि कुल द्रव्यमान, $m=0.2\,kg+0.8\,kg=1\,kg$

   ii) चूंकि दोलन का आयाम समय के साथ घट रहा है, दोलक अवमंदित है। अवमंदित दोलक के आयाम का व्यंजक है :

   $$a(t)=a_0\exp(-bt)\qquad\text{(i)}$$

   प्रश्न के अनुसार, $a_0=2\,cm=0.02\,m$, $a(t)=1\,cm=0.01\,m$ तथा $t=30\,s$ है। इन मानों को समीकरण (i) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

   $$0.01\,m=(0.02\,m)\exp(-30b)$$

   या $$b=(\ln2/30)=2.3\times10^{-2}\ s^{-1}$$

   अतः, विश्रांति काल

   $$\tau=(1/b)=1/(2.3\times10^{-2}\ s^{-1})=43.3\,s$$

   iii) दुर्बलतः अवमंदित निकाय के लिए गुणता कारक का व्यंजक है :

   $$Q=(\omega_0\tau/2)=(25\ s^{-1}\times43.3\,s)/2=541$$

8. जब द्रव्यमान को ऊर्ध्वाधरतः खींचा जाता है तो यह नियत चाल से गतिमान होता है और इस पर कोई नेट बल कार्यरत नहीं होता। अतः, ऊपर की ओर लगने वाला 60 N बल, नीचे लगने वाले बल $mg+Cv$, जहां C **समानुपातिकता नियतांक** (जिसे अवमंदन नियतांक कहते हैं) तथा v वेग का वह मान है जिससे द्रव्यमान को उर्ध्वाधरतः खींचा जाता है, द्वारा संतुलित होता है। अतः, हम लिख सकते हैं :

   $$F=mg+Cv$$

   या $$C=(F-mg)/v$$

   $$=[(60\,N)-(1\,kg)\times(10\,ms^{-2})]\,/(5\,m\,s^{-1})=10\ Nm^{-1}\,s$$

   जब इस द्रव्यमान को द्रव में बल नियतांक k वाली कमानी से लटकाया जाता है तो साम्यावस्था में, इस पर कोई श्यान बल कार्यरत नहीं होता। अतः, द्रव्यमान का भार mg कमानी के प्रत्यानयन बल kx द्वारा संतुलित होता है। अतः

   $$x=(mg/k)=[(1\,kg)\times(10\,ms^{-2})]/50\,N\,m^{-1}=0.2\,m$$

चूंकि दिया गया द्रव्यमान घटते हुए आयाम वाली दोलनी गति करता है, यह स्पष्ट है कि निकाय अवमंदित है। अतः, हम अवमंदन गुणक b को निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$b = (C/2m) = (10\ \text{Nm}^{-1}\,\text{s})/2 \times (1\,\text{kg})) = 5\ \text{s}^{-1}$$

तथा $$\omega_0 = \sqrt{(k/m)} = \sqrt{(50\ \text{Nm}^{-1}/1\,\text{kg})} = 7.07\,\text{s}^{-1}$$

अतः, हम पाते हैं कि $b = 5\,\text{s}^{-1}$ तथा $\omega_0 = 7.07\,\text{s}^{-1}$। अतः

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - b^2} = \sqrt{50 - 25} = 5\,\text{s}^{-1}$$

ऐसी स्थिति में दोलन की आवृत्ति का मान होगा :

$$f = (\omega_d/2\pi) = (5\ \text{s}^{-1})/(2 \times 3.14) \cong 0.80\ \text{Hz}$$

तथा दोलन का आवर्तकाल होगा :

$$T = (1/f) = (1/0.80\ \text{s}^{-1}) = 1.25\,\text{s}$$

समुद्र तट पर घूमने का एक आकर्षण होता है समुद्र की तरंगों को देखना और उनका आनंद उठाना। ये तरंगें समुद्र में दूर से आकर किनारों पर बिखर जाती हैं। क्या आप सोच सकते हैं कि तरंगों के रूप में प्रकृति में कितनी ऊर्जा समाहित है?
(चित्र का स्रोत : **wikimedia.org**)

इकाई 19

तरंग गति

इकाई की रूपरेखा

अध्ययन निर्देशिका

इस खंड की पिछली तीन इकाइयों में आपने मुक्त एवं अवमंदित दोलनों के बारे में पढ़ा। इस इकाई में आप तरंगों के बारे में पढ़ेंगे। यद्यपि दोलन और तरंगें परस्पर संबंधित संकल्पनाएं हैं, तथापि, तरंगों का अध्ययन अपेक्षाकृत रूप से अधिक महत्त्वपूर्ण है क्योंकि इसकी सहायता से हम विभिन्न प्राकृतिक परिघटनाओं को समझ सकते हैं।

हमारा मानना है कि आप स्कूल के भौतिकी पाठ्यक्रम में तरंगों के बारे में पढ़ चुके हैं तथा तरंग से संबंधित विभिन्न संकल्पनाओं से परिचित हैं। फिर भी इन संकल्पनाओं की एक बेहतर समझ के लिए इन्हें ध्यानपूर्वक पढ़ना आवश्यक है। अतः, हमारी सलाह है कि आप तरंग से संबंधित निम्नलिखित पहलुओं पर विशेष ध्यान दें : i) तरंग गति कैसे उत्पन्न होती है? ii) तरंगों का गणितीय निरूपण कैसे किया जाता है? तथा iii) तरंगों द्वारा ऊर्जा एक स्थान से दूसरे स्थान तक किस प्रकार स्थानांतरित की जाती है? इस इकाई में प्रयुक्त गणितीय व्युत्पत्तियों का स्तर काफी सरल है। तथापि, दोलनी गति और तरंग गति के बीच गुणात्मक अंतर को समझने के लिए आपको सभी बोध प्रश्न और अंत में कुछ प्रश्न हल करने चाहिए।

"किसी समुद्र यात्री के लिए समुद्र की यह छवि कि वह तरंगों का बना है, ज्यादा प्रबल होती है बजाए इसके कि वह जल का बना है।"

सर आर्थर स्टैनली एडिंगटन

19.1 परिचय

तरंगों के संबंध में आप अपने स्कूल के भौतिकी पाठ्यक्रम में अध्ययन कर चुके हैं। तरंगों का अध्ययन काफी रोचक है क्योंकि ये हमारे चारों ओर विद्यमान हैं। उदाहरण के लिए, अपने चारों तरफ हम जो सुनते या देखते हैं वह तरंगों पर निर्भर करता है। जब हम बोलते हैं तो हमारे गले में वाक-तंतु **कंपन** करते हैं। उनके कंपन से आस-पास की वायु के अणु कंपित होते हैं और इस प्रभाव को **ध्वनि** के रूप में सुना जाता है। जब यह ध्वनि अन्य निकटवर्ती व्यक्ति के कानों में पहुंचती है तो उनके कर्ण-पटल कंपन करने लगते हैं और उन्हें ध्वनि सुनाई पड़ती है। आप जानते हैं कि ध्वनि, ऊर्जा का एक रूप है और यह ऊर्जा **ध्वनि तरंगों** द्वारा वाहित होती है। इन्हीं के कारण हम वह सुन पाते हैं जो दूसरे बोलते हैं। ध्वनि तंरगों का उपयोग **सोनार** (साउंड नेविगेशन एण्ड रेंजिंग) तथा खनिज एवं तेल भंडारों (जो आजकल राष्ट्रों की अर्थव्यवस्था को नियंत्रित करने वाले उपयोगी पदार्थ हैं) के पूर्वेक्षण में किया जाता है। आजकल हम पराश्रव्य तरंगों – 20 kHz से अधिक आवृत्ति की तरंग – का उपयोग मानव शरीर के मृदु ऊतकों के प्रतिबिंब प्राप्त करने के लिए भी करते हैं।

दृश्य प्रकाश के कारण हम अपने चारों ओर देख पाते हैं। यह एक **विद्युत्-चुंबकीय तरंग** है। आप रेडियो तरंगों, सूक्ष्म तरंगों और *X*-किरणों से परिचित हैं। ये सभी भिन्न आवृत्तियों वाली विद्युत्-चुंबकीय तरंगें हैं। आज की अधिकांश संचार प्रौद्योगिकियां, जैसेकि रेडियो, टेलीविज़न, टेलीफोन, फैक्स आदि रेडियो तरंगों एवं सूक्ष्म तरंगों के रूप में सिग्नलों को संप्रेषित और ग्रहित करने पर आधारित हैं। *X*-किरणों का उपयोग आयुर्विज्ञान नैदानिकी जैसेकि हड्डियों का प्रतिबिंब प्राप्त करने तथा फ्रैक्चर आदि के विषय में जानने के लिए किया जाता है।

भूकंपी-तरंगे अपेक्षाकृत रूप से कम परिचित तरंगे हैं। किंतु ये भी अत्यंत महत्त्वपूर्ण हैं। ये तरंगें महाविनाश का कारण बन सकती हैं जैसाकि जनवरी 2001 में गुजरात तथा अक्तूबर 2005 में जम्मू एवं कश्मीर तथा 2015 में नेपाल में आए भूकंपों में देखन को मिला। दिसम्बर 2004 में सागर-तलगत भूकंप प्रेरित सुनामी ने भारत में तमिलनाडु के अतिरिक्त हिन्द महासागर के कई अन्य देशों में भयंकर विनाश किया। चिली, चीन, इरान, जापान, पाकिस्तान और अन्य अनेक देशों में भूकम्पों के कारण जान और माल का बहुत ज्यादा नुकसान हुआ है। अतिसूक्ष्म स्तर पर हम परमाणुओं, अणुओं, इलेक्ट्रॉनों, प्रोटॉनो एवं अन्य मूल कणों की प्रकृति को समझने के लिए **द्रव्य तरंग** की संकल्पना का इस्तेमाल करते हैं।

इन सब उदाहरणों के आधार पर आप इस बात से सहमत होंगे कि तरंग गति की भौतिकी को समझना आवश्यक है। ऊपर उल्लेखित तरंगों को मोटे तौर पर तीन प्रमुख वर्गों में विभाजित किया जा सकता है : **यांत्रिक तरंगें, विद्युत्-चुंबकीय तरंगें** और **द्रव्य तरंगें**। इस इकाई में चर्चित विषय वस्तु की अधिकांश बातें वैसे तो सभी प्रकार की तरंगों के लिए मान्य हैं तथापि, इस इकाई में हम केवल यांत्रिक तरंगों, जो डोरियों/तारों पर संचरित होती हैं, और ध्वनि तरंगों की ही चर्चा करेंगे। विद्युत्-चुंबकीय तरंगों के विषय में आप द्वितीय सेमेस्टर में विद्युत् एवं चुंबकत्व नामक पाठ्यक्रम तथा चतुर्थ सेमेस्टर में प्रकाशिकी नामक पाठ्यक्रम में और द्रव्य तरंगों के विषय में आधुनिक भौतिकी नामक पाठ्यक्रम में अध्ययन करेंगे।

तरंग गति के अध्ययन की शुरुआत हम भाग 19.2 में तरंगों के **निर्माण और उनके संचरण** के वर्णन से करेंगे। इनकी चर्चा हम डोरियों पर तरंगों तथा ध्वनि तरंगों के

संदर्भ में करेंगे। भाग 19.3 में आप तरंग गति को ग्राफ द्वारा निरूपित करना और गणितीय रूप में व्यक्त करना सीखेंगे। इस भाग में हम विभिन्न **तरंग प्राचलों** की परिभाषा भी देंगे तथा **तरंग की कला, कलांतर** एवं **कला वेग** की संकल्पनाओं की चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- तरंग के निर्माण और किसी माध्यम में इसके संचरण की व्याख्या कर सकेंगे;
- किसी नियत स्थान या नियत समय पर तरंग को ग्राफीय रूप से निरूपित कर सकेंगे;
- तरंग प्राचलों (आयाम, आवर्तकाल, आवृत्ति, कोणीय आवृत्ति, तरंगदैर्घ्य, तरंग संख्या एवं कला) को परिभाषित कर सकेंगे;
- तरंग का गणितीय व्यंजक लिख सकेंगे;
- किसी तरंग के लिए तरंग प्राचलों के मान परिकलित कर सकेंगे; और
- तरंगों के लिए कलांतर की संकल्पना की व्याख्या कर सकेंगे।

19.2 तरंग निर्माण और संचरण

तरंग निर्माण और संचरण परिघटना पर चर्चा के लिए हम जल तरंगों के उदाहरण से शुरुआत करते हैं क्योंकि उन्हें हम आसानी से देख सकते हैं। यदि आप किसी तालाब या टब (या बाल्टी) के स्थिर जल में छोटी कंकड़ी डालें तो आप जल की सतह पर वृत्ताकार तरंगिकाएं फैलती हुई देखेंगे। ये तरंगिकाएं उस बिंदु से फैलती हैं जहां कंकड़ जल की सतह से टकराता है (चित्र 19.1)। इन तरंगिकाओं को देखने पर आपको लग सकता है कि उनके साथ जल भी गति कर रहा है। लेकिन यदि आप इन्हें गौर से देखेंगे तो आप पाएंगे कि ऐसा नहीं है : *जल, तरंगिकाओं के साथ गति नहीं करता*। इस तथ्य की पुष्टि आप जल की सतह पर एक कागज़ की नाव या पत्ती रखकर कर सकते हैं। आप देखेंगे कि कागज़ की नाव या पत्ती, जल की सतह पर एक ही स्थान पर ऊपर नीचे होती रहती है; यह तरंगों के साथ गति नहीं करती।

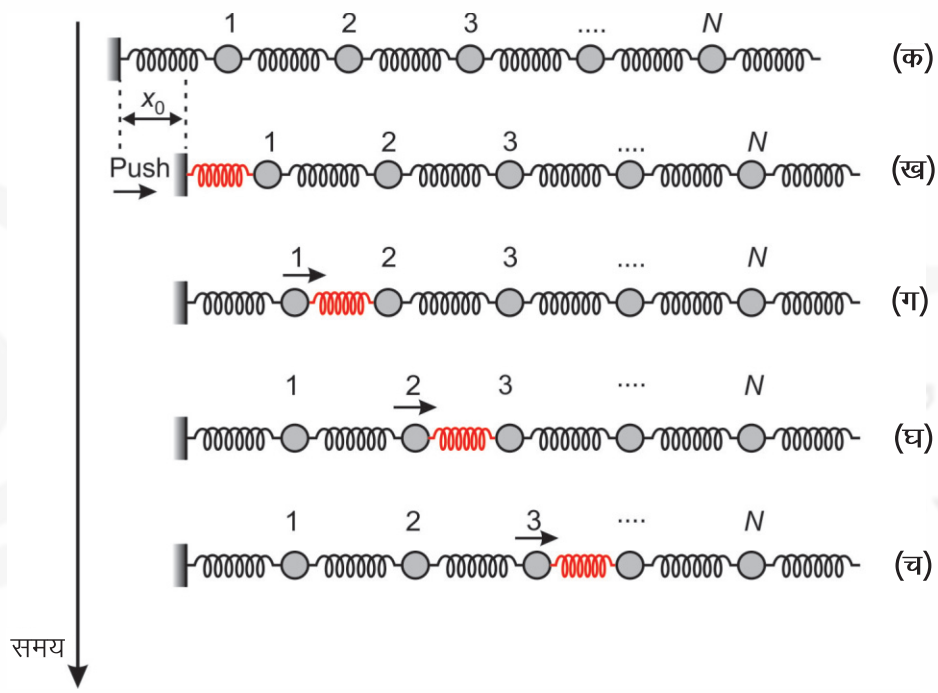
चित्र 19.1: किसी पात्र में रखे स्थिर जल में कंकड़ डालने से उसमें उत्पन्न तरंगें।

अब आप यह जानना चाहेंगे कि **जल की सतह पर उत्पन्न तरंग में यदि जल, सतह के अनुदिश गति नहीं करता तो फिर वह क्या है जो जल तरंग में गतिमान है।** तरंग के रूप में जो गतिमान है वह स्थिर जल में कंकड़ डालने पर उसमें उत्पन्न **विक्षोभ** है। यह विक्षोभ निकटवर्ती जल अणुओं को हस्तांतरित हो जाता है। यह समझने के लिए कि विक्षोभ से हमारा क्या अभिप्राय है और यह कैसे संचरित होता है, चित्र 19.2 देखें जिसमें N युग्मित द्रव्यमानों को दिखाया गया है। प्रत्येक द्रव्यमान का मान m है और ये एक दूसरे से सर्वसम कमानियों द्वारा युग्मित हैं। कमानी-द्रव्यमान श्रृंखला के एक सिरे पर बल लगाए जाने पर विक्षोभ, श्रृंखला के अनुदिश संचरित होता है।

विक्षोभ (disturbance) शब्द का उपयोग यहां एक ऐसे सामान्य पद के रूप में किया गया है जो जल (अथवा किसी अन्य माध्यम जैसे डोरी) के अविक्षुब्ध समांतर पृष्ठ की तुलना में उसकी आकृति में आई विकृति को निरूपित करता है। इसका उपयोग डोरी के लिए भी किया जा सकता है।

जब निकाय को क्षुब्ध करने के लिए कोई बल नहीं लगाया जाता तो द्रव्यमान अपनी संगत साम्य स्थितियों में बने रहते हैं, जैसाकि चित्र 19.2क में दर्शाया गया है। यदि युग्मित द्रव्यमानों की श्रृंखला के वाम सिरे को हम अचानक आगे की ओर इस तरह

धकेलें कि यह दाहिनी ओर x_0 दूरी से विस्थापित हो जाए तो पहली कमानी संपीडित हो जाएगी, जैसा कि चित्र 19.2ख में दर्शाया गया है। इसके परिणामस्वरूप द्रव्यमान 1 अपनी साम्यावस्था से दाहिनी ओर विस्थापित हो जाता है और अपने दाहिनी ओर की कमानी को संपीडित करता है। जब द्रव्यमान 1 का विस्थापन x_0 दूरी के बराबर हो जाता है तो इसके बायीं ओर की कमानी तनावमुक्त हो जाती है, जबकि दायीं ओर की कमानी संपीडित हो जाती है और द्रव्यमान 2 को धकेलती है। दूसरी कमानी, जो द्रव्यमान 2 को धकेलती है, वही प्रक्रिया दोहराती है जो पहली कमानी और द्रव्यमान के साथ हुई थी और विक्षोभ, अर्थात् कमानी का संपीडन, दाहिनी ओर द्रव्यमान 2 एवं 3 के बीच स्थानांतरित हो जाता है और समय के साथ यह क्रम चलता रहता है, जैसा चित्र 19.2ग, घ और च में दिखाया गया है। **अतः, हम पाते हैं कि कमानी के संपीडन के रूप में विक्षोभ, युग्मित कमानी-द्रव्यमान निकाय की श्रृंखला के अनुदिश गमन करता है।** यदि हम कमानी को खींचें और इसकी लंबाई में वृद्धि द्वारा विक्षोभ निर्मित करें तो भी इसी प्रकार की घटनाओं का क्रम दोहराया जाएगा। विक्षोभ – कमानी के संपीडन या वर्धन के रूप में – कमानी-द्रव्यमान निकाय के माध्यम से श्रृंखला के अनुदिश गमन करता है।



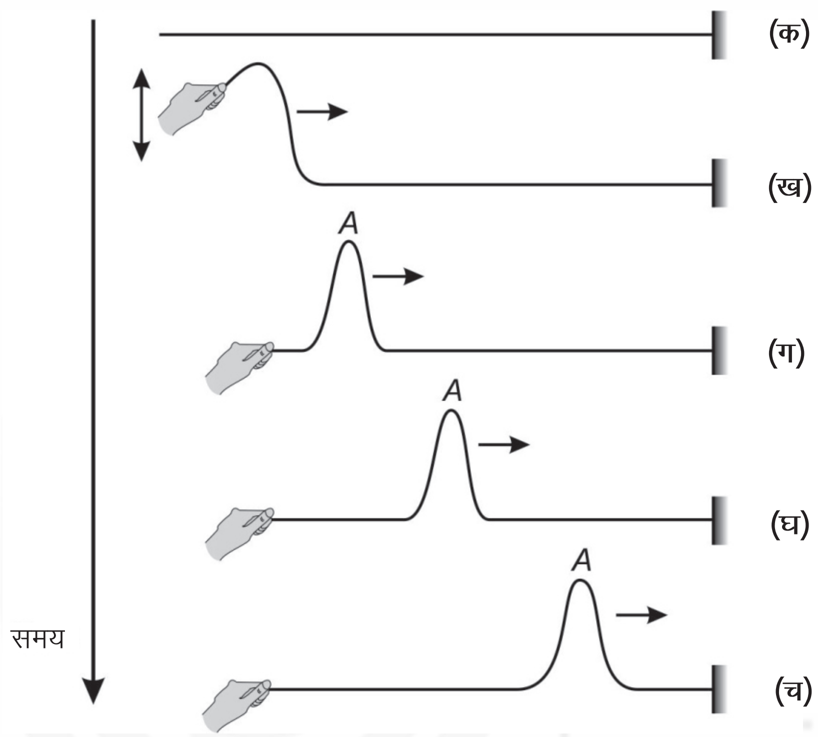
चित्र 19.2: क) *N*-युग्मित द्रव्यमानों का एक निकाय; ख), ग), घ) और च) क्रमशः निकाय के उन तात्क्षणिक विन्यासों को दर्शाते हैं जब विक्षोभ् (कमानी का संपीडन), द्रव्यमान 1 के बायीं ओर की कमानी से, द्रव्यमान 2 के बायीं ओर की कमानी में हस्तांतरित होता है, द्रव्यमान 2 से द्रव्यमान 3 के बायीं ओर की कमानी में हस्तांतरित होता है और इस प्रकार संलग्न द्रव्यमानों के माध्यम से आगे बढ़ता है।

यदि हम पहले द्रव्यमान को इसकी साम्य-स्थिति से आवर्ती रूप से विस्थापित करते रहे तो एक-एक करके धीरे-धीरे श्रृंखला के अन्य सभी द्रव्यमान अपनी संगत साम्य स्थितियों के इर्द-गिर्द दोलन शुरू कर देंगे। **ध्यान दें कि द्रव्यमान और कमानियाँ और पूरा निकाय अपनी जगह से विस्थापित नहीं होता; केवल विक्षोभ – कमानी का संपीडन या इसका वर्धन – गति करता है।**

आगे बढ़ने से पहले आप डोरी का उपयोग कर 'विक्षोभ संचरण' से संबंधित एक सरल गतिविधि करें जिससे आपको यह समझने में सहायता मिलेगी कि तरंगों का निर्माण किस प्रकार होता है।

गतिविधि

एक लंबी, पतली, प्रत्यास्थ डोरी के एक सिरे को दूरस्थ किसी दीवार पर बांधें, जैसाकि चित्र 19.3क में दर्शाया गया है। डोरी के दूसरे सिरे को अपने हाथ में पकड़ कर रखें जिससे डोरी तनी रहे। अब तेज़ी से अपने हाथ को एक बार ऊपर नीचे करें। आप क्या देखते हैं? चित्र 19.3ग में *A* द्वारा अंकित विक्षोभ डोरी की लम्बाई के अनुदिश गति करता है। *A* जैसे विलगित विक्षोभ को **स्पंद** कहते हैं और यह आपके हाथ में थमी डोरी के हिस्से को एक बार द्रुत गति से ऊपर-नीचे करने पर उत्पन्न होता है।



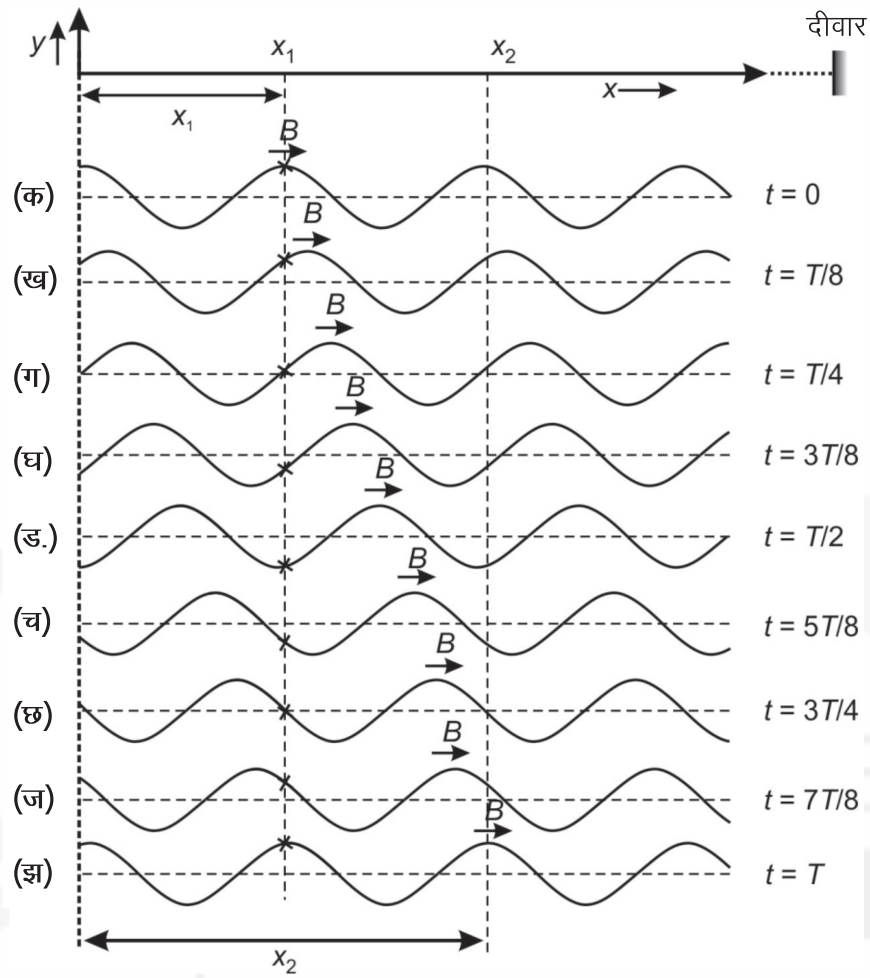
चित्र 19.3: क) दृढ़ दीवार से बंधी एक प्रत्यास्थ डोरी; ख) हाथ में पकड़े गए डोरी के हिस्से की एक ऊपर-नीचे द्रुत गति; ग) स्पंद *A* का जनन; घ) एवं च) समय के साथ स्पंद *A* का डोरी के अनुदिश संचरण दर्शाते हैं।

यदि आप अपने हाथ को लगातार ऊपर नीचे गति कराएं तो क्या होगा? आप देखेंगे कि डोरी के अनुदिश स्पंदों का एक क्रम चलता रहेगा जो **तरंग** उत्पन्न करेगा। यदि हाथ की ऊपर-नीचे गति समय का ज्यावक्रीय फलन हो तो किसी क्षण-विशेष पर तरंग की आकृति ज्यावक्रीय होगी। यह यांत्रिक तरंग उत्पन्न करने की सबसे सरल विधि है।

आप पूछ सकते हैं कि आपके हाथ में पकड़ी गई डोरी की आवर्ती गति, जैसाकि उपरोक्त गतिविधि में दर्शाया गया है, डोरी के अनुदिश गतिमान तरंग कैसे उत्पन्न करती है। इस प्रश्न का उत्तर जानने के लिए, आइए, डोरी की गति की चित्र 19.4 की सहयाता से और विस्तार से चर्चा करें।

चित्र 19.4क से 19.4झ में क्षण $t = 0$ से प्रारंभ होने वाली तरंग के नौ **आशुचित्र (फोटोग्राफ)** दिखाए गए हैं। ये $(T/8)$ समयांतराल पर क्षण $t = T$ तक लिए गए हैं; यहां T **आवर्तकाल** है।

चित्र 19.4क क्षण $t = 0$ पर तरंग रूप दर्शाता है। इस चित्र में डोरी पर B चिह्न द्वारा अंकित बिंदु को देखिए। यह विक्षोभ का अधिकतम मान (डोरी के इस अल्पांश का साम्य स्थिति से विस्थापन) है और इसे तरंग का **शीर्ष** कहते हैं। आइए, हम इस क्षण विशेश पर शीर्ष B की x-अक्ष के अनुदिश स्थिति को x_1 द्वारा निरूपित करें। अब हम स्थिति x_1 पर डोरी पर एक रिबन बांध देते हैं। ध्यान दें कि यह रिबन क्षण $t = 0$ पर शीर्ष B की स्थिति के संगत है। अब हम यह जानना चाहते हैं कि **जब हम डोरी को ऊपर-नीचे गति देते हैं तो शीर्ष B किस प्रकार प्रभावित होता है।**



चित्र 19.4: हाथ में पकड़े गए डोरी अल्पांश की आवर्ती गति, ज्यावक्रीय रूपरेखा वाला विक्षोभ उत्पन्न करती है। चित्र के भाग क) से झ) तक दर्शाते हैं कि कैसे हाथ द्वारा उत्पन्न विक्षोभ डोरी के अनुदिश गतिमान होकर तरंगें निर्मित करता है।

जल की सतह अथवा डोरी पर विक्षोभ के संचरण को हम देख सकते हैं। क्या हम वायु में संचरित ध्वनि तरंगों को भी देख सकते हैं? नहीं, हम इन तरंगों को नहीं देख सकते। तब आप यह जानना चाहेंगे कि ध्वनि तरंगों का संसूचन हम किस प्रकार करते हैं। इसके लिए हम स्रोत (जैसे सितार के तार या तबले पर मढ़ी खाल) की गति अथवा ग्राही (माइक्रोफोन) के पर्दे की गति देखते हैं।

चित्र 19.4ख में आप देख सकते हैं कि समयांतराल $t = 0$ से $t = T/8$ में शीर्ष B डोरी पर दाहिनी ओर गमन कर जाता है। B की गति इसके पास लगे छोटे तीरे से निर्दिष्ट की गई है। जैसे-जैसे t का मान बढ़ता है शीर्ष B (और तीर) दोलन करते हुए हाथ से दूर हटता जाता है (चित्र 19.4ग से झ)। $t = T$ पर शीर्ष B (तीर) x-अक्ष पर $x = x_2$ पर स्थित है।

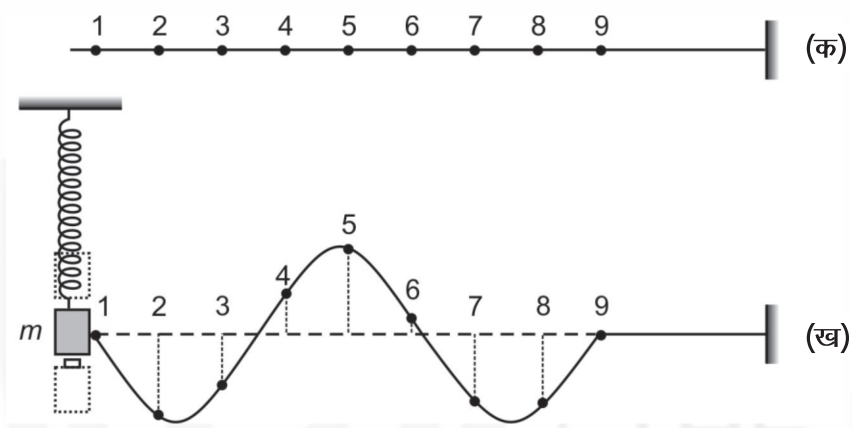
अब आप अपना ध्यान डोरी पर $x = x_1$ पर बंधे रिबन की गति पर केंद्रित करें (चित्र 19.4क)। जब समय के साथ विक्षोभ (शीर्ष B) डोरी के अनुदिश गति करता है, रिबन हाथ की तरह ही ऊपर-नीचे गति करता है। इसकी (रिबन) स्थिति x_1 में कोई परिवर्तन नहीं होता जबकि $t = 0$ से $t = T$ समय के बीच शीर्ष B स्थिति x_1 से x_2 पर

आ जाता है। अतः, हम कह सकते हैं कि जब तरंग किसी माध्यम में संचरित होता है तो दो अलग-अलग गतियां होती है : **विक्षोभ की गति (जो शीर्ष B द्वारा निरूपित होती है) और माध्यम के कणों की अपनी अपनी साम्यावस्थाओं के इर्द–गिर्द गति (जो रिबन द्वारा निरूपित होती है)**।

आप सोच रहे होंगे कि यदि डोरी के कण तरंग के साथ गतिमान नहीं हैं तो डोरी पर गतिमान तंरग में क्या स्थानांतरित होता है। इस प्रश्न का उत्तर जानने के लिए आपको कमानी-द्रव्यमान निकाय का उपयोग कर नीचे दी गई गतिविधि करनी चाहिए।

गतिविधि

एक डोरी लीजिए और इस पर समान दूरी पर नौ बिंदु अंकित कीजिए (1 से 9 तक) जैसाकि चित्र 19.5क में दर्शाया गया है। कल्पना करें कि प्रत्येक बिंदु उस स्थिति पर एक कण को निरूपित करता है। आप इनकी गति का स्पष्ट अवलोकन करने के लिए प्रत्येक बिंदु पर एक रिबन बांध सकते हैं। इस डोरी के एक सिरे (संख्या 1 से चिन्हित) को एक ऐसे कमानी-द्रव्यमान निकाय से बांध दीजिए जो ऊर्ध्वाधरतः दोलन करता है और दूसरा सिरा एक दूरस्थ दीवार में स्थिर कर दीजिए।



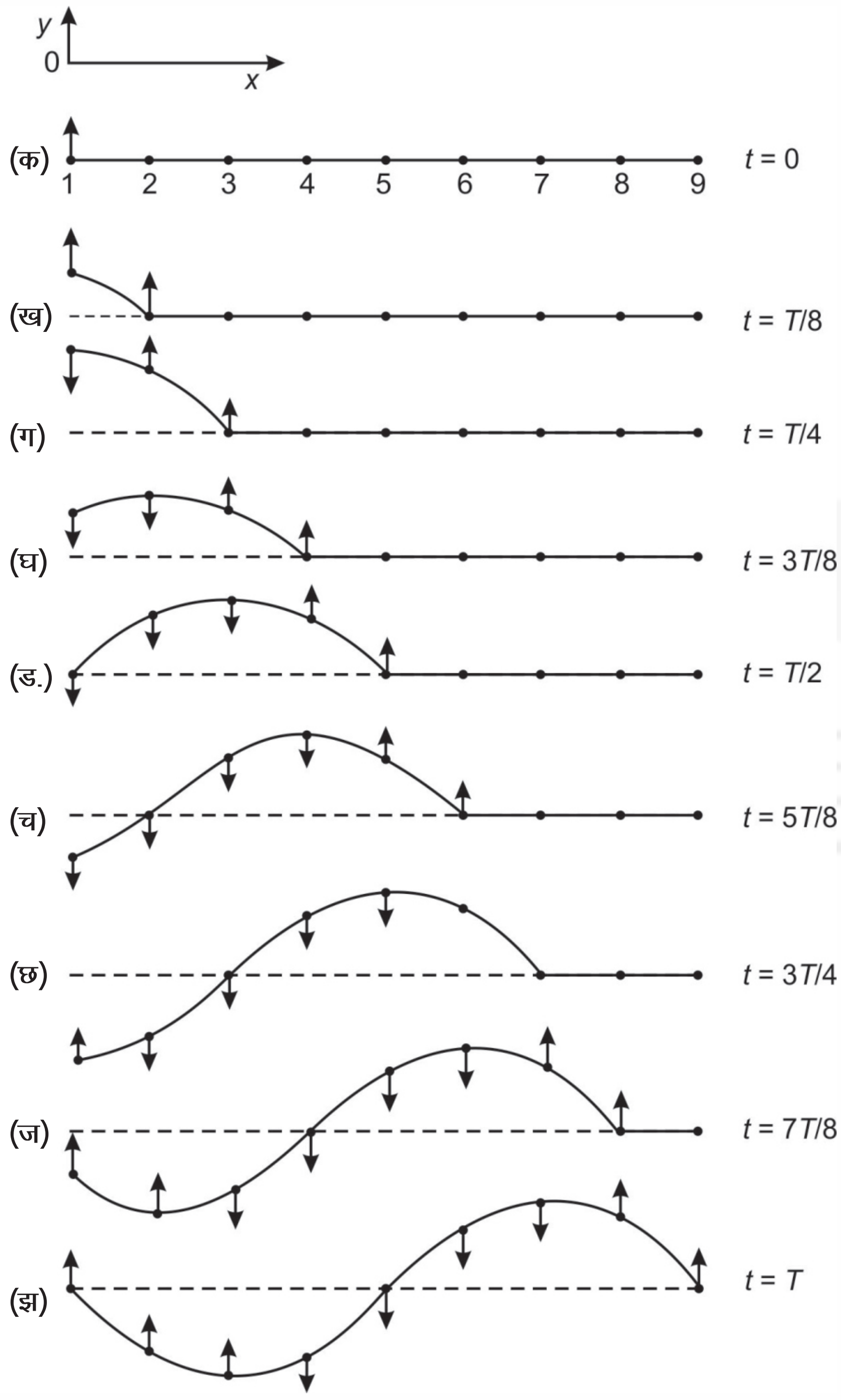
चित्र 19.5 : क) एक तानित डोरी जिस पर समान दूरी पर बिंदु 1 से 9 तक अंकित किए गए हैं; ख) इस डोरी का आशुचित्र जब इसका एक सिरा ऊर्ध्वाधरतः दोलनकारी कमानी-द्रव्यमान निकाय से बंधा है और दूसरा सिरा एक दीवार से बंधा है।

अब कमानी-द्रव्यमान निकाय के द्रव्यमान m को ऊर्ध्वाधर दिशा में खींच कर (या संपीडित करके) छोड़ दीजिए। यह ऊर्ध्वाधरतः दोलन करेगा। आप देखेंगे कि डोरी पर अंकित 9 बिंदुओं पर स्थित कण एक के बाद एक दोलन करने लगते हैं। कुछ ही देर में डोरी पर एक तरंग स्थापित हो जाएगी। यदि संभव हो तो डोरी का फोटो लें। इस फोटो में आप क्या देखते हैं? हम आशा करते हैं कि आपको चित्र 19.5ख में दर्शाया गया तरंगरूप दिखेगा।

आइए, अब हम यह समझने की कोशिश करें कि **डोरी के कण दोलन क्यों करने लगते हैं जिसके फलस्वरूप तरंग संचरित होता है**?

ऐसा करने के लिए हम $t = 0$ से $t = T$ तक, $T/8$ समयांतराल पर, कणों की गति के आशुचित्रों (चित्र 19.6) पर विचार करते हैं। ये आशुचित्र समय $t = 0$ से $t = T$ के दौरान $T/8$ समयांतराल पर सभी नौ कणों की स्थितियां निर्दिष्ट करते हैं। प्रत्येक कण से जुड़ा तीर दिए गए क्षण पर उस दिशा का सूचक है जिस दिशा में यह कण गति करने वाला है। क्षण $t = 0$ पर सभी कण अपनी माध्य स्थिति पर हैं

(चित्र 19.6क) किंतु कण 1 में ऊपर की ओर गति करने की प्रवृत्ति है। आप चित्र 19.6ख में देख सकते हैं कि समयांतराल $t = 0$ से $t = T/8$ में कमानी-द्रव्यमान निकाय द्वारा जनित विक्षोभ कण 1 से कण 2 पर गमन कर जाता है। इसी प्रकार अगले $T/8$ समयांतराल में विक्षोभ, कण 2 से कण 3 पर चला जाता है (चित्र 19.6ग) और यह प्रक्रम विक्षोभ के कण 1 से कण 9 तक पहुंचने तक जारी रहता है। ध्यान दें कि इस प्रक्रम में कमानी-द्रव्यमान निकाय से इन कणों को ऊर्जा स्थानांतरित होती है। **इस प्रकार विक्षोभ माध्यम में संचरित होता है।**



चित्र 19.6: एक ऊर्ध्वाधरतः दोलनकारी कमानी-द्रव्यमान निकाय से बंधी डोरी पर 1 से 9 तक अंकित स्थितियों पर विद्यमान कणों की गति के *t = 0* से *t = T* समय परिसर में, *T / 8* समयांतराल पर लिए गए आशुचित्र।

अब आप संभवतः जानना चाहेंगे कि **जब माध्यम में तरंग संचरित होती है तो माध्यम के कणों की गति कैसी होती है।** इसके लिए आप अंकित स्थितियों पर विद्यमान प्रत्येक कण की समयांतराल $t = 0$ से $t = T$ के बीच चित्र 19.6क से झ में दिखाए गए आशुचित्रों को गौर से देखें। आप पायेंगे कि प्रत्येक कण अपनी साम्यावस्था के दोनों ओर दोलनी गति करता है। अतः, चित्र 19.6क और चित्र 19.6झ के आधार पर हम निम्नलिखित निष्कर्षों पर पहुंचते हैं :

- समय $t = 0$ पर सभी कण डोरी पर अंकित अपनी माध्य स्थितियों पर हैं (चित्र 19.6क); तथा
- समय $t = T$ पर (चित्र 19.6झ), कण 1, 5, और 9 अपनी संगत माध्य स्थितियों पर हैं; कण 1 और 9 में ऊपर की गति की प्रवृत्ति है जब कि कण 5 नीचे की ओर गति करने को है। कण 3 और 7 अपनी माध्य स्थिति से अधिकतम विस्थापन की स्थितियों पर है किंतु क्षैतिज अक्ष के सापेक्ष माध्य स्थिति की विपरीत दिशाओं में हैं। ध्यान दें कि प्रत्येक कण अपनी माध्य स्थिति के दोनों ओर दोलन करता है और तरंग के अनुदिश गति नहीं करता।

चित्र 19.6झ में, क्षण $t = T$ पर सभी कणों की तात्क्षणिक स्थितियों को जोड़ने से बनने वाला वक्र (जिसे **एनवेलप** कहते हैं) **तरंग** को निरूपित करता है। अब, आगे बढ़ने से पहले आइए, उपरोक्त चर्चा में आने वाले महत्वपूर्ण तथ्यों को एक बार दोहरा लें।

दोहराएं

- जब किसी (दोलक द्वारा प्रणोदित) माध्यम के कण दोलन करते हैं तो माध्यम में एक **विक्षोभ** उत्पन्न होता है। दोलनों को प्रणोदित करने वाले बल की प्रकृति के अनुसार विक्षोभ सीमित चौड़ाई के स्पंद से लेकर अनंत लंबाई वाली ज्यावक्रीय या किसी अन्य आकृति की तरंग तक कोई भी आकृति ग्रहण कर सकता है (चित्र 19.8 देखें)।
- जिस माध्यम में विक्षोभ संचरित होता है, उसके कण अपनी साम्य (या माध्य) स्थितियों के सापेक्ष दोलन करते हैं, **न तो वे विक्षोभ के साथ गमन करते हैं और न ही उनमें कोई स्थानांतरण-गति होती है**।
- माध्यम में संचरित विक्षोभ अथवा तरंग, **ऊर्जा एवं संवेग** को माध्यम के एक कण से दूसरे कण तक स्थानांतरित करता है द्रव्य को नहीं। (यह निष्कर्ष विद्युत्-चुंबकीय तरंगों के लिए भी मान्य है)।

तरंगों द्वारा वाहित ऊर्जा अत्यंत विशाल हो सकती है; यह महाविनाश का कारण भी बन सकती है तथा इसके रचनात्मक उपयोग से विद्युत् भी जनित की जा सकती है। (नीचे बाक्स में दी गई विषय वस्तु पढ़ें।)

तरंगों द्वारा वाहित ऊर्जा

जल-तरंगों द्वारा वाहित ऊर्जा की मात्रा का अहसास हमें तूफानी मौसम में **ज्वार तरंगों** द्वारा समुद्रतटीय क्षेत्रों में होने वाले विनाश के रूप में होता है। जान-माल की यह भारी हानि शायद आपकी जानकारी में होगी जो अक्तूबर 1990 में बंगाल की खाड़ी में आए सुपर साइक्लोन के कारण उठी ज्वार तरंगों ने उड़ीसा के सागर तटीय क्षेत्रों में की थी। इसमें दस हजार से अधिक लोगों की जानें गईं और लाखों लोग बेघर हो गए। ज्वार तरंगों द्वारा इसी प्रकार का विनाश तब भी देखने में आया जब कैट्रिना नामक प्रचंड तूफान वर्ष 2011 में पूर्वी अमेरीकी समुद्र तट से टकराया। चिली में आए एक भूकंप के कारण उत्पन्न ज्वार तरंगें 15,000 km दूर प्रशान्त महासागर में इतने

बड़े परिमाण में ऊर्जा लेकर आईं जिसके कारण जापान में हुए विनाश को शब्दों में नहीं बताया जा सकता। क्या आप जानते हैं कि एक तीन मीटर ऊँची सागर-तरंग गेहूँ के 30 बोरों को लगभग 10 फीट ऊँचा उठा सकती है?

भूकंपी-तरंगें भी असीम क्षति का कारण बन सकती हैं। 26 जनवरी, 2001 को दक्षिण गुजरात में आए भूकंप ने इस क्षेत्र को मलबे में बदल दिया था। लगभग एक लाख लोगों की मृत्यु हुई; ऊँची इमारतें, घर और अस्पताल ध्वस्त हो गए और सड़कों में बड़े. बड़े गड्ढे बन गए। इसी प्रकार के सदमों का अनुभव जम्मू-कश्मीर के लोगों को अक्तूबर, 2005 में और नेपाल के लोगों को 2015 में हुआ।

दिसंबर 26, 2004 में हिंद महासागर में इंडोनेशिया के निकट समुद्र की तली के नीचे आए एक भूकंप ने 30 फीट ऊँची **सुनामी तरंगें** उत्पन्न की जिनसे इंडोनेशिया, थाईलैंड, श्रीलंका, मालदीव और भारत (तमिलनाडु) में अकल्पनीय विपत्ति आई।

संभवतः आप यह भी जानते होंगे कि किस प्रकार विश्व भर में बढ़ती विद्युत् आवश्यकता को पूरा करने के लिए ज्वार तरंगों की ऊर्जा को काम में लाया जा रहा है।

ध्यान दें

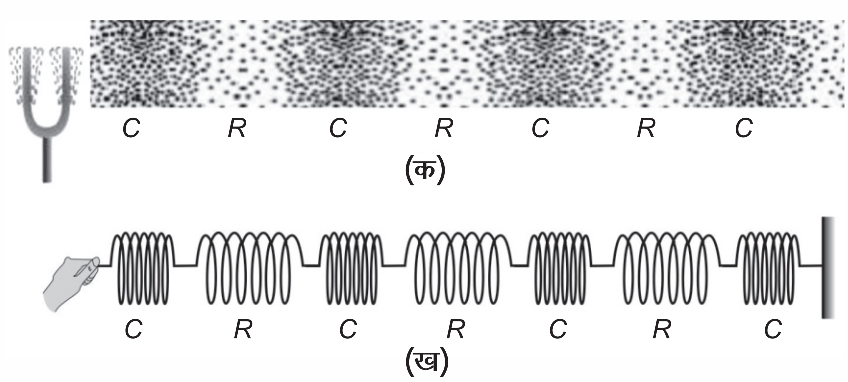
विद्युत्-चुंबकीय तरंगें, जिनमें रेडियो तरंगें, सूक्ष्म तरंगे, अवरक्त, दृश्य एवं पराबैंगनी प्रकाश, X-किरणें एवं गामा किरणें शामिल हैं, 3×10^8 ms^{-1} की चाल से गति करती है। सूर्य से पृथ्वी पर ऊर्जा विद्युत्-चुंबकीय तरंगों द्वारा लगभग 8 मिनट में पहुंचती है और यहां जीवन को संपोषित करती है।

अब तक तरंग-गति के विषय में जानकारी देने के लिए हमने डोरियों पर यांत्रिक तरंगों का उदाहरण चुना। **यांत्रिक तरंगों का अस्तित्व केवल द्रव्यात्मक माध्यमों जैसे जल, वायु, शिलाओं, डोरियों आदि में ही हो सकता है।** यांत्रिक तरंगें दो प्रकार की होती हैं : अनुप्रस्थ और अनुदैर्घ्य। आपने इनके बारे में +2 की कक्षा में पढ़ा होगा। लेकिन हम पूर्णता के लिए इनकी चर्चा करेंगे।

अनुप्रस्थ एवं अनुदैर्घ्य तरंगें

चित्र 19.6 को पुनः देखें और गौर करें कि **डोरी के कण तरंग गति के गमन की दिशा में लंबवत् दोलन करते हैं।** ऐसी तरंग को **अनुप्रस्थ तरंग** कहते हैं। इकतारा, सारंगी, सितार, वीणा और वायलिन जैसे संगीत वाद्यों के तारों पर गमन करने वाली तरंगें अनुप्रस्थ तरंगें होती हैं। आपने बचपन में बांसुरी बजाने का आनंद अवश्य ही लिया होगा। **बांसुरी द्वारा उत्पन्न संगीत की ध्वनि अनुदैर्घ्य तरंग का एक उदाहरण है जिसमें माध्यम के कण, तरंग संचरण की दिशा के अनुदिश दोलन करते हैं।** गैसीय माध्यम में यांत्रिक तरंगें केवल अनुदैर्घ्य ही हो सकती है, परंतु, द्रवों और ठोसों में अनुप्रस्थ तरंगों का संचरण भी संभव है। स्वरित्र द्विभुज के कंपन के कारण उत्पन्न अनुदैर्घ्य तरंगों में संपीडन और विरलन के क्रमागत क्षेत्र होते हैं जैसाकि चित्र 19.7क में दिखाया गया है। संपीडन और विरलन का अवलोकन आप एक कमानी को उसकी लंबाई के अनुदिश संपीडित करके अथवा खींच कर इसमें अनुदैर्घ्य तरंगें उत्पन्न करके भी कर सकते हैं (चित्र 19.7ख)।

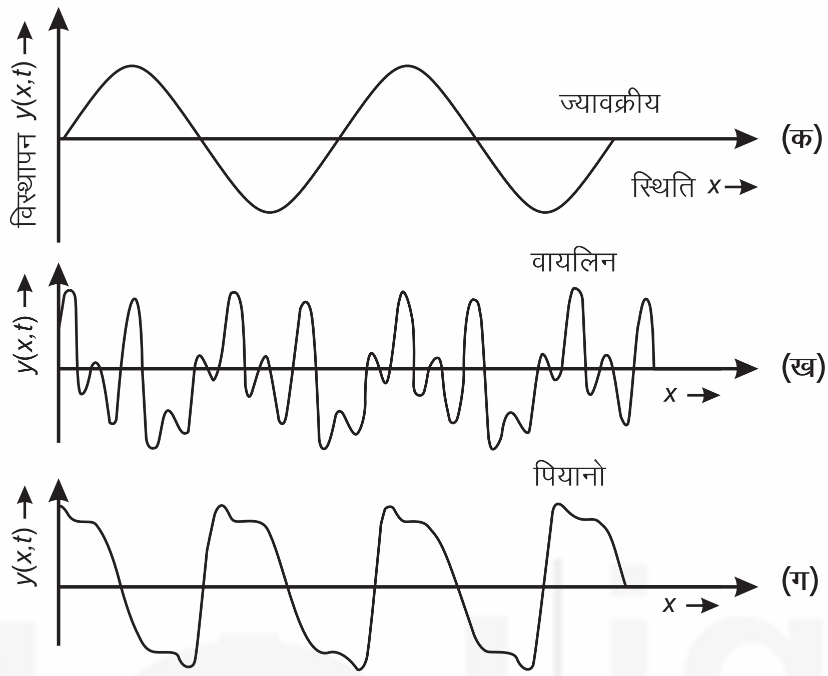
विद्युत्-चुंबकीय तरंगें अनुप्रस्थ तरंगें होती हैं।



चित्र 19.7 : क) वायु तथा ख) कमानी में अनुदैर्घ्य तरंगें जिनमें संपीडन (C) एवं (R) विरलन के क्रमागत क्षेत्र हैं।

किसी संतत माध्यम में उत्पन्न तरंगों को **प्रगामी तरंगें** कहते हैं। चित्र 19.8 देखें जहां हमने तीन तरंग रूप दर्शाए हैं : एक ज्यावक्रीय तरंग, वायलिन द्वारा जनित तरंग तथा पियानों द्वारा जनित तरंग। यदि नोदक बल का दोलन सरल आवर्ती हो तो प्रगामी तरंगें आवर्ती होंगी तथा इन तरंगों की आवृत्ति, आवर्ती नोदक बल की आवृत्ति के बराबर होती है। इस इकाई में हम केवल **एकविम आवर्ती तरंगों** के विषय में अध्ययन करेंगे।

एकल विलगित विक्षोभ को **स्पंद** कहते हैं। जब हम स्थिर जल में पत्थर का टुकड़ा गिराते हैं तो एक स्पंद उत्पन्न होता है और जल की सतह पर गमन करता है। ताली बजाने से उत्पन्न ध्वनि, स्वागत का कोई शब्द या एक व्यक्ति द्वारा दूसरे व्यक्ति को चिल्लाकर दिया गया कोई निर्देश आदि स्पंद के उदाहरण हैं। इसी प्रकार, रेलवे प्लेटफार्म पर आपने देखा होगा कि जब किसी रेलगाड़ी का इंजन डब्बों से जुड़ता है तो इस प्रक्रिया में लगने वाला झटका एक विक्षोभ उत्पन्न करता है जो एक स्पंद के रूप में पूरी ट्रेन में वाहित होता है।



चित्र 19.8 : क) आवर्ती (ज्यावक्रीय) तरंग; ख) वायलिन द्वारा उत्पन्न ध्वनि; तथा ग) पियानो द्वारा उत्पन्न ध्वनि के तरंगरूप।

अब आप एक सरल बोध प्रश्न का उत्तर देकर तरंगों के विषय में अपनी समझ की जांच करना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 1 – तरंगों की समझ

निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर संक्षेप में दें :

क) स्पंद और तरंग में भेद बताएं।

ख) निम्नलिखित तरंगों के उदाहरण बताएं:

i) तरंग गमन के लिए माध्यम की आवश्यकता होती है, और

ii) तरंग गमन के लिए माध्यम की आवश्यकता नहीं होती।

ग) अनुप्रस्थ एवं अनुदैर्घ्य तरंगों में अंतर बताएं। दोनों तरह की तरंगों के उदाहरण बताएं।

आगे बढ़ने से पहले, आइए, हम कुछ महत्त्वपूर्ण तथ्यों को दोहरा लें।

दोहराएं

- जब किसी माध्यम के कण, तरंग के गमन की दिशा के लम्बवत् दोलन करते हैं तो तरंग **अनुप्रस्थ तरंग** कहलाती है।
- जब किसी माध्यम के कण, तरंग की गमन दिशा के अनुदिश दोलन करते हैं तो तरंग **अनुदैर्घ्य तरंग** कहलाती है।

19.3 तरंग गति का वर्णन

हमें आशा है कि पिछले भाग में दी गई गतिविधियों और चर्चा के आधार पर आपको

यांत्रिक तरंगों की उत्पत्ति में माध्यम के कणों की दोलनी गति की भूमिका समझने में मदद मिली होगी। लेकिन अब तक की चर्चा में हमने तरंग गति का गुणात्मक वर्णन किया है। परंतु, भौतिकी का विद्यार्थी होने के नाते आप जानना चाहेंगे कि **तरंग गति को ग्राफ पर तथा गणितीय रूप में हम किस प्रकार निरूपित करते हैं**? आइए, अब इसकी चर्चा करें। **सरलता के लिए हम एक डोरी पर यांत्रिक तरंगों पर विचार करेंगे,** लेकिन प्राप्त परिणाम तथा निष्कर्ष अन्य प्रकार की एकविम (1-D) तरंगों के लिए भी मान्य होते हैं।

19.3.1 तरंग गति का निरूपण

तरंग की आवृत्ति, माध्यम के कणों द्वारा प्रति सेकेंड किए गए कंपनों की संख्या के बराबर होती है।

भाग 19.2 में आप पढ़ चुके हैं कि जब कोई कंपनशील स्रोत (उदाहरणार्थ, हाथ, कमानी-द्रव्यमान निकाय या एक पिस्टन) किसी माध्यम में विक्षोभ जनित करता है तो तरंगें उत्पन्न होती हैं। तरंगें माध्यम में **संचरण** करती हैं जबकि माध्यम के कण अपनी माध्य स्थितियों के सापेक्ष दोलन करते हैं। आगे चर्चा करने के लिए हम मान लेते हैं कि

- तरंगें ज्यावक्रीय हैं।
- माध्यम समांग है और तरंग **नियत चाल** से गमन करती है।

उपरोक्त अभिधारणाओं के अंतर्गत तरंगें माध्यम में उसी आवर्तकाल के साथ संचरण करती हैं जो माध्यम के कणों का आवर्तकाल है। चूंकि आवृत्ति आवर्तकाल का विलोम होती है, हम लिख सकते हैं $f = 1/T$। तरंग का **आयाम**, माध्यम के कणों का अपनी माध्य स्थिति से **अधिकतम विस्थापन** के बराबर होता है।

इकाई 16 में आपने दोलनी गति के लिए कला की संकल्पना के बारे में पढ़ा था : एक दोलक किन्हीं दो क्षणों पर समान कला में तभी कहा जाता है जब उन क्षणों पर इसकी गति की अवस्था समान होती है। तरंग के लिए इसका तात्पर्य यह है कि दो क्रमागत शीर्षों या गर्तों पर कण समान गति की अवस्था में होते हैं। **किसी तरंगरूप पर समान कला वाले दो क्रमागत कणों के बीच की दूरी तरंगदैर्घ्य कहलाती है।**

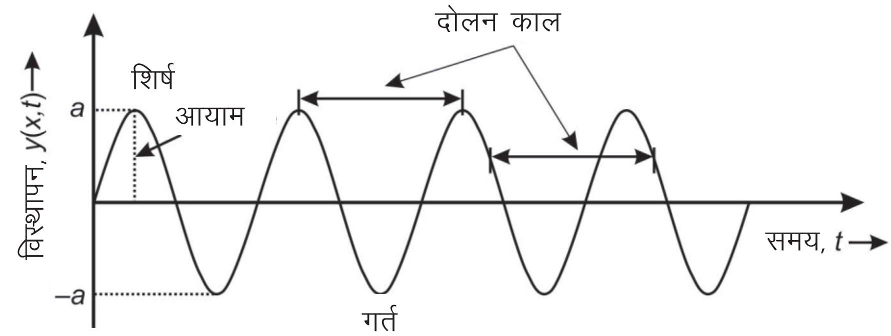
उपरोक्त जानकारी का उपयोग करके हम तरंग गति का ग्राफीय और गणितीय निरूपण कर सकते हैं। आइए, हम डोरी पर ज्यावक्रीय तरंगों का उदाहरण लें (चित्र 19.5 एवं 19.6) और उनको ग्राफ के रूप में निरूपित करें। तंरगों को चित्रित करते समय हम माध्यम के कणों (कण) का विस्थापन दो प्रकार के ग्राफों द्वारा दर्शाते हैं :

1. हम माध्यम के कण की स्थिति x को नियत रख कर इसके विस्थापन y का समय t के साथ ग्राफ आरेखित करते हैं; तथा
2. समय t को नियत रखकर कणों के विस्थापन y का उनकी स्थिति x के साथ ग्राफ आरेखित करते हैं।

प्रथम प्रकार के ग्राफ को **कंपन ग्राफ** कहते हैं। यह तरंग पथ के अनुदिश **किसी एक स्थान विशेष पर** समय के साथ तरंग का व्यवहार दर्शाता है। आप तरंग पथ के अनुदिश किसी बिंदु पर एक ऊर्ध्वाधर रेखाछिद्र रखकर इसमें समय के साथ तरंग गति का अवलोकन कर सकते हैं। चित्र 19.6 से याद करें कि कंपन ग्राफ, डोरी की किसी स्थिति (माना $x = x_1$) पर दोलनकारी कण के विस्थापन-समय ग्राफ के समान है। यह एक ज्यावक्रीय ग्राफ होगा, जैसाकि चित्र 19.9 में दर्शाया गया है।

चित्र 19.9 में दर्शाया गया ग्राफ **आकाश में किसी दिए गए स्थान पर समय के साथ तरंग गति निरूपित करता है।** आप जानते हैं कि इस प्रकार की गति को निरूपित करने वाला समीकरण है :

$y(t) = a \sin \omega t$ (19.1क)



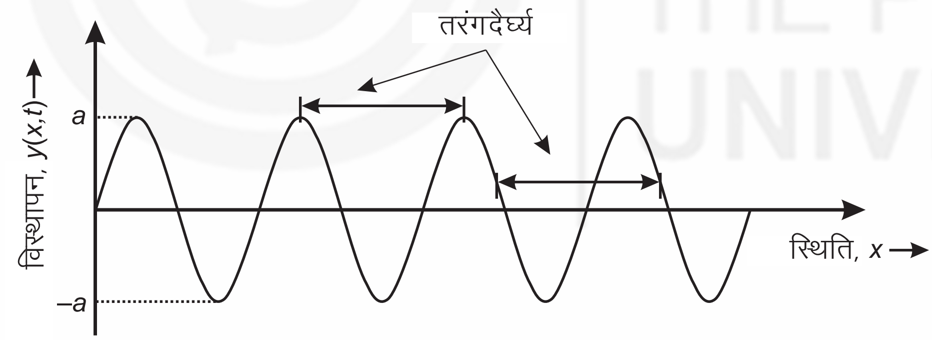
चित्र 19.9 : किसी नियत स्थान पर समय के साथ तरंग की गति दर्शाता हुआ कंपन-ग्राफ। तरंग का आवर्तकाल भी दर्शाया गया है।

यहां आप सरल आवर्त गति करने वाले कणों के दोलनों का समीकरण स्मरण करें (इकाई 16)। यद्यपि ज्यावक्रीय फलन के लिए हम इस इकाई (समीकरण 19.1क) में sine (ज्या) फलन का उपयोग कर रहे हैं परंतु गणित की दृष्टि से हम cosine (कोज्या) फलन का भी उपयोग कर सकते हैं और लिख सकते हैं कि $y(t) = a \cos \omega t$
ऐसा करने पर अन्य समीकरणों में भी sin के स्थान पर cos आ जाएगा।

यहां a तरंग का **आयाम है** (जो कणों के दोलन के आयाम के बराबर है) तथा ω इसकी **कोणीय आवृत्ति** है। यह आवृत्ति f के साथ $\omega = 2\pi f$ द्वारा संबंधित है तथा आवर्तकाल T के पदों में हम लिख सकते हैं कि $\omega = 2\pi/T$ है। अतः, समीकरण (19.1क) को निम्नवत् भी लिखा जा सकता है :

$y(t) = a \sin 2\pi(t/T)$ (19.1ख)

तरंगरूप ग्राफ समय को नियत रखकर कणों के विस्थापन को उनके स्थान के संगत आलेखित करके प्राप्त किया जाता है। तरंग गति का यह ग्राफीय निरूपण वैसा ही है जैसाकि चित्र 19.6झ के आशुचित्र में दर्शाया गया है लेकिन जिसे काफी समय बाद के एक क्षण पर लिया गया है। **तरंगरूप ग्राफ किसी क्षण विशेष पर विभिन्न स्थितियों पर तरंग के व्यवहार को प्रदर्शित करता है।** एक प्ररूपी तरंगरूप ग्राफ चित्र 19.10 में दर्शाया गया है।



चित्र 19.10 : किसी दिए गए क्षण पर, विस्थापन को स्थिति के फलन के रूप में दर्शाता हुआ तरंगरूप ग्राफ : यह किसी क्षण विशेष (माना $t = t_1$) पर आशुचित्र जैसा है। एक तरंगदैर्ध्य के समतुल्य दूरी भी अंकित की गई है।

ध्यान दें

कंपन ग्राफ हमें तरंग की आकृति, आयाम और आवर्तकाल बताता है और **तरंगरूप ग्राफ** हमें तरंग की आकृति, आयाम ओर तरंगदैर्ध्य की जानकारी देता है।

चित्रों 19.9 एवं 19.10 की तुलना करने पर आप पायेंगे कि दोनों प्रकार के ग्राफों (कंपन और तरंगरूप) की आकृतियां एक जैसी है; एकमात्र अंतर क्षैतिज अक्ष के नामांकनों में है : **कंपन ग्राफ में क्षैतिज अक्ष पर समय** t है और **तरंगरूप ग्राफ** में क्षैतिज अक्ष पर **स्थिति** x है। चित्र 19.10 द्वारा निरूपित गति का समीकरण हम निम्नवत् लिख सकते है :

समीकरण (19.2) में प्रयुक्त नियतांक k को तरंग संख्या कहते हैं। आप इसमें और इकाई 16 में प्रयुक्त कमानी नियतांक के बीच भ्रमित न हों।

$y(x) = a \sin k x$ (19.2)

> **ध्यान दें**
>
> आप गौर करें कि तरंग संख्या k को $2\pi/\lambda$ द्वारा परिभाषित किया गया है। वास्तव में, तरंग संख्या एक मीटर में तरंगों की संख्या का द्योतक होना चाहिए। अर्थात् यह राशि $(1/\lambda)$ द्वारा प्राप्त होनी चाहिए और $k (= 2\pi/\lambda)$ को कोणीय तरंग संख्या कहा जाना चाहिए। किंतु हम मानक प्रथा का अनुसरण करेंगे और k को तरंग संख्या ही कहेंगे। आपको कोणीय आवृत्ति ω और तरंग संख्या k की परिभाषा में प्रयुक्त गुणक 2π का ध्यान रखना चाहिए।

जहां k को **तरंग संख्या** कहते हैं। तरंग संख्या, k तरंगदैर्घ्य से संबंधित होती है जो दूरी-अक्ष पर समान गति की अवस्था वाले क्रमागत दो बिंदुओं के बीच की दूरी है जैसाकि चित्र 19.10 में दिखाया गया है। यह तथ्य हमें तरंग संख्या k को तरंगदैर्घ्य, λ के पदों में व्यक्त करने में सहायता करता है। तरंगदैर्घ्य की परिभाषा से यह स्पष्ट है कि इसके दोनों सिरों पर विस्थापन $y(x)$ समान है। अर्थात् $y(x = x_1) = y(x = x_1 + \lambda)$। अतः, समीकरण (19.2) का उपयोग करके हम लिख सकते हैं :

$$a \sin k x_1 = a \sin k (x_1 + \lambda)$$
$$= a \sin (kx_1 + k\lambda)$$

हम जानते हैं कि ज्यावक्रीय फलन के लिए $\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$ होता है। अतः, उपरोक्त समीकरण केवल तभी संतुष्ट होगा जब

$$k\lambda = 2\pi \quad \text{अथवा} \quad k = (2\pi/\lambda) \qquad (19.3)$$

समीकरण (19.3) हमें k एवं λ के बीच का संबंध बताता है।

समीकरण (19.3) का समीकरण (19.2) में उपयोग करने पर हम लिख सकते हैं :

$$y(x) = a \sin 2\pi(x/\lambda) \qquad (19.4)$$

ध्यान दें कि आयाम, आवर्तकाल, आवृत्ति तथा तरंगदैर्घ्य आदि तरंग को अभिलक्षित करने वाले प्राचल हैं। इनकी परिभाषाएं नीचे दी गई हैं।

तरंग प्राचल	परिभाषा
आयाम	माध्यम के कणों का अपनी संगत साम्यावस्थाओं से अधिकतम धनात्मक या (ऋणात्मक) विस्थापन।
आवर्तकाल	एकसमान गति अवस्था वाले दो क्रमागत बिंदुओं के बीच समयांतराल। ये बिंदु दो क्रमागत शीर्ष या दो क्रमागत गर्त हो सकते हैं।
आवृत्ति	एक सेकेंड में माध्यम के किसी कण द्वारा किए जाने वाले कंपनों की संख्या। यह आवर्तकाल का व्युत्क्रम होती है। हम आवृत्ति को तरंग पथ पर किसी नियत स्थान से प्रति सेकेंड गुजरने वाले पूर्ण तरंगदैर्घ्यों की संख्या के रूप में भी व्यक्त कर सकते हैं।
तरंगदैर्घ्य	एक आवर्तकाल की अवधि में तरंग द्वारा तय की दूरी। यह एकसमान गति अवस्था वाले दो क्रमागत कणों के बीच की दूरी होती है।

अभी तक परिभाषित तरंग प्राचलों के अतिरिक्त हमें तरंग का वेग जानने की भी आवश्यकता होती है। आप जानना चाहेंगे : **तरंग संचरण का वेग हम कैसे निर्धारित करते हैं?** आइए, पता लगाएं।

19.3.2 तरंग वेग, आवृत्ति और तरंगदैर्घ्य में संबंध

हम तरंग वेग, आवृत्ति और तरंगदैर्घ्य में संबंध उनकी परिभाषाओं का उपयोग करके स्थापित कर सकते हैं। याद करें कि कोई भी तरंग, एक आवर्तकाल में एक तरंगदैर्घ्य के बराबर दूरी तय करती है। अतः, तरंग वेग

$$v = (\text{तरंगदैर्घ्य} \,/\, \text{आवर्तकाल}) = (\lambda/T) \qquad (19.5)$$

चूंकि आवृत्ति, आवर्तकाल का व्युत्क्रम होती है $(f = 1/T)$, हम लिख सकते हैं कि

$$v = f\lambda \qquad (19.6)$$

अर्थात्, तरंग का वेग, उसकी आवृत्ति और तरंगदैर्ध्य के गुणनफल के बराबर है।

ध्यान दें कि हमने समीकरण (19.5) एवं (19.6), एकविम तरंगों के लिए प्राप्त किये हैं। किंतु ये समीकरण सभी प्रकार की तरंगों के लिए मान्य हैं चाहे वे अनुप्रस्थ हों या अनुदैर्ध्य, यांत्रिक हों या विद्युत्-चुंबकीय। आपको v के मान की जानकारी देने के लिए हमने सारणी 19.1 में हमने कुछ सुपरिचित तरंगों के चाल का मान, कुछ प्रारूपिक माध्यमों में, दिए हैं।

आप जानते है कि वेग एक सदिश राशि है और इसमें वेग के परिमाण तथा दिशा की जानकारी निहित होती है। प्रस्तुत पाठ्यक्रम में हम मुख्य रूप से एकविम तरंगों की चर्चा करेंगे। एकविम तरंगों के लिए, वेग और चाल में कोई अंतर नहीं होता यदि हम यह मान लें कि तरंग धनात्मक x-दिशा में गमन करती है।

सारणी 19.1: कुछ प्रारूपिक तरंगों की चाल का परिमाण

तरंग का प्रकार	चाल (ms^{-1})	तरंग का प्रकार	चाल (ms^{-1})
वायु में ध्वनि तरंगें (STP पर)	332	तालाब के तल पर तरंगिकाएं	0.2
जल में ध्वनि तरंगें (STP पर)	1500	पृथ्वी की बाह्य परतों में गतिमान भूकंपी तरंगें	6×10^3
स्टील में ध्वनि तरंगें (STP पर)	5100	निर्वात में प्रकाश तरंगें	3×10^8

वायु में ध्वनि की चाल का मान तापमान के साथ बढ़ता है। जब तापमान T को कैल्विन स्केल पर मापा जाता है तो, $v \propto \sqrt{T}$ ।

सारणी 19.1 से आप देख सकते हैं कि ध्वनि की चाल का मान स्टील में वायु की अपेक्षा अधिक है। परंतु प्रकाश का वेग ध्वनि के वेग से काफी अधिक है। यही कारण है कि तूफान वाले दिन हमें पहले प्रकाश की चमक दिखाई पड़ती है और फिर बादलों का गरजना।

शायद अब आप तरंग प्राचलों के परिकलन से संबंधित एक बोध प्रश्न हल करना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 2 – तरंग चाल, आवृत्ति एवं तरंगदैर्घ्य

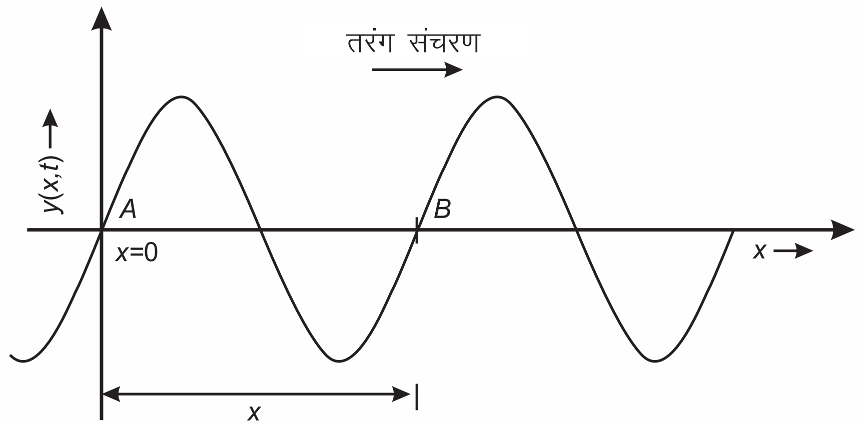
क) प्रकाश $3\times10^8\ ms^{-1}$ की चाल से गमन करता है। विद्युत्-चुंबकीय स्पेक्ट्रम के दृश्य भाग का तरंगदैर्घ्य λ, 400 nm से 720 nm के परिसर में होता है। इनके संगत आवृत्तियों का मान परिकलित करें।

ख) वायु में ध्वनि 332 ms^{-1} की चाल से गमन करती है। श्रव्य ध्वनि परिसर 20 Hz से 20,000 Hz के बीच होता है। इनके संगत तरंगदैर्घ्य के मान परिकलित करें।

अब तक की चर्चा के आधार पर आप समझ गए होंगे कि हम किसी नियत स्थान पर तरंग के विस्थापन का समय के साथ परिवर्तन (कंपन आलेख) तथा नियत समय पर तरंग के लिए आकाशीय परिवर्तन (तरंगरूप आलेख) को किस प्रकार निरूपित करते हैं। **तथापि, आप जानते हैं कि जब तरंग संचरित होती है तो यह समय और स्थान दोनों के साथ परिवर्तित होती है**। परंतु यह जानकारी न तो समीकरण (19.1ख) में समाहित है और न ही समीकरण (19.4) में। इसका तात्पर्य यह है कि ये समीकरण पूरी तरह तरंग को निरूपित नहीं करते। अतः तरंग के गणितीय रूप से संपूर्ण व्यंजक प्राप्त करने के लिए हम समीकरण (19.1ख) और समीकरण (19.4) को संयोजित करते हैं। आइए, देखें कि हम ऐसा कैसे करते हैं।

19.3.3 तरंग गति का गणितीय वर्णन

चित्र 19.11 देखें, जो धनात्मक x-अक्ष के अनुदिश गतिमान तरंग का आशुचित्र है। मान लेते हैं कि यह तरंग, वेग v से गतिमान है।



चित्र 19.11: धनात्मक x-दिशा में गतिमान तरंग का आशुचित्र।

अब आप आशुचित्र के बिंदु $A(x=0)$ तथा B पर स्थित कणों, जिनके बीच की दूरी x है, पर गौर करें। ध्यान दें कि बिंदु B पर स्थित कण का समय t पर विस्थापन, $y(x,t)$ और बिंदु A पर स्थित कण का समय t' पर विस्थापन, $y(x=0,t')$ बराबर होंगे यदि

$$t' = t - (x/v)$$

क्योंकि तरंग धनात्मक x-दिशा में संचरित हो रही है तथा तरंग द्वारा वेग v से दूरी x तय करने में लगने वाले समय का मान (x/v) है। अतः, हम लिख सकते हैं :

$$y(x,t) = y(0,t') = y(x=0, t-(x/v)) \qquad (19.7)$$

फलन $y(0,t')$ का स्वरूप निर्धारित करने के लिए हम समीकरण (19.1ख) में t के स्थान पर t' रखकर विस्थापन $y(0,t')$ का व्यंजक निम्नवत् लिखते हैं :

$$y(0,t') = a \sin 2\pi (t'/T)$$

उपरोक्त व्यंजक में $t' = t-(x/v)$ रखने पर हमें तरंग का अभीष्ट व्यंजक प्राप्त होता है:

$$y(0,t') = y(x=0, t-(x/v)) = a \sin\,(2\pi/T)\,(t-(x/v))$$

$$= a \sin[(2\pi/\lambda)\,(vt-x)] \qquad (19.8)$$

क्योंकि तरंग वेग, $v = \lambda/T$ है। समीकरण (19.7) तथा (19.8) को संयोजित करने पर हम पाते हैं:

$$\boxed{y(x,t) = a \sin[(2\pi/\lambda)\,(vt-x)]} \qquad (19.9\text{क})$$

ध्यान दें कि समीकरण (19.9क) द्वारा व्यक्त तरंग के गणितीय निरूपण में तरंग का वेग एवं तरंगदैर्घ्य, ज्या फलन के कोणांक में हैं। समीकरण (19.9क) को हम अन्य समतुल्य रूपों में भी लिख सकते हैं। ऐसा करने के लिए हम संबंध $v = \lambda/T$ का उपयोग करते हैं। अतः, हम समीकरण (19.9क) को v तथा T के पदों में निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$\boxed{y(x,t) = a \sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]} \qquad (19.9\text{ख})$$

हम इस समीकरण को निम्नवत् भी लिख सकते हैं :

$$y(x,t) = a\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\right] \qquad (19.9ग)$$

समीकरण (19.9क से ग) धनात्मक x-दिशा में गतिमान एकविम (1-D) तरंग को गणितीय रूप से पूर्णतया निरूपित करते हैं। ध्यान रहे कि ये समीकरण 1-D तरंग के समतुल्य निरूपण हैं। कोणीय आवृत्ति $\omega\,(=2\pi/T)$ एवं तरंग संख्या $k\,(=2\pi/\lambda)$ के पदों में हम समीकरण (19.9ग) को निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$y(x,\, t) = a\ \sin\,(\omega t - kx) \qquad (19.9घ)$$

ध्यान दें कि अनुदैर्घ्य तरंग में x तथा $y(x, t)$ दोनों एक ही दिशा में होते हैं। किंतु ये दो अलग-अलग राशियों के द्योतक हैं : x माध्यम के किसी कण की स्थिति दर्शाता है और $y(x, t)$ उस बिंदु पर स्थित कण का साम्य स्थिति के सापेक्ष विस्थापन निरूपित करता है।

ध्यान दें कि जिस सरल ढंग से ω एवं k तरंग की गणितीय अभिव्यक्ति में विद्यमान हैं उससे यह स्पष्ट होता है कि तरंग गति के वर्णन में इन राशियों का अक्सर उपयोग क्यों होता है। आगे, समीकरण (19.9घ) द्वारा व्यक्त तरंग में आवृत्ति का मान नियत है और यह **एकवर्णी** तरंग का द्योतक है।

समीकरण (19.9क) से समीकरण (19.9घ) में से किसी एक समीकरण का उपयोग तरंग के गणितीय निरूपण के लिए कब करना है यह दी गई विशिष्ट स्थिति पर निर्भर करता है। तथापि, अधिकांशतः हम समीकरण (19.9घ) का उपयोग करेंगे। ध्यान दें कि **इन समीकरणों द्वारा निरूपित तरंगें अनंत विस्तार की हैं।** अर्थात्, t के किसी भी नियत मान के लिए x का मान $-\infty$ से $+\infty$ तक परिवर्तित हो सकता है क्योंकि x के मान की कोई गणितीय सीमा निर्धारित नहीं है।

यहां यह उल्लेख करना आवश्यक है कि ये समीकरण, x-दिशा में गतिमान अनुप्रस्थ एवं अनुदैर्घ्य दोनों ही प्रकार के तरंगों का वर्णन करते हैं।

जब भी आपको कोई फलन दिया जाए और कहा जाए कि बताएं कि यह फलन तरंग को निरूपित करता है अथवा नहीं, आप दिए गए फलन की तुलना समीकरण (19.9क से 19.9घ तक) अथवा (19.10क से 19.10घ तक) से करें। यदि दिया गया फलन इनमें से किसी भी समीकरण के समान हो तो आप कह सकते हैं कि यह फलन तरंग निरूपित करता है। साथ ही, संगत पदों की तुलना कर आप तरंग का तरंगदैर्घ्य आवृत्ति, आवर्तकाल इत्यादि निर्धारित कर सकते हैं।

अब, आप यह भी जानना चाहेंगे : **ऋणात्मक x-दिशा में गतिमान तरंग को हम किस प्रकार निरूपित करते हैं?** इस स्थिति की चर्चा के लिए चित्र 19.11 पर फिर से विचार करते हैं। यदि तरंग श्रृणात्मक x-दिशा में संचरित हैं तो समय t' पर बिन्दु A पर विस्थापन $y(x=0,t')$ का मान वही होगा जो समय t पर बिन्दु B पर विस्थापन का मान है यदि

$$t' = t + (x/v)$$

अतः, हम लिख सकते हैं :

$$y(x,t) = y(x=0,t') = y\,\left(x=0, t+(x/v)\right)$$

अब आप समीकरण (19.9क से 19.9घ) प्राप्त करने के लिए प्रयुक्त चरणों को दोहराकर **ऋणात्मक x- दिशा में गतिमान तरंग के लिए** निम्नलिखित परिणाम व्युत्पन्न कर सकते हैं :

$$y(x,\, t) = a\ \sin\left[(2\pi/\lambda)\,(vt + x)\right] \qquad (19.10क)$$

$$y(x,\, t) = a\ \sin\left[(2\pi/T)\,\left(t + (x/v)\right)\right] \qquad (19.10ख)$$

$$y(x,\, t) = a\ \sin\left[2\pi\left((t/T) + (x/\lambda)\right)\right] \qquad (19.10ग)$$

$$y(x,t) = a\ \sin(\omega t + kx) \qquad (19.10घ)$$

समीकरण (19.9क) एवं (19.9घ) अथवा समीकरण (19.10क) एवं (19.10घ) की तुलना करने पर हमें ω एवं k के पदों में तरंग वेग का निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होता है :

$$v = \omega/k \qquad (19.11)$$

आपको चाहिए कि आप समीकरण (19.11) में दिए गए परिणाम की पुष्टि करें। आगे बढ़ने से पहले नीचे दिए गए बोध प्रश्न का उत्तर दें।

बोध प्रश्न 3 – तरंग संचरण की दिशा

एकविम तरंग निरूपित करने वाले नीचे दिए गए गणितीय व्यंजकों में से प्रत्येक के लिए तरंग संचरण की दिशा निर्धारित करें :

क) $\phi(z, t) = a \sin(\omega t - kz)$

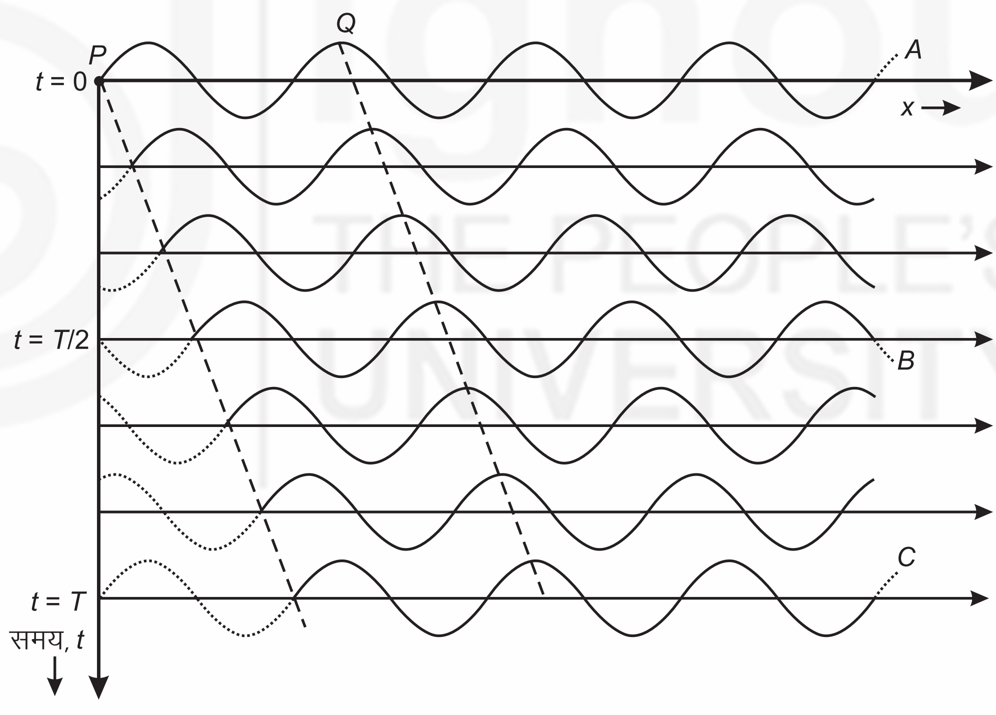
ख) $z(x, t) = a \sin(kx - \omega t)$

ग) $\psi(y, t) = a \sin(\omega t - ky)$

घ) $\xi(z, t) = a \sin(kz + \omega t)$

'पूर्ण तरंग पैटर्न' या 'संपूर्ण तरंगरूप' से हमारा अभिप्राय किसी क्षण विशेष पर तरंग के आशुचित्र से है। उदाहरण के लिए, चित्र 19.12 में दिखाया गया तरंगरूप A, तरंग का क्षण $t = 0$ पर लिया गया आशुचित्र है।

समीकरणों (19.9) एवं (19.10) द्वारा निरूपित तरंग का मूल लक्षण यह है कि समय के साथ संपूर्ण तरंगरूप x**-अक्ष के अनुदिश गति** करता है। **इससे माध्यम (डोरी) के कणों के विस्थापन तथा तरंगरूप पर स्थित किसी बिंदु के विस्थापन $y(x, t)$ के बीच का एक महत्त्वपूर्ण अंतर स्पष्ट होता है : पहला आवर्ती क्रम में परिवर्तित होता है जबकि दूसरा नियत रहता है।** जैसे-जैसे तरंग संचरित होती है, संपूर्ण तरंगरूप स्थानांतरित होता है। अतः, तरंगरूप पर किसी बिंदु का विस्थापन अपरिवर्तित रहता है और यह बात तरंगरूप के सभी बिंदुओं के लिए लागू होती है। इस तथ्य को आप चित्र 19.12 की सहायता से अच्छी तरह समझ सकते हैं।



चित्र 19.12 : x-t तल में धनात्मक x-दिशा के अनुदिश गतिमान ज्यावक्रीय तरंग का आरेख।

चित्र 19.12, समीकरणों (19.9क से घ) द्वारा निरूपित प्रगामी तरंग, जो धनात्मक x-दिशा में गतिमान है, को x–t तल (इस पृष्ठ के तल में) दर्शाता है। **इस आरेख में माध्यम के कणों का विस्थापन, $y(x,t)$, x–t तल के लंबवत् है।** यह आरेख, स्थिति x तथा समय t दोनों के साथ $y(x,t)$ का परिवर्तन दिखाता है। आप पूछ सकते हैं : जैस-जैसे तरंग संचरित होती है, x और t के भिन्न मानों के लिए विस्थापन $y(x,t)$ का क्या मान होता है?

इस प्रश्न का उत्तर जानने के लिए आप चित्र 19.12 में वक्र A, B और C पर ध्यान केंद्रित करें। ये वक्र क्रमशः समय $t = 0$, $t = t/2$ तथा $t = T$ पर, जहां T तरंग का आवर्तकाल है, तरंगरूप दर्शाते हैं। गौर करें कि समय के साथ संपूर्ण तरंगरूप दाहिनी ओर विस्थापित होता है। अब आप तीनों तरंगरूपों में $P(x = 0, t = 0)$ तथा $Q(x = 5\lambda/4, t = 0)$ बिन्दुओं के ऊर्ध्वाधर विस्थापन को देखें। आप पायेंगे कि बिन्दु P तथा Q का विस्थापन समय के साथ अपरिवर्तित रहता है। यह बात तरंग के सभी बिन्दुओं के लिए और समय t के सभी मानों के लिए लागू होती है।

अतः, हम इस निष्कर्ष पर पहुंचते हैं कि जैसे-जैसे तरंग संचरित होती है, तरंगरूप के प्रत्येक बिन्दु का विस्थापन समय के साथ नियत रहता है और विस्थापन का मान, निर्देश स्थिति (जो $x = 0$ तथा $t = 0$ है) पर विस्थापन के मान के बराबर होता है।

अब हम कुछ उदाहरणों की सहायता से आपको बताएंगे कि तरंग के गणितीय व्यंजक के आधार पर तरंग प्राचलों तथा दिए गए प्राचलों के आधार पर तरंग के लिए गणितीय व्यंजक कैसे प्राप्त किए जा सकते हैं।

उदाहरण *19.1* : तरंग से संबद्ध प्राचल

किसी तरंग को निम्नलिखित व्यंजक द्वारा निरूपित किया गया है :

$$y(x, t) = (4\,\text{cm}) \sin[(20\,\text{s}^{-1})\,t + (10\,\text{cm}^{-1})\,x]$$

तरंग के आयाम, तरंगदैर्घ्य, कोणीय आवृत्ति, तरंग संख्या एवं वेग का मान निर्धारित करें।

हल ■ दिए गए व्यंजक की तुलना तरंग के मानक व्यंजक से करने पर हम पाते हैं कि यह समीकरण (19.10घ) के समतुल्य है :

$$y(x, t) = a \sin(\omega t + kx) \qquad \text{(i)}$$

अतः, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि तरंग **ऋणात्मक x-दिशा** में गतिमान है। समीकरण (i) एवं दिए गए समीकरण के संगत पदों की तुलना करने पर हमें निम्न परिणाम प्राप्त होते हैं :

आयाम, $a = 4\,\text{cm}$; तरंग संख्या, $k = 10\,\text{cm}^{-1}$; कोणीय आवृत्ति $\omega = 20\,\text{s}^{-1}$।

समीकरण (19.11) का उपयोग करने पर हमें तरंग वेग, v प्राप्त होता है :

$$v = (\omega/k) = (20\,\text{s}^{-1}/10\,\text{cm}^{-1}) = 2\,\text{cm}\,\text{s}^{-1}$$

तथा संबंध $k = 2\pi/\lambda$ का उपयोग करने पर हमें तरंगदैर्घ्य, λ का मान प्राप्त होता है :

$$\lambda = [2\pi/(10\,\text{cm}^{-1})] = 0.6\,\text{cm}$$

अब आप एक बोध प्रश्न हल करना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 4 – तरंग प्राचल

एक प्रगामी तरंग को निम्नलिखित समीकरण द्वारा निरूपित किया जाता है :

$$y(x, t) = (1) \sin[1000\,\pi t - (\pi x/50)]\ \text{cm}$$

इस तरंग की संचरण दिशा निर्धारित करें तथा इसका आयाम, तरंग संख्या, तरंगदैर्घ्य, कोणीय आवृत्ति एवं आवृत्ति परिकलित करें। cm s^{-1} मात्रक में इसका वेग भी परिकलित करें।

उदाहरण 19.2 : दिए गए तरंग प्राचलों के आधार पर तरंग का गणितीय व्यंजक प्राप्त करना

275 Hz आवृत्ति की एक ध्वनि तरंग 340 ms^{-1} की चाल से धनात्मक x-दिशा में गतिमान है। माध्यम का प्रत्येक कण अपनी साम्यावस्था के इर्द-गिर्द क्षैतिजतः कुल 5.0 mm दूरी तय करता है। तरंग को गणितीय रूप में व्यक्त करें।

हल ■ तरंग के आयाम का मान माध्यम के कणों द्वारा तय की गयी कुल दूरी का आधा होगा। अतः,

$$a = 2.5\,\text{mm} = 2.5\times10^{-3}\,\text{m}$$

आगे, हमें तरंग की चाल और आवृत्ति का मान ज्ञात है। चूंकि तरंग धनात्मक x-दिशा में गतिमान है, हमें तरंग का व्यंजक समीकरणों (19.9ग) और (19.9घ) के रूपों में लिखना होगा। इसके लिए हमें आवर्तकाल, तरंगदैर्घ्य, कोणीय आवृत्ति और तरंग संख्या की आवश्यकता होगी। इन प्राचलों की परिभाषाओं का उपयोग कर हम लिख सकते हैं :

$$T = 1/f = (1/275)\,\text{s}$$

$$\lambda = v/f = 340\,\text{ms}^{-1}/275\,\text{s}^{-1} = (340/275)\text{m} = 1.24\,\text{m}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\times(275\,\text{s}^{-1}) = 550\,\pi\,\text{s}^{-1}$$

$$= 1.73\times10^{3}\,\text{s}^{-1}$$

$$k = 2\pi/\lambda = 2\pi/(1.24\,\text{m}) = 5.07\,\text{m}^{-1}$$

अतः, हम तरंग के व्यंजक को समीकरण (19.9ग) के रूप में इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$y(x,t) = (2.5\times10^{-3}\,\text{m})\sin\left[2\pi(275t-(x/1.24))\right]$$

हम इसे निम्न प्रकार से भी लिख सकते हैं :

$$y(x,t) = (2.5\times10^{-3}\,\text{m})\sin\left[550\,\pi(t-(x/340))\right]$$

समीकरण (19.9घ) के रूप में तरंग का व्यंजक है :

$$y(x,t) = (2.5\times10^{-3}\,\text{m})\sin(1.73\times10^{3}\,t-5.07x)$$

बोध प्रश्न 5 – दिए गए तरंग प्राचलों के लिए तरंग का व्यंजक

एक ज्वार-तरंग, जिसकी अधिकतम ऊंचाई 7.4 m है, ऋणात्मक x-दिशा में 93 ms^{-1} की चाल से गतिमान है और इसका सन्निकटन ज्या फलन के रूप में किया जा सकता है। दो क्रमागत शीर्षों के बीच की दूरी 5 cm है। तरंग के लिए व्यंजक लिखें।

आगे बढ़ने से पहले आइए हम उन तथ्यों को दोहरा लें जिनका अध्ययन आपने इस भाग में किया है।

दोहराएं

- तरंग गति को आलेख के रूप में **कंपन आलेख** (जो किसी नियत स्थान पर तरंग का समय के साथ परिवर्तन निरूपित करता है) और **तरंगरूप आलेख** (जो तरंग के संगत विस्थापन को किसी नियत समय पर विभिन्न स्थानों पर दर्शाता है) द्वारा चित्रित किया जा सकता है।

- **तरंग की आवृत्ति, तरंग उत्पन्न करने वाले स्रोत का गुणधर्म है** और यह उस माध्यम पर निर्भर नहीं करती जिसमें तरंग संचरित होती है।
- तरंग के वेग का व्यंजक $v = f\lambda$ है। यह दर्शाता है कि **किसी दिए गए माध्यम में नियत आवृत्ति के लिए तरंग के वेग का मान नियत रहता है।**
- धनात्मक x-दिशा में गतिमान एकविम तरंग को निरूपित करने वाला व्यंजक है :

$$y(x, t) = a \sin(\omega t - kx)$$

और ऋणात्मक x-दिशा में गतिमान तरंग का व्यंजक है :

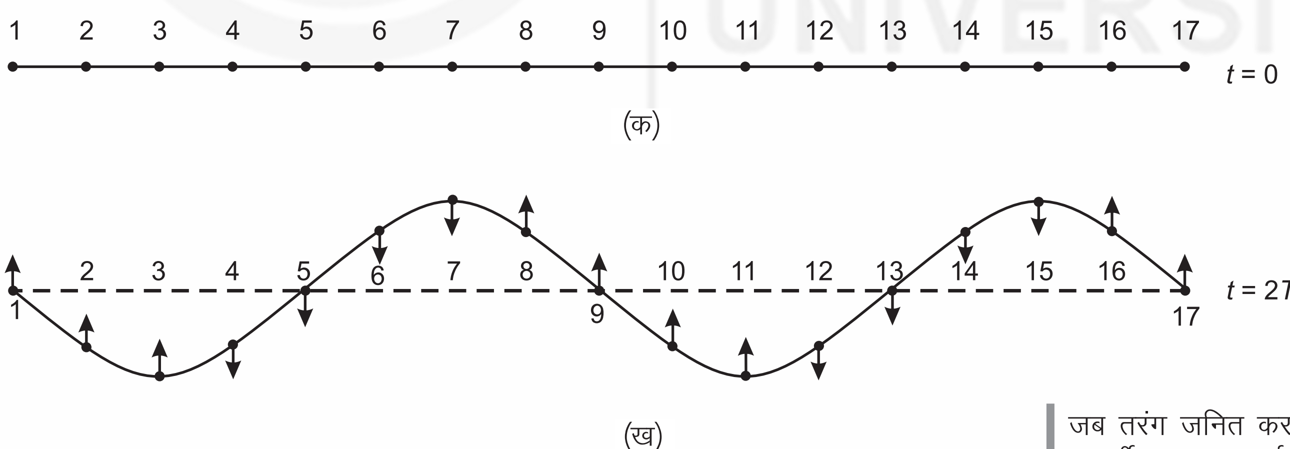
$$y(x, t) = a \sin(\omega t + kx)$$

अभी तक आपने पढ़ा है कि जब किसी माध्यम में तरंगें संचरित होती हैं तो माध्यम के कण अपनी संगत माध्य स्थितियो के इर्द-गर्द दोलन करते हैं। आप **आयाम, आवर्तकाल आवृत्ति** और **तरंगदैर्घ्य** आदि तरंग प्राचलों के बारे में भी पढ़ चुके हैं। तरंग के संपूर्ण गणितीय निरूपण के लिए हमें तरंग की **कला** का भी ज्ञान होना चाहिए। इस विषय पर अगले भाग में चर्चा की गई है।

19.3.4 तरंग की कला और कला अंतर

किसी तरंग की कला की संकल्पना की व्याख्या के लिए हम एक डोरी पर संचरित तरंग पर पुनः विचार करते हैं और अपना ध्यान तरंग चक्र के प्रारंभ में इसके किसी कण की साम्यावस्था पर केंद्रित करते हैं। याद करें कि एक संपूर्ण आवर्तकाल में, शीर्ष पर पहुंचने तक यह ऊपर की ओर चलेगा, फिर साम्य स्थिति की ओर लौटेगा और उसके बाद नीचे चलकर गर्त पर जाएगा और अंत में अपनी प्रारंभिक स्थिति प्राप्त करेगा। हम इस जानकारी का उपयोग तरंग की **कला** की संकल्पना समझने के लिए करेंगे।

चित्र 19.13क देखें जो क्रमशः एक तानित डोरी पर 1 से 17 तक अंकित स्थानों पर स्थित कणों को समय $t = 0$ पर दर्शाता है। समय $t = 2T$ पर इन 17 कणों की स्थितियां चित्र 19.13ख में दिखाई गई हैं।(एक तरह से यह चित्र 19.6 का विस्तारित रूप है।)



चित्र 19.13 : क) $t = 0$ पर तानित डोरी; ख) $t = 2T$ पर डोरी पर जनित तरंगरूप का आशुचित्र।

चित्र 19.13ख देखें और किन्हीं दो चिन्हित स्थानों, माना 1 तथा 2 पर विद्यमान कणों के विस्थापनों की तुलना करें। हम जानते हैं कि ये दोनों कण समान आयाम और आवृत्ति की सरल आवर्त गति करते हैं। किंतु कण 2, कण 1 से $t = T/8$ समय के बाद दोलन

जब तरंग जनित करने वाला आवर्ती बल एक पूर्ण दोलन पूरा करता है तब तरंग एक तरंगदैर्घ्य दूरी तय करती है। यदि हम दोलनी गति को एक संदर्भ वृत्त पर एक

(क्रमशः)

> समान चाल के साथ निरूपित करें, जैसा कि चित्र 19.14क में दिखाया गया है, तो कण का एक पूर्ण दोलन एक पूर्ण घूर्णन अर्थात 360° अथवा 2π रेडियन के समतुल्य होता है। अतः, हम कह सकते हैं कि तरंगरूप पर एक तरंगदैर्घ्य के बराबर दूरी, संदर्भ वृत्त पर कोण के पदों में 360° अथवा 2π रेडियन होती है। इसका अभिप्राय यह है कि तरंगरूप पर $(\lambda/2)$ दूरी से पृथ्थकृत दो बिन्दु एक दूसरे से $(360^\circ/2) = 180^\circ$ अथवा $(2\pi/2) = \pi$ रेडियन कोण से पृथ्थकृत होंगे। अतः, चित्र 19.14ख में बिन्दु A तथा C के बीच कलांतर का मान 180° अथवा π रेडियन होगा।

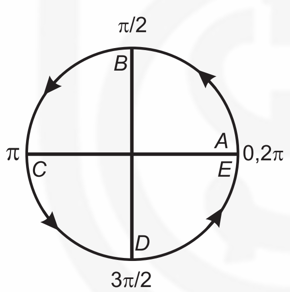
शुरू करता है। इस स्थिति का वर्णन हम यह कह कर करते हैं कि कण 2, कण 1 की तुलना में **पश्च** है। आप यह भी देख सकते हैं कि चित्र 19.13ख में कण 1, 9 एवं 17 ऊपर की ओर गति प्रारंभ करने ही वाले हैं और ये समान गति अवस्था में हैं। लेकिन कण 1, कण 2 से 8 एवं कण 10 से 16 की अपेक्षा गति की भिन्न अवस्था में है। इसी प्रकार, कण 2 एवं 10 गति की समान अवस्था में हैं।

उपरोक्त चर्चा के आधार पर हम कह सकते हैं कि यद्यपि सभी कण सरल आवर्त गति करते हैं और उनके विस्थापनों में समय के साथ एक जैसा ज्यावक्रीय परिवर्तन देखने में आता है, तथापि किसी एक क्षण पर उनकी **गति की अवस्थाएं** भिन्न-भिन्न हो सकती हैं। **माध्यम के कणों की गति की अवस्थाओं के इस अंतर को हम कला कोण या केवल कला के रूप में व्यक्त करते हैं।** हम कहते हैं कि कण 1, 9 एवं 17 **समान कला** में हैं किंतु कण 1 की कला वही नहीं है जो कणों 2, 3, ...8 तथा 10, 11,...16 की है अथवा कण 1 और इन कणों के बीच **कलांतर** है।

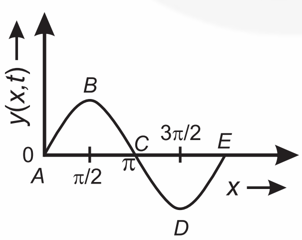
अब आपका एक तर्क-सम्मत प्रश्न यह हो सकता है कि **ऊपर दिए गए गुणात्मक वर्णन के संगत हम तरंग की कला को गणितीय रूप में कैसे निरूपित करते हैं**? हम जानते हैं कि तरंग गति, माध्यम के कणों की उनके संगत माध्य स्थितियों के इर्द-गिर्द आवर्ती गति के कारण उत्पन्न होती है। हम इस तथ्य का उपयोग तरंग की कला को परिभाषित करने के लिए करते हैं। **किसी आवर्ती प्रगामी तरंग को निरूपित करने वाले ज्या (अथवा कोज्या) फलन का कोणांक, तरंग की कला निरूपित करता है।** हम इसे $\phi(x, t)$ से निरूपित करते हैं। अतः, स्थिति x तथा समय t पर, समीकरण (19.9घ) द्वारा निरूपित ज्यावक्रीय तरंग की कला ज्या फलन का कोणांक है जिसे हम निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$\phi(x, t) = \omega t - kx \qquad (19.12\text{क})$$

ध्यान दें कि तरंग की कला एक कोण है जिसे हम डिग्री या रेडियन में मापते हैं। आप जानते हैं कि 360° का कलांतर एक तरंगदैर्घ्य के संगत होता है (चित्र 19.14 देखें और हाशिए में दी गयी टिप्पणी पढ़ें)।



(क)



(ख)

चित्र 19.14: क) तरंग जनित करने वाले एक पूर्ण दोलन को संदर्भ वृत्त पर निरूपित करने पर वह 360° अथवा 2π रेडियन के बराबर होता है; ख) एक पूर्ण दोलन के द्वारा जनित तरंगरूप का आशुचित्र।

समीकरण (19.12क) से हम पाते हैं कि किसी तरंग की कला, स्थान और समय दोनों के साथ परिवर्तित होती है। आगे, कला की परिभाषा से यह भी निष्कर्ष निकलता है कि **तरंगरूप पर एक तरंगदैर्घ्य या इसके पूर्णांक गुणकों द्वारा पृथक्कृत सभी बिंदु समान कला में होते हैं।** इस तथ्य की विस्तृत व्याख्या के लिए याद करें कि समय t पर किसी ज्यावक्रीय फलन के लिए

$$\sin(\omega t - kx \pm 2\pi) = \sin(\omega t - kx)$$

अब किसी बिंदु $x' = x + \lambda$ के लिए (संबंध $k = 2\pi/\lambda$ का उपयोग करके) हम लिख सकते हैं कि

$$\sin(\omega t - kx') = \sin[\omega t - k(x + \lambda)] = \sin(\omega t - kx - k\lambda)$$
$$= \sin(\omega t - kx - 2\pi) = \sin(\omega t - kx)$$

अतः, किसी दिए गए समय t तथा बिंदु $x = \lambda$ पर तरंग की कला वही होती है जो बिंदु $x = 0$ पर होती है। इसी प्रकार, आप इस बात को समझ सकते हैं कि **तरंगरूप पर एक-दूसरे से तरंगदैर्घ्य के पूर्णांक गुणकों द्वारा पृथक्कृत सभी बिंदु समान कला में होते हैं।** (इसके लिए आपको $x' = x \pm n\lambda$ प्रतिस्थापित करना है और संबंध $\sin(\theta \pm 2n\pi) = \sin\theta$ का उपयोग करना है, जहां $n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$)।

अब हम तरंगरूप के किन्हीं दो बिंदुओं के बीच कलांतर का मान निर्धारित कर सकते हैं। आइए, पहले तरंगरूप पर स्थित किन्हीं दो बिंदुओं जो क्रमशः स्थितियों x_1 तथा

x_2 पर हैं, पर विचार करें। गणितीय रूप से हम स्थितियों x_1 तथा x_2 पर कणों की कलाओं ϕ_1 तथा ϕ_2 को किसी नियत समय पर निम्नवत् लिख सकते हैं :

$$\phi_1 = \omega t - kx_1$$

तथा

$$\phi_2 = \omega t - kx_2$$

अतः, तरंगरूप का स्थिति x_1 तथा x_2 के बीच कलांतर $\Delta\phi$ किसी नियत समय t पर निम्नवत् लिखा जा सकता है :

$$\Delta\phi(x,t) = (\omega t - kx_2) - (\omega t - kx_1)$$

$$= k(x_1 - x_2)$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_2) \quad \text{(नियत समय } t \text{ पर)} \qquad (19.12\text{ख})$$

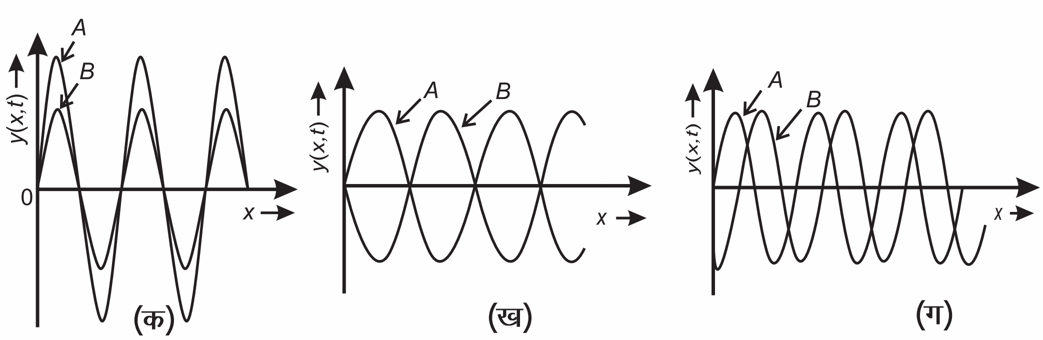
समीकरण (19.12ख) स्थितियों x_1 तथा x_2 पर स्थित किन्हीं दो यादृच्छिक बिंदुओं के बीच कलांतर का मान तरंगदैर्घ्य के पदों में व्यक्त करता है। इस संबंध से स्पष्ट है कि यदि तरंगरूप पर दो बिंदुओं के बीच की दूरी $(x_1 - x_2)$ का मान तरंगदैर्घ्य के मान के बराबर हो तो कलांतर का मान 2π होगा। और, जैसाकि आप जानते हैं, यदि दो बिन्दुओं के बीच कलांतर का मान 2π के बराबर है तो ये दो बिंदु सम-कला में होते हैं। अतः, हम कह सकते हैं कि यदि दो बिंदु एक तरंगदैर्घ्य (अथवा तरंगदैर्घ्य के पूर्णांक गुणकों) के बराबर दूरी से पृथक्कृत हों तो वे सम-कला में होते हैं या उनके बीच कलांतर का मान शून्य होता है। इसका तात्पर्य यह है कि यदि कला में 2π अथवा इसके पूर्णांक गुणकों का अंतर हो तो तरंगरूप में कोई परिवर्तन नहीं होता।

आइए, अब आगे हम नियत स्थान पर तरंग की कल्पना करते हैं। दो भिन्न समयों t_1 तथा t_2 पर विचार करें तो उनके बीच तरंग के कलांतर को हम निम्नवत् लिख सकते हैं (समीकरण (19.12क)) :

$$\boxed{\Delta\phi(x,t) = \omega\Delta t} \qquad \text{नियत स्थान } x \text{ पर} \qquad (19.12\text{ग})$$

आपको माध्यम (डोरी) के कणों के ऊर्ध्वाधर विस्थापन तथा तरंगरूप पर किसी बिंदु P के ऊर्ध्वाधर विस्थापन में अंतर स्पष्ट होना चाहिए। कणों का विस्थापन आवर्ती रूप से परिवर्तित होता है जबकि तरंगरूप पर स्थित बिंदु का विस्थापन नियत रहता है।

हमें आशा है कि आपको अब भली-भांति समझ में आ गया होगा कि तरंग पर दो बिंदुओं के बीच कलांतर से हमारा क्या अभिप्राय है। किसी तरंगरूप पर विभिन्न बिंदुओं की किसी नियत बिंदु के सापेक्ष कला संबंधी इस परिचर्चा को हम एक से अधिक तरंगों के संदर्भ में आगे बढ़ा सकते हैं। **जब दो तरंगों के संगत बिन्दु, अधिकतम या न्यूनतम विस्थापनों की स्थितियां एक ही क्षण पर प्राप्त करें तो वे तरंगे सम-कला में होती हैं।** अतः, यदि एक तरंग का शीर्ष/गर्त दूसरे तरंग के शीर्ष/गर्त के संपाती हो तो ये दो तरंगें एक ही कला में होती है (चित्र 19.15क)। यदि एक तरंग का शीर्ष दूसरी



चित्र 19.15: दो तरंगें A एवं B क) सम-कला में; ख) विपरीत कला में; ग) किसी यादृच्छिक कोण के कलांतर पर हैं।

तरंग की गर्त के साथ संपाती हो, जैसाकि चित्र 19.15ख में दर्शाया गया है, तो उनकी कलाओं में 180° का अंतर होता है और वे **विपरीत कला** में कही जाती हैं। दो तरंगों के बीच कलांतर का मान 0 से 360 के बीच परिवर्तित हो सकता है। चित्र 19.15ग में दो तरंगें A तथा B आरेखित की गई हैं जिनमें एक यादृच्छिक कोण θ का कलांतर है। अपनी +2 की भौतिकी की कक्षा में आपने पढ़ा होगा कि दो या दो से अधिक तरंगों के बीच कलांतर उनके अध्यारोपण का परिणाम निर्धारित करने में निर्णायक भूमिका अदा करता है।

इस इकाई को समाप्त करने से पहले यहां यह बताना आवश्यक है कि समीकरणों (19.9क से घ) द्वारा वर्णित तथा वेग v से संचरित तरंग का विस्थापन निम्नलिखित **तरंग समीकरण** का हल होता है :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{v^2}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

जहां y उस माध्यम के कण का विस्थापन है जिसमें तरंग संचरित होती है। किसी माध्यम (डोरी, वायू या ठोस) में तरंग संचरण प्रेक्षित करने के लिए एक जैसी कमानियों से जुड़े अनेक द्रव्यमानों की कल्पना कीजिए (चित्र 19.2)। जब किसी एक द्रव्यमान को अनुप्रस्थ या अनुदैर्ध्यतः दिशा के अनुदिश विस्थापित किया जाता है तो इनके बीच के बंधन विक्षुब्ध हो जाता है तथा प्रारंभिक अवस्था में पहुंचते हुए क्रमागत द्रव्यमानों के बीच ऊर्जा विनिमय होता है। अनंत द्रव्यमान-कमानी तंत्र में ऊर्जा संचरण के कारण एकविम तरंग संचरित होती है। यही बात द्वि एवं त्रिविम तरंगों के लिए भी मान्य है।

आइए अब इस इकाई में आपने जो कुछ पढ़ा उसे सारांशित करें।

19.4 सारांश

अवधारणा	विवरण
तरंग विक्षोभ है	■ तरंग एक **विक्षोभ** है जो किसी माध्यम में उत्तरोत्तर गमन करता है। **तरंगें द्रव्यमान वाहित नहीं करतीं; वे केवल ऊर्जा और संवेग वाहित करती हैं।** ■ यांत्रिक तरंगों का अस्तित्व केवल भौतिक माध्यम में ही हो सकता है।
अनुदैर्घ्य और अनुप्रस्थ तरंगें	■ **अनुप्रस्थ तरंग** में, जैसेकि तानित डोरी पर जनित तरंग, माध्यम के कण, तरंग की गमन दिशा के लंबवत् दिशा में दोलन करते हैं। दूसरी ओर, **अनुदैर्घ्य तरंग** में, जैसेकि वायु में ध्वनि तरंगें, माध्यम के कण, तरंग की गमन दिशा के अनुदिश दोलन करते हैं।
ग्राफीय निरूपण	■ तरंग गति का **ग्राफीय निरूपण** दो प्रकार के ग्राफों (आलेखों) द्वारा किया जा सकता है : **कंपन आलेख** तथा **तरंगरूप आलेख**। कंपन आलेख तरंग पथ के अनुदिश किसी एक नियत स्थान पर समय के साथ तरंग के संगत विस्थापन निरूपित करता है। तरंगरूप आलेख, किसी क्षण विशेष पर, तरंग पथ के अनुदिश विभिन्न स्थानों पर तरंग के संगत विस्थापन निरूपित करता है। यह किसी नियत समय पर आशुचित्र है।
तरंग आवृत्ति	■ तरंग की **आवृत्ति,** तरंग जनित करने वाले स्रोत का गुणधर्म है।
तरंग वेग	■ तरंग का वेग, v संबंध $v = f\lambda$ से प्राप्त होता है, जहां f तरंग की **आवृत्ति** और λ इसका **तरंगदैर्घ्य** है। अतः, किसी माध्यम में, दी गई आवृत्ति की तरंग का वेग

नियत होता है। कोणीय आवृत्ति ω एवं तरंग संख्या k के पदों में तरंग वेग, $v = \omega / k$ संबंध द्वारा व्यक्त होता है।

प्रगामी तरंग

■ किसी एकविम **प्रगामी तरंग** को, जो धनात्मक x-दिशा में गतिमान हो, गणितीय रूप में निम्नलिखित समीकरण द्वारा व्यक्त करते हैं :

$$y(x,\, t) = a \sin(\omega t - kx)$$

संबंधों $\omega = 2\pi / T$ तथा $k = 2\pi / \lambda$ का उपयोग करके तरंग के व्यंजक को निम्नलिखित समतुल्य रूपों में भी लिखा जा सकता है :

$$y(x,\, t) = a \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)\right]$$

$$= a \sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$$

$$= a \sin\left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

तरंग की कला

■ कंपन आलेख पर, T अथवा इसके पूर्णांक गुणकों द्वारा पृथक्कृत दो बिंदु सम-कला में होते हैं। इसी प्रकार, तरंगरूप आलेख पर, λ अथवा इसके पूर्णांक गुणको द्वारा पृथक्कृत दो बिदु संम-कला मे होते है।

सम-कला तरंगें

■ दो तरंगों के संगत बिंदु जब अपनी-अपनी उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ विस्थापन की स्थिति में एक साथ पहुंचते हैं तो ये तरंगें **सम-कला** में होती हैं।

एक-विम तरंग

■ एक-विम तरंग को निम्नलिखित **तरंग समीकरण** द्वारा निरूपित किया जा सकता है

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{v^2}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

19.5 अंत में कुछ प्रश्न

1. एक प्रगामी अनुप्रस्थ तरंग को निम्नलिखित व्यंजक द्वारा व्यक्त किया जाता है :

$$y(x,t) = 0.02 \sin(1886t - 42x) \text{ m}$$

जहाँ x मीटर में तथा t सेकेंड में है। तरंग की संचरण दिशा निर्धारित करें और इसका आयाम, तरंगदैर्घ्य, आवृत्ति एवं वेग परिकलित करें।

2. एक डोरी पर अनुप्रस्थ तरंग को निम्न व्यंजक द्वारा निरूपित किया जाता है :

$$y(x,t) = 0.03 \sin(2t - 3x) \text{ m}$$

जहां x मीटर में तथा t सेकेंड में है। क) $x = 0, 0.1\text{m}$ एवं 0.3m पर $t = 0$ के लिए विस्थापन परिकलित करें; ख) $x = 0.1\text{ m}$ पर $t = 0$, 0.1s तथा 0.2 s पर विस्थापन के मान परिकलित करें; ग) डोरी के कणों के दोलन का वेग प्राप्त करें तथा घ) डोरी के किसी दिए गए कण के लिए दोलन के अधिकतम वेग का मान क्या है?

3. धनात्मक x-दिशा में गतिमान एक अनुप्रस्थ तरंग को निम्नलिखित व्यंजक द्वारा व्यक्त किया जाता है :

$$y(x,t) = 5\sin(4.0t - 0.02x)\,\text{cm}$$

जहां x सेंटीमीटर में और t सेकेंड में है। तरंग वेग, अधिकतम कण वेग और त्वरण परिकलित करें।

4. एक प्रगामी तरंग का व्यंजक निम्नलिखित है :

$$y(x,t) = 0.26\sin(12.1t - 2.3x + 1.6)\ \text{m}$$

जहां x का मापन मीटर में और t का सेकेंड में किया गया है। वह दूरी परिकलित करें जिस पर मूल बिंदु को x-अक्ष के अनुदिश स्थानांतरित करने पर तरंग का व्यंजक निम्नलिखित हो जाएगा :

$$y(x',t) = 0.26\sin(12.1t - 2.3x)\ \text{m}$$

5. किसी लंबी डोरी के एक सिरे से जुड़े 500 Hz आवृत्ति के एक दोलक द्वारा डोरी पर 1 cm आयाम की अनुप्रस्थ तरंगे जनित होती है। किसी क्षण विशेष पर, $x = 10$ cm एवं $x = 20$ cm पर स्थित कणों के विस्थापन क्रमशः + 0.5 cm एवं – 0.5 cm हैं। तरंग वेग तथा तरंगदैर्घ्य परिकलित करें। यदि तरंगें धनात्मक x-दिशा में गतिमान हों और $x = 0$ पर स्थित डोरी का सिरा $t = 0$ पर साम्य स्थिति में हो तो तरंग वेग के पदों में विस्थापन के लिए व्यंजक लिखें।

19.6 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. क) जब कोई एकल विक्षोभ माध्यम में गमन करता है तो यह स्पंद कहलाता है। तरंग, माध्यम के कणों के संतत दोलन से उत्पन्न होती है।

   ख) i) ध्वनि एवं डोरी पर जनित तरंगों जैसी यांत्रिक तरंगें।

   ii) विद्युत्-चुंबकीय तरंगें।

   ग) अनुप्रस्थ तरंग में, माध्यम के कण, तरंग गमन की दिशा के लंबवत् दोलन करते हैं। जल की सतह पर संचरित तरंगें 2-D अनुप्रस्थ तरंग का उदाहरण है। अनुदैर्घ्य तरंग में कणों के दोलन की दिशा तरंग गति की दिशा के अनुदिश होती है। ध्वनि तरंगें, अनुदैर्घ्य तरंग का सुपरिचित उदाहरण है।

2. क) समीकरण (19.6) से याद करें कि प्रकाश तरंग की आवृत्ति का व्यंजक है :

$$f = (c/\lambda)$$

हम जानते हैं कि दृश्य परिसर के बैंगनी सिरे के तरंगदैर्घ्य λ का मान $4000\text{Å} = 4\times10^{-7}\,\text{m}$ होता है। अतः, इसके संगत प्रकाश की आवृत्ति है :

$$f_v = (3\times10^{8}\,\text{ms}^{-1})/(4\times10^{-7}\,\text{m}) = 7.5\times10^{14}\,\text{s}^{-1}$$

इसी प्रकार, दृश्य परिसर के लाल-छोर के तरंगदैर्घ्य का मान $7.2\times10^{-7}\,\text{m}$ है। अतः, संगत आवृत्ति है :

$$f_r = (3\times10^{8}\,\text{ms}^{-1})/(7.2\times10^{-7}\,\text{m}) = 4.2\times10^{14}\,\text{s}^{-1}$$

ख) प्रश्न के अनुसार, ध्वनि के लिए $v = 332\ \text{ms}^{-1}$ तथा श्रव्य ध्वनि परिसर के निचले सिरे पर ध्वनि तंरग की आवृत्ति 20 Hz है। अतः, समीकरण (19.6) का उपयोग कर हम लिख सकते हैं :

$$\lambda = (v/f) = (332\ \text{ms}^{-1}) / (20\ \text{s}^{-1}) = 16.6\ \text{m}$$

इसी प्रकार, श्रव्य परिसर के ऊपरी सिरे के लिए हम लिख सकते हैं :

$$\lambda = (332\ \text{ms}^{-1}) / (2 \times 10^4\ \text{s}^{-1}) = 16.6 \times 10^{-4}\ \text{m} = 1.66\ \text{mm}$$

3. क) धनात्मक z-दिशा; ख) धनात्मक x-दिशा; ग) धनात्मक y-दिशा; घ) ऋणात्मक z-दिशा।

4. धनात्मक x-दिशा में गतिमान तरंग का व्यंजक है :

$$y(x, t) = 1 \sin\left[1000\ \pi t - \frac{\pi x}{50}\right] \text{cm} \qquad \text{(i)}$$

हम जानते हैं कि धनात्मक x-दिशा में गतिमान तरंग का मानक व्यंजक समीकरण (19.9घ) द्वारा व्यक्त होता है, जो है :

$$y(x, t) = a \sin(\omega t - kx) \qquad \text{(ii)}$$

समीकरण (i) एवं (ii) की तुलना करने पर हमें प्राप्त होता है :

आयाम = 1 cm; तरंग संख्या $k = \pi/50\ \text{cm}^{-1}$;

तरंगदैर्घ्य $\lambda = 2\pi/k = 2\pi \times (50/\pi) = 100$ cm; कोणीय आवृत्ति $\omega = 1000\ \pi\text{s}^{-1}$;

आवृत्ति $f = \omega/2\pi = 1000\pi/2\pi = 500$ Hz;

तरंग वेग $= f\lambda = (500\ \text{s}^{-1}) \times (100\ \text{cm}) = 5 \times 10^4\ \text{cms}^{-1}$

5. ऋणात्मक x-दिशा में गतिमान तरंग को निरूपित करने वाला व्यंजक है :

$$y(x,t) = a \sin(\omega t + kx)$$

चूंकि तरंग की अधिकतम ऊँचाई 7.4 m है, इसका आयाम $a = 7.4\,\text{m}$ होगा। तरंग की कोणीय आवृत्ति ω, वेग v और तरंगदैर्घ्य, λ के पदों में निम्नलिखित संबंध द्वारा व्यक्त की जाती है :

$$\omega = (2\pi v/\lambda)$$

प्रश्न के अनुसार, $v = 93\ \text{ms}^{-1}$ तथा $\lambda = 5\ \text{m}$ (चूंकि दो क्रमागत शीर्षों के बीच की दूरी 5 m है)। अतः,

$$\omega = (2\pi \times 93\text{ms}^{-1}/5\text{m}) = 116.8\text{s}^{-1}$$

इसी प्रकार, तरंग संख्या k और तरंगदैर्घ्य λ के बीच निम्नलिखित संबंध है :

$$k = (2\pi/\lambda) = (2 \times 22)/(7 \times 5\text{m}) = 1.26\ \text{m}^{-1}$$

अतः, तरंग का वांछित व्यंजक है :

$$y(x, t) = (7.4\,\text{m}) \sin(1.26\,x + 116.8\,t)$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. प्रगामी अनुप्रस्थ तरंग का मानक व्यंजक है :

$$y(x, t) = a \sin(\omega t - kx)$$

प्रश्न में दिए गए व्यंजक की इस व्यंजक से तुलना करने पर हम पाते हैं कि दी गई तरंग की गमन दिशा धनात्मक x-दिशा है। इसके अतिरिक्त हम यह भी पाते हैं कि

तरंग का आयाम $= 0.02\,\text{m} = 2 \times 10^{-2}\,\text{m}$

तरंग का तरंगदैर्घ्य $\lambda = (2\pi / k) = (2\pi / 42) = 0.15\ \text{m}$

तरंग की आवृत्ति $f = (\omega / 2\pi) = (1886 / 2\pi) = 300\ \text{Hz}$

तरंग का वेग $v = f\lambda = (300\,\text{Hz}) \times (0.15\,\text{m}) = 45\ \text{ms}^{-1}$

2. क) x एवं t के विभिन्न मानों के लिए विस्थापन, $y(x,t)$ का मान परिकलित करने के लिए हम तरंग के व्यंजक में x एवं t के दिए गए मान प्रतिस्थापित करते हैं :

$$y(x,t) = 0.03\ \sin\ (2t - 3x)\ \text{m}$$

इसलिए, $t = 0$ पर x के विभिन्न मानों के लिए विस्थापन $y(x,t)$ के मान हैं:

$x = 0$ m पर $y(0,\ 0) = 0.03 \sin(0)\ \text{m} = 0$

$x = 0.3\,\text{m}$ पर $y(0.3,\ 0) = 0.03 \sin(-0.9)\ \text{m} = -2.35 \times 10^{-2}\,\text{m}$

ख) $x = 0.1$ m पर विभिन्न समय पर विस्थापन का मान होगा :

$t = 0$ s पर $y(0.1,\ 0) = 0.03\ \sin(-0.3)\ \text{m} = -8.8 \times 10^{-3}\ \text{m}$

$t = 0.1$ s पर $y(0.1,\ 0.1) = 0.03\ \sin(0.2 - 0.3)\ \text{m} = -3.0 \times 10^{-3}\ \text{m}$

$t = 0.2$ s पर $y(0.1,\ 0.2) = 0.03\ \sin(0.4 - 0.3)\ \text{m} = 3.0 \times 10^{-3}\ \text{m}$

ग) डोरी के कणों के दोलन का वेग है :

$$v = (dy / dt) = 0.06 \cos(2t - 3x) = 6 \times 10^{-2}\ \cos(2t - 3x)\ \text{ms}^{-1}$$

घ) दोलनकारी कण का वेग अधिकतम होगा, जब

$$\cos\ (2t - 3x) = 1$$

इसलिए, $|v_{max}| = 6.0 \times 10^{-2}\,\text{ms}^{-1}$

3. प्रश्न के अनुसार, धनात्मक x-दिशा में गतिमान अनुप्रस्थ तरंग का व्यंजक है :

$$y(x,t) = 5\ \sin\ (4.0\,t - 0.02\,x)$$

इसकी तुलना धनात्मक x-दिशा में संचरित प्रगामी तरंग के मानक व्यंजक

$$y(x,t) = a \sin\ (\omega t - kx)$$

से करने पर हम देखते हैं कि $\omega = 4.0\ \text{s}^{-1}$, $k = 0.02\ \text{cm}^{-1}$ तथा $a = 5\,\text{cm}$ है। अतः, तरंग का वेग है :

$$v = (\omega / k) = (4.0\,\text{s}^{-1} / 0.02\,\text{cm}^{-1}) = 200\ \text{cm}\,\text{s}^{-1}$$

माध्यम के कणों का वेग है :

$$(dy(x,t) / dt) = 5 \times 4 \cos(4.0\,t - 0.02x)\ \text{cm}\,\text{s}^{-1}$$

$$= 20\ \cos\ (4.0t - 0.02x)\ \text{cm}\,\text{s}^{-1}$$

अतः, कण का अधिकतम वेग $20\ \text{cm}\,\text{s}^{-1}$ है।

माध्यम के कण का त्वरण

$$(d^2 y(x,t) / dt^2) = -20 \times 4\ \sin\ (4.0t - 0.02x)\ \text{cm}\,\text{s}^{-2}$$

$$= -80\ \sin\ (4.0t - 0.02x)\ \text{cm}\,\text{s}^{-2}$$

अतः माध्यम के कणों के त्वरण का अधिकतम मान $80\ \text{cm s}^{-2}$ होगा।

4. हम जानते हैं कि तरंग रूप पर दो बिन्दुओं, माना x_1 एवं x_2, के बीच कलांतर और दूरी में निम्नलिखित संबंध होता है :

$$\Delta\phi = (2\pi/\lambda)\ (x_1 - x_2)$$

प्रश्न के अनुसार,

$$1.6 = (2\pi/\lambda)\,(x' - x) \Rightarrow x' - x = (1.6/k) = (1.6/2.3\ \text{m}^{-1}) = 0.7\ \text{m}$$

अर्थात् $x' = x + 0.7\,\text{m}$

अतः, x' का मूल बिंदु x के मूल बिन्दु से $0.7\ \text{m}$ दाहिनी ओर है।

5. हम जानते हैं कि किसी अनुप्रस्थ तरंग का गणितीय निरूपण हम निम्नलिखित व्यंजक द्वारा भी कर सकते हैं :

$$y(x,t) = a \sin\left[(2\pi/\lambda)\,(vt - x)\right] \qquad \text{(i)}$$

प्रश्न के अनुसार : आयाम, $a = 1\ \text{cm}$ । आगे, $x = 10\ \text{cm}$ पर $y(10,t) = 0.5\ \text{cm}$
अतः, समीकरण (i) से हम लिख सकते हैं :

$$+0.5\ \text{cm} = (1.0\ \text{cm}) \sin\left[(2\pi/\lambda)\,(vt - 10)\right]$$

अथवा, $\sin\left[(2\pi/\lambda)\,(vt - 10)\right] = +(1/2) = \sin(\pi/6)$

$$\Rightarrow\ (2\pi/\lambda)\,(vt - 10) = (\pi/6)$$

$$\Rightarrow\ vt - 10 = (\lambda/12) \qquad \text{(ii)}$$

हमें यह भी दिया गया है कि $x = 20\ \text{cm}$ पर $y(20,t) = -0.5\ \text{m}$ है। इसलिए समीकरण (i) से हम फिर से लिख सकते हैं कि

$$-0.5\ \text{cm} = (1.0\ \text{cm}) \sin\left[(2\pi/\lambda)(vt - 20)\right]$$

$$\Rightarrow\ -0.5 = \sin(7\pi/6) = \sin\left[(2\pi/\lambda)(vt - 20)\right]$$

अथवा, $vt - 20 = (7\lambda/12) \qquad \text{(iii)}$

समीकरणों (ii) एवं (iii) से हमें तरंगदैर्घ्य का निम्न मान प्राप्त होता है :

$$\lambda = 20\ \text{cm} = 0.2\ \text{m}$$

आगे, हम जानते हैं कि वेग

$$v = f\lambda = (500\ \text{s}^{-1}) \times (0.2\ \text{m}) = 100\ \text{ms}^{-1}$$

इसलिए, तरंग वेग के पदों में तरंग के व्यंजक को निम्नवत् लिखा जा सकता है :

$$y(x,t) = (0.01\,\text{m}) \sin\left[(2\pi/0.2)\,(100t - x)\right]$$

$$= (0.01\ \text{m}) \sin\ [10\pi(100\,t - x)]\ \text{m}$$

भौतिक नियतांकों की तालिका

प्रतीक	राशि	मान
c	निर्वात में प्रकाश की चाल	3.00×10^{8} ms^{-1}
μ_0	मुक्त आकाश की चुंबकशीलता	1.26×10^{-6} NA^{-2}
ε_0	मुक्त आकाश की विद्युत्शीलता	8.85×10^{-12} C^{2} N^{-1} m^{-2}
$1/4\pi\varepsilon_0$		8.99×10^{9} Nm^{2} C^{-2}
e	प्रोटॉन का आवेश	1.60×10^{-19} C
$-e$	इलेक्ट्रॉन का आवेश	-1.60×10^{-19} C
h	प्लांक नियतांक	6.63×10^{-34} Js
$\hbar$	$h / 2\pi$	1.05×10^{-34} Js
m_e	इलेक्ट्रॉन का विराम द्रव्यमान	9.11×10^{-31} kg
$-e/m_e$	इलेक्ट्रॉन के आवेश और द्रव्यमान का अनुपात	-1.76×10^{11} Ckg^{-1}
m_p	प्रोटॉन का विराम द्रव्यमान	1.67×10^{-27} kg (1 amu)
m_n	न्यूट्रॉन का विराम द्रव्यमान	1.68×10^{-27} kg
a_0	बोर त्रिज्या	5.29×10^{-11} m
N_A	आवोगाद्रो नियतांक	6.02×10^{23} mol^{-1}
R	सार्वत्रिक गैस नियतांक	8.31 Jmol^{-1}K^{-1}
k_B	बोल्ट्समान नियतांक	1.38×10^{-23} J K^{-1}
G	सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक	6.67×10^{-11} Nm^{2} kg^{-2}

खगोल भौतिकीय आंकड़े

खगोलीय पिंड	द्रव्यमान (kg)	माध्य त्रिज्या (m)	पृथ्वी के केंद्र से माध्य दूरी (m)
सूर्य	1.99×10^{30}	6.96×10^{8}	1.50×10^{11}
चंद्रमा	7.35×10^{22}	1.74×10^{6}	3.84×10^{8}
पृथ्वी	5.97×10^{24}	6.37×10^{6}	0

BPHCT-131 के खंडों और इकाइयों की तालिका

पाठ्यक्रम : BPHCT-131 (यांत्रिकी) 4 क्रेडिट

सदिश बीजगणित : सदिशों का ज्यामितीय और बीजगणितीय निरूपण; सदिश बीजगणित; अदिश और सदिश गुणनफल; किसी अदिश के सापेक्ष सदिश के अवकलज।

प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण : समघात प्रथम कोटि अवकल समीकरण (पृथक्करणीय और रैखिक प्रथम कोटि अवकल समीकरण)।

द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण : अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि समघात अवकल समीकरण।

गति के नियम : निर्देश तंत्र; न्यूटन के गति के नियम; सरल रैखिक गति; समतल में गति; एकसमान वर्तुल गति; त्रिविमीय गति।

न्यूटन के गति के नियमों के अनुप्रयोग : घर्षण; तनाव; गुरुत्वाकर्षण; कमानी-द्रव्यमान निकाय – हुक का नियम; वृत्ताकार कक्षा में उपग्रह की गति और उसके अनुप्रयोग; भूतुल्यकाली कक्षाएं; भूमंडलीय स्थिति निर्धारण प्रणाली (जी पी एस) की अवधारणा; भार और भारहीनता।

रैखिक संवेग और आवेग : संवेग संरक्षण; आवेग; आवेग-संवेग प्रमेय; रॉकेट की गति।

कार्य और ऊर्जा : कार्य और ऊर्जा; ऊर्जा संरक्षण; सीधा और द्विविम संघट्टन।

कोणीय गति की शुद्धगतिकी : कोणीय गति की शुद्धगतिकी, कोणीय विस्थापन, कोणीय वेग और कोणीय त्वरण; व्यापक कोणीय गति।

घूर्णी गति की गतिकी : बल आघूर्ण; जड़त्व आघूर्ण; घूर्णी गतिज ऊर्जा; कोणीय संवेग, कोणीय संवेग संरक्षण और उसके अनुप्रयोग।

केंद्रीय बल क्षेत्र के अधीन गति : केंद्रीय बल क्षेत्र में कण की गति (समतल में गति, कोणीय संवेग संरक्षण, समान क्षेत्रफल नियम); केप्लर के नियम (केवल कथन)।

बहु-कण निकायों की गतिकी : बहु-कण निकायों की गतिकी, संहति केंद्र; असंतत द्रव्यमान बंटन के लिए संहति केंद्र निर्धारण; दृढ़ पिंड का संहति केंद्र (गुणात्मक विवरण)।

संरक्षण नियम : बहु-कण निकायों के लिए रैखिक संवेग, कोणीय संवेग और ऊर्जा संरक्षण।

सरल आवर्त गति : सरल आवर्त गति; सरल आवर्त गति का अवकल समीकरण और उसके हल; सरल आवर्त गति में गतिज ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा और कुल ऊर्जा और उनके कालिक माध्य।

आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण : रैखिकता और अध्यारोपण सिद्धांत, दो समान या असमान आवृत्ति वाले संरेख आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण; समान या असमान आवृत्ति वाले दो परस्पर लंबवत् आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण; लिसाजू की आकृतियाँ और उनके उपयोग।

अवमंदित दोलन : अवमंदित दोलन के लिए गति समीकरण और उसका हल (बिना व्युत्पत्ति के); प्रबल, क्रांतिक और दुर्बल अवमंदन के लिए हलों का गुणात्मक विवरण; अवमंदन के अभिलक्षण – लघुगणकीय अपक्षय, विश्रांति काल और गुणता कारक।

तरंग गति : गुणात्मक विवरण (तरंग निर्माण और संचरण; तरंग गति का वर्णन, तरंग वेग, आवृत्ति और तरंग दैर्घ्य; तरंग गति का गणितीय वर्णन)

शब्दावली

त्वरण	Acceleration	निर्देश तंत्र	Coordinate system
गुरुत्व-त्वरण	Acceleration due to gravity	संपिडित	Compressed
स्वीकार्य	Acceptable	जटिल	Complex
बीजगणित	Algebra	क्रमागत	Consecutive
प्रत्यावर्ती	Alternating	अभिविन्यास	Configuration
प्रत्यावर्ती धारा	Alternative current	निर्देशांक ज्यामिति	Coordinate geometry
प्रवर्धन	Amplification	कोज्या	Cosine
आयाम	Amplitude	युग्मन	Coupling
समानता, सादृश्यता	Analogy	युग्मित दोलक	Coupled oscillatior
विश्लेषित	Analyse	मापदंड, कसौटी	Criterion
कोणीय त्वरण	Angular acceleration	क्रांतिक अवमंदन	Critical damping
वामवर्त	Anticlockwise	क्रांतिकतः अवमंदित	Critically damped
नोदक बल	Applied force	घनीय	Cubic
सन्निकटन	Approximation	वक्रित पथ	Curved path
यादृच्छिक	Arbitrary	अवमंदित	Damped
औसत	Average	अवमंदन	Damping
विस्पंद	Beat	अवमंदन गुणांक	Damping coefficient
गोलक	Bob, Block	अवमंदन स्थिरांक	Damping constant
पिंड	Body	अवमंदन गुणक	Damping factor
आयतन प्रत्यास्थता गुणांक	Bulk modulus	अवमंदनक बल	Damping force
कलन	Calculus	रूद्ध दोल	Dead beat
धारिता	Capacitance	क्षयमान	Decreasing
संधारित्र	Capacitor	विरूपण	Deformation
प्रकरण	Case	हर	Denominator
अभिलक्षण	Characteristic	अवकलज	Derivative
आवेश	Charge	व्युत्पन्न	Derive
आवेशित	Charged	विकर्ण	Diagonal
वृत्त	Circle	अवकल गणित	Differential calculus
परिपथ	Circuit	अवकल समीकरण	Differential equation
दक्षिणावर्त	Clockwise	अवकलित	Differentiate
गुणांक	Coefficient	विमा	Dimension
श्यानता गुणांक	Co-efficient of viscosity	विमाविहीन	Dimensionless
संरेख	Collinear	विसर्जन	Discharge
उभयनिष्ठ	Common	विस्थापन	Displacement
घटक	Component	क्षयित	Dissipate
प्रतिबंध	Condition	क्षयकारी	Dissipative

विभाजित	Divide	व्यापक स्थिति	General case
कर्षण बल	Drag force	गुरूत्व	Gravity
कर्ण पटल	Eardrum	आवर्त गति	Harmonic motion
प्रत्यास्थ	Elastic	आवर्ती दोलन	Harmonic oscillation
प्रत्यास्थता	Elasticity	प्रवल अवमंदन	Heavy damping
प्रत्यास्थता सीमा	Elastic limit	प्रबलतः अवमंदित	Heavily damped
प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा	Elastic potential energy	समघात	Homogeneous
वैधुत	Electrical	समघात समीकरण	Homogeneous equation
विद्युत परिपथ	Electric circuit	क्षैतिज	Horizontal
विद्युत-चुंबकीय तरंग	Electromagnetic wave	क्षैतिज अक्ष	Horizontal axis
विद्युत-वाहक बल	Electromotive force	अतिपरवलयिक	Hyperbolic
विलुप्त	Eliminate	सर्वसम	Identical
दीर्घ वृत्त	Ellipse	सर्वसमिका	Idnetity
दीर्घवृत्तीय पथ	Elliptical path	अधिकल्पित	Imaginary
ऊर्जा विनिमय	Energy exchange	आवेग	Impulse
अभियांत्रिक निकाय	Engineering system	वर्धमान	Increasing
कालावधि	Epoch	व्यष्टि	Individual
समतुल्य	Equivalent	गतिक जड़त्व	Inertia of motion
साम्यावस्था	Equilibrium position	प्रांरभिक प्रतिबंध	Initial conditions
साम्यावस्था	Equilibrium state	समकला	In-phase
विनिमय	Exchange	तात्क्षणिक	Instantaneous
प्रसरण	Expansion	तात्क्षणिक वेग	Instantanous velocity
चरघातांकी	Exponentially	यंत्र	Instrument
व्यंजक	Expression	व्युत्क्रम	Inverse
वर्धन	Extended	व्युत्क्रमानुपाती	Inversely proportional
विस्तारित	Extension	गतिज ऊर्जा	Kinetic energy
गुणक, कारक	Factor	पार्श्वी विमा	Lateral dimension
लक्षण	Features	रेखीय संयोजन	Linear combination
अनुसरित	Followed	रैखिक समीकरण	Linear equation
बल	Force	एकघाततः स्वतंत्र	Linearly independent
बल-नियतांक	Force constant	रैखिकतः समानुपातिक	Linearly proportional
बल नियम	Force law	लिसाजू की आकृतियां	Lissajous figures
प्रणोदित दोलक	Forced oscillator	लघुगणकीय अपक्षय	Logarithmic decrement
आवृत्ति	Frequency	अनुदैर्ध्य दोलन	Longitadinal oscillations
घर्षण बल	Frictional force	लुप्त	Lost
घर्षण	Friction	परिमाण	Magnitude
फलन	Function	द्रव्यमान	Mass

उच्चिष्ठ	Maximum	पुनर्व्यवस्थित, पुनर्नियोजित	Rearrange
माप	Measure	रेखीय गति	Rectilinear motion
यांत्रिकी	Mechanics	विश्रांति काल	Relaxation time
मॉडुलित	Modulated	निरूपण	Representation
माडुलन	Modulation	प्रतिरोध	Resistance
ऋणात्मक	Negative	प्रतिरोधक	Resistor
अरैखिक समीकरण	Nonlinear equation	अनुनाद	Resonance
अंश	Numerator	प्रत्यानयन	Restoring
एकविम	One dimensional	प्रत्यानयन बल	Restoring force
अभिविन्यास	Orientation	मूल	Root
दोलनी, दोलनकारी	Oscillating	अदिश	Scalar
दोलन	Oscillation	द्वितीय कोटि	Second order
दोलक	Oscillator	अर्धदीर्घ	Semi-major
दोलनी गति	Oscillatory motion	अर्धलघु	Semi-minor
प्राचल	Parameter	श्रेणी	Series
परवलयिक	Parabolic	प्रघात अवशोषक	Shock absorber
परवलय	Parabola	समरूपता	Similarity
लोलक	Pendulum	सरल आवर्त गति	Simple harmonic motion
दोलन काल, आवर्तकाल	Period	सरल आवर्त दोलक	Simple harmonic oscillator
आवर्तिता	Periodicity	सरल लोलक	Simple pendulum
लंबवत्	Perpendicular	सरलीकृत	Simplify
कला	Phase	ज्या	Sine
कला नियतांक	Phase constant	ज्यावक्रीय	Sinusoidal
कलांतर, कला अंतर	Phase difference	ज्यावक्रीय वोल्टता	Sinusoidal voltage
स्थान, स्थिति	Position	प्रवणता	Slope
धन	Positive	लघु	Small
धन प्रवणता	Positive slope	लघुकोण सन्निकटन	Small angle approximation
स्थितिज ऊर्जा	Potential energy	हल	Solution
शक्ति कारक	Power factor	विनिर्दिष्ट	Specify
प्रागुक्ति	Predict	कमानी नियतांक	Spring constant
सिद्धांत	Principle	कमानी-द्रव्यमान निकाय	Spring-mass system
चतुर्थांश	Quadrant	वर्ग	Square
गुणात्मक	Qualitatively	गति की अवस्था	State of motion
गुणता कारक	Quality factor	स्थायी अवस्था हल	Steady-state solution
परिमाणात्मक	Quantitative	दुर्नम्यता	Stiffness
त्रिज्य	Radial	सरल रेखा	Straight line
त्रिज्या	Radius	प्रतिस्थापन	Substitution

अध्यारोपण	Superposition	वैध	Valid
आलंबन	Suspension	वैधता	Validity
निकाय	System	सदिश	Vector
स्पर्शरेखीय	Tangential	वेग	Velocity
पद	Term	ऊर्ध्वाधर	Vertical
दोलन काल, आवर्तकाल	Time period, Period	ऊर्ध्वाधरतः	Vertically
कालिक-माध्य	Time-averagde	कम्पन गति	Vibratory motion
रूपांतरित	Transform	श्यान	Viscous
त्रिकोणमितीय	Trigonometric	श्यान माध्यम	Viscous medium
स्वरित्र द्विभुज	Tuning fork	वोल्टता	Voltage
वर्तन बिन्दु	Turning point	तरंग	Wave
प्रारूपिक	Typical	तरंग समीकरण	Wave equation
मात्रक	Unit	दुर्बलतः अवमंदित	Weakly damped
अज्ञात	Unknow	दुर्बल अवमंदन	Weak damping
चर	Variable		