इग्नू
जन-जन का
विश्वविद्यालय

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
विज्ञान विद्यापीठ

BPHCT-131
यांत्रिकी

खंड
3

घूर्णी गति और बहु-कण निकाय

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति

प्रो. अजय घटक (सेवानिवृत्त)
आई. आई. टी. दिल्ली
नई दिल्ली

डा. नरेश कुमार (सेवानिवृत्त)
हिन्दू कॉलेज,
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

डा. प्रगति अशधीर
हिन्दू कॉलेज,
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

प्रो. सुरेश गर्ग
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय, नई दिल्ली

डा. शुभलक्ष्मी लाम्बा
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय, नई दिल्ली

प्रो. विजयश्री
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
नई दिल्ली

प्रो. सुदीप रंजन झा
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
नई दिल्ली

प्रो. एस. गोखले
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
नई दिल्ली

डा. संजय गुप्ता
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
नई दिल्ली

खंड निर्माण दल

डा. शुभलक्ष्मी लाम्बा (इकाइयां 11 से 15)
विज्ञान विद्यापीठ
इग्नू, नई दिल्ली

प्रो. विजयश्री (इकाइयां 11 से 15)
विज्ञान विद्यापीठ
इग्नू, नई दिल्ली

पाठ्यक्रम समन्वयक : डा. शुभलक्ष्मी लांबा और प्रो. सुदीप रंजन झा

अनुवाद

प्रो. विजयश्री
विज्ञान विद्यापीठ
इग्नू, नई दिल्ली

खंड मुद्रण

सुनील कुमार
सहायक कुलसचिव (प्रकाशन), इग्नू

अगस्त, 2019

ISBN: 978-93-89499-97-1

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय के पाठ्यक्रमों के विषय में और अधिक जानकारी विश्वविद्यालय के कार्यालय मैदान गढ़ी, नई दिल्ली–110 068 और इग्नू की वेबसाइट www.ignou.ac.in से प्राप्त की जा सकती है।

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की ओर से प्रो. पूर्णिमा मितल, निदेशक, विज्ञान विद्यापीठ द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित।

मुद्रकः गीता ऑफसेट प्रिंटर्स प्रा. लि., सी–90, ओखला औद्योगिक क्षेत्र, फेज़–1, नई दिल्ली–110020

विषय सूची

खंड 3 : घूर्णी गति और बहु-कण निकाय

इस पाठ्यक्रम के खंड 2 में आपने **शुद्धगतिकी** और गतिकी की बुनियादी अवधारणाएं पढ़ी हैं, जैसेकि **न्यूटन के गति के नियम** और **बल, रैखिक संवेग, आवेग, गुरुत्वाकर्षण, कार्य** और **ऊर्जा** की अवधारणाएं। आपने रैखिक संवेग और ऊर्जा के संरक्षण नियम पढ़े हैं, जिनका प्रयोग करने से जटिल यांत्रिक परिघटनाओं का अध्ययन आसान हो जाता है। खंड 2 में हमने केवल पिंडों की स्थानांतरण-गति की चर्चा की है, जिसमें किसी भी क्षण पर पिंड के सभी कणों के वेग का मान समान होता है। इस खंड में आप **कोणीय/घूर्णी गति** के विषय में पढ़ेंगे, जिसमें गति किसी अक्ष के गिर्द होती है। हमारे चारों तरफ ऐसी गति के कई उदाहरण हैं। पहियों, पंखों और घड़ी की सुईयों की गति साथ ही सूर्य की परिक्रमा कर रहे ग्रहों की गति भी कोणीय/घूर्णी गति है। इस खंड में आप घूर्णी गति से जुड़ी **बल आघूर्ण** और **कोणीय संवेग** की आवधारणाएं, **कोणीय संवेग संरक्षण** नियम और उसके अनुप्रयोगों के विषय में पढ़ेंगे।

अभी तक के अध्ययन में आपने प्रत्येक वस्तु को, चाहे वह गेंद हो, कार हो या चंद्रमा भी हो, एक कण द्वारा निरूपित किया है। लेकिन ऐसी अनेक स्थितियां होती हैं जिनमें हमें बहुत से कणों वाले निकायों की गति पर विचार करना होता है। मिसाल के तौर पर सौर मंडल जिसमें सूर्य, ग्रह, उनके उपग्रह, पुच्छल तारे और ग्रहिकाएं होती हैं, एक बहु-कण निकाय है। गैस से भरा सिलिंडर और दृढ़ पिंड भी बहु-कण निकाय के उदाहरण हैं।

इस खंड में हम इस बात पर चर्चा करेंगे कि अभी तक बताई गई गति की अवधारणाओं और **रैखिक संवेग, ऊर्जा** और **कोणीय संवेग संरक्षण** नियमों को हम द्वि-कण और बहु-कण निकायों की गति से जुड़ी साधारण एवं जटिल भौतिक स्थितियों पर कैसे लागू कर सकते हैं। इन नियमों का एक महत्वपूर्ण अनुप्रयोग द्वि-कण संघट्टनों में होता हैं, जिसके अध्ययन से वैज्ञानिक परमाण्विक और अवपरमाण्विक कणों के गुणधर्म समझते हैं। इस खंड में 5 इकाइयां हैं।

इकाई 11 में आप **कोणीय गति** की शुद्धगतिकी के बारे में पढ़ेंगे और इसमें हम वर्तुल गति पर ज़्यादा ध्यान देंगे। आप कोणीय विस्थापन, कोणीय वेग और कोणीय त्वरण के बारे में पढेंगे। आप यह भी जानेंगे कि कोणीय गति और स्थानांतरण-गति के चरों में क्या संबंध होता है। कोणीय शुद्धगतिकीय चर विभिन्न प्रकार की कोणीय गति के विवरण को आसान बनाते हैं, जैसेकि सूर्य के चारों ओर ग्रहों की गति, जो आप इकाई 13 में पढ़ेंगे। **इकाई 12** में हम घूर्णी गति की गतिकी से जुड़ी अवधारणाओं पर चर्चा करेंगे। इसमें हम समान और असमान वर्तुल गति पर ज़्यादा ध्यान देंगे। आप **बल आघूर्ण** की अवधारणा पढ़ेंगे जिससे आप समझ पाएंगे कि कोई कण कोणीय/घूर्णी गति क्यों करता है। हम **कोणीय संवेग** और **कोणीय संवेग संरक्षण नियम** और उसके अनुप्रयोग की चर्चा भी करेंगे। उदाहरण के तौर पर, इस नियम से आप यह समझ सकते हैं कि बर्फ पर स्केटिंग करने वाले कलाकार अपनी फैली हुई बाहों को अंदर की ओर खींचकर अपनी कोणीय चाल को कैसे बढ़ा लेते हैं या फिर एक तारे का निपात होने पर उसकी घूर्णी गति इतनी अधिक क्यों हो जाती है।

इकाई 13 में आप एक विशेष प्रकार के बलों के अधीन पिंडों की गति के बारे में पढ़ेंगे जो केंद्रीय बल कहलाते हैं। विशेषकर, हम **केंद्रीय संरक्षी बलों** पर विचार करेंगे, जिसमें व्युत्क्रम वर्ग गुरुत्वाकर्षण बल पर ज़्यादा ध्यान देंगे। केंद्रीय संरक्षी बलों के अधीन गति के कुछ विशेष गुणधर्म होते हैं, जिनसे हमें सौर मंडल में ग्रहों, उनके उपग्रहों और पुच्छल तारों की गति को गुणात्मक रूप से समझने में मदद मिलती है। आप यह भी समझ पाएंगे कि ग्रहीय गति के केप्लर के नियम वास्तव में न्यूटन के गति के नियमों और गुरुत्वाकर्षण नियम का एक सरल परिणाम हैं।

इकाई 14 में हम द्वि-कण और बहु-कण निकायों की गतिकी समझेंगे। जब हम ऐसे निकायों के प्रत्येक कण पर न्यूटन के दूसरे नियम को लागू करते हैं तो हम पाते हैं कि गति के समीकरणों को हल करना बहुत कठिन हो जाता है। लेकिन **संहति केंद्र** की अवधारणा के कारण ऐसे निकायों की गतिकी का

अध्ययन काफी सरल हो जाता है। इस इकाई में आप संहति केंद्र और आपेक्षिक निर्देशांकों के पदों में द्वि-कण निकायों के लिए गति का समीकरण प्राप्त करेंगे और इन अवधारणाओं को बहु-कण निकायों पर लागू करेंगे।

इकाई 15 में आप द्वि-कण और बहु-कण निकायों के लिए रैखिक संवेग, कोणीय संवेग और ऊर्जा के व्यंजक लिखना सीखेंगे। फिर आप इन निकायों के लिए ऊर्जा, रैखिक संवेग और कोणीय संवेग के संरक्षण नियम भी पढ़ेंगे। विशेषकर, आप रैखिक संवेग और ऊर्जा संरक्षण नियमों को दो कणों के संघट्टन पर लागू करेंगे।

इस खंड में प्रस्तुत अवधारणाएं आप के लिए नई होंगी और कई स्थानों पर विश्लेषण काफी गणितीय होगा। इन्हें समझने के लिए आप को इन्हें एक से अधिक बार भी पढ़ना पड़ सकता है। हमारा सुझाव है कि प्रत्येक इकाई में दिए गए प्रश्नों और उदाहरणों को खुद हल करने की कोशिश करें। हम आशा करते हैं कि यह खंड पढ़ना आपको अच्छा लगेगा और एक बार फिर आपकी सफलता की शुभकामना करते हैं।

अंतरिक्ष यात्रियों के प्रशिक्षण के लिए प्रयुक्त सेन्ट्रीफ़्यूज में उनका त्वरण क्या होता है? इस प्रश्न का उत्तर आपको इस इकाई में मिलेगा!

इकाई 11

कोणीय गति की शुद्धगतिकी

इकाई की रूपरेखा

अध्ययन निर्देशिका

इस इकाई में आप **कोणीय गति की शुद्धगतिकी** के बारे में पढ़ेंगे और हम मुख्यतः एकसमान और असमान वर्तुल गति की चर्चा करेंगे। आप **कोणीय स्थिति**, **कोणीय विस्थापन**, **कोणीय वेग** और **कोणीय त्वरण** की शुद्धगतिकीय अवधारणाएं दोहराएंगे जो आपने स्कूल में पढ़ी हैं। आप पाएंगे कि ये अवधारणाएं स्थानांतरण-गति से संबद्ध शुद्धगतिकी की अवधारणाओं से काफ़ी मिलती जुलती हैं। इसीलिए हम अक्सर इनकी चर्चा करते हुए "**अनुरूप**" और "**अनुरूपता**" जैसे शब्दों का प्रयोग करेंगे। ।

अब आप सोच रहे होंगेः हमें इन अवधारणाओं को पढ़ने की क्या ज़रूरत है? इसका उत्तर यह है कि जिस तरह स्थानांतरण गति कर रहे पिंड के हर कण का वेग समान होता है, **शुद्ध घूर्णी गति कर रहे पिंड के हर कण** (अलावा उसके घूर्णन अक्ष पर स्थित कणों के) **का कोणीय वेग समान होता है**। अतः, घूर्णी गति का वर्णन कोणीय चरों के पदों में करना कहीं अधिक सरल होता है। आप यह बात तब और बेहतर समझ पायेंगे जब आप इन दोनों प्रकार की गतियों के शुद्धगतिकीय चरों के बीच के संबंध के बारे में पढ़ेंगे। इकाई के भाग 11.3 और 11.4 आपके लिये नये हो सकते हैं। अतः, आपको इन्हें पढ़ने में ज़्यादा समय लग सकता है। इकाई में हम **सदिशों** की आवधारणा का उपयोग करेंगे। इसलिए आप उन्हें इस इकाई को पढ़ने से पहले दोहरा लें।

"यह सोचना ग़लत है कि भौतिकी का काम यह पता लगाना है कि प्रकृति कैसी है। भौतिकी का सरोकार इससे है कि हम प्रकृति के बारे में क्या कहते हैं।"

नील्स बोह्र

11.1 परिचय

अब तक इस पाठ्यक्रम में हमने पिंडों की **स्थानांतरण-गति** के बारे में चर्चा की है, जिसमें **किसी भी क्षण पर पिंड के सभी कणों के वेग का मान समान होता है**। अब हम कण की **कोणीय** या **घूर्णी गति** की चर्चा करेंगे जिसमें वह **किसी अक्ष के गिर्द** गति करता है। पृथ्वी के चारों ओर अपनी कक्षा में परिक्रमा कर रहा चंद्रमा, सूर्य की परिक्रमा कर रहे ग्रह या अपने अक्ष पर घूर्णन कर रही पृथ्वी कोणीय/घूर्णी गति के कुछ उदाहरण हैं। वर्तुल गति कोणीय गति का सबसे सरल उदाहरण है और हमारे चारों ओर के संसार में बहुत ही आम है। अपने अक्ष पर घूर्णन कर रहे किसी भी पिंड में स्थित कण वर्तुल गति करते हैं। चित्र 11.1 में ऐसे बहुत से पिंड दिखाए गए हैं जो किसी अक्ष के गिर्द घूर्णी गति करते हैं। ये सभी पिंड आप अपने आसपास कहीं न कहीं रोज़ाना देखते हैं।

चित्र 11.1: हमारे चारों ओर के वे पिंड जो (अपने से हो कर गुज़रने वाले किसी अक्ष के गिर्द) घूर्णी गति करते हैं। जब वे घूर्णन करते हैं तो उन पर स्थित कण वर्तुल गति करते हैं।

आप देख सकते हैं कि हमारे चारों ओर घूर्णी गति कर रहे सबसे आम पिंडों में हैं पहिये (साइकिलों, बसों, रेलगाड़ियों के और कुम्हार के चाक के), पंखे और घड़ी की सुइयां। आप दरवाज़ों और किताबों को तो सारा दिन ही उनके अक्ष के गिर्द खोलते या बंद करते हैं। और हां, हम जिस पृथ्वी पर रह रहे हैं, वह भी अपने अक्ष के गिर्द घूर्णन करती है और सूर्य की परिक्रमा करती है। बहुत से खेलों और मनोरंजन के साधनों में पिंडों का घूर्णन शामिल होता है। उदाहरण के लिए, आपने साइकिल की या मेरी-गो-राउंड, सी-सॉ पर या मेले में झूलों की सवारी की होगी या कभी कंचों या लट्टू से खेला होगा। बहुत से दैनिक कार्यों में घूर्णी गति शामिल होती है जैसे कि शीशी का ढक्कन खोलने या नट-बोल्ट खोलने में। क्यों नहीं आप भी अपने चारों ओर स्थित ऐसे पिंडों की एक सूची बनाते?

यदि आप अपने अक्ष के प्रति घूर्णन कर रहे ऐसे पिंडों पर स्थित केवल एक कण की गति को देखते हैं तो क्या पाते हैं? मसलन, घूमते हुए एक टायर, लट्टू या पृथ्वी पर स्थित कण की गति कैसी होती है? आप चित्र 11.2 में देख सकते हैं कि यह वर्तुल गति होती है। आपने इकाइयों 6 और 7 में एकसमान वर्तुल गति के बारे में पढ़ा है। इस इकाई में भाग 11.2 में हम कोणीय गति की **शुद्धगतिकी** को समझेंगे। आप **कोणीय स्थिति**, **कोणीय विस्थापन**, **कोणीय वेग** और **कोणीय त्वरण** की अवधारणाएं सीखेंगे। ये कोणीय गति का वर्णन करने के लिए इस्तेमाल किए जाने वाले शुद्धगतिकीय चर हैं।

भाग 11.3 में हम संक्षेप में कोणीय राशियों की सदिश प्रकृति समझाएंगे। फिर भाग 11.4 में हम स्थानांतरण-गति के शुद्धगतिकीय चरों जैसेकि विस्थापन, वेग और त्वरण का, कोणीय गति के शुद्धगतिकीय चरों जैसेकि कोणीय विस्थापन, कोणीय वेग और कोणीय त्वरण से संबंध स्थापित करेंगे। इस इकाई में इन अवधारणाओं का इस्तेमाल करके हम कोणीय शुद्धगतिकीय चरों के पदों में **एकसमान** और **असमान वर्तुल गति** का वर्णन करेंगे। ये कोणीय गति के सबसे सरल उदाहरण हैं।

अगली इकाई में, हम **कोणीय/घूर्णी गति की गतिकी** पर चर्चा करेंगे और बल आघूर्ण, जड़त्व आघूर्ण और कोणीय संवेग की अवधारणाएं समझाएंगे। कोणीय गति में इनकी वही भूमिका है जो स्थानांतरण-गति में बल, द्रव्यमान और रैखिक संवेग की है।

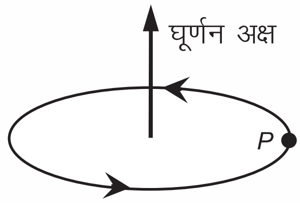
चित्र 11.2: जब कोई पिंड अपने से हो कर गुज़रने वाले अक्ष के प्रति घूर्णी गति करता है, तो उस पर स्थित सभी कण वर्तुल गति करते हैं। उन वृत्तों के केंद्र एक सरल रेखा पर स्थित होते हैं जिसे घूर्णन अक्ष कहते हैं।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आपः

- एकसमान और असमान वर्तुल गति कर रहे कण की कोणीय स्थिति, कोणीय वेग और कोणीय त्वरण ज्ञात कर सकेंगे;
- कोणीय गति कर रहे कण के कोणीय विस्थापन, कोणीय वेग और कोणीय त्वरण का कण के विस्थापन, वेग और त्वरण से संबंध स्थापित कर सकेंगे; और
- एकसमान और असमान वर्तुल गति की शुद्धगतिकी पर आधारित प्रश्न हल कर सकेंगे।

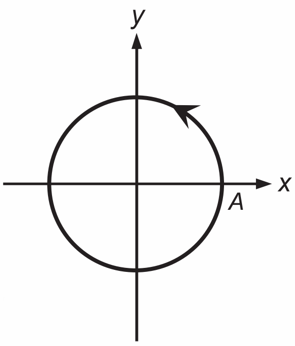
11.2 शुद्धगतिकीय चर



चित्र 11.3: नियत अक्ष के प्रति वृत्त में वामावर्त गति कर रहा कण *P*। इस अक्ष को घूर्णन अक्ष कहते हैं।

भौतिकी में आम तौर पर यह चर्चा प्रायः हम कोणीय गति के सरलतम उदाहरण, **वर्तुल गति** से शुरू करते हैं। मान लें कि एक कण त्रिज्या r के वृत्त में गतिमान है। मान लें कि वह वृत्त के केंद्र से गुज़रने वाले और उसके तल के लंबवत् नियत अक्ष के प्रति वर्तुल गति कर रहा है (चित्र 11.3)। जिस नियत अक्ष के प्रति वह वर्तुल गति करता है, उसे **घूर्णन अक्ष** कहते हैं। आपने इकाई 6 में सीखा है कि हमें ऐसे कण की गति का वर्णन करने के लिए केवल द्विविम निर्देशांक तंत्र चाहिए होता है। आइए, हम कोणीय गति के वर्णन के लिए आवश्यक **शुद्धगतिकीय चरों** (**कोणीय स्थिति**, **कोणीय विस्थापन**, **कोणीय चाल** और **कोणीय त्वरण**) की परिभाषाएं दें, ठीक वैसे ही जैसे हम विस्थापन, वेग और त्वरण की परिभाषाएं देते हैं।

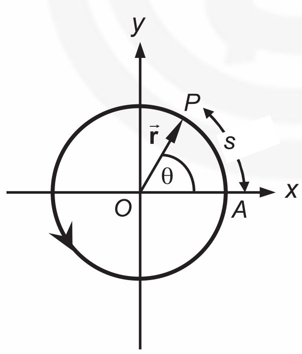
11.2.1 कोणीय स्थिति



चित्र 11.4: वर्तुल गति कर रहा कण जिसे वृत्त के तल के ऊपर से एक बिंदु से देखा जा रहा हो।

आइए, हम चित्र 11.3 में दिखाए गए कण की गति का वर्णन करने के लिए xy निर्देशांक तंत्र चुनें और उसे उस वृत्त के तल में रखें जिसमें कण गतिमान है। माना कि कण वृत्त में **वामावर्त दिशा** में गतिमान है। चित्र 11.4 में हमने कण की गति को ऐसे दिखाया है मानो हम उसे ऊपर से देख रहे हों। मान लें कि कण धनात्मक x-अक्ष (जिसे हम **संदर्भ अक्ष** के तौर पर लेते हैं) के बिंदु A से क्षण $t = 0$ से गति करना शुरू करता है। मान लें कि क्षण t पर वह बिंदु P पर होता है (चित्र 11.5)। माना कि वृत्त के केंद्र O के प्रति कण का **स्थिति सदिश $\vec{r}$** है।

आइए, अब हम उसकी कोणीय स्थिति की परिभाषा दें (चित्र 11.5)। हम कण की कोणीय स्थिति का मापन संदर्भ अक्ष यानी x-अक्ष के सापेक्ष करते हैं और संदर्भ अक्ष के बिंदु A पर कण की स्थिति को **शून्य कोणीय स्थिति** मानते हैं। तब **कोण** θ किसी क्षण t पर संदर्भ अक्ष (x-अक्ष की धनात्मक दिशा) के सापेक्ष कण की **कोणीय स्थिति** परिभाषित करता है। यहां पर हमने धनात्मक x-अक्ष को संदर्भ अक्ष माना है। ध्यान दें कि कोण θ कण के स्थिति सदिश और संदर्भ अक्ष के बीच का कोण है। समयांतराल t में, कण वृत्तीय चाप AP के अनुदिश गति करता है। यह वृत्तीय चाप कण की शून्य कोणीय स्थिति से क्षण t पर उसकी स्थिति तक होता है। मान लें कि कोणीय चाप AP की लंबाई s है।



चित्र 11.5: चित्र 11.4 के कण की क्षण *t* पर कोणीय स्थिति θ।

तब हम वर्तुल गति के लिए **कोणीय स्थिति** को इस तरह परिभाषित करते हैं :

कोणीय स्थिति

वर्तुल गति के लिए कोणीय स्थिति

वृत्त के केंद्र से गुज़रने वाले धनात्मक x-अक्ष के सापेक्ष किसी क्षण t पर वर्तुल गति कर रहे कण की **कोणीय स्थिति**, **कोण** θ द्वारा दी जाती है (चित्र 11.5)। θ उस क्षण पर, वृत्त के केंद्र के सापेक्ष कण के स्थिति सदिश और धनात्मक x-अक्ष के बीच का कोण है। इसका मान है

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad (\theta, \text{ रेडियन इकाई में मापा जाता है}) \qquad (11.1)$$

जहां s समयांतराल t में कण द्वारा चले गए वृत्तीय चाप की लंबाई है और r वृत्त की त्रिज्या है।

समीकरण 11.1 द्वारा परिभाषित **कोण θ केवल रेडियन इकाई में मापा जाता है, डिग्री या परिक्रमणों में नहीं।** रेडियन इकाई को संक्षेप में rad लिखा जाता है। **कोण θ को सदा ही रेडियन इकाई में बदलें।**

कभी न भूलें

रेडियन दो लंबाइयों का अनुपात है। अतः, यह एक शुद्ध संख्या है (यानी यह विमाहीन है)। चूंकि त्रिज्या r के वृत्त की परिधि $2\pi r$ होती है, अतः, वृत्त में एक परिक्रमण के लिए, समीकरण 11.1 से हमें मिलता है :

$$1 \text{ परिक्रमण} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ \qquad (11.2\text{क})$$

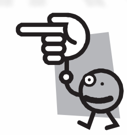
अतः, **वृत्त के एक पूर्ण परिक्रमण में 2π रेडियन होते हैं** :

$$1 \text{ रेडियन (rad)} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \text{ परिक्रमण} \qquad (11.2\text{ख})$$

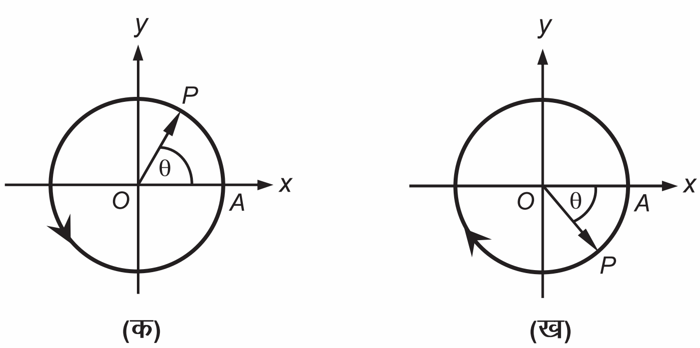
डिग्री और रेडियन का संबंध

साथ ही, यदि कण वृत्त में एक से अधिक परिक्रमण करता है, तब हर बार जब वह संदर्भ अक्ष को पार करता है, **हम θ का मान शून्य नहीं लेते**। कोण का मान तदनुसार बढ़ जाता है। उदाहरण के लिए, यदि शून्य संदर्भ स्थिति से कण 2 परिक्रमण पूरे करता है तो उसकी कोणीय स्थिति होती है : $(2 \times 2\pi)$ rad = 4π rad। यदि शून्य संदर्भ स्थिति से कण 3 परिक्रमण पूरे करता है तो उसकी कोणीय स्थिति होती है : $(3 \times 2\pi)$ rad = 6π rad, आदि। यदि 2 परिक्रमण पूरे करने के बाद कण शून्य संदर्भ स्थिति से कोण θ पर होता है तो उसकी कोणीय स्थिति होती है : $(2 \times 2\pi + \theta)$ rad = $(4\pi + \theta)$rad। यदि 4 परिक्रमण पूरे करने के बाद कण शून्य संदर्भ स्थिति से कोण ϕ पर हो तो उसकी कोणीय स्थिति क्या होगी? यह होगी $(4 \times 2\pi + \phi)$ rad = $(8\pi + \phi)$rad। इस तरह, यदि n परिक्रमण पूरे करने के बाद कण शून्य संदर्भ स्थिति से कोण θ पर हो तो उसकी कोणीय स्थिति होती है : $(2\pi n + \theta)$ rad। जिस तरह कण की स्थिति x के धनात्मक और ऋणात्मक मान हो सकते हैं, उसकी कोणीय स्थिति θ के भी धनात्मक और ऋणात्मक मान हो सकते हैं (चित्र 11.6)। चूंकि कण वृत्त में दो ही तरह से गतिमान हो सकता है : **दक्षिणावर्त** या **वामावर्त**, हम θ के लिए निम्नलिखित चिन्ह प्रणाली लेते हैं :

परंपरा से, वामावर्त वर्तुल गति के लिए θ धनात्मक होता है और दक्षिणावर्त वर्तुल गति के लिए ऋणात्मक।

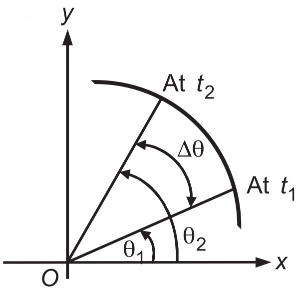


कभी न भूलें



यह चिन्ह परंपरा आपको याद रहेगी अगर आप यह याद रखें: "घड़ियां ऋणात्मक होती हैं।"

चित्र 11.6: कण की कोणीय स्थिति θ, क) वृत्त में कण की वामावर्त गति के लिए धनात्मक होती है; ख) वृत्त में कण की दक्षिणावर्त गति के लिए ऋणात्मक होती है।



चित्र 11.7: वृत्त में वामावर्त दिशा में घूर्णन कर रहे कण का कोणीय विस्थापन। यहां हम केवल वृत्त की चाप दिखा रहे हैं।

स्कूल की भौतिकी से याद करें कि अगर हमें $x(t)$, यानी समय के फलन के रूप में कण की स्थिति पता हो तो हम उसका वेग और त्वरण ज्ञात कर सकते हैं। इस तरह, हम कण की गति के बारे में संपूर्ण जानकारी पा सकते हैं। इसी तरह अगर हमें समय के फलन के रूप में कण की कोणीय स्थिति $\theta(t)$ पता हो तो हम उसका **कोणीय विस्थापन**, **कोणीय वेग** और **कोणीय त्वरण** ज्ञात कर सकते हैं। और इस तरह हम कण की कोणीय गति के बारे में संपूर्ण जानकारी पा सकते हैं।

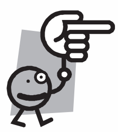
11.2.2 कोणीय विस्थापन

चित्र 11.5 या चित्र 11.6क में दिखाया गया कण लें। ध्यान दें कि वह कण वृत्त में वामावर्त दिशा में घूर्णन कर रहा है। क्षणों t_1 और t_2 पर उसकी कोणीय स्थितियां θ_1 और θ_2 हैं (देखें चित्र 11.7)। तब उसका **कोणीय विस्थापन** है :

कोणीय विस्थापन

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \qquad (\Delta\theta \text{ रेडियन इकाई में मापा जाता है}) \qquad (11.3)$$

कोणीय विस्थापन की चिन्ह परंपरा कोणीय स्थिति के समान है।



कभी न भूलें

कोणीय विस्थापन वामावर्त वर्तुल गति के लिए धनात्मक होता है और दक्षिणावर्त वर्तुल गति के लिए ऋणात्मक। इसकी इकाई रेडियन है।

आइए, कोणीय विस्थापन ज्ञात करने के लिए एक उदाहरण लें।

उदाहरण 11.1 : कोणीय विस्थापन

त्रिज्या 6.05 cm की एक घूर्णन कर रही सी डी के छोर पर स्थित एक बिंदु समयांतराल Δt में स्थिति A से स्थिति B तक गति करता है (चित्र 11.8क) । इस समयांतराल में इसका कोणीय विस्थापन क्या है? दिया है कि क्षैतिज संदर्भ रेखा के सापेक्ष इन दोनों स्थितियों में चापों की लंबाइयां क्रमशः 2.00 cm और 6.00 cm हैं।

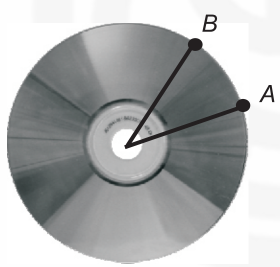
हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि समीकरण 11.1 का उपयोग करके रेडियन में कोणीय स्थिति प्राप्त की जाए और समीकरण 11.3 का उपयोग करके कोणीय विस्थापन निकाला जाए।

आइए, घूर्णन कर रही सी डी को ऊपर से देखें और उस पर निर्देशांक अक्ष खींचें (चित्र 11.8ख)। समीकरण 11.1 से हमें मिलता है :

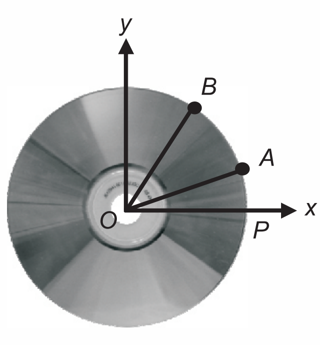
$$\theta_1 = \frac{s}{r} = \frac{AP}{OP} = \frac{2.00\ \text{cm}}{6.05\ \text{cm}} = 0.331\ \text{rad},$$

$$\theta_2 = \frac{BP}{OP} = \frac{6.00\ \text{cm}}{6.05\ \text{cm}} = 0.992\ \text{rad}$$

अतः, $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = (0.992 - 0.331)\ \text{rad} = 0.661\ \text{rad}$ । यह धनात्मक है क्योंकि बिंदु वामावर्त दिशा में घूर्णन कर रहा है।



(क)



(ख)

चित्र 11.8: घूर्णन कर रही सी डी पर स्थित एक बिंदु का कोणीय विस्थापन।

बोध प्रश्न 1 – कोणीय विस्थापन

चित्र 11.1 में घूर्णन कर रहे किसी भी पिंड पर एक बिंदु लें। उस बिंदु की निम्न कोणीय स्थितियों के लिए उसका कोणीय विस्थापन ज्ञात करें :

θ_1 rad	+ 5	+ 7	– 5	– 3	– 5
θ_2 rad	+ 12	– 2	+ 2	– 4	– 1

आइए, अब हम वर्तुल गति कर रहे कण के कोणीय वेग और कोणीय त्वरण की परिभाषा दें।

11.2.3 कोणीय वेग और कोणीय त्वरण

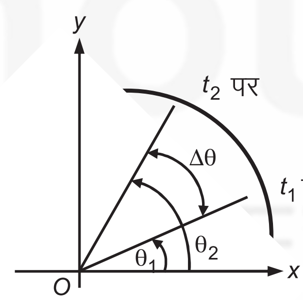
चित्र 11.9 (जो चित्र 11.7 ही है) में कण की गति देखें। क्षणों t_1 और t_2 पर उसकी कोणीय स्थितियां क्रमशः θ_1 और θ_2 हैं। t_1 से t_2 तक के समयांतराल Δt में हम कण की **औसत कोणीय चाल** ω_{avg} की यह परिभाषा देते हैं :

ω (ओमेगा) यूनानी भाषा का अक्षर है।

$$\text{औसत कोणीय चाल} \quad \omega_{avg} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (11.4)$$

औसत कोणीय चाल

कोणीय चाल की SI इकाई रेडियन प्रति सेकंड ($rad\,s^{-1}$) है। इसकी अन्य इकाइयां हैं परिक्रमण प्रति सेकंड ($rev\,s^{-1}$) और परिक्रमण प्रति मिनट (rev/min या rpm) । शायद आपने संगीत के पुराने रिकार्ड देखे हों। उनकी कोणीय चाल rpm की इकाई में होती थी जैसे कि 45 rpm, 78 rpm, आदि। अब हम कण की **तात्क्षणिक कोणीय चाल**, जिसे केवल **कोणीय चाल** भी कहा जाता है, की परिभाषा देंगे। इसे हम प्रतीक ω से दिखाते हैं। ध्यान दें कि यह **तात्क्षणिक कोणीय वेग** का **परिमाण** है। **तात्क्षणिक कोणीय वेग** की **दिशा** की परिभाषा हम अगले भाग में देंगे।



चित्र 11.9: वृत्त में वामावर्त दिशा में घूर्णन कर रहे कण का कोणीय विस्थापन। यहां हम केवल वृत्त की चाप दिखा रहे हैं।

कोणीय चाल

तात्क्षणिक कोणीय वेग का **परिमाण** ω (यानी **कोणीय चाल**) समीकरण 11.4 में दिए गए अनुपात का सीमा $\Delta t \to 0$ में मान है :

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad (11.5)$$

यह θ की समय के साथ परिवर्तन दर है।

कोणीय चाल

ध्यान दें

$\because$ 1 परिक्रमण $= 2\pi$ rad,

$$\therefore 1\,\text{rpm} = \frac{(2\pi)\,\text{rad}}{60\,\text{s}}$$

$$1\,\text{rad}\,\text{s}^{-1} = \frac{60}{2\pi}\,\text{rpm}$$

इस तरह, यदि हमें $\theta(t)$ पता हो, यानी समय के फलन के रूप में θ पता हो, तो हम उसे t के सापेक्ष अवकलित करके कोणीय चाल प्राप्त कर सकते हैं। आगे से हम तात्क्षणिक कोणीय वेग को केवल कोणीय वेग कहेंगे। एक **पिंड का कोणीय वेग धनात्मक हो सकता है और ऋणात्मक भी** :

- **कण वामावर्त घूर्णन कर रहा है : कोणीय वेग धनात्मक है।**
- **कण दक्षिणावर्त घूर्णन कर रहा है : कोणीय वेग ऋणात्मक है।**

यदि किसी कण का कोणीय वेग समय के साथ बदलता है, तब कण में **कोणीय त्वरण** होता है (ठीक उसी तरह जैसे वेग बदलने पर त्वरण होता है)। मान लें कि चित्र 11.9 के कण की क्षणों t_1 और t_2 पर कोणीय चालें क्रमशः ω_1 और ω_2 हैं। हम t_1 से t_2 तक के समयांतराल Δt में कण के **औसत कोणीय त्वरण के परिमाण** की यह परिभाषा देते हैं :

α (अल्फा) यूनानी भाषा का अक्षर है।

औसत कोणीय त्वरण $$\alpha_{avg} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (11.6)$$

कोणीय त्वरण की SI इकाई rad s^{-2} है।

कोणीय त्वरण

कोणीय त्वरण

तात्क्षणिक कोणीय त्वरण (या **कोणीय त्वरण**) का **परिमाण** α समीकरण 11.6 में दिए गए अनुपात का सीमा $\Delta t \to 0$ में मान है :

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \qquad (11.7)$$

यह ω की समय के साथ परिवर्तन की दर है।

ध्यान दें

ध्यान दें कि समीकरणों 11.8क से ग और उनके संगत स्थानांतरण-गति की शुद्धगतिकी के समीकरणों में, कोणीय स्थिति θ, स्थिति x के **अनुरूप** है। कोणीय चाल ω, चाल v के **अनुरूप** है और कोणीय त्वरण का परिमाण α, त्वरण के परिमाण a के **अनुरूप** है। इस तरह, अचर कोणीय त्वरण से हो रही कोणीय गति, पूरे तौर पर, अचर त्वरण से हो रही स्थानांतरण-गति के अनुरूप है।

इस तरह, यदि हमें $\omega(t)$ पता हो, यानी समय के फलन के रूप में ω पता हो तो हम t के सापेक्ष ω का अवकलन करके कोणीय त्वरण प्राप्त कर सकते हैं। स्कूल की भौतिकी से अचर त्वरण के लिए शुद्धगतिकी के समीकरण याद करें। इसी तरह हम **अचर कोणीय त्वरण के लिए शुद्धगतिकी के समीकरण** लिख सकते हैं।

शुद्धगतिकी के समीकरण

कोणीय गति (α = अचर)		**स्थानांतरण-गति** (a = अचर)
$\omega = \omega_0 + \alpha t$	(11.8क)	$v = v_0 + at$
$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	(11.8ख)	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$	(11.8ग)	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$

आइए, हम समीकरणों 11.8क से ग को लागू करके कणों की कोणीय स्थिति, कोणीय चाल और कोणीय त्वरण ज्ञात करें।

उदाहरण 11.2 : औसत कोणीय चाल

क) एक चक्की 10 s में 50 संपूर्ण दक्षिणावर्त घूर्णन करती है। उस पर स्थित एक कण की औसत कोणीय चाल प्राप्त करें।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि समीकरणों 11.4 और 11.2क का उपयोग करके रेडियन में कोणीय चाल प्राप्त की जाए चूंकि $\Delta\theta$ रेडियन में होना है।

चक्की के पाट पर स्थित कण के लिए :

$$\Delta\theta = (-50 \text{ परिक्रमण})\, 2\pi \text{ rad} = -314 \text{ rad} \approx -3.1\times 10^2 \text{ rad}$$

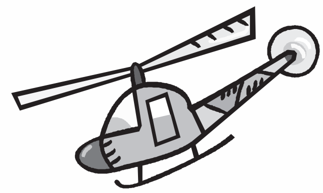
यहां ऋणात्मक चिन्ह बताता है कि चक्की और कण दक्षिणावर्त घूर्णन कर रहे हैं। कण की औसत कोणीय चाल है :

$$\omega_{avg} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{-314 \text{ rad}}{10 \text{ s}} = 31.4 \text{ rads}^{-1} \approx 31 \text{ rads}^{-1}$$

ख) एक हैलीकॉप्टर के पंख -50 rads^{-1} की औसत कोणीय चाल से घूमते हैं (चित्र 11.10)। यदि एक पंख की कोर पर स्थित कण की प्रारंभिक कोणीय स्थिति -12 rad हो तो 10 s बाद उसकी कोणीय स्थिति क्या होगी?

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि समीकरण 11.8ख का प्रयोग करके कोणीय विस्थापन प्राप्त किया जाए। यहां $\alpha = 0$, चूंकि ω_0 अचर है और $t = 10$ s है:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t = -12 \text{ rad} - (50 \text{ rads}^{-1} \times 10 \text{ s}) = -512 \text{ rad} \approx -5.1\times 10^2 \text{ rad}$$



चित्र 11.10: घूर्णन करते हेलीकॉप्टर के पंख की कोर पर स्थित कण की औसत कोणीय चाल।

ध्यान दें

घूर्णन कर रहे पिंड पर घूर्णन अक्ष पर **स्थित कणों के अलावा सभी कणों की कोणीय चाल समान होती है**। इसीलिये कोणीय गति का वर्णन करने के लिए कोणीय चरों का प्रयोग करना बेहतर होता है।

उदाहरण 11.3 : अचर कोणीय त्वरण

साइकिल का एक पहिया 2.0 rads^{-2} के अचर कोणीय त्वरण से वामावर्त दिशा में घूर्णन कर रहा है। क्षण $t = 0$ पर उस पर स्थित एक कण की कोणीय चाल 5.0 rads^{-1} है।

क) क्षण $t = 5.0$ s पर उसकी कोणीय चाल क्या होगी?

ख) मान लें कि क्षण $t = 0$ पर साइकिल की एक तीली क्षैतिज है। उस तीली पर स्थित कण की $t = 5.0$ s पर कोणीय स्थिति क्या है? इस समयांतराल में उसने कितने परिक्रमण पूरे किए हैं?

ग) $t = 5.0$ s पर क्षैतिज और तीली के बीच का कोण क्या है?

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि कोणीय त्वरण अचर है और हम कोणीय गति के लिए शुद्धगतिकी की समीकरणों 11.8क से ग का उपयोग कर सकते हैं। हम इस तथ्य का भी उपयोग करते हैं कि **पहिये पर स्थित सभी कण समान कोणीय चाल से घूर्णन करते हैं**।

क) समीकरण 11.8क से क्षण $t = 5.0$ s पर पहिये पर स्थित कण की कोणीय चाल है : $\omega = \omega_0 + \alpha t$

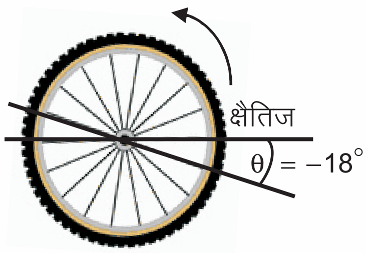
$$\therefore \omega_0 = 5.0 \text{ rads}^{-1} + (2.0 \text{ rads}^{-2}) \times (5.0 \text{ s}) = 15 \text{ rads}^{-1}$$

ख) यहां $\theta_0 = 0$ है। समीकरण 11.8ख से क्षण $t = 5.0$ s पर पहिये की तीली पर स्थित कण की कोणीय स्थिति है :

$$\theta = (5.0 \text{ rads}^{-1}) \times (5.0 \text{ s}) + \frac{1}{2}(2.0 \text{ rads}^{-2}) \times (5.0 \text{ s})^2 = 50 \text{ rad}$$

समीकरण 11.2ख से परिक्रमणों की संख्या है :

$$\theta = 50 \times \frac{1}{2\pi} \text{ rev} = 7.95 \text{ rev} \approx 8.0 \text{ rev}$$



चित्र 11.11: क्षैतिज और तीली के बीच का कोण 342° **या** – 18° **है।**

ग) 5.0 s में कण और तीली दोनों ही 7 सम्पूर्ण परिक्रमण और 0.95 rev अतिरिक्त परिक्रमण करते हैं जो रेडियन में है :

$$0.95\,\text{rev} = (0.95\,\text{rev}) \times (2\pi\,\text{rad.rev}^{-1}) = 5.97\,\text{rad}$$

डिग्री में इसका मान है :

$$0.95\,\text{rev} = (0.95\,\text{rev}) \times (360^\circ) = 342^\circ$$

अंतिम परिक्रमण में तीली 342° के कोण से घूमती है। अतः क्षैतिज और तीली के बीच का कोण 342° या – 18° है। आप इस बात को चित्र 11.11 से भी समझ सकते हैं।

अब आप कोणीय गति के लिए शुद्धगतिकी के समीकरण लागू करें। इसके लिए बोध प्रश्न 2 करें।

बोध प्रश्न 2 – कोणीय चाल और कोणीय त्वरण

क) त्रिज्या 1.0 m की एक चकती अपने केंद्र से गुज़रने वाले और अपने तल के लंबवत् अक्ष के प्रति 50° के कोण से घूमती है। उसके केंद्र द्वारा चली गई दूरी क्या है?

ख) गाड़ी के घूर्णन करते पहिये में अटके एक कंकड़ का औसत कोणीय त्वरण $150\,\text{rad s}^{-2}$ है। 2.0 s बाद उसकी अंतिम कोणीय चाल क्या होगी, यदि वह विरामावस्था से घूर्णन करना प्रारंभ करता है?

आपने अभी तक हुई चर्चा में ध्यान दिया होगा कि हमने **कोणीय विस्थापन, कोणीय वेग** और **कोणीय त्वरण** जैसे शब्दों का उपयोग किया है। आपने यह भी ध्यान दिया होगा कि जब कण वृत्त में वामावर्त दिशा में घूमता है तो हम उसका कोणीय विस्थापन धनात्मक लेते हैं और जब वह दक्षिणावर्त दिशा में घूमता है तो हम उसका कोणीय विस्थापन ऋणात्मक लेते हैं। इस प्रकार, हमने एक मायने में कोणीय विस्थापन की दिशा परिभाषित कर दी है।

आप जानना चाहेंगे : **क्या हम कोणीय वेग और कोणीय त्वरण की दिशा भी परिभाषित कर सकते हैं**? यही चर्चा हम अगले भाग में करेंगे।

ध्यान दें

इस पाठ्यक्रम में हम मुख्यतः **नियत अक्ष के प्रति घूर्णी या कोणीय गति की चर्चा करेंगे। ऐसी स्थितियों के लिए हमें कोणीय राशियों की सदिश प्रकृति की बात करने की आवश्यकता नहीं होती।**

11.3 कोणीय वेग और कोणीय त्वरण की दिशा

आपने ध्यान दिया होगा कि हमने **कोणीय राशियों** की बात किसी अक्ष के प्रति **घूर्णन कर रहे** कणों या पिंडों के लिए ही की है। अतः, हम इनकी दिशाएं, विस्थापन, वेग और त्वरण सदिश की दिशाओं से भिन्न तरह से परिभाषित करते हैं।

आपने देखा है कि **नियत अक्ष के प्रति घूर्णन वामावर्त** या **दक्षिणावर्त** होते हैं।

यह जानने के लिए कि इनमें से कौन सी दिशा कोणीय वेग की धनात्मक दिशा है और कौन सी ऋणात्मक, हम **दक्षिणहस्त नियम** का प्रयोग करते हैं। आइए, हम **दक्षिणहस्त नियम** का प्रयोग करके कोणीय वेग की दिशा परिभाषित करें।

कोणीय वेग की दिशा

कोणीय वेग की दिशा प्राप्त करने के लिए **दक्षिणहस्त नियम : घूर्णन अक्ष को अपने दायें हाथ की उंगलियों से ऐसे पकड़ें कि उंगलियों की दिशा घूर्णन की दिशा में हो**। तब आपका **फैला हुआ अंगूठा** अक्ष के अनुदिश **कोणीय वेग सदिश की दिशा में** होता है (चित्र 11.12)। कोणीय वेग **वामावर्त घूर्णन** के लिए **धनात्मक** और **दक्षिणावर्त घूर्णन** के लिए **ऋणात्मक** होता है।

चित्र 11.12: घूर्णी पिंड के कोणीय वेग सदिश $\vec{\omega}$ की दिशा दक्षिणहस्त नियम से प्राप्त होती है।

हम कोणीय त्वरण की दिशा कैसे प्राप्त करते हैं? चूंकि कोणीय त्वरण की दिशा कोणीय वेग में परिवर्तन की दिशा है, अतः हम कोणीय त्वरण की दिशा आगे दिए तरीके से मालूम करते हैं।

कोणीय त्वरण की दिशा

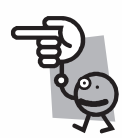
नियत अक्ष के प्रति घूर्णन के लिए, **कोणीय त्वरण की दिशा** घूर्णन अक्ष के अनुदिश होती है और **कोणीय वेग के परिवर्तन की दिशा में होती है** (चित्र 11.13)।

अतः, यदि **कोणीय वेग का परिमाण बढ़ रहा हो** तो **कोणीय त्वरण सदिश, कोणीय वेग सदिश की दिशा में होता है**। यदि **कोणीय वेग का परिमाण घट रहा हो** तो **कोणीय त्वरण सदिश, कोणीय वेग सदिश की दिशा की विपरीत दिशा में होता है**।

(क) **(ख)**

चित्र 11.13: घूर्णी पिंड के कोणीय त्वरण सदिश $\vec{\alpha}$ की दिशा क) कोणीय वेग सदिश की दिशा में होती है यदि कोणीय वेग का परिमाण बढ़ रहा हो और ख) कोणीय वेग सदिश की दिशा के विपरीत होती है यदि कोणीय वेग का परिमाण घट रहा हो।

घूर्णन कर रहे पिंड का कोई भी भाग कोणीय वेग सदिश की दिशा में गति नहीं करता। स्थानांतरण-गति में ऐसा नहीं है, क्योंकि गति एक सदिश के अनुदिश होती है।



कभी न भूलें

इकाई 6 में आपने एकसमान वर्तुल गति के बारे में पढ़ा है और जाना है कि त्रिज्या r के वृत्त में अचर चाल v से गतिमान कण का अभिकेंद्र त्वरण क्या होता है। इस इकाई में, आपने त्रिज्या r के वृत्त में गतिमान कण के कोणीय चरों के बारे में पढ़ा है। अब आप

जानना चाहेंगे : **स्थानांतरण-गति के चरों v, a और कोणीय गति के चरों ω, α के बीच में क्या संबंध होता है?**

11.4 स्थानांतरण-गति और कोणीय गति के चरों का संबंध

इस बारे में कुछ समझ तो आप यह गतिविधि करके बना सकते हैं :

गतिविधि

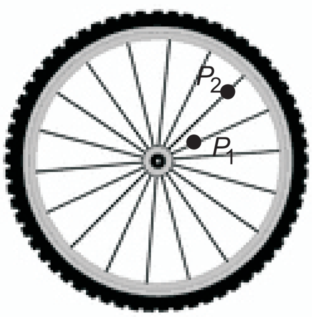
चित्र 11.14: घूर्णन कर रहे पिंड में घूर्णन अक्ष से दूर स्थित बिंदुओं का वेग, उसके निकट स्थित बिंदुओं के वेग से अधिक होता है।

स्थानांतरण-गति और कोणीय गति के चर

अपनी बाहें फैलाएं और एक नर्तक/नर्तकी की तरह अपने शरीर से गुज़र रहे अक्ष के गिर्द चक्कर लगाएं। या फिर साइकिल को उसके स्टैण्ड पर रख कर, (चित्र 11.14 की तरह) साइकिल के पहिए को घुमाएं। क्या आप पता लगा सकते हैं कि आपके शरीर पर या साइकिल पर कौन सा बिंदु सबसे अधिक तेज़ी से चलता है? क्या वह बिंदु घूर्णन अक्ष के निकट है जैसे कि आपके कंधे पर स्थित बिंदु या पहिये के अक्ष के पास स्थित बिंदु? या वह घूर्णन अक्ष से कुछ दूरी पर स्थित बिंदु है जैसे कि आपकी उंगली के छोर पर स्थित बिंदु या पहिये की कोर पर स्थित बिंदु?

इस सवाल का जवाब आप इन दोनों कणों के लिए v ज्ञात करके पता कर सकते हैं :

घूमते हुए पहिये पर दूरियों r_1 और r_2 पर क्रमशः दो बिंदु P_1 और P_2 लें ताकि बिंदु P_1 घूर्णन अक्ष के निकट हो यानी $r_1 < r_2$ हो (चित्र 11.15 देखें)।



चित्र 11.15: घूर्णन अक्ष से दूरी r_2 पर स्थित बिंदु P_2 का वेग, दूरी r_1 पर स्थित बिंदु P_1 के वेग से अधिक है चूंकि $r_2 > r_1$ है।

ध्यान दें कि घूर्णन अक्ष से बिंदु जितना अधिक दूरी पर होता है, उतनी ही उस वृत्त की त्रिज्या अधिक होती है जिसमें वह गतिमान है। यानी उतनी ही उस वृत्त की परिधि ($2\pi r$) अधिक होती है। चूंकि दोनों कण P_1 और P_2 **समान कोणीय चाल** से गतिमान हैं, उनके द्वारा **एक संपूर्ण चक्कर में लिया गया समय बराबर है**। इसका अर्थ है कि दोनों कण एक ही समय में अलग-अलग दूरियां ($2\pi r_1$ और $2\pi r_2$) तय करते हैं। अब आप इस सवाल का जवाब दे सकते हैं: किस कण (P_1 या P_2) की चाल अधिक होगी? इसका जवाब है कि कण P_2 की चाल v_2 अधिक होगी। ऐसा इसलिए है कि वह समान समय T में P_1 के मुकाबले ज़्यादा दूरी (जो कि वृत्त में एक चक्कर के बराबर है) तय करता है। अतः,

$$v_2 = \frac{2\pi r_2}{T} \quad > \quad v_1 = \frac{2\pi r_1}{T} \qquad (r_2 > r_1 \text{ के लिए})$$

इस तरह, घूर्णन अक्ष से कण जितनी अधिक दूरी पर होगा, उतनी ही उसकी चाल या उसका वेग अधिक होंगे हालांकि उसकी कोणीय चाल अन्य कणों जितनी ही होगी। इस परिणाम को हम व्यापक तौर पर कैसे लिखते हैं?

11.4.1 ω और v में संबंध

त्रिज्या r के वृत्त में गतिमान कण लें। समीकरण 11.1 याद करें जो किसी संदर्भ अक्ष के सापेक्ष घूर्णन कोण θ, संगत वृत्त की चाप s और त्रिज्या r को संबंधित करता है।

समीकरण 11.1 से, हम लिख सकते हैं :

$$s = r\theta \qquad (11.9\text{क})$$

चूंकि **कण द्वारा** चाप के अनुदिश **चली गई दूरी** s है, समीकरण 11.9क हमें कोणीय विस्थापन और चली गई दूरी के बीच का संबंध देता है। **ध्यान रहे** कोण θ **रेडियन में है**। यदि हम समीकरण 11.9क को समय के सापेक्ष अवकलित करें और ध्यान रखें कि r वृत्त के लिए अचर है, तो हमें मिलता है :

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega \qquad (11.9\text{ख})$$

यहां ω, rads^{-1} की इकाई में मापा जाता है। **वृत्त में गति के लिए**, कण के वेग की दिशा **वृत्त की स्पर्श रेखा के अनुदिश** होती है। अतः, हम वर्तुल गति के लिए v को **स्पर्शरेखीय चाल** भी कहते हैं और उसे v_t लिखते हैं। अब हम चाहेंगे कि आप इकाई 6 के समीकरण 6.11 को याद करें जो कण की चाल v और उसके आवर्तकाल T का संबंध देता है। इसे हम यहां दोबारा लिख रहे हैं :

$$v = \frac{2\pi r}{T} \qquad \text{या} \qquad T = \frac{2\pi r}{v} \qquad (11.9\text{ग})$$

समीकरण 11.9ख से v को समीकरण 11.9ग में रखने पर, हमें आवर्तकाल और कोणीय चाल के बीच एक महत्त्वपूर्ण संबंध मिलता है :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \qquad (11.10)$$

आवर्तकाल

अब जबकि हमने θ और s के, तथा ω और v के बीच संबंध स्थापित कर लिया है तो आप जानना चाहेंगे : **असमान वर्तुल गति के लिए α और a में क्या संबंध है?**

11.4.2 असमान वर्तुल गति के लिए α और a में संबंध

आप कह सकते हैं कि हम a के लिए समीकरण 6.9ग का उपयोग कर सकते हैं और उसमें समीकरण 11.9ख से v रख कर इच्छित संबंध ज्ञात कर सकते हैं। ऐसा करने पर हमें क्या मिलता है? हमें मिलता है :

$$\vec{\mathbf{a}}_r = -\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}} = -\omega^2 r\,\hat{\mathbf{r}} \qquad \text{और} \qquad a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad (11.11)$$

अभिकेंद्र त्वरण

ध्यान दें कि $\vec{\mathbf{a}}_r$ की दिशा सभी क्षणों पर **वृत्त के केंद्र की ओर** है। तभी इसे **अभिकेंद्र त्वरण** कहते हैं। पर जैसा कि आप देख सकते हैं, इस समीकरण में α मौजूद नहीं है : अतः, हम प्रथम सिद्धांत से शुरू करके परिणाम प्राप्त करेंगे। इन दोनों त्वरणों के बीच संबंध स्थापित करने में एक ख़ास बात है जिसे आप इस भाग के अंत में समझ पाएंगे।

ध्यान दें कि हम **असमान वर्तुल गति** का वर्णन कर रहे हैं यानी **कण की कोणीय चाल समय के साथ बदल रही है** और इसका कोणीय त्वरण परिमित है। चूंकि ω समय के साथ बदलता है, समीकरण 11.9ख द्वारा दी गई चाल v भी समय के साथ बदलती है। मान लें कि क्षण t_1 पर कण की चाल v_1 है और बाद के क्षण t_2 पर v_2 है। तब अंतराल $\Delta t = t_2 - t_1$ में कण का औसत त्वरण है :

$$a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{r\omega_2 - r\omega_1}{\Delta t} = \frac{r\Delta\omega}{\Delta t} \tag{11.12}$$

ध्यान दें कि दोनों ही v_2 और v_1 **चाल** यानी वेग के **परिमाण** हैं, और a_{av} औसत त्वरण या संगत क्षणों पर कण की चाल में अंतर व्यक्त करता है। सीमा $\Delta t \to 0$ में समीकरण 11.12 से हमें **तात्क्षणिक त्वरण** प्राप्त होता है जो स्पर्श रेखा के अनुदिश है। इसके परिमाण को a_t लिखने पर हमें मिलता है :

$$a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r\Delta\omega}{\Delta t}$$

स्पर्शरेखीय त्वरण

या

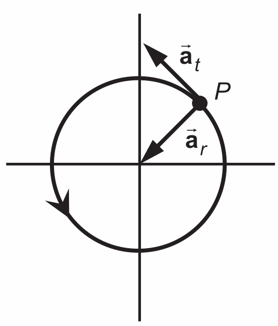
$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = \alpha r \tag{11.13}$$

ध्यान दें कि समीकरण 11.13 में परिमाण a_t वाला त्वरण, समीकरण 11.11 के अभिकेंद्र त्वरण से अलग है **क्योंकि इसकी दिशा वृत्त की स्पर्श रेखा** यानी **वेग के परिमाण v में परिवर्तन की दिशा के अनुदिश** है।

इसे हम **स्पर्शरेखीय त्वरण** या **त्वरण का स्पर्शरेखीय घटक** कहते हैं। कण में यह **त्वरण, वेग का परिमाण बदलने के कारण होता है**। अतः, **यह एकसमान वर्तुल गति के लिए शून्य होता है**। इसे हम प्रतीक $\vec{\mathbf{a}}_t$ द्वारा दिखाते हैं और अभिकेंद्र त्वरण को प्रतीक $\vec{\mathbf{a}}_r$ द्वारा। इस परिणाम का सार यह है :

दोहराएं

असमान वर्तुल गति के लिए त्वरण



चित्र 11.16: असमान वर्तुल गति कर रहे कण P के त्वरण के दो घटक होते हैं : त्रिज्य घटक $\vec{a}_r$ और स्पर्शरेखीय घटक $\vec{a}_t$ ।

असमान वर्तुल गति में कण के त्वरण के दो घटक होते हैं : **त्रिज्य** और **स्पर्शरेखीय** (चित्र 11.16)।

कण के त्वरण का त्रिज्य घटक वेग की दिशा में परिवर्तन के कारण होता है। इसकी **दिशा त्रिज्या के अनुदिश वृत्त के केंद्र की ओर होती है** और इसका **परिमाण** होता है :

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \tag{11.14क}$$

कण के त्वरण का स्पर्शरेखीय घटक वेग के परिमाण में परिवर्तन के कारण होता है। इसकी **दिशा वृत्त की स्पर्श रेखा के अनुदिश** और **चाल में परिवर्तन** (बढ़ने या घटने) की ओर होती है। इसका **परिमाण** होता है :

$$a_t = \alpha r \tag{11.14ख}$$

आइए, अब हम **असमान वर्तुल गति** के लिए स्थानांतरण गति और कोणीय गति के चरों के संबंध देने वाले सभी परिणामों को एक साथ लिखें।

असमान वर्तुल गति

इस स्थिति में r **अचर** है पर ω **बदल रहा है** यानी α **शून्य नहीं है** :

$$s = r\theta \qquad (11.15\text{क})$$

$$v = r\omega \qquad (11.15\text{ख})$$

वेग सदिश वृत्त की स्पर्श रेखा के अनुदिश वृत्त में कण की गति की दिशा में होता है (चित्र 11.17क)। कण के त्वरण के दो घटक होते हैं (चित्र 11.17ख) :

i) **वृत्त के केंद्र की ओर त्रिज्या के अनुदिश त्रिज्य या अभिकेंद्र घटक** जिसका **परिमाण** है :

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad (11.15\text{ग})$$

ii) **वृत्त की स्पर्श रेखा के अनुदिश कण की चाल में परिवर्तन** (घटने या बढ़ने) **की दिशा में स्पर्शरेखीय घटक** जिसका **परिमाण** है :

$$a_t = \alpha r \qquad (11.15\text{घ})$$

असमान वर्तुल गति कर रहे कण का **परिणामी त्वरण**, उसके त्रिज्य और स्पर्शरेखीय घटकों के **सदिश योग** के बराबर होगा। अतः, **असमान वर्तुल गति में कण का त्वरण** है :

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_r + \vec{\mathbf{a}}_t = -\omega^2 r\,\hat{\mathbf{r}} + \alpha r\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (11.16\text{क})$$

जहां $$\vec{\mathbf{a}}_r = -\omega^2 r\,\hat{\mathbf{r}} \qquad (11.16\text{ख})$$

और $$\vec{\mathbf{a}}_t = \alpha r\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (11.16\text{ग})$$

यहां

$\hat{\mathbf{r}}$: वृत्त के केंद्र से परे, **त्रिज्या के अनुदिश एकक सदिश** है (चित्र 11.18क)।

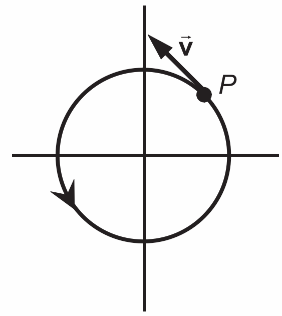
$\hat{\boldsymbol{\theta}}$: **$\hat{\mathbf{r}}$ के अभिलंबवत् वृत्त की स्पर्श रेखा के अनुदिश एकक सदिश है जिसकी दिशा** θ के बढ़ने की दिशा है (चित्र 11.18क)।

साथ ही $$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{(\omega^2 r)^2 + (\alpha r)^2} \qquad (11.16\text{घ})$$

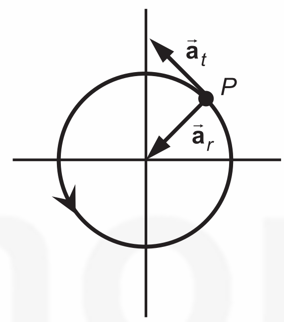
$$\tan\beta = \frac{a_t}{a_r} = -\frac{\alpha}{\omega^2} \qquad (11.16\text{च})$$

यहां β **त्वरण** $\vec{\mathbf{a}}$ और **त्रिज्य दिशा के बीच का कोण** है।

दोहराएं



(क)



(ख)

चित्र 11.17: क) वेग सदिश की दिशा; ख) असमान वर्तुल गति के लिए त्वरण के त्रिज्य और स्पर्शरेखीय घटक।

ध्यान दें

समीकरणों 11.16क और 11.16ख के **ऋणात्मक चिन्ह** हमें बताते हैं कि त्वरण के **त्रिज्य घटक** (यानी **अभिकेंद्र त्वरण**) **की दिशा एकक सदिश $\hat{\mathbf{r}}$ की दिशा के विपरीत है**। ऐसा एकक सदिश $\hat{\mathbf{r}}$ की दिशा की परिभाषा के कारण है।

स्पर्शरेखीय घटक को **अनुप्रस्थ घटक** भी कहते हैं।

ध्यान दें

व्यापक कोणीय गति के लिए $\vec{\mathbf{r}} = r\hat{\mathbf{r}}$ में r अचर नहीं है। आगे दिए गए परिणामों (इकाई 13, पृष्ठ 79 पर हाशिए की टिप्पणी देखें):

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{\theta}(-\sin\theta\ \hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\ \hat{\mathbf{j}})$$

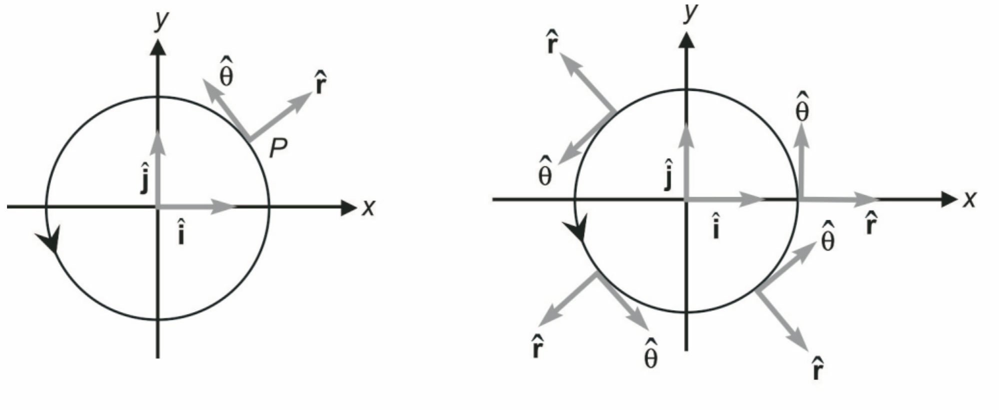
और

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = -\dot{\theta}(\cos\ \theta\ \hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\ \hat{\mathbf{j}})$$

का प्रयोग करके हम वेग $\vec{\mathbf{v}}$ और त्वरण $\vec{\mathbf{a}}$ का व्यंजक लिख सकते हैं:

$$\vec{\mathbf{v}} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = \vec{\mathbf{v}}_r + \vec{\mathbf{v}}_t$$

$$\vec{\mathbf{a}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r})\hat{\boldsymbol{\theta}}$$
$$= \vec{\mathbf{a}}_r + \vec{\mathbf{a}}_t$$



(क) (ख)

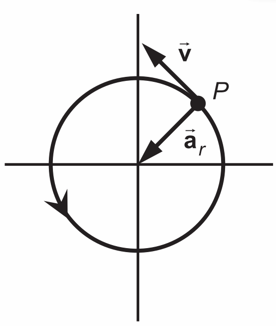
चित्र 11.18: क) बिंदु P पर एकक सदिश $\hat{\mathbf{r}}$ और $\hat{\boldsymbol{\theta}}$; ख) ध्यान दें कि कोणीय गति में $\hat{\mathbf{r}}$ और $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ की दिशाएं लगातार बदलती हैं। याद रहे कि x और y-अक्षों के अनुदिश एकक सदिश $\hat{\mathbf{i}}$ और $\hat{\mathbf{j}}$ अचर हैं।

ध्यान दें कि $\hat{\mathbf{r}}$ त्रिज्य दिशा में एकक सदिश है यानी इसकी दिशा सभी क्षणों पर कण को केंद्र से जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश है। साथ ही इसकी दिशा वृत्त के केंद्र से परे होती है।

साथ ही ध्यान दें कि एकक सदिश $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ सभी क्षणों पर $\hat{\mathbf{r}}$ के लंबवत् होता है और इसकी दिशा चित्र 11.18क और ख में दिखाई गई है। जैसे-जैसे कण वृत्त में घूमता है, त्रिज्य दिशा बदलती है और साथ ही इन एकक सदिशों की दिशा भी जैसाकि चित्र 11.18ख में दिखाया गया है। इस मायने में **$\hat{\mathbf{r}}$ और $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ अचर सदिश नहीं हैं** जैसेकि क्रमशः x और y-अक्ष के अनुदिश **सदिश $\hat{\mathbf{i}}$ और $\hat{\mathbf{j}}$ अचर हैं**।

हम संदर्भ के लिए एकसमान वर्तुल गति के परिणाम भी यहां दे रहे हैं।

दोहराएं



चित्र 11.19: एकसमान वर्तुल गति के लिए कण P के वेग और अभिकेंद्र त्वरण सदिश।

एकसमान वर्तुल गति

इस स्थिति में r और ω **अचर** होते हैं :

$$s = r\theta \qquad (11.17\text{क})$$

$$v = r\omega \qquad (11.17\text{ख})$$

और

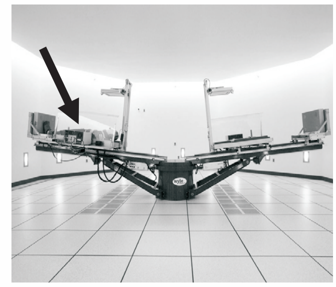
$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad (11.17\text{ग})$$

वेग सदिश वृत्त की स्पर्शरेखा के अनुदिश उस दिशा में है जिसमें कण वृत्त में गतिमान है (चित्र 11.19)। त्वरण सदिश **त्रिज्या के अनुदिश वृत्त के केंद्र की ओर** है।

आइए, अब हम एक उदाहरण में इन समीकरणों को वर्तुल गति पर लागू करें।

उदाहरण 11.4 : चरों में संबंध

अंतरिक्ष यात्रियों को उच्च त्वरण सहने का प्रशिक्षण देने के लिए उन्हें एक वर्तुल गति कर रहे कक्ष में रखा जाता है। ऐसे एक कक्ष में, वे 10 m त्रिज्या वाले वृत्त में घूर्णन करते हैं (चित्र 11.20)।



चित्र 11.20: वर्तुल गति में त्वरण। नासा द्वारा अंतरिक्ष यात्री प्रशिक्षण में इस्तेमाल किया जाने वाला सेंट्रीफ्यूज। (काला तीर कक्ष में सीट से बंधे अंतरिक्ष यात्री को दिखाता है)।

क) यदि कक्ष 14 rpm की अचर कोणीय चाल से घूर्णन करता है, तो उसमें बैठे अंतरिक्ष यात्री का g के पदों में त्वरण क्या है?

ख) माना कि कक्ष विरामावस्था से शुरू करके अचर कोणीय त्वरण से घूर्णन करते हुए 2 मिनट में 14 rpm की कोणीय चाल प्राप्त कर लेता है। तो t = 2 मिनट पर g के पदों में अंतरिक्ष यात्री का त्वरण क्या होगा? $g = 9.8\,\text{ms}^{-2}$ लें।

हल ■ भाग (क) में **मुख्य विचार** यह है कि कोणीय चाल अचर है, अतः, कोणीय त्वरण शून्य है। अतः, त्वरण का केवल त्रिज्य घटक परिमित है। भाग (ख) मे, कोणीय चाल बदल रही है। अतः, कोणीय त्वरण शून्य नहीं है। यानी त्वरण के त्रिज्य और स्पर्शरेखीय, दोनों घटक परिमित हैं।

क) समीकरण 11.15ग से और 1 rev = 2π rad रखने पर

$$a_r = \omega^2 r = (1.46\,\text{rads}^{-1})^2 \times 10\,\text{m} = 21.3\,\text{ms}^{-2} = 2.2g$$

ख) समीकरण 11.8क से, $t = 120\,\text{s}$ पर अचर कोणीय त्वरण है :

$$\alpha = \frac{(\omega - \omega_0)\,\text{rads}^{-1}}{t\,\text{s}} = \frac{(1.46 - 0)\,\text{rads}^{-1}}{120\,\text{s}} = 0.01\,\text{rads}^{-2}$$

$t = 120\,\text{s}$ पर $a_t = \alpha r = (0.01\times 10)\text{ms}^{-2} = 0.10\,\text{ms}^{-2} = 0.01g$

और चूंकि $\omega = 14\,\text{rpm} = 1.46\,\text{rads}^{-1}$, अतः, $a_r = 21.3\,\text{ms}^{-2} = 2.2g$

समीकरण 11.16घ से, $t = 120\,\text{s}$ पर नेट त्वरण है :

$$a = \sqrt{(2.2)^2 + (0.01)^2}\,g = 2.2g$$

समीकरण 11.16च से, $\tan\beta = \dfrac{a_t}{a_r} = \dfrac{0.01}{2.2} = 0.0045 \Rightarrow \beta \approx 0.26^\circ$

अतः अंतरिक्ष यात्री पर नेट त्वरण लगभग त्रिज्य दिशा में कक्ष के केंद्र की ओर है और उसका परिमाण $2.2g$ है।

बोध प्रश्न 3 – कोणीय और स्थानांतरण गति के चर

गाड़ी के घूर्णन करते पहिये में अटके एक कंकड़ का औसत कोणीय त्वरण $150\,\text{rads}^{-2}$ है। 2.0 s बाद उसकी चाल क्या होगी, यदि वह विरामावस्था से घूर्णन करना प्रारंभ करता है? इस क्षण पर उसका त्वरण क्या है? दिया है कि कंकड़ की घूर्णन अक्ष से दूरी 0.10 m है।

अब हम इस इकाई का सार देंगे।

11.5 सारांश

अवधारणा	विवरण
कोणीय स्थिति	■ वर्तुल गति कर रहे कण की, वृत्त के केंद्र से गुज़रने वाले नियत अक्ष के सापेक्ष किसी क्षण t पर **कोणीय स्थिति**, **कोण** θ द्वारा दी जाती है जो उस क्षण पर, वृत्त के केंद्र के सापेक्ष उसके स्थिति सदिश और नियत संदर्भ अक्ष के बीच का कोण है : $$\theta = \frac{s}{r} \qquad (\theta\text{, रेडियन इकाई में मापा जाता है})$$ यहां s समयांतराल t में कण द्वारा चले गए वृत्तीय चाप की लंबाई है और r वृत्त की त्रिज्या है। परंपरा से, वामावर्त वर्तुल गति के लिए θ धनात्मक होता है और दक्षिणावर्त वर्तुल गति के लिए ऋणात्मक। कोण θ केवल रेडियन इकाई में मापा जाता है, डिग्री या परिक्रमणों में नहीं। कोण θ की रेडियन इकाई का डिग्री और परिक्रमणों से संबंध है : $$1 \text{ परिक्रमण} = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$ और $$1 \text{ रेडियन (rad)} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \text{ परिक्रमण}$$
कोणीय विस्थापन	■ एक कण का, जिसकी क्षणों t_1 और t_2 पर कोणीय स्थितियां θ_1 और θ_2 हैं **कोणीय विस्थापन** है : $$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \qquad (\Delta\theta \text{ रेडियन इकाई में मापा जाता है})$$ परंपरा से, $\Delta\theta$ वामावर्त वर्तुल गति के लिए धनात्मक होता है और दक्षिणावर्त वर्तुल गति के लिए ऋणात्मक।
औसत कोणीय वेग और कोणीय चाल	■ एक कण का, जिसका समयांतराल Δt में कोणीय विस्थापन $\Delta\theta$ है **औसत कोणीय वेग एक सदिश** होता है जिसकी दिशा **दक्षिणहस्त नियम** द्वारा दी जाती है और **परिमाण** यानी **कोणीय चाल** है : $$\omega_{avg} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$ **औसत कोणीय वेग की दिशा वामावर्त घूर्णन** के लिए **धनात्मक** और **दक्षिणावर्त घूर्णन** के लिए **ऋणात्मक** होती है।
तात्क्षणिक कोणीय वेग	■ **कण के तात्क्षणिक कोणीय वेग** (या **कोणीय वेग**) का **परिमाण** है : $$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$ इसकी **दिशा दक्षिणहस्त नियम** द्वारा दी जाती है। **कोणीय वेग की दिशा वामावर्त घूर्णन** के लिए **धनात्मक** और **दक्षिणावर्त घूर्णन** के लिए **ऋणात्मक** होती है।

औसत कोणीय त्वरण

■ यदि एक कण की कोणीय चाल, समयांतराल $\Delta t = t_2 - t_1$, में ω_1 से ω_2 हो जाती है, तो उसका **औसत कोणीय त्वरण** होता है :

$$\alpha_{avg} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

तात्क्षणिक कोणीय त्वरण

■ कण का **तात्क्षणिक कोणीय त्वरण** उसके **कोणीय वेग** की समय के साथ परिवर्तन की दर के बराबर होता है :

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

अचर कोणीय त्वरण के लिए शुद्धगतिकी की समीकरणें

■ **अचर कोणीय त्वरण** के लिए **शुद्धगतिकी की समीकरणें** हैं :

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

स्थानांतरण-गति और कोणीय गति के शुद्धगतिकीय चरों का संबंध

■ त्रिज्या r वाले वृत्त में **असमान वर्तुल गति कर रहे कण** के लिए **स्थानांतरण-गति और कोणीय गति के शुद्धगतिकीय चरों का संबंध** होता है :

$$s = r\theta \quad (\theta \text{ रेडियन इकाई में})$$

$$v = r\omega \quad (\omega \text{ rads}^{-1} \text{ में})$$

वृत्त में गति के लिए, कण के वेग की दिशा **वृत्त की स्पर्श रेखा के अनुदिश, कण की गति की दिशा** में होती है। कण के **त्वरण** के दो घटक होते हैं : **त्रिज्य** या **अभिकेंद्र घटक** और **स्पर्शरेखीय घटक**। **अभिकेंद्र घटक वृत्त के केंद्र की ओर त्रिज्या के अनुदिश** होता है और उसका **परिमाण** है :

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (\omega \text{ rads}^{-1} \text{ में})$$

स्पर्शरेखीय घटक वृत्त की स्पर्श रेखा के अनुदिश कण की चाल में परिवर्तन (घटने या बढ़ने) **की दिशा में** होता है और उसका **परिमाण** है :

$$a_t = \alpha r \quad (\alpha \text{ rads}^{-2} \text{ में})$$

एकसमान वर्तुल गति के लिए ω अचर होता है और α शून्य होता है और **स्थानांतरण गति और कोणीय गति के शुद्धगतिक चरों का संबंध** होता है :

$$s = r\theta, \qquad v = r\omega$$

और $$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

त्वरण सदिश

■ **असमान वर्तुल गति के लिए कण का त्वरण सदिश** होता है :

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_r + \vec{\mathbf{a}}_t = -\omega^2 r\,\hat{\mathbf{r}} + \alpha r\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

जहां $\vec{\mathbf{a}}_r = -\omega^2 r\,\hat{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{a}}_t = \alpha r\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$

$\hat{\mathbf{r}}$: वृत्त के केंद्र से परे, **त्रिज्या के अनुदिश एकक सदिश** है।

$\hat{\boldsymbol{\theta}}$: **$\hat{\mathbf{r}}$ के अभिलंबवत् वृत्त की स्पर्श रेखा के अनुदिश एकक सदिश है जिसकी दिशा** θ के बढ़ने की दिशा है।

साथ ही
$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{(\omega^2 r)^2 + (\alpha r)^2}$$

$$\tan\beta = \frac{a_t}{a_r} = -\frac{\alpha}{\omega^2}$$

यहां β **त्वरण सदिश** $\vec{\mathbf{a}}$ और **त्रिज्य दिशा के बीच का कोण** है।

आवर्तकाल

- **आवर्तकाल** या कण द्वारा वृत्त का एक बार परिक्रमण करने में लिया गया समय होता है :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

11.6 अंत में कुछ प्रश्न

1. एक साइकिल त्रिज्या 15 m के वृत्ताकार पथ पर 141 m की दूरी तय करती है। उसकी आरंभिक स्थिति से उसका रेडियन में कोणीय विस्थापन क्या है?

2. एक मेरी-गो-राउण्ड हर 6 मिनट में 2 चक्कर पूरे करता है। rad s^{-1} में उसकी कोणीय चाल क्या है?

3. एक पंखे की आरंभिक कोणीय चाल $12\ \text{rad s}^{-1}$ है। पंखे की शक्ति बढ़ा दी जाती है जिससे कि उसका अचर कोणीय त्वरण $2.0\ \text{rad s}^{-2}$ हो जाता है। 3.0 s बाद पंखे पर स्थित एक बिंदु का रेडियन में कोणीय विस्थापन क्या है?

4. एक लड़की एक जायंट व्हील पर बैठी है जो हर 5 s में 1 परिक्रमण करता है। जायंट व्हील को रोकने के लिए चालक ब्रेक लगता है जिससे उसका त्वरण $-1.0\ \text{rad s}^{-2}$ हो जाता है।

   क) यदि लड़की केंद्र से 4.0 m की दूरी पर बैठी हो, तो उसकी चाल क्या होगी, जबकि जायंट व्हील 5.0 s में 1 परिक्रमण करे?

   ख) जायंट व्हील को रुकने में कितने समय लगेगा?

   ग) रुकने तक जायंट व्हील कितने परिक्रमण करता है?

   घ) जायंट व्हील के रुकने तक लड़की कितनी दूरी तय करती है?

5. एक साइकिल का पहिया जिसकी त्रिज्या $r = 2.0$ m है, विरामावस्था से चलना शुरू करता है और उसके किनारे पर स्थित एक कण 20 s में 20 m दूरी तय करता है

   क) कण का कोणीय विस्थापन क्या है?

   ख) 20 s के समयांतराल में उसका औसत कोणीय वेग क्या है?

6. एक मेरी-गो-राउण्ड विरामावस्था से शुरू करके 2 मिनट में 0.5 rpm की कोणीय चाल प्राप्त करता है। rad s^{-2} में उसका कोणीय त्वरण क्या है?

7. डोरी से जुड़ी एक गेंद 0.30 m त्रिज्या के क्षैतिज वृत्त में विरामावस्था से शुरू करके अचर कोणीय त्वरण प्राप्त करती है। 0.65 s बाद, गेंद की कोणीय चाल $9.7\ \text{rad s}^{-1}$ है। गेंद का स्पर्शरेखीय त्वरण क्या है?

8. पृथ्वी अपने अक्ष पर लगभग 24 घंटे में एक बार घूर्णन करती है और सूर्य के चारों ओर एक साल (या $365\frac{1}{4}$ दिन) में लगभग वृत्तीय कक्षा में एक बार परिक्रमा करती है। पृथ्वी की सतह पर स्थित कण की औसत कोणीय चाल क्या है (i) जब वह अपने अक्ष पर घूर्णन करती है और (ii) सूर्य की परिक्रमा करती है? दोनों स्थितियों में पृथ्वी के घूर्णन की दिशा को कोणीय विस्थापन की धनात्मक दिशा मानें।

9. एक गेंद का वामावर्त दिशा में कोणीय वेग $5.0\ \text{rad s}^{-1}$ है। 4.5 rad के कोण से घूमने के बाद गेंद का कोणीय वेग दक्षिणावर्त दिशा में $1.5\ \text{rad s}^{-1}$ हो जाता है। गेंद का कोणीय त्वरण, और कोणीय वेग के इस मान तक पहुंचने में उसे लगा समय परिकलित करें।

10. एक चक्की का जो विरामावस्था से चलना शुरू करती है कुछ समय में अचर कोणीय त्वरण $2.0\ \text{rad s}^{-2}$ हो जाता है। $t = 2.0\,\text{s}$ पर उसके अक्ष से 1.0 m की दूरी पर स्थित कण के त्वरण का परिमाण क्या होगा?

11.7 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. हम समीकरण 11.3 से $\Delta\theta$ का मान ज्ञात कर सकते हैं।

θ_1 rad	+ 5	+ 7	– 5	– 3	– 5
θ_2 rad	+ 12	– 2	+ 2	– 4	– 1
$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ rad	7	– 9	7	– 1	4

2. क) चकती का केंद्र गति नहीं करता। केंद्र द्वारा चली गई दूरी शून्य है।

   ख) समीकरण 11.8क में $\omega_0 = 0\,\text{rad s}^{-1}$, $t = 2.0\,\text{s}$ और $\alpha = 150\,\text{rad s}^{-2}$ रखने पर अंतिम कोणीय चाल है :

$$\omega = 150\ \text{rad s}^{-2} \times 2.0\,\text{s} = 3.0\times10^2\ \text{rad s}^{-1}$$

3. बोध प्रश्न 2ख से $t = 2.0$ s पर कोणीय चाल का मान $3.0 \times 10^2\ \text{rad s}^{-1}$ है। 2.0 s बाद कंकड़ की चाल है

$$v = \omega r = 0.10\,\text{m} \times 3.0 \times 10^2\ \text{rad s}^{-1} = 30\ \text{m s}^{-1}$$

त्वरण के त्रिज्य और स्पर्शरेखीय घटक दोनों होंगे। समीकरणों 11.15ग, 11.15घ और 11.16क से,

$$a_r = \omega^2 r = (3.0 \times 10^2 \text{ rads}^{-1})^2 \times 0.10\,\text{m} = 9.0 \times 10^3\,\text{ms}^{-2} \text{ और}$$

$$a_t = \alpha r = 150 \text{ rads}^{-2} \times 0.10\,\text{m} = 15\,\text{ms}^{-2}$$

त्वरण है $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_r + \vec{\mathbf{a}}_t = -\omega^2 r\,\hat{\mathbf{r}} + \alpha r\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$

$$= -(9.0 \times 10^3\,\text{ms}^{-2})\,\hat{\mathbf{r}} + (15\,\text{ms}^{-2})\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. समीकरण 11.1 से कोण $\theta = \dfrac{s}{r} = \dfrac{141\text{m}}{15\,\text{m}} = 9.4\,\text{rad}$

2. समीकरण 11.4 से कोणीय चाल है $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{2\times(2\pi)\text{rad}}{6\times 60\,\text{s}} = \dfrac{\pi}{90}\text{rad}\,\text{s}^{-1}$

3. समीकरण 11.8ख में $\omega_0 = 12 \text{ rad}\,\text{s}^{-1}$, $\alpha = 2.0 \text{ rad}\,\text{s}^{-1}$ और $t = 3.0\,\text{s}$ रखने पर पर 3.0 s में कोणीय विस्थापन है :

$$\theta - \theta_0 = (12\,\text{rad}\,\text{s}^{-1})\times(3.0\,\text{s}) + \frac{1}{2}\times(2.0\,\text{rad}\,\text{s}^{-2})\times(3.0\,\text{s})^2 = 45\,\text{rad}$$

4. लड़की की आरंभिक कोणीय चाल है $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{5.0}\text{rad}\,\text{s}^{-1} = 1.26\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$

   क) समीकरण 11.9ख में $\omega_0 = 1.26\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ और $r = 4.0\,\text{m}$ रखने पर लड़की की चाल है $v = (4.0\,\text{m})\times(1.26\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}) = 5.0\,\text{ms}^{-1}$

   ख) समीकरण 11.8क में $\omega_0 = 1.26\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$, $\alpha = -1.0\,\text{rad}\,\text{s}^{-2}$ और $\omega = 0$ रखने पर $t = 1.26\,\text{s}$

   ग) समीकरण 11.8ग में $\omega_0 = 1.26\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ और $\alpha = -1.0\,\text{rad}\,\text{s}^{-2}$ रखने पर कोणीय विस्थापन है

$$\theta - \theta_0 = \frac{(1.26\,\text{rad}\,\text{s}^{-1})^2}{2\times(1.0\,\text{s}\,\text{rad}\,\text{s}^{-2})} = 0.79\,\text{rad}$$

   रुकने तक जायंट व्हील के परिक्रमणों की संख्या है $n = \dfrac{0.79}{2\pi} = 0.13$

   घ) समीकरण 11.15क में $\theta = 0.79\,\text{rad}$ और $r = 4.0\,\text{m}$ रखने पर लड़की द्वारा तय की गई दूरी है

$$s = (4.0\,\text{m})\times(0.79\,\text{rad}) = 3.2\,\text{m}$$

5. क) समीकरण 11.1 में $s = 20\,\text{m}$ और $r = 2.0\,\text{m}$ रखने पर कण का कोणीय विस्थापन है $\theta = \dfrac{20\,\text{m}}{2.0\,\text{m}} = 10\,\text{rad}$

ख) 20 s के समयांतराल में कण का औसत कोणीय वेग है :

$$\omega = \frac{10\,\text{rad}}{20\,\text{s}} = 0.50\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$$

6. मेरी-गो-राउण्ड की कोणीय चाल है $\omega = 0.5\text{ rpm} = \frac{0.5 \times 2\pi}{60}\text{rad}\,\text{s}^{-1} = \frac{\pi}{60}\text{rad}\,\text{s}^{-1}$

समीकरण 11.8क से उसका कोणीय त्वरण है

$$\alpha = \frac{\omega}{t} = \left(\frac{\pi}{60}\right) \times \left(\frac{1}{2 \times 60}\right)\text{rad}\,\text{s}^{-2} = \frac{\pi}{7200}\text{rad}\,\text{s}^{-2}$$

7. समीकरण 11.8क से गेंद का कोणीय त्वरण है :

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{9.7\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}}{0.65\,\text{s}} = 14.9\,\text{rad}\,\text{s}^{-2}$$

समीकरण 11.16ग से उसका स्पर्शरेखीय त्वरण है

$$a_t = (14.9\,\text{rad s}^{-2}) \times (0.30\,\text{m}) = 4.5\text{ ms}^{-2}$$

8. क) पृथ्वी के अपने अक्ष पर 1 घूर्णन में कण के लिए $\Delta\theta$ का मान 2π rad होता है। पृथ्वी अपने अक्ष पर लगभग 24 घंटे में एक बार घूर्णन करती है।

$$\therefore\ \omega = \frac{2\pi}{(24 \times 60 \times 60)\,\text{s}} = \frac{2\pi}{86400\,\text{s}} = 7.28 \times 10^{-5}\text{ rad s}^{-1} \approx 7.3 \times 10^{-5}\text{ rad s}^{-1}$$

ख) पृथ्वी द्वारा सूर्य की परिक्रमा के लिए कण का कोणीय विस्थापन 365¼ दिनों में 2π rad है।

$$\therefore\ \omega = \frac{2\pi}{(365\,\tfrac{1}{4} \times 24 \times 60 \times 60)\,\text{s}} = 1.99 \times 10^{-7}\text{ rad s}^{-1} \approx 2.0 \times 10^{-7}\text{ rad s}^{-1}$$

9. गेंद की आरंभिक कोणीय चाल है : $\omega_0 = +5.0\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$

गेंद की अंतिम कोणीय चाल है : $\omega = -1.5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$

समीकरण 11.8ग में कोणीय विस्थापन $\theta - \theta_0 = 4.5\,\text{rad}$ रखने पर गेंद का कोणीय त्वरण है :

$$\alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2(\theta - \theta_0)} = \frac{(-1.5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1})^2 - (5.0\,\text{rad}\,\text{s}^{-1})^2}{2 \times (4.5)\,\text{rad}} = -2.5\,\text{rad}\,\text{s}^{-2}$$

समीकरण 11.8क से गेंद का अंतिम कोणीय वेग तक पहुंचने में लिया गया समय है :

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{(-1.5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}) - (5.0\,\text{rad}\,\text{s}^{-1})}{-2.5\,\text{rad}\,\text{s}^{-2}} = 2.6\,\text{s}$$

10. समीकरण 11.8क में $\omega_0 = 0$ रखने पर $t = 2.0\,\text{s}$ पर कण की कोणीय चाल ω है :

$$\omega = 0 + (2.0\,\text{rad}\,\text{s}^{-2}) \times (2.0\,\text{s}) = 4.0\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$$

समीकरणों 11.15ग और घ से

$$a_r = \omega^2 r = (4.0\,\text{rad}\,\text{s}^{-1})^2 \times 1.0\,\text{m} \quad = 16\,\text{ms}^{-2}$$

$$a_t = \alpha r = (2.0\,\text{rad}\,\text{s}^{-2}) \times 1.0\,\text{m} \;= 2.0\,\text{ms}^{-2}$$

समीकरणों 11.16घ से कण के त्वरण का परिमाण a है :

$$a = \sqrt{(16\,\text{ms}^{-2})^2 + (2\,\text{ms}^{-2})^2} \quad = 16\,\text{ms}^{-2}$$

कार को उठाने के लिए कार के जैक में लंबे हैंडल वाली छड़ क्यों लगाई जाती है? इस प्रश्न का उत्तर आपको इस इकाई में मिलेगा!

इकाई 12

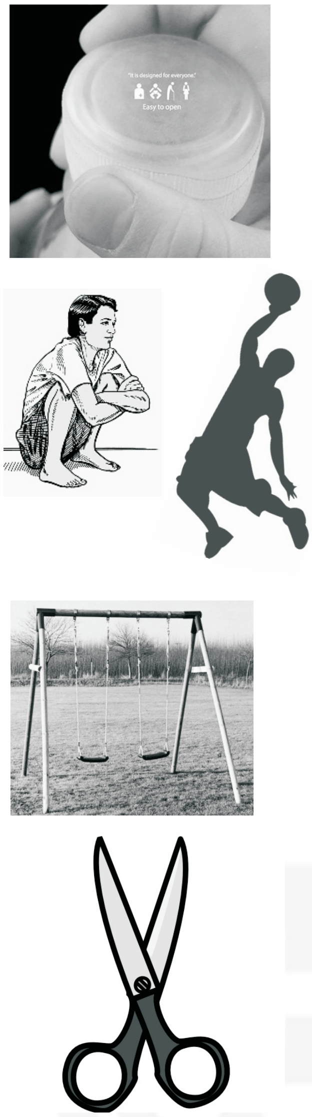
घूर्णी गति की गतिकी

इकाई की रूपरेखा

अध्ययन निर्देशिका

इस इकाई में, आप **घूर्णी गति की गतिकी** के बारे में पढ़ेंगे जिसमें हम मुख्यतः **असमान वर्तुल गति** पर ध्यान देंगे। आप **बल आघूर्ण** (**torque**) और **कोणीय संवेग** (**angular momentum**) की अवधारणाएं भी पढ़ेंगे। ये अवधारणाएं हमारे इर्द-गिर्द के बहुत से अनुभवों में व्याप्त हैं जैसे कि सुबह टूथ पेस्ट का ढक्कन खोलने या नलों को खोलने में या फिर किताबों के पन्ने पलटने में या घड़ी की सुईयों के घूमने में या फिर सोते समय बिस्तर में करवट लेने में! इन अवधारणाओं के बहुत सारे तकनीकी अनुप्रयोग भी हैं जिनमें सबसे ज़्यादा आम हैं पहिये। ये अवधारणाएं बल और रैखिक संवेग के अनुरूप हैं इसलिए आप यह न सोचें कि ये बहुत मुश्किल हैं। इन अवधारणाओं को समझने के लिए, आपको **सदिश गुणनफल** की अवधारणा की जानकारी होनी चाहिए। अतः, आपको खंड 1 की इकाई 1 और इकाई 2 को दोहरा लेना चाहिए। साथ ही साथ आप **घूर्णी गति के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय** भी पढ़ेंगे जिसके लिए आपको गणित से समाकलन दोहराना होगा (जो आपने स्कूल में पढ़ा है)। आप कोणीय संवेग संरक्षण नियम भी पढ़ेंगे। सभी उदाहरण, बोध प्रश्न और अंत के प्रश्न खुद हल करें।

"किसी बात का जितना संभव हो उतना ही सरलीकरण करना चाहिए उससे अधिक नहीं।" — **एल्बर्ट आइंस्टीन**



चित्र 12.1: **बल आघूर्ण का प्रभाव हमारे चारों ओर दिखाई देता है।**

12.1 परिचय

खंड 2 और इकाई 11 में, आपने **एकसमान** और **असमान वर्तुल गति** के बारे में पढ़ा है और सीखा है कि **शुद्धगतिकीय कोणीय चरों** का उपयोग करके उनकी गति का **वर्णन** कैसे किया जाता है। आपने **क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर तल में वर्तुल गति** से संबंधित प्रश्न हल किए हैं। इस इकाई के आरंभ में आप घूर्णी गति की गतिकी के बारे में पढ़ेंगे (भाग 12.2)। इस भाग में हम मुख्यतः **एकसमान और असमान वर्तुल गति की गतिकी** पर चर्चा करेंगे, उनके गति के समीकरण लिखेंगे और उन्हें अपने आस-पास के कुछ उदाहरणों पर लागू करेंगे। भाग 12.3 में, हम **बल आघूर्ण** की अवधारणा समझाएंगे जिसकी कोणीय और घूर्णी गति में ठीक वही भूमिका है जो कि **स्थानांतरण-गति** में **बल** की है। आपको यह बात भलीभांति समझ लेनी चाहिए कि **बल आघूर्ण की अवधारणा, बल की अवधारणा जितनी ही मूलभूत अवधारणा है। बल आघूर्ण की अवधारणा घूर्णी गति के विश्लेषण के लिए बहुत उपयोगी है।**

हमारे चारों ओर के संसार में किसी अक्ष के इर्द-गिर्द घूमने वाले या घूर्णी गति करने वाले बहुत से पिंड हैं। जब हम साइकिल, बस या कार चलाते हैं, नलों को खोलते हैं, शीशियों के ढक्कन खोलते हैं, कैंची का उपयोग करते हैं, झूला झूलते हैं, क्रिकेट खेलते हैं या फ़र्श पर कूदते समय अपने घुटनों को मोड़ते हैं तो इन सभी में बल आघूर्ण व्याप्त है (चित्र 12.1)। मेरी-गो-राउन्ड और सी-सॉ जैसे पार्क में स्थित झूले, बल आघूर्ण की महत्ता के उत्तम उदाहरण हैं। जब भी आप किसी पिंड को **किसी अक्ष के प्रति कोणीय त्वरण** या **बदलती हुई कोणीय चाल से कोणीय गति या घूर्णन करते हुए देखें** तो आपको तुरंत यह समझ जाना चाहिए कि **उस पर बल आघूर्ण लग रहा है।**

यदि हम बल आघूर्ण की अवधारणा का प्रयोग करें तो **कोणीय** या **घूर्णी गति की गतिकी** के सवालों को हल करना सरल हो जाता है। आप वर्तुल गति कर रहे भिन्न पिंडों के लिए गति के समीकरण को हल करना सीखेंगे। इस प्रक्रिया में आप **जड़त्व आघूर्ण** की अवधारणा भी समझेंगे जो **द्रव्यमान** के अनुरूप है। हम कोणीय गति पर कार्य-ऊर्जा प्रमेय भी लागू करेंगे (भाग 12.4) और कणों की घूर्णी गतिज ऊर्जा प्राप्त करेंगे। भाग 12.5 में, आप **कोणीय संवेग** की अवधारणा और बल आघूर्ण से उसका संबंध जानेंगे। हम **कोणीय संवेग संरक्षण नियम** की चर्चा भाग 12.6 में करेंगे और उसे सरल स्थितियों पर लागू करेंगे। इसके साथ हमने अब एकल कण की यांत्रिकी से जुड़ी सभी अवधारणाओं की चर्चा कर ली है। अगली तीन इकाइयों में आप अब तक की अवधारणाओं को बहु-कण निकायों पर लागू करना सीखेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- ❖ एकसमान और असमान वर्तुल गति की गतिकी पर आधारित प्रश्न हल कर सकेंगे;
- ❖ कोणीय/घूर्णी गति कर रहे कण पर लग रहा बल आघूर्ण ज्ञात कर सकेंगे और जड़त्व आघूर्ण की अवधारणा समझा सकेंगे;
- ❖ घूर्णी गति के सवालों पर न्यूटन के दूसरे नियम का घूर्णी अनुरूप लागू कर सकेंगे;

- घूर्णी गति पर कार्य-ऊर्जा प्रमेय लागू कर सकेंगे और कण की घूर्णी गतिज ऊर्जा ज्ञात कर सकेंगे;
- कोणीय/घूर्णी गति कर रहे कण का कोणीय संवेग प्राप्त कर सकेंगे; और
- सरल स्थितियों पर कोणीय संवेग संरक्षण नियम लागू कर सकेंगे।

12.2 कोणीय गति की गतिकी

आइए, पहले हम वर्तुल गति पर चर्चा करें जो हमारे आस-पास बहुत दिखाई देती है। पहले हम एकसमान वर्तुल गति की गतिकी के बारे में आपने इकाई 6 में जो कुछ पढ़ा है, उसे दोहराएंगे।

12.2.1 एकसमान वर्तुल गति की गतिकी

इकाई 6 में आपने पढ़ा है कि एकसमान वर्तुल गति में (जिसमें **कोणीय चाल अचर** रहती है) कण में **अभिकेंद्र त्वरण** होता है। आप जानते हैं कि पिंड के परिमित त्वरण का अर्थ है कि उस पर एक **नेट बल** लग रहा है। इस बल को **अभिकेंद्र बल** कहते हैं। आइए, एकसमान वर्तुल गति के लिए इसकी परिभाषा दोहराएं।

अभिकेंद्र बल

अचर कोणीय चाल ω और **द्रव्यमान** m **वाले कण को एकसमान वर्तुल गति में गतिमान रखने के लिए आवश्यक नेट बल को अभिकेंद्र बल कहते हैं। इसका परिमाण है :**

$$F_c = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r \qquad (12.1\text{क})$$

जहां r, उस वृत्त की त्रिज्या है जिसमें कण गतिमान है और v, उसकी चाल है। अभिकेंद्र बल की दिशा सदैव वृत्त के केंद्र की ओर होती है और वृत्त में कण की गति के साथ निरंतर बदलती है। एकक सदिश संकेतन पद्धति में, हम सदिश $\vec{\mathbf{F}}_c$ को ऐसे लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{F}}_c = -\frac{mv^2}{r}\,\hat{\mathbf{r}} = -m\omega^2 r\,\hat{\mathbf{r}} \qquad (12.1\text{ख})$$

अभिकेंद्र बल

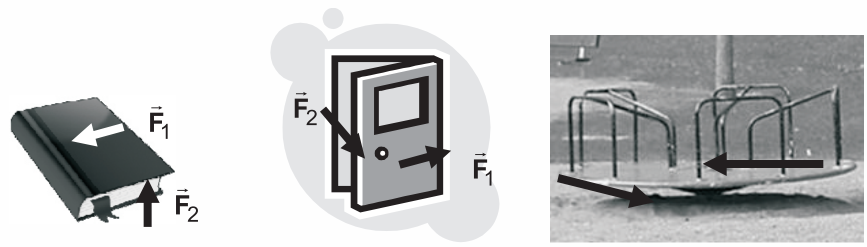
अभी तक आपने पढ़ा है कि **किसी कण की वृत्त में एकसमान गति बनाये रखने के लिए अभिकेंद्र बल आवश्यक होता है**। यह अभिकेंद्र बल प्रकृति में मौजूद बलों (जिनके बारे में आपने इकाई 6 में पढ़ा है) द्वारा प्रदान किया जाता है। इसकी दिशा सदैव उस वृत्त के केंद्र की ओर होती है जिसमें कण गतिमान है। लेकिन आपने इकाई 11 में यह भी पढ़ा है कि वृत्त में गतिमान कणों की कोणीय चाल हमेशा अचर नहीं होती – वह घट या बढ़ सकती है। अतः, अब हम यह जानना चाहेंगे : **यदि हम वर्तुल गति कर रहे पिंड पर वृत्त के केंद्र की दिशा में बल लगाएं तो क्या विरामावस्था से उसे गति दी जा सकती है या उसकी कोणीय चाल बदली जा सकती है**? आप निम्नलिखित गतिविधियां करके इसका उत्तर जान सकते हैं।

गतिविधि

वर्तुल गति में कोणीय चाल बदलना

निम्नलिखित में से कोई भी गतिविधि करें:

- किसी किताब पर चित्र 12.2क के अनुसार उसके तल में उसके बंद सिरे की ओर **बल $\vec{F}_1$ लगा कर उसे खोलने की कोशिश करें**।
- किसी दरवाज़े को चित्र 12.2ख के अनुसार उसके तल में उसके कब्जों की ओर बल $\vec{F}_1$ लगा कर उसे खोलने की कोशिश करें।
- किसी मेरी-गो-राउन्ड को चित्र 12.2ग के अनुसार उसके केंद्र की ओर बल लगाकर घुमाने की कोशिश करें।



(क) (ख) (ग)

चित्र 12.2: वर्तुल गति में हम कोणीय चाल कैसे बदल सकते हैं?

आप क्या पाते हैं? अब निम्नलिखित गतिविधियां करें :

- किताब या दरवाज़े को उनके तलों के लंबवत् $\vec{F}_2$ के अनुदिश बल लगाकर खोलने की कोशिश करें।
- मेरी-गो-राउन्ड पर उसकी स्पर्श रेखा की दिशा में बल लगाकर उसे घुमाने की या घूमते हुए मेरी-गो-राउन्ड को रोकने की कोशिश करें।

आप क्या पाते हैं? क्या दूसरी बार आप इन कामों को आसानी से कर पाए? इन दोनों बार की गतिविधियों में क्या अन्तर है? क्या आपने ध्यान दिया कि यह अन्तर **आरोपित बल की दिशा** का है? त्रिज्य दिशा में आरोपित बल (अभिकेंद्र बल) पिंड की कोणीय चाल नहीं बदल पाता। लेकिन स्पर्श रेखा के अनुदिश आरोपित बल पिंड की कोणीय चाल बदल देता है।

अब आप जानना चाहेंगे : इस बल के लिए बल नियम क्या है? इसका जवाब हमें असमान वर्तुल गति की गतिकी में मिलेगा।

12.2.2 असमान वर्तुल गति की गतिकी

आपने भाग 11.4.2 में एकसमान वर्तुल गति (जिसमें पिंड की कोणीय चाल अचर रहती है) और असमान वर्तुल गति (जिसमें पिंड की कोणीय चाल बदलती रहती है) के बारे में पढ़ा है। आपने भाग 12.2.1 में जाना है कि **एकसमान वर्तुल गति कर रहे कण का त्वरण अभिकेंद्र त्वरण होता है** (यानी उसकी दिशा वृत्त के केंद्र की ओर होती है)। साथ ही **वृत्त में उसकी गति को बनाये रखने के लिए उस पर अभिकेंद्र बल**

लगता है। लेकिन, ऊपर दी गई गतिविधि करते हुए आपने पाया है कि आप किसी पिंड पर (त्रिज्य दिशा में) अभिकेंद्र बल आरोपित करके उसकी कोणीय चाल नहीं बदल सकते। इसके लिए आपको **वृत्त की स्पर्श रेखा के अनुदिश बल लगाना पड़ता है**। इस तरह आपने पाया कि पिंड असमान वर्तुल गति करे, इसके लिए उस पर स्पर्शरेखीय बल लगना आवश्यक होता है। व्यापक तौर पर हम कहते हैं कि **वर्तुल गति कर रहे पिंड की कोणीय चाल में परिवर्तन लाने के लिए बल का एक स्पर्शरेखीय घटक भी होना चाहिए**। एक बार फिर हम न्यूटन के दूसरे नियम से असमान वर्तुल गति के लिए बल नियम प्राप्त करते हैं।

असमान वर्तुल गति के लिए बल नियम

त्रिज्या r वाले वृत्ताकार पथ में गतिमान द्रव्यमान m के कण पर जिसकी कोणीय चाल बदल रही हो और जिसका कोणीय त्वरण α हो, लग रहा नेट बल होता है :

$$\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} = m(\vec{\mathbf{a}}_r + \vec{\mathbf{a}}_t) = \vec{\mathbf{F}}_r + \vec{\mathbf{F}}_t \qquad (12.2\text{क})$$

जहां $\vec{\mathbf{F}}_r$ और $\vec{\mathbf{F}}_t$ क्रमशः बल के **त्रिज्य** (या **अभिकेंद्र**) और **स्पर्शरेखीय** घटक हैं और इनके मान हैं :

$$\vec{\mathbf{F}}_r = -\frac{mv^2}{r}\hat{\mathbf{r}} = -m\omega^2 r\,\hat{\mathbf{r}} \qquad (\text{त्रिज्य घटक}) \qquad (12.2\text{ख})$$

और

$$\vec{\mathbf{F}}_t = m\alpha r\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (\text{स्पर्शरेखीय घटक}) \qquad (12.2\text{ग})$$

असमान वर्तुल गति के लिए बल के त्रिज्य और स्पर्शरेखीय घटक

नेट बल का परिमाण होता है :

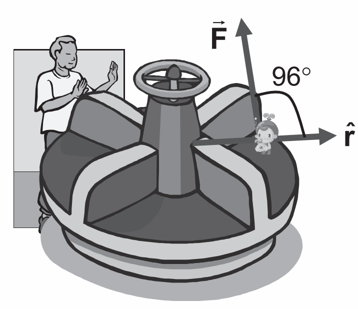
$$\left|\vec{\mathbf{F}}\right| = \sqrt{F_r^2 + F_t^2} = m\sqrt{(\omega^2 r)^2 + (\alpha r)^2} \qquad (12.2\text{घ})$$

और **त्रिज्य दिशा तथा उसके बीच** का कोण β होता है, जहां

$$\tan\beta = \frac{ma_t}{ma_r} = -\frac{\alpha}{\omega^2} \qquad (12.2\text{च})$$

आइए, हम असमान वर्तुल गति के लिए बल नियम लागू करने का उदाहरण लें।

(क)



(ख)

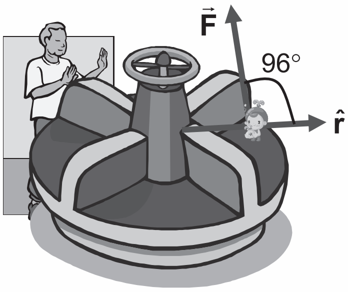
चित्र 12.3: असमान वर्तुल गति।

उदाहरण 12.1 : असमान वर्तुल गति

एक व्यक्ति विरामावस्था में स्थित मेरी-गो-राउन्ड पर बल आरोपित करता है जिससे वह $0.10\,\text{rad s}^{-2}$ के अचर कोणीय त्वरण से घूर्णन करता है (चित्र 12.3क)।

क) 1.0 s बाद मेरी-गो-राउन्ड के केंद्र से 1.0 m की दूरी पर खड़े द्रव्यमान 30 kg के बच्चे पर नेट बल क्या होगा?

ख) $t = 5.0\,\text{s}$ पर, मेरी-गो-राउन्ड को घुमाने वाला व्यक्ति पीछे हट जाता है और उस पर बल आरोपित नहीं करता। इससे वह अगले 2.0 s में, अचर कोणीय चाल से गति करता है। बच्चे पर इस समयांतराल में नेट बल क्या है?



तुरत संदर्भ के लिए चित्र 12.3ख।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि जब मेरी-गो-राउन्ड को **विरामावस्था से घूर्णित किया जाता है**, उसकी कोणीय चाल बदल जाती है और उसमें परिमित कोणीय त्वरण होता है। अतः, बच्चे पर लग रहे नेट बल के त्रिज्य और स्पर्शरेखीय दोनों घटक होते हैं (चित्र 12.3ख)। लेकिन **जब वह अचर कोणीय चाल से घूर्णन करता है, तो बच्चे पर केवल अभिकेंद्र बल लगता है**। अतः, हमें इस सवाल को हल करने के लिए समीकरणों 12.2ख से च तक का प्रयोग करना होगा। शुद्धगतिकी के समीकरण 11.8क का प्रयोग करके हम किसी भी क्षण पर कोणीय चाल निकाल सकते हैं।

क) $t = 1.0\,\text{s}$ पर, समीकरण 11.8क से बच्चे की कोणीय चाल है :

$$\omega = \alpha t = 0.10\ \text{rads}^{-2} \times 1.0\ \text{s} = 0.10\ \text{rads}^{-1} \quad (\because \omega_0 = 0)$$

$t = 1.0\,\text{s}$ पर, नेट बल के त्रिज्य और स्पर्शरेखीय दोनों ही घटक हैं, और इनके मान हैं :

$$\vec{F}_r = -m\omega^2 r\,\hat{\mathbf{r}} = -(30\,\text{kg}) \times (0.10\,\text{rads}^{-1})^2 \times (1.0\,\text{m})\,\hat{\mathbf{r}} = -0.30\,\text{N}\,\hat{\mathbf{r}}$$

और $$\vec{F}_t = m\alpha r\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = (30\,\text{kg}) \times (0.10\,\text{rads}^{-2}) \times (1.0\,\text{m})\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = 3.0\,\text{N}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

नेट बल का परिमाण है :

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_r^2 + F_t^2} = \sqrt{(0.30)^2 + (3.0)^2}\ \text{N} = 3.01\,\text{N} \approx 3.0\,\text{N}$$

और दिशा कोण β द्वारा दी जाती है : $\tan\beta = \dfrac{F_t}{F_r} = \dfrac{3.0}{-0.30} = -10.0$

या $$\beta = (180^\circ - 84.3^\circ) = 95.7^\circ \approx 96^\circ$$

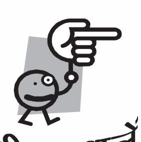
ध्यान दें कि β, $\vec{F}$ और त्रिज्य दिशा के बीच का कोण है (चित्र 12.3ख)।

ख) $t = 5.0\,\text{s}$ पर, $\omega = \alpha t = 0.10\,\text{rads}^{-2} \times 5.0\ \text{s} = 0.50\,\text{rads}^{-1}$

चूंकि अगले 2.0 s के लिए कोणीय चाल अचर है, अतः, $\alpha = 0$ और बच्चे पर इस समयांतराल में केवल अभिकेंद्र बल लगता है। इसका मान है :

$$\vec{F}_r = -m\omega^2 r\,\hat{\mathbf{r}} = -(30\,\text{kg}) \times (0.50\,\text{rads}^{-1})^2 \times (1.0\,\text{m})\,\hat{\mathbf{r}} = -7.5\,\text{N}\,\hat{\mathbf{r}}$$

आइए, उदाहरण 12.1 में जो कुछ आपने सीखा है, अब हम उसका सार दें।



कभी न भूलें

- **असमान वर्तुल गति कर रहे कण पर लग रहे बल का, अभिकेंद्र घटक (समीकरण 12.2ख) के साथ-साथ एक परिमित स्पर्शरेखीय घटक होता है जिसका मान समीकरण 12.2ग द्वारा दिया जाता है।**
- **बल का स्पर्शरेखीय घटक कण की कोणीय चाल को बदलता है। जब कण अचर कोणीय चाल से गति करता है तो यह घटक शून्य होता है।**
- **बल का त्रिज्य घटक वृत्त में कण की अचर कोणीय चाल से गति बनाए रखने के लिए आवश्यक होता है।**

बोध प्रश्न 1 – असमान वर्तुल गति की गतिकी

एक कण विरामावस्था से शुरू करके वृत्त में अचर कोणीय त्वरण से गति करता है। एक परिमित कोण से घूमने के बाद, कण पर लग रहे अभिकेंद्र बल का परिमाण, उस पर लग रहे स्पर्शरेखीय बल का दोगुना हो जाता है। कोण का मान ज्ञात करें।

अगले भाग में हम बल आघूर्ण की अवधारणा समझाएंगे जो घूर्णी गति के विश्लेषण के लिए बहुत महत्त्वपूर्ण होती है।

12.3 बल आघूर्ण

भाग 12.2.2 में आपने सीखा कि किसी पिंड की कोणीय चाल बदलने के लिए या उसे विरामावस्था से घूर्णन देने के लिए, हमें उस पर एक ऐसा बल लगाना पड़ता है जिसका परिमित स्पर्शरेखीय घटक हो। अब हम कोणीय गति की गतिकी में कुछ और कारकों की बात करेंगे : उस बिंदु की, जिस पर बल लगाया गया है, घूर्णन अक्ष से **दूरी** और वह **कोण** जिस पर बल लगाया गया है। आइए, चर्चा इस सवाल से शुरू करें : **कोणीय गति में जिस बिंदु पर बल लगाया गया है उसकी दूरी क्यों महत्त्वपूर्ण होती है**? इसका जवाब पाने के लिए आप आगे दिये गए प्रश्नों पर विचार करें और फिर आगे दी गई गतिविधि करें।

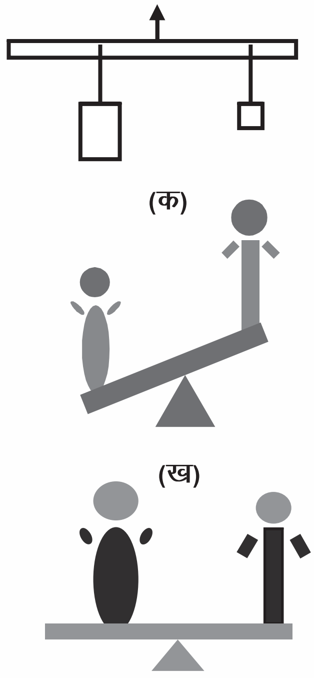
- दरवाज़े के हैंडल को उसके कब्ज़े से अधिकतम दूरी पर क्यों लगाया जाता है? क्या हम दरवाज़े के कब्ज़ों पर उसके (दरवाज़े के) तल के लंबवत् बल लगाकर दरवाज़े को खोल सकते हैं?
- छोटे हैंडल वाले पाने के मुकाबले लंबे हैंडल वाले पाने से बोल्ट को खोलना आसान क्यों होता है?
- साइकिल के पहिये के पैडल से जुड़ी हुई छड़ पहिये के तल के लंबवत् क्यों होती है?
- चक्की के पाट का हैंडल उसके केंद्र से काफ़ी दूर और उसके तल के लंबवत् क्यों लगाया जाता है?

क्या वह बिंदु जिस पर बल लगाया जाता है, महत्त्वपूर्ण होता है?

गतिविधि

क) एक मीटर का पैमाना लें और उसके केंद्र को इस तरह धुरी पर रखें कि वह ऊर्ध्वाधर तल में मुक्त रूप से घूर्णन कर सके चित्र (12.4क)। उसके केंद्र से कुछ दूरी पर एक भार लटकाएं जिससे कि वह अपने अक्ष के प्रति घूम जाए। फिर पैमाने को अपनी प्रारंभिक क्षैतिज स्थिति में लाने के लिए दूसरी ओर किसी दूरी पर एक दूसरा भार लटकाएं।

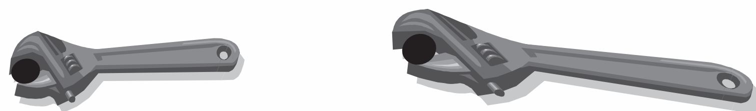
आप लटकाए जाने वाले भारों को बदल भी सकते हैं। अनुमान लगाएं कि क्या होगा जब आप पहले भार को संतुलित करने के लिए दूसरी ओर कुछ दूरी पर दूसरा भार लटकाएंगे। क्या पैमाना अपनी प्रारंभिक स्थिति में लौटेगा? **देखें** कि वास्तव में क्या होता है। पैमाने को घुमाते हुए और संतुलित करते हुए उसके केंद्र से भारों की दूरी और उनके परिमाण का संबंध स्थापित करने की कोशिश करें।



चित्र 12.4: जब हम किसी पिंड को घुमाना चाहते हैं तो वह बिंदु महत्त्वपूर्ण होता है जिस पर बल लगाया जाता है।

ख) यही गतिविधि आप एक सी-सॉ पर अधिक मनोरंजक तरीके से कर सकते हैं! अपने बचपन में तो आप सी-सॉ पर खेले ही होंगे। आप उसे कैसे संतुलित करते थे? पार्क में अपने दोस्तों के साथ जाइये और सी-सॉ पर एक तरफ़ अपने दुबले दोस्त को बैठाकर और दूसरी तरफ थोड़े मोटे दोस्त को बैठा कर उसे संतुलित करने का खेल खेलें (चित्र 12.4ख और ग)। सी-सॉ को क्षैतिज स्थिति में संतुलित करने के लिए इन दोनों को उस पर कहां बैठना पड़ता है?

ग) जंग लगे बोल्ट को छोटे हैंडल वाले पाने से खोलकर देखें और फिर लंबे हैंडल वाले पाने से। किस स्थिति में उसे घुमाना आसान होता है?



ऊपर दी गई गतिविधियां करते समय क्या आपने ध्यान दिया कि जब आप किसी पिंड को घुमाना चाहते थे तो वह बिंदु भी महत्त्वपूर्ण हो जाता था जिस पर आप बल लगा रहे होते थे? **क्या कोई और कारक भी है जो महत्त्वपूर्ण होता है?**

इस सवाल का जवाब देने के लिए आप नीचे दी गई गतिविधि करें। चित्र 12.5 देखें।

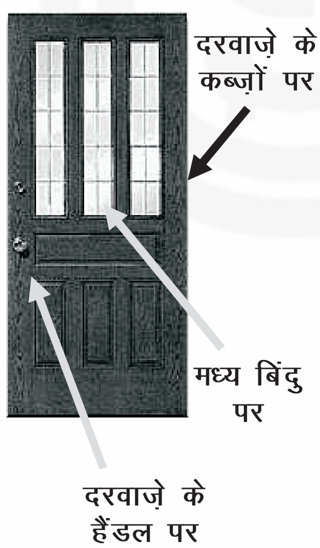
- किसी दरवाज़े को आम तौर पर आप जैसे खोलते हैं उसी तरह खोलें। अब उसके **कब्ज़ों** पर **बल** लगाकर उसे खोलने की कोशिश करें। क्या आप दरवाज़े को खोल पाते हैं?

- अगली बार दरवाज़े के **मध्य बिंदु** पर **बल** लगाएं और **अंत में उसके हैंडल पर** बल लगाएं। ध्यान रखें कि आपके द्वारा लगाए गए बल लगभग समान हों और एक ही समय के लिए लगाए गए हों। साथ ही सभी स्थितियों में **बल** आप **दरवाज़े के तल के लंबवत्** लगाएं।

  अब इन सवालों का जवाब देने की कोशिश करें :

  क) क्या इन तीनों स्थितियों में दरवाज़े की गति में कोई अंतर है?

  ख) किस स्थिति में दरवाज़ा ज़्यादा घूमता है?



चित्र 12.5: बल आघूर्ण को समझना।

- अगली बार **एक ही बिंदु पर**, माना कि दरवाज़े के हैंडल पर, **एक ही बल दो बार लेकिन अलग-अलग कोणों पर** लगाएं। उदाहरण के लिए,

  – दरवाज़े के लंबवत् बल 1, और

  – दरवाज़े के तल से किसी कोण (माना कि 45° से कम के कोण) पर बल 2 ।

  इनमें से कौन-सा बल दरवाज़े को ज़्यादा घुमा पाता है? क्या कोई ऐसा भी कोण है जिस पर बल लगाने से दरवाज़ा बिल्कुल नहीं घूमेगा?

क्या आप समझ पाए कि किसी **पिंड को घूर्णी गति देने के लिए** स्पर्शरेखीय घटक वाला बल लगाना कई कारकों में से एक कारक है? (बहुत सी स्थितियों में पिंड पर एक से ज़्यादा बल लग रहे होते हैं। तब हम नेट बल लेते हैं।)

आपने ध्यान दिया होगा कि

किसी पिंड को घूर्णी गति देने के लिए **तीन कारक** आवश्यक होते हैं :

i) पिंड पर लग रहा **नेट बल**,

ii) **घूर्णन अक्ष से उस बिंदु की दूरी जिस पर बल आरोपित किया जाता है।** जितनी अधिक यह दूरी होगी, समान बल लगाकर **पिंड को घुमाना** उतना ही आसान होगा।

iii) वह **कोण** जिस पर बल लगाया जाता है।

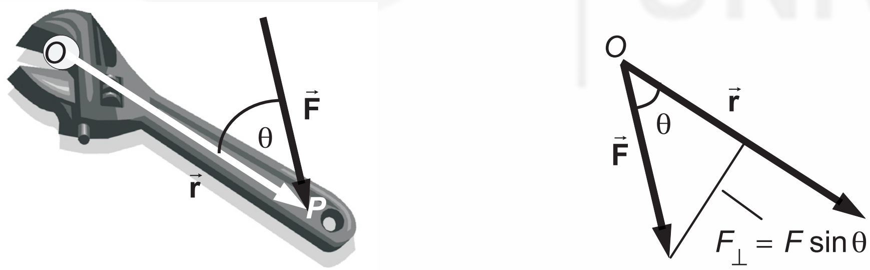
अतः, हमें बल के अलावा एक नयी भौतिक राशि की परिभाषा देनी होगी जिसमें ये सभी कारक शामिल हों। इस नयी राशि को **बल आघूर्ण** कहते हैं। परिमित कोणीय त्वरण से घूर्णन कर रहे प्रत्येक पिंड पर परिमित बल आघूर्ण लग रहा होता है।

बल आघूर्ण को हम "**बल के घूर्णी प्रभाव**" के तौर पर भी समझ सकते हैं। अब आप जानना चाहेंगे: **बल और बल आघूर्ण में क्या अंतर होता है**?

किसी पिंड को त्वरित स्थानांतरण-गति करने के लिए बल की आवश्यकता होती है। किसी पिंड को परिमित कोणीय त्वरण से घूर्णी गति करने के लिए या और तेज़ी से या धीरे घूर्णन करने के लिए बल आघूर्ण की आवश्यकता होती है। किसी अक्ष के प्रति एक पिंड की घूर्णी गति की अवस्था में परिवर्तन लाने की बल की प्रवृत्ति को हम बल आघूर्ण कह सकते हैं। इसे बल का घूर्णी प्रभाव भी कहा जाता है।

किसी पिंड की गति **स्थानांतरण-गति** होती है जब उस पर स्थित सभी बिंदुओं का वेग समान होता है। जब मेज़ पर एक सिक्का फिसलता है तो उसकी गति स्थानांतरण-गति होती है। पर यदि आप उसे किसी स्थान पर लट्टू की तरह घुमाएं तो उसकी गति **घूर्णी गति** होती है।

अब जब कि आपने यह बात समझ ली है कि घूर्णी गति के विश्लेषण के लिए केवल बल की अवधारणा ही काफ़ी नहीं है तो हम अगला सवाल रखते हैं : **गणितीय तौर पर हम बल आघूर्ण की परिभाषा कैसे देते हैं?** चित्र 12.6क देखें, जिसमें बिंदु P पर बल $\vec{\mathbf{F}}$ लगाकर एक पाने द्वारा बोल्ट खोलना दिखाया गया है। बोल्ट पर बिंदु O से बिंदु P की दूरी r है।



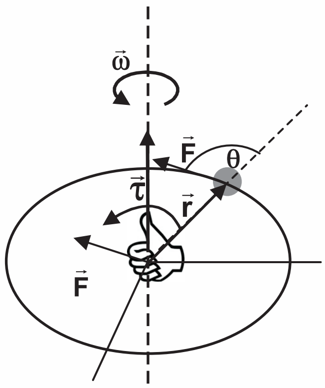
(क) (ख)

चित्र 12.6: बल आघूर्ण की गणितीय परिभाषा।

मान लें कि मूल बिंदु O बोल्ट पर है। माना कि बिंदु O के सापेक्ष बिंदु P का स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}$ है। तब हम बिंदु P पर **बल आघूर्ण** को $\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{F}}$ के **सदिश गुणनफल** के रूप में परिभाषित करते हैं :

$$\vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} \qquad (12.3क)$$

बल आघूर्ण



चित्र 12.7: बल आघूर्ण की दिशा सदिश गुणनफल के लिए दक्षिणहस्त नियम द्वारा दी जाती है।

बल आघूर्ण एक सदिश राशि है जिसका परिमाण है :

$$\tau = rF\sin\theta \qquad (12.3\text{ख})$$

जहां θ, $\vec{r}$ और $\vec{F}$ के बीच का कोण है जब इन्हें चित्र 12.6ख के अनुसार इनकी पूंछें मिलाकर रखा जाता है। **बल आघूर्ण की दिशा** दक्षिणहस्त नियम द्वारा दी जाती है और वह $\vec{r}$ और $\vec{F}$ से बने तल के लंबवत् होता है। इस तरह $\vec{\tau}$ सदैव $\vec{r}$ और $\vec{F}$, दोनों ही के लंबवत् होता है। चित्र 12.6ख में यह $\vec{r}$ और $\vec{F}$, दोनों के लंबवत् और पृष्ठ के भीतर की ओर की दिशा में है।

पिंड से गुजरने वाले किसी नियत घूर्णन अक्ष के प्रति वर्तुल या घूर्णी गति के लिए **सदिश $\vec{\tau}$** की दिशा घूर्णन अक्ष के अनुदिश होती है (चित्र 12.7)। दक्षिणहस्त नियम का प्रयोग करके आप देख सकते हैं कि यह वामावर्त घूर्णन के लिए ऊपर की ओर होती है और दक्षिणावर्त घूर्णन के लिए नीचे की ओर।

ध्यान रखें कि बल आघूर्ण, बल द्वारा किये गए कार्य के समान नहीं है, भले ही दोनों राशियों की विमाएं समान हैं। बल आघूर्ण घूर्णी गति के लिए बल जैसी एक राशि है और उसकी SI तंत्र में इकाई Nm है।

यह परखने के लिए कि इस परिभाषा में किसी पिंड को घुमाने के लिए आवश्यक तीनों कारक शामिल हैं या नहीं, आप दरवाज़े के साथ की गई गतिविधि को याद करें। आप देख सकते हैं कि जब बल को दरवाज़े के तल के समांतर लगाया जाता है यानी $\vec{r} \parallel \vec{F}$ तब $\theta = 0^\circ$ होता है, और समीकरण 12.3ख से $|\vec{\tau}| = 0$ । अतः, इस दिशा में आप भले ही दरवाज़े को कितनी ही ज़ोर से धक्का देकर या खींच कर बल लगाएं, आप उसे घुमा नहीं सकते, क्योंकि बल आघूर्ण शून्य है।

जब बल दरवाज़े के तल के लंबवत् होता है, तब $\theta = 90^\circ$ । तब समीकरण 12.3ख से आप देख सकते हैं कि बल आघूर्ण अधिकतम होता है और दरवाज़े को घुमाना आसान होता है।

बल आघूर्ण का परिमाण आरोपित बल और मूल बिंदु से उस बिंदु की दूरी (जिस पर बल आरोपित किया गया है) दोनों पर निर्भर करता है।

सार रूप में, घूर्णी निकाय में बल आघूर्ण को तीन तरीकों से बदला जा सकता है :

- आरोपित बल $\vec{F}$ को बदल कर;
- $\vec{r}$ की लंबाई बदल कर; और
- $\vec{r}$ और $\vec{F}$ के बीच का कोण बदल कर।

आइए, अब हम अभी तक की चर्चा का सार देते हुए बल आघूर्ण की अवधारणा प्रस्तुत करें।

बल आघूर्ण

दोहराएं

यदि किसी बिंदु P पर स्थित कण, जिसका मूल बिंदु O के सापेक्ष स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}$ हो, नेट बल $\vec{\mathbf{F}}$ आरोपित किया जाता है तो O के सापेक्ष कण पर आरोपित **बल आघूर्ण** होता है :

$$\vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} \tag{12.3क}$$

बल आघूर्ण

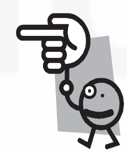
बल आघूर्ण का परिमाण होता है :

$$\tau = rF\sin\theta \tag{12.3ख}$$

जहां θ, $\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{F}}$ के बीच का कोण है जब इन्हें इनकी पूंछें मिलाकर रखा जाता है। बल आघूर्ण की दिशा दक्षिणहस्त नियम द्वारा की जाती है और वह $\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{F}}$ द्वारा बने समतल के लंबवत् होती है। बल आघूर्ण की SI इकाई Nm है।

जिस तरह नेट बाह्य बल **स्थानांतरण-गति** की अवस्था में **परिवर्तन** लाता है, उसी तरह नेट बाह्य बल आघूर्ण **घूर्णी गति की अवस्था में परिवर्तन** लाता है। **विरामावस्था में स्थित या एकसमान घूर्णी गति कर रहे कण पर लग रहा नेट बल आघूर्ण शून्य होता है।** कण उसी अवस्था में बना रहेगा जब तक कि उस पर एक **नेट बाह्य बल आघूर्ण** न आरोपित किया जाए। कण की घूर्णन की अवस्था तभी **परिवर्तित** होती है जब उस पर **नेट बाह्य बल आघूर्ण** आरोपित होता है।

बल आघूर्ण और बल एक-सी राशियां नहीं हैं। बल आघूर्ण हमें आरोपित बल और पिंड की घूर्णन करने की प्रवृत्ति के बीच का संबंध बताता है।



कभी न भूलें

अब आप कुछ पिंडों पर आरोपित बल आघूर्ण की गणना करना चाहेंगे। हम समीकरणों 12.3क और ख को एक उदाहरण में लागू करेंगे और फिर आप एक बोध प्रश्न हल करें।

उदाहरण 12.2 : बल आघूर्ण

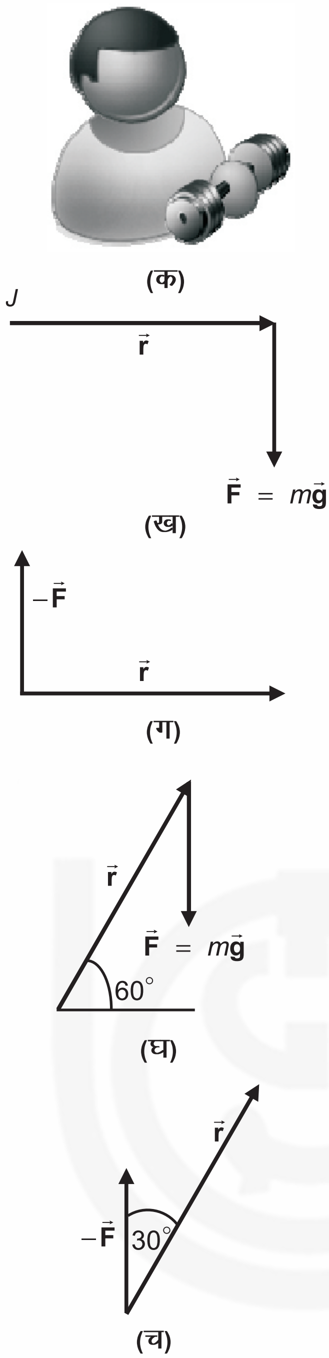
चित्र 12.8क में भुजाओं की मांसपेशियों को मजबूत करने का व्यायाम दिखाया गया है। द्रव्यमान 1.0 kg का एक डम्बल क्षैतिज स्थिति से उठाया जाता है और कोहनी के गिर्द 60° के कोण से घुमाया जाता है। कोहनी के प्रति भुजा की पेशियों द्वारा आरोपित बल आघूर्ण क्या है

क) जब भुजा क्षैतिज दिशा में होती है, और

ख) जब वह क्षैतिज से 60° का कोण बनाती है?

दिया है कि डम्बल को पकड़ने वाली हथेली और कोहनी के बीच की दूरी 30 cm है और $g = 9.8\ \text{ms}^{-2}$ है।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि डम्बल को घुमाने के लिए भुजाओं की मांसपेशियों द्वारा कोहनी (चित्र 12.8ख में बिंदु J) के गिर्द बल आघूर्ण आरोपित किया जाना है।



चित्र 12.8: भुजा की मांसपेशियों द्वारा आरोपित बल आघूर्ण।

इस बल आघूर्ण को उत्पन्न करने के लिए भुजा की मांसपेशियों को कम-से-कम डम्बल के भार के बराबर और विपरीत दिशा में बल ($-\vec{F}$) आरोपित करना होगा। बल आघूर्ण का मान समीकरणों 12.3क और ख द्वारा दिया जाता है। यहां दिया है कि $r = 0.30\,\text{m}$ और $F = (1.0\text{ kg})(9.8\,\text{ms}^{-2}) = 9.8\,\text{N}$।

क) जब डम्बल क्षैतिज स्थिति में होता है (चित्र 12.8ख), तब सदिशों $\vec{r}$ और ($-\vec{F}$) को उनकी पूंछ मिलाकर रखने पर उनके बीच का कोण 90° होता है (देखें चित्र 12.8ग)। इसलिए इस स्थिति में बल आघूर्ण का मान है :

$$\tau = rF\sin\theta = (0.30\,\text{m}) \times (9.8\,\text{N}) \times (\sin 90^\circ) = 2.9\,\text{Nm}$$

बल आघूर्ण की दिशा दक्षिणहस्त नियम द्वारा दी जाती है और वह $\vec{r}$ और ($-\vec{F}$) द्वारा बने तल के लंबवत् और पृष्ठ के बाहर की ओर है।

ख) इस स्थिति में डम्बल को कोहनी के गिर्द 60° के कोण से घुमाया जाता है (चित्र 12.8घ)। जब सदिशों $\vec{r}$ और $\left(-\vec{F}\right)$ की पूंछ को मिलाकर रखा जाता तो उनके बीच 30° का कोण होता है (चित्र 12.8च देखें)। अतः, इस स्थिति मे बल आघूर्ण होता है :

$$\tau = (0.30\,\text{m}) \times (9.8\,\text{N}) \times (\sin 30^\circ) = (0.30\,\text{m}) \times (9.8\,\text{N}) \times 0.5 = 1.5\text{ Nm}$$

दो सार्थक अंकों तक। बल आघूर्ण की दिशा दक्षिणहस्त नियम द्वारा दी जाती है और वह $\vec{r}$ और ($-\vec{F}$) द्वारा बने तल के लंबवत् और पृष्ठ के बाहर की ओर होती है।

क्या आप समीकरण 12.3ख का उपयोग कर बल आघूर्ण की गणना करना चाहेंगे? इसके लिए बोध प्रश्न 2 करें।

बोध प्रश्न 2 – बल आघूर्ण की गणना

एक बच्ची पेड़ से बिंदु P पर बंधी रस्सी को पकड़ कर झूला झूलती है और उसका ऊर्ध्वाधर से अधिकतम कोण 30° हो सकता है (चित्र 12.9)। बिंदु P के प्रति बच्ची द्वारा आरोपित बल आघूर्ण क्या है यदि बच्ची का भार 40 N है और बिंदु P से बच्ची की दूरी 5.0 m है?

चित्र 12.9: बोध प्रश्न 2 के लिए चित्र; पैमाने के अनुसार नहीं।

12.3.1 बल आघूर्ण के कुछ लक्षण

बल आघूर्ण को परिभाषित करने वाले समीकरण 12.3क और ख हमें उसके बारे में कुछ दिलचस्प जानकारी भी देते हैं जिसका हम अब वर्णन करेंगे।

1. हम एक समतल में कोणीय गति कर रहे कण पर आरोपित बल को उसके घटकों के पदों में इस तरह लिख सकते हैं :

$$\vec{F} = \vec{F}_r + \vec{F}_t \qquad (12.4)$$

जहां $\vec{F}_r$, $\vec{F}$ का त्रिज्य दिशा में (यानी $\hat{r}$ या $\vec{r}$ के अनुदिश) घटक है और $\vec{F}_t$, त्रिज्य दिशा के लंबवत् दिशा में $\vec{F}$ का घटक है।

समीकरण 12.4 से $\vec{\mathbf{F}}$ का मान समीकरण 12.3क में रखने पर हमें मिलता है :

$$\vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}_r + \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}_t \qquad (12.5\text{क})$$

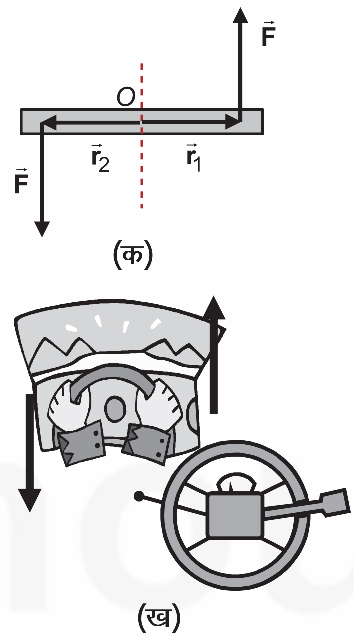
चूंकि $\vec{\mathbf{F}}_r, \vec{\mathbf{r}}$ के समांतर है, उनके बीच का कोण शून्य है और $\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}_r = \vec{\mathbf{0}}$ । अतः,

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}_t} \qquad (12.5\text{ख})$$

$\vec{\mathbf{F}}_t$ को बल का **अनुप्रस्थ** घटक भी कहा जाता है।

इस तरह, **किसी कण पर नेट बाह्य बल आघूर्ण तभी लगता है जबकि त्रिज्य दिशा के लंबवत् बल का परिमित घटक हो।** इस घटक को हम **स्पर्शरेखीय** (tangential) या **अनुप्रस्थ** (transverse) घटक भी कहते हैं। जैसा कि आप समीकरण 12.2ग से जानते हैं, इसका मान होता है, $\vec{\mathbf{F}}_t = m\vec{\mathbf{a}}_t$, जहां $\vec{\mathbf{a}}_t = \alpha r \hat{\theta}$ ।

2. लेकिन एक दिलचस्प स्थिति वह भी होती है **जबकि पिंड पर लग रहा नेट बल तो शून्य होता है पर उस पर लग रहा बल आघूर्ण शून्य नहीं होता** (चित्र 12.10क देखें)। पैमाने पर लग रहा नेट बल शून्य है क्योंकि दोनों बल समान परिमाण के हैं पर एक-दूसरे की विपरीत दिशा में हैं। लेकिन प्रत्येक बल के कारण लग रहा बल आघूर्ण पृष्ठ से बाहर की ओर आपकी दिशा में है और शून्य नहीं है। इस नेट बल आघूर्ण के कारण पैमाना वामावर्त घूर्णन करेगा। **वे बल जो एक-दूसरे के समांतर होते हैं (पर एक रेखा के अनुदिश नहीं लगते) और जिनके परिमाण समान होते हैं लेकिन दिशाएं विपरीत होती हैं** एक **बल-युग्म** (couple) बनाते हैं। यह बलयुग्म पिंड को स्थानांतरण-गति नहीं देता; वह उसे केवल घूर्णी गति प्रदान करता है। उदाहरण के लिए, जब हम दोनों हाथों से किसी गाड़ी के स्टीयरिंग व्हील को घुमाते हैं तो हमारे दोनों हाथ स्टीयरिंग पर जो बल लगाते हैं वह एक बलयुग्म होता है (चित्र 12.10ख)। प्रत्येक हाथ से हम स्टीयरिंग को दो आमने-सामने के बिंदुओं पर पकड़ते हैं। जब हम हाथों से स्टीयरिंग पर ऐसा बल-युग्म लगाते हैं तब वह घूमता है।



चित्र 12.10: किसी पिंड पर लग रहा बल आघूर्ण परिमित हो सकता है भले ही उस पर लग रहा नेट बल शून्य हो।

3. किसी पिंड पर बल आघूर्ण शून्य होगा यदि बल का स्पर्शरेखीय (अनुप्रस्थ) घटक शून्य हो और उस पर कोई बल-युग्म न लग रहा हो। लेकिन यह भी संभव है कि कण पर नेट बाह्य बल शून्य न हो, लेकिन उस पर लग रहा बल आघूर्ण शून्य हो।

बल आघूर्ण शून्य होता है जब
- **$\vec{\mathbf{F}}$, $\vec{\mathbf{r}}$ के समांतर होता है,**
- **$\vec{\mathbf{r}}$ शून्य होता है,**
- **$\vec{\mathbf{F}}$ शून्य होता है और पिंड पर बल-युग्म नहीं लग रहा होता।**

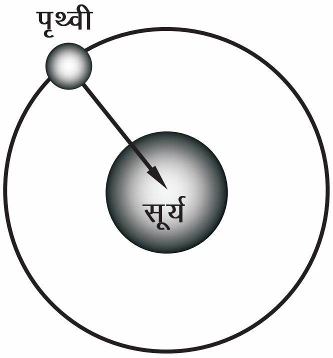
4. बल आघूर्ण **अध्यारोपण के सिद्धांत** का पालन करते हैं।

बल आघूर्ण के लिए अध्यारोपण का सिद्धांत

जब कण पर अनेक बल आघूर्ण लग रहे होते हैं तो **नेट** या **परिणामी बल आघूर्ण** उन सभी बल आघूर्णों का सदिश योगफल होता है :

$$\vec{\tau}_{net} = \sum_i \vec{\tau}_i \qquad (12.6)$$

आइए, अब हम समीकरणों 12.5ख और 12.6 को लागू करके सरल स्थितियों के लिए बल आघूर्ण की गणना करें।

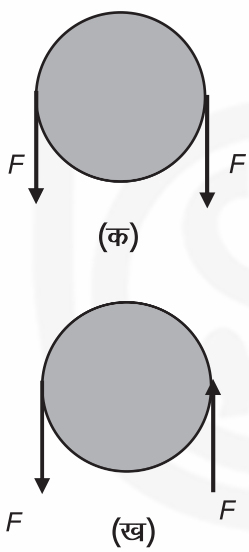


चित्र 12.11

उदाहरण 12.3 : बल आघूर्ण

क) जब पृथ्वी सूर्य के चारों ओर लगभग वृत्ताकार कक्षा में परिक्रमा करती है तो उस पर सूर्य द्वारा आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल के कारण लग रहा बल आघूर्ण क्या होता है (चित्र 12.11)?

ख) दो चकतियों पर जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या r है, समान परिमाण वाले बल आरोपित किये जाते हैं। बलों की दिशा चित्र 12.12 में दिखाई गई है। इनमें से कौन सी चकती (या चकतियां) अपने केंद्र से गुज़रने वाले और अपने तल के लंबवत् अक्ष के प्रति घूमेगी/घूमेंगी ? प्रत्येक चकती पर नेट बल आघूर्ण का परिमाण क्या है?



चित्र 12.12: उदाहरण 12.3ख के लिए चित्र।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि बल आघूर्ण की परिभाषा का उपयोग किया जाए।

क) सूर्य के कारण पृथ्वी पर लग रहे गुरुत्वाकर्षण बल की दिशा सूर्य की ओर है और त्रिज्य दिशा के अनुदिश है (चित्र 12.11)। इसका मान है :

$$\vec{\mathbf{F}} = -\frac{GM_{\text{सूर्य}}\,M_{\text{पृथ्वी}}}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

जहां r पृथ्वी और सूर्य की बीच की दूरी है और $\hat{\mathbf{r}}$ एक एकक सदिश है जिसकी दिशा सूर्य से पृथ्वी की ओर है। परिभाषा से $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$ और इसमें ऊपर दिये हुए $\vec{\mathbf{F}}$ का व्यंजक रखने पर हमें मिलता है :

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{r}} \times \left(-\frac{GM_{\text{सूर्य}}\,M_{\text{पृथ्वी}}}{r^2}\right)\hat{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{0}}$$

सदिश गुणनफल शून्य सदिश है चूंकि $\hat{\mathbf{r}}$ सदिश $\vec{\mathbf{r}}$ की दिशा में एकक सदिश है।

ख) चित्र 12.12क में, आरोपित बल एक ही दिशा में हैं और घूर्णन अक्ष से बराबर की दूरी पर हैं। चकती के केंद्र के प्रति इन बलों के बल आघूर्ण समान लेकिन विपरीत दिशा में हैं। अतः नेट बल आघूर्ण शून्य है :

$$\tau_{net} = (-rF) + rF = 0$$

चूंकि चकती पर नेट बल आघूर्ण शून्य है, अतः यह घूर्णन नहीं करेगी।
चित्र 12.12ख में आरोपित बल विपरीत दिशा में हैं और घूर्णन अक्ष से समान दूरी पर हैं। चकती के केंद्र के प्रति इन बलों द्वारा आरोपित बल आघूर्ण समान हैं और एक ही दिशा में हैं। अतः नेट बल आघूर्ण का परिमाण है :

$$\tau_{net} = (rF) + (rF) = 2rF$$

चकती वामावर्त दिशा में घूर्णन करेगी।

आगे पढ़ने से पहले आप एक बोध प्रश्न करें।

बोध प्रश्न 3 – बल आघूर्ण

मान लें कि आप किसी भवन से बाहर जाते हुए एक घर्षणहीन दरवाज़े पर 50 N का बल लगाते हैं। यदि आप दरवाज़े के किनारे पर उसके तल के लम्बवत् दिशा में बल लगाते हैं तो उस पर आरोपित बल आघूर्ण क्या होगा? दिया है कि दरवाज़े की चौड़ाई 1.0 m है।

आपने अभी पढ़ा है कि जब कोई पिंड कोणीय गति करता है और उसकी कोणीय चाल बदल रही होती है तब उस पर बल आघूर्ण लग रहा होता है। आइए, अब हम असमान वर्तुल गति की विशिष्ट स्थिति के लिए बल आघूर्ण की गणना करें।

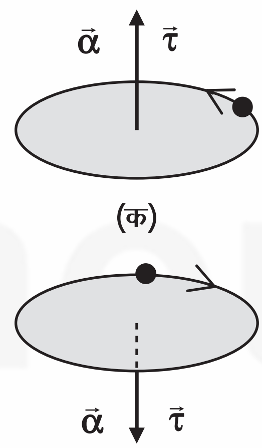
12.3.2 असमान वर्तुल गति के लिए बल आघूर्ण

आइए, त्रिज्या r वाले वृत्त में गति कर रहे द्रव्यमान m के कण का उदाहरण लें जिसका कोणीय त्वरण α है (चित्र 12.13)। असमान वर्तुल गति कर रहे कण के लिए समीकरण 12.2ग से बल का स्पर्शरेखीय घटक है :

$$\vec{\mathbf{F}}_t = mr\alpha\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{12.7क}$$

इस व्यंजक को समीकरण 12.5ख में रखने पर हमें मिलता है :

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}_t = \vec{\mathbf{r}} \times mr\alpha\hat{\boldsymbol{\theta}} = mr^2\alpha(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}) \tag{12.7ख}$$



चित्र 12.13: असमान वर्तुल गति कर रहे कण पर बल आघूर्ण : क) वामावर्त गति; ख) दक्षिणावर्त गति।

सदिश गुणनफल की परिभाषा से, हम सदिश $(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}})$ की दिशा निर्धारित कर सकते हैं। यह वृत्त के तल (जिसमें ये दोनों सदिश स्थित हैं) के लंबवत् एकक सदिश है। इस स्थिति के लिए यह एकक सदिश घूर्णन अक्ष के अनुदिश है। दक्षिणहस्त नियम के अनुसार वामावर्त और दक्षिणावर्त घूर्णनों के लिए इस एकक सदिश की दिशाएं चित्र 12.13क और ख में दिखाई गई हैं। **ध्यान दें कि प्रत्येक स्थिति में इसकी दिशा कोणीय त्वरण सदिश की दिशा के अनुदिश है**। तब हम लिख सकते हैं

$$\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\alpha}} \tag{12.7ग}$$

जहां $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ कोणीय त्वरण सदिश के अनुदिश एकक सदिश है। इस तरह,

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = mr^2\alpha\,\hat{\boldsymbol{\alpha}} \tag{12.8}$$

चूंकि α कोणीय त्वरण का परिमाण है, हम कोणीय त्वरण सदिश को इस तरह लिख सकते हैं :

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \alpha\hat{\boldsymbol{\alpha}} \tag{12.9}$$

समीकरण 12.9 को समीकरण 12.8 में रखने पर हमें असमान वर्तुल गति कर रहे कण पर लग रहा बल आघूर्ण उसके कोणीय त्वरण के पदों में प्राप्त होता है :

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = mr^2\vec{\boldsymbol{\alpha}} \tag{12.10}$$

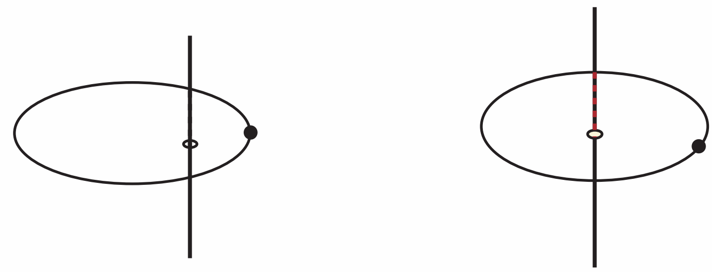
आइए, अब हम अचर द्रव्यमान के लिए समीकरण 12.10 की न्यूटन के गति के दूसरे नियम से तुलना करें : $\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$। समीकरण 12.10 से आप देख सकते हैं कि असमान

वर्तुल गति कर रहे कण पर बल आघूर्ण उसके कोणीय त्वरण और एक राशि mr^2 का गुणनफल है। यह राशि द्रव्यमान m के अनुरूप है। इसे हम **जड़त्व आघूर्ण** कहते हैं और इसका प्रतीक I है :

जड़त्व आघूर्ण

$$I = mr^2 \tag{12.11}$$

जड़त्व आघूर्ण की SI इकाई kgm^2 है। समीकरण 12.11 से आप देख सकते हैं कि **जड़त्व आघूर्ण कण के द्रव्यमान के साथ-साथ घूर्णन अक्ष से उसकी दूरी पर भी निर्भर करता है**। ध्यान दें कि अचर द्रव्यमान वाले कण का जड़त्व आघूर्ण I बदल जाएगा यदि हम घूर्णन अक्ष से उसकी दूरी r को बदल दें (चित्र 12.14)।



चित्र 12.14 : यदि हम घूर्णन अक्ष को या घूर्णन अक्ष से दूरी r को बदल देते हैं तो जड़त्व आघूर्ण बदल जाता है।

समीकरण 12.11 से I का मान समीकरण 12.10 में रख कर हम लिख सकते हैं :

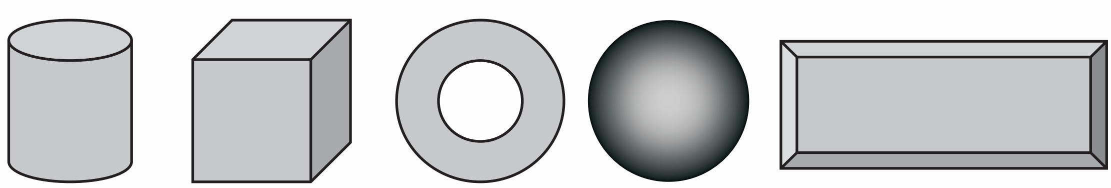
असमान वर्तुल गति के लिए बल आघूर्ण

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} \tag{12.12}$$

समीकरण 12.12 **उस कण का गति का समीकरण है जिसका नियत अक्ष के प्रति कोणीय त्वरण $\vec{\alpha}$** है और **जड़त्व आघूर्ण I** है। इसे हम **न्यूटन के गति के दूसरे नियम का घूर्णी अनुरूप** भी कहते हैं। त्रिज्या r के वृत्त में गतिमान द्रव्यमान m के कण का जड़त्व आघूर्ण I समीकरण 12.11 द्वारा दिया जाता है।

आप देख सकते हैं कि समीकरण 12.12 न्यूटन के गति के दूसरे नियम का घूर्णी अनुरूप है। कुछ पाठ्य पुस्तकों में इसे **घूर्णी गति के लिए न्यूटन का दूसरा नियम** भी कहा जाता है।

ध्यान दें कि समीकरण 12.12 $\vec{F} = m\vec{a}$ के रूप का है। यह हमें बताता है कि **किसी पिंड पर लग रहा नेट बाह्य बल आघूर्ण उसके कोणीय त्वरण के समानुपाती होता है और उसके जड़त्व आघूर्ण और कोणीय त्वरण के गुणनफल के बराबर होता है**। हालांकि हमने इस समीकरण की व्युत्पत्ति वर्तुल गति की विशिष्ट स्थिति के लिए की है, यह समीकरण व्यापक है और कई तरह की घूर्णी गति पर लागू किया जा सकता है। लेकिन **भिन्न पिंडों के लिए जड़त्व आघूर्ण भिन्न होगा** (चित्र 12.15)।



चित्र 12.15: भिन्न पिंडों का जड़त्व आघूर्ण भिन्न होता है।

आइए, हम इन अवधारणाओं को एक उदाहरण द्वारा समझें।

उदाहरण 12.4 : वर्तुल गति के लिए बल आघूर्ण

मेरी-गो-राउन्ड पर बच्चे त्रिज्या 5.0 m वाले एक क्षैतिज वृत्त में गति करते हैं (चित्र 12.16)। इसे विरामावस्था से दक्षिणावर्त घूर्णन दिया जाता है और 60 s में यह 0.30 $rads^{-1}$ की कोणीय चाल प्राप्त कर लेता है। (क) केंद्र से 2.0 m की दूरी पर बैठी द्रव्यमान 25 kg वाली बच्ची पर वृत्त के केंद्र के प्रति कितना बल आघूर्ण लगता है? (ख) बच्ची पर बल आघूर्ण कितना होगा यदि वह मेरी-गो-राउन्ड के किनारे पर बैठी हो?

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि चूंकि बच्ची की गति असमान वर्तुल गति है इसलिए समीकरण 12.8 का प्रयोग करके बल आघूर्ण निर्धारित किया जाए।

समीकरण 12.8 से $\vec{\tau} = mr^2\alpha\,\hat{\alpha}$ और α का मान शुद्धगतिकी के समीकरण 11.8क से निकाला जा सकता है :

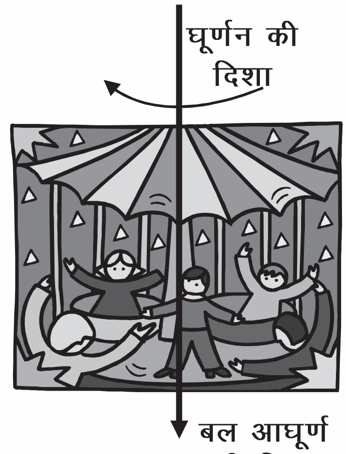
$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0.30\,rads^{-1}}{60\,s} = 5.0\times10^{-3}\,rads^{-2} \quad (\because \omega_0 = 0)$$

अतः दोनों स्थितियों में बच्ची पर लग रहा बल आघूर्ण है :

क) $\vec{\tau} = (25\,kg)\times(2.0\,m)^2 \times(5.0\times10^{-3}\ rads^{-2})\hat{\alpha} = 0.50\ Nm\,\hat{\alpha}$

ख) $\vec{\tau} = (25\,kg)\times(5.0\,m)^2 \times(5.0\times10^{-3}\ rads^{-2})\hat{\alpha} = 3.1\ Nm\,\hat{\alpha}$

बल आघूर्ण की दिशा चित्र 12.16 में दिखाई गई है।



चित्र 12.16: वर्तुल गति के लिए बच्ची पर बल आघूर्ण। मेरी-गो-राउन्ड अपने केंद्र से होकर गुज़रने वाले अक्ष के प्रति घूर्णन करता है। चूंकि घूर्णन दक्षिणावर्त है इसलिए बल आघूर्ण की दिशा घूर्णन अक्ष के अनुदिश नीचे की ओर है।

वर्तुल गति के लिए बल आघूर्ण की अवधारणा की अपनी समझ को परखने के लिए नीचे दिया गया बोध प्रश्न करें।

बोध प्रश्न 4 – वर्तुल गति के लिए बल आघूर्ण

पुराने रिकॉर्ड प्लेयर में घूमने वाली एक चकती होती थी जो 16, 33-1/3, 45 या 78 rpm की दर से घूम सकती थी। यदि इन चकतियों के जड़त्व आघूर्ण समान हों तो एक ही समयांतराल में प्रत्येक कोणीय चाल से रिकॉर्ड को विरामावस्था से घुमाने के लिए आवश्यक बल आघूर्ण कोणीय चाल के साथ-साथ बढ़ता है या घटता है?

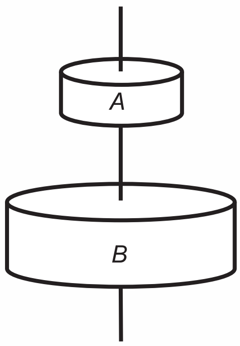
आइए, अब हम जड़त्व आघूर्ण का भौतिक अर्थ समझें।

12.3.3 जड़त्व आघूर्ण का भौतिक अर्थ

समीकरण 12.12 हमें **जड़त्व आघूर्ण का भौतिक अर्थ** बताता है। इसकी समीकरण $\vec{F} = m\vec{a}$ से तुलना करें। आप देख सकते हैं कि **घूर्णी गति में जड़त्व आघूर्ण की वही भूमिका है जो स्थानांतरण-गति में द्रव्यमान की** है। हम कहते हैं कि जड़त्व आघूर्ण **I द्रव्यमान *m* का घूर्णी अनुरूप** है। इकाई 5 में आपने पढ़ा है कि जड़त्वीय

समान $\tau : \alpha_A > \alpha_B$

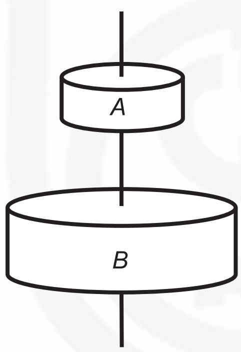
चूंकि $I_A < I_B$



चित्र 12.17: दोनों पिंडों के बल आघूर्ण समान हैं, लेकिन जड़त्व आघूर्ण भिन्न हैं।

समान $\alpha : \tau_B > \tau_A$

चूंकि $I_B > I_A$



चित्र 12.18: दोनों पिंडों के कोणीय त्वरण समान हैं, लेकिन जड़त्व आघूर्ण भिन्न हैं।

द्रव्यमान हमें किसी कण की स्थानांतरण गति की अवस्था में परिवर्तन के विरोध का अनुमान देता है। इसी तरह, **जड़त्व आघूर्ण किसी कण की घूर्णी गति में परिवर्तन के विरोध का अनुमान देता है** (देखें चित्र 12.17 और चित्र 12.18)। इस तरह,

- अचर I के लिए कण का कोणीय त्वरण उस पर आरोपित बल आघूर्ण के समानुपाती होता है :

$$\vec{\tau} \propto \vec{\alpha} \qquad \text{अचर } I \text{ के लिए}$$

- जिस कण का जड़त्व आघूर्ण अधिक होगा उस पर लगाया गया **समान बल आघूर्ण** उसमें कम कोणीय त्वरण उत्पन्न करेगा बमुकाबले उस कण के जिसका जड़त्व आघूर्ण कम हो (चित्र 12.17) :

$$\textbf{समान बल आघूर्ण} : \quad \vec{\tau} = I_1\vec{\alpha}_1 = I_2\vec{\alpha}_2 \qquad (12.13\text{क})$$

$$I_1 > I_2 \Rightarrow \alpha_1 < \alpha_2 \qquad (12.13\text{ख})$$

- जिस कण का जड़त्व आघूर्ण अधिक है उसमें **समान कोणीय त्वरण** उत्पन्न करने के लिए अधिक बल आघूर्ण लगाना पड़ेगा बमुकाबले उस कण के जिसका जड़त्व आघूर्ण कम हो (चित्र 12.18) :

$$\textbf{समान कोणीय त्वरण} : \quad \vec{\tau}_1 = I_1\vec{\alpha} \text{ और } \vec{\tau}_2 = I_2\vec{\alpha} \qquad (12.14\text{क})$$

$$I_1 > I_2 \Rightarrow \tau_1 > \tau_2 \qquad (12.14\text{ख})$$

- जब कण पर आरोपित **बल आघूर्ण शून्य** होता है तब वह अचर कोणीय चाल से गति करता है :

$$\vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\omega} = \text{अचर} \qquad (12.15)$$

अब आप वर्तुल गति कर रहे कण का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करें ताकि आप द्रव्यमान से उसकी अनुरूपता समझ सकें।

बोध प्रश्न 5 – कण का जड़त्व आघूर्ण

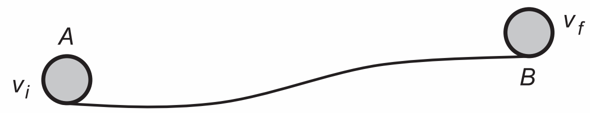
1.0 m त्रिज्या वाले घूर्णन कर रहे पहिये के किनारे पर रखे द्रव्यमान 0.50 kg के मनके का जड़त्व आघूर्ण क्या है? यदि मनके पर क्रमशः (क) 2.5 Nm और (ख) 5.0Nm का बल आघूर्ण आरोपित किया जाए तो उसका कोणीय त्वरण क्या होगा?

अब जब कि आप बल आघूर्ण के बारे में पढ़ चुके हैं तो हम कार्य और कार्य-ऊर्जा प्रमेय की अवधारणाओं को घूर्णी गति पर लागू कर सकते हैं। ऐसा करने पर हमें **घूर्णी गतिज ऊर्जा** का व्यंजक प्राप्त होता है।

12.4 कार्य-ऊर्जा प्रमेय और घूर्णी गतिज ऊर्जा

मान लें कि द्रव्यमान m का एक कण बल $\vec{\mathbf{F}}$ के अधीन बिंदु A से बिंदु B तक गतिमान है (चित्र 12.19)। कार्य-ऊर्जा प्रमेय याद करें जो कण पर बल द्वारा किए गए कार्य का उसकी गतिज ऊर्जा में हुए परिवर्तन से संबंध बताती है :

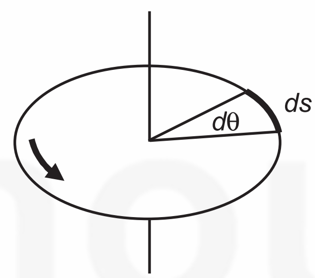
$$W = \Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \qquad (12.16)$$



चित्र 12.19: कण पर कार्य किए जाने पर उसकी गतिज ऊर्जा में परिवर्तन होता है।

हम इस प्रमेय को कोणीय गति पर लागू कर सकते हैं। जब एक नियत अक्ष के प्रति कोणीय गति कर रहे कण पर बल आघूर्ण आरोपित किया जाता है तो वह कण पर कार्य करता है। अब हम सिद्ध करेंगे कि **बल आघूर्ण द्वारा कण पर किया गया कार्य उसकी घूर्णी गतिज ऊर्जा में परिवर्तन के बराबर होता है**। गणित आसान रखने के लिए हम वर्तुल गति का उदाहरण लेंगे।

माना कि द्रव्यमान m का एक कण नेट बल आघूर्ण $\vec{\tau}$ के अधीन त्रिज्या r के वृत्त में वामावर्त दिशा में गतिमान है। आपने भाग 12.3.2 के समीकरण 12.7ख में पढ़ा है कि बल का स्पर्शरेखीय घटक F_t ही बल आघूर्ण आरोपित करता है जिसके कारण कण में कोणीय त्वरण होता है। अतः केवल F_t कण पर कार्य करता है। अब चित्र 12.20 देखें। जब कण वृत्त में कोण $d\theta$ से लंबाई ds की चाप के अनुदिश गति करता है तो उस पर किए गए कार्य dW का क्या मान होता है? इसके लिए हम कार्य की परिभाषा और संबंध $s = r\theta$ (समीकरण 11.1) का उपयोग करते हैं :



चित्र 12.20: वर्तुल गति में किया गया कार्य।

$$dW = F_t\, ds = F_t\, r\, d\theta \qquad (\because ds = r\, d\theta) \qquad (12.17\text{क})$$

वर्तुल गति के लिए,

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r} \times \vec{F}_t| = r F_t \sin 90^\circ = r F_t \qquad (12.17\text{ख})$$

समीकरण 12.17ख का प्रयोग करके हम समीकरण 12.17क को इस तरह लिख सकते हैं :

$$dW = \tau\, d\theta \qquad (12.17\text{ग})$$

अब हम कोणीय स्थिति θ_1 से θ_2 तक गतिमान कण पर किए गए कार्य का मान समीकरण 12.17ग का समाकलन करके ज्ञात कर सकते हैं।

ध्यान दें

θ को हमेशा रेडियन में लिखें।

बल आघूर्ण द्वारा किया गया कार्य

कोण θ_1 से θ_2 तक किसी पिंड को घूर्णन देने में **नेट बल आघूर्ण** द्वारा किया गया कार्य होता है :

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau\, d\theta \qquad (12.18)$$

अचर बल आघूर्ण τ द्वारा पिंड को कोण θ से घूर्णन देने में किया गया कार्य होता है :

$$W = \tau\,\theta \qquad (12.19)$$

बल आघूर्ण द्वारा किया गया कार्य

किसी कोण से एक पिंड को घूर्णन देने में बल आघूर्ण द्वारा किया गया कार्य उसकी गतिज ऊर्जा में परिवर्तन कर देता है। इस गतिज ऊर्जा को हम **घूर्णी गतिज ऊर्जा** कहते हैं। आइए, वर्तुल गति के लिए हम इसका व्यंजक प्राप्त करें। हमें घूर्णी गति कर रहे कणों के लिए घूर्णी गतिज ऊर्जा का व्यापक परिणाम प्राप्त करने के लिए क्या करना चाहिए? हम इस तथ्य का प्रयोग कर सकते हैं कि घूर्णन कर रहे पिंड पर स्थित सभी कणों की कोणीय चाल समान होती है। अतः, कोणीय गति के लिए हम गतिज ऊर्जा को कण की कोणीय चाल के पदों में लिख सकते हैं। तो आइए, हम गतिज ऊर्जा (K.E.) का व्यंजक घूर्णी चरों I और ω के पदों में प्राप्त करें। आप जानते हैं कि वर्तुल गति कर रहे कण की चाल v, घूर्णन अक्ष से उसकी दूरी पर निर्भर करती है : $v = r\omega$ ।

अतः,

$$\text{K.E.} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad (12.20)$$

हालांकि हमने इस परिणाम को कण की वर्तुल गति के लिए प्राप्त किया है, **यह घूर्णी गति कर रहे सभी पिंडों पर लागू होता है। अब हम घूर्णी गतिज ऊर्जा की व्यापक परिभाषा दे रहे हैं।**

घूर्णी गतिज ऊर्जा

घूर्णी गतिज ऊर्जा

एक नियत अक्ष के प्रति कोणीय चाल ω से घूर्णन कर रहे पिंड की, जिसका जड़त्व आघूर्ण I है, घूर्णी गतिज ऊर्जा होती है :

$$\text{K.E.} = \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad (12.20)$$

घूर्णी गतिज ऊर्जा की SI इकाई जूल (J) है।

हम घूर्णी गतिज ऊर्जा के पदों में भी कोणीय गति के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय को व्यक्त कर सकते हैं। माना कि वृत्त में कोणीय स्थिति θ_1 से θ_2 तक गति करते हुए कण की कोणीय चाल ω_1 से बदलकर ω_2 हो जाती है। जब उसकी चाल $r\omega_1$ से बदल कर $r\omega_2$ हो जाती है तो कण की घूर्णी गतिज ऊर्जा में परिवर्तन होता है :

$$\Delta\text{K.E.} = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 \qquad (12.21)$$

अतः, **कोणीय गति के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय** होती है :

कोणीय गति के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau\, d\theta = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 \qquad (12.22)$$

बोध प्रश्न 6 – घूर्णी गतिज ऊर्जा

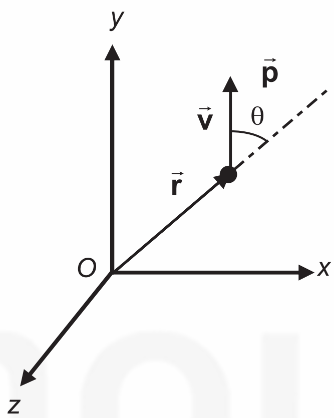
क) त्रिज्या 1 m वाले वृत्त में कोणीय चाल 1 rads^{-1} से गतिमान द्रव्यमान 1 kg के कण की घूर्णी गतिज ऊर्जा क्या है?

ख) वर्तुल गति कर रहे एक कण की घूर्णी गतिज ऊर्जा 50.0 J है। वह वृत्त में 22.0 s में एक परिक्रमण करता है। कण का जड़त्व आघूर्ण क्या है?

इकाई 11 में, और अब तक इकाई 12 में आपने कोणीय गति की शुद्धगतिकी और गतिकी के बारे में पढ़ा है जिसमें हमने वर्तुल गति पर ख़ास ध्यान दिया है। आपने बहुत सी नयी अवधारणाएं सीखी हैं जैसेकि कोणीय स्थिति, कोणीय विस्थापन, कोणीय वेग, कोणीय त्वरण, बल आघूर्ण, जड़त्व आघूर्ण और घूर्णी गतिज ऊर्जा। आप जानते हैं कि स्थानांतरण-गति में इन सभी के अनुरूप भौतिक राशियां होती हैं।

अब आप जानना चाहेंगे : **क्या घूर्णी गति में रैखिक संवेग के अनुरूप कोई अवधारणा होती है**? इसका उत्तर है कि घूर्णी गति में रैखिक संवेग के अनुरूप **कोणीय संवेग** होता है। कोणीय संवेग की कोणीय गति में वही भूमिका होती है जो रैखिक संवेग की स्थानांतरण-गति में होती है।

कोणीय संवेग की अवधारणा इसलिए भी महत्त्वपूर्ण है क्योंकि **कोणीय संवेग संरक्षण नियम** प्रकृति का एक मूलभूत नियम है और बाकी दो नियमों, रैखिक संवेग संरक्षण नियम और ऊर्जा संरक्षण नियम जितना ही महत्त्वपूर्ण है। ब्रह्मांड में कई घटनाओं में जिनमें कोणीय गति होती है इस नियम का पालन होता है। उदाहरण के लिए, यह तथ्य कि सौर मंडल में लगभग सभी ग्रह और सूर्य एक ही तल में गति करते हैं कोणीय संवेग संरक्षण नियम का ही परिणाम है। कृत्रिम उपग्रहों को उनकी कक्षाओं में स्थायी बनाये रखने के लिए कोणीय संवेग संरक्षण नियम का उपयोग किया जाता है। कोणीय संवेग संरक्षण के अनेक व्यावहारिक अनुप्रयोग हैं जिनके बारे में आप अब पढ़ेंगे।



चित्र 12.21: कण का कोणीय संवेग।

12.5 कोणीय संवेग

आइए, सबसे पहले हम कोणीय संवेग की परिभाषा दें। मान लें कि द्रव्यमान m वाले कण P का मूल बिंदु O के सापेक्ष स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}$ है (चित्र 12.21)। मान लें कि वह किसी पथ पर वेग $\vec{\mathbf{v}}$ से चल रहा है। आप जानते हैं कि उसका रैखिक संवेग $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$ है। तब परिभाषा से कण का कोणीय संवेग $\vec{\mathbf{L}}$ होता है :

कोणीय संवेग

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} \tag{12.23क}$$

कोणीय संवेग का परिमाण होता है :

$$L = r\,p\sin\theta \tag{12.23ख}$$

जहां θ, $\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{p}}$ के बीच का कोण है।

$\vec{\mathbf{L}}$ की दिशा सदिश गुणनफल के लिए दक्षिणहस्त नियम द्वारा दी जाती है और वह सदिशों $\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{p}}$ द्वारा बने तल के लंबवत् होती है।

यदि $\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{p}}$ एक ही दिशा में हों तो $\vec{\mathbf{L}}$ शून्य होता है ($\because \sin 0^\circ = 0$)।

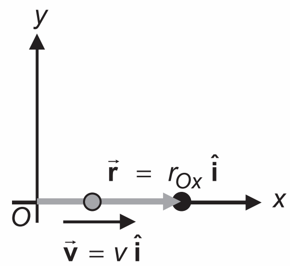
ध्यान दें कि $\vec{\mathbf{L}}$ की परिभाषा किसी संदर्भ बिंदु के सापेक्ष दी जाती है जिसे हम मूल बिंदु मानते हैं।

अगर हम कोई दूसरा संदर्भ बिंदु या मूल बिंदु लेते हैं तो उसका मान बदल जाता है।

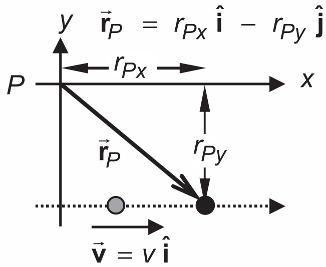
आइए, हम इस बात को एक उदाहरण द्वारा समझें।

उदाहरण 12.5 : कोणीय संवेग

द्रव्यमान m वाला एक कण वेग $\vec{\mathbf{v}} = v\,\hat{\mathbf{i}}$ से x-अक्ष के अनुदिश गतिमान है (चित्र 12.22क देखें)। (क) मूल बिंदु O के सापेक्ष उसका कोणीय संवेग क्या है?
(ख) y-अक्ष पर स्थित बिंदु P के सापेक्ष उसका कोणीय संवेग क्या है?



(क)



(ख)

चित्र 12.22 : कण का कोणीय संवेग भिन्न बिंदुओं के सापेक्ष भिन्न होता है।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि दोनों ही बिंदुओं O और P के सापेक्ष कण का स्थिति सदिश निकाला जाए (चित्र 12.22क और ख) और फिर समीकरण 12.23क से कोणीय संवेग प्राप्त किया जाए।

क) चूंकि कण x-अक्ष के अनुदिश गतिमान है, अतः, किसी क्षण पर **O के सापेक्ष** उसका स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}} = r_{Ox}\,\hat{\mathbf{i}}$ है (चित्र 12.22क)। समीकरण 12.23क से,

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} = r_{Ox}\,\hat{\mathbf{i}} \times mv\,\hat{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{0}} \quad (\because\ \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{0}} \text{ या } \theta = 0)$$

ख) इस स्थिति में बिंदु P के सापेक्ष कण का स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}_P$ चित्र 12.22ख में दिखाया गया है। आइए, हम इस सदिश को x और y-अक्षों के अनुदिश उसके घटकों r_{Px} और r_{Py} में वियोजित करें :

$$\vec{\mathbf{r}}_P = r_{Px}\,\hat{\mathbf{i}} - r_{Py}\,\hat{\mathbf{j}}$$

आप देख सकते हैं कि स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}_P$ का x-घटक वेग $\vec{\mathbf{v}}$ के समांतर है। अतः, उसका वेग के साथ सदिश गुणनफल शून्य होगा :

$$r_{Px}\,\hat{\mathbf{i}} \times mv\,\hat{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{0}} \quad (\because\ \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{0}} \text{ या } \theta = 0)$$

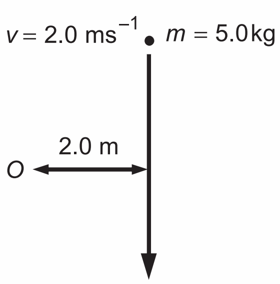
स्थिति सदिश का y-घटक वेग $\vec{\mathbf{v}}$ के लंबवत् है, अतः हमें मिलता है :

$$\vec{\mathbf{L}}_P = -r_{Py}\,\hat{\mathbf{j}} \times mv\,\hat{\mathbf{i}} = -mv\,r_{Py}\,(\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}})$$

सदिश गुणनफल $(\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}})$ एकक परिमाण का सदिश है जिसकी दिशा दक्षिणहस्त नियम द्वारा दी जाती है। यह दोनों सदिशों $\hat{\mathbf{j}}$ और $\hat{\mathbf{i}}$ के लंबवत् है और इसकी दिशा पृष्ठ के तल में भीतर की ओर है। अतः, कोणीय संवेग सदिश xy तल के लंबवत् है और इसकी दिशा पृष्ठ के बाहर हमारी ओर है। कोणीय संवेग सदिश $\vec{\mathbf{L}}_P$ का परिमाण है :

$$\left|\vec{\mathbf{L}}_P\right| = mv\,r_{Py}$$

ध्यान दें कि सदिश $\vec{\mathbf{r}}$ का केवल वह घटक कोणीय संवेग के लिए महत्त्वपूर्ण है जो वेग के लंबवत् है। यह मूल बिंदु (P) से, कण के वेग की दिशा तक की या उस सरल रेखा तक की (जिसके अनुदिश कण गतिमान है) **लंबवत् दूरी** है।



चित्र 12.23

बोध प्रश्न 7 – कोणीय संवेग

द्रव्यमान 5.0 kg का एक कण सरल रेखा में $2.0\ \text{ms}^{-1}$ के वेग से चल रहा है (चित्र 12.23 देखें)। बिंदु O के सापेक्ष कण का कोणीय संवेग क्या है यदि बिंदु O और रेखा के बीच की दूरी 2.0 m हो?

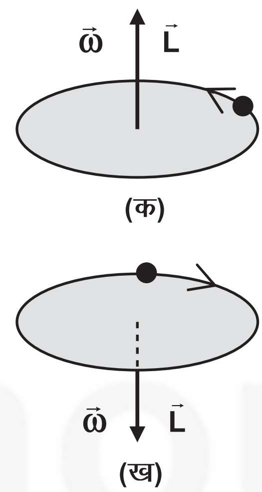
12.5.1 वर्तुल गति के लिए कोणीय संवेग

हम किसी पिंड के कोणीय संवेग $\vec{\mathbf{L}}$ को उसके जड़त्व आघूर्ण और कोणीय वेग के पदों में व्यक्त कर सकते हैं। इसके लिए, आइए, हम सबसे सरल स्थिति लें। मान लें कि द्रव्यमान m का एक कण त्रिज्या r के वृत्त में गतिमान है। परिभाषा से, उसका कोणीय संवेग है :

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{r}} \times m\vec{\mathbf{v}} \qquad (12.24\text{क})$$

माना कि सदिश $\vec{\mathbf{r}}$ की दिशा में एकक सदिश $\hat{\mathbf{r}}$ है। चूंकि वेग $\vec{\mathbf{v}}$ वृत्त की स्पर्शरेखा के अनुदिश होता है, हम सदिशों $\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{v}}$ को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{r}} = r\hat{\mathbf{r}} \quad \text{और} \quad \vec{\mathbf{v}} = v\hat{\boldsymbol{\theta}} = r\omega\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (12.24\text{ख})$$



चित्र 12.24: क) वामावर्त और ख) दक्षिणावर्त दोनों ही तरह के घूर्णनों के लिए, कोणीय संवेग की दिशा कोणीय वेग के अनुदिश होती है।

समीकरण 12.24ख को समीकरण 12.24क में रखने पर, हमें मिलता है :

$$\vec{\mathbf{L}} = r\hat{\mathbf{r}} \times mv\hat{\boldsymbol{\theta}} = mvr(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}) \qquad (12.24\text{ग})$$

एक बार फिर ध्यान दें कि $(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}})$ वृत्त के तल के लंबवत् (जिसमें ये दोनों सदिश स्थित हैं) एकक सदिश है। इस स्थिति के लिए यह एकक सदिश घूर्णन अक्ष के अनुदिश है। वामावर्त और दक्षिणावर्त घूर्णनों के लिए इस एकक सदिश की दिशाएं दक्षिणहस्त नियम द्वारा दी जाती हैं। प्रत्येक स्थिति के लिए यह कोणीय वेग सदिश $\vec{\omega}$ की दिशा में है (चित्र 12.24)। समीकरण 12.24ग में $v = r\omega$ रखने पर हमें मिलता है :

$$\vec{\mathbf{L}} = mr^2\omega(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}) = mr^2\vec{\omega} \qquad (12.24\text{घ})$$

जहां $\vec{\omega}$ कोणीय वेग सदिश है। आप देख सकते हैं कि राशि mr^2 इस कण के जड़त्व आघूर्ण I के बराबर है। अतः, समीकरण 12.24घ हो जाता है :

$$\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\omega} \qquad (12.24\text{च})$$

ध्यान दें कि यह समीकरण, संबंध $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$ के अनुरूप है। साथ ही, यद्यपि हमने समीकरण 12.24च को कण की वर्तुल गति के लिए प्राप्त किया है, यह कोणीय वेग $\vec{\omega}$ से घूर्णन कर रहे किसी भी ऐसे पिंड पर लागू होता है जिसका जड़त्व आघूर्ण I हो।

वर्तुल गति के लिए कोणीय संवेग

नियत अक्ष के प्रति कोणीय वेग $\vec{\omega}$ से घूर्णन कर रहे पिंड का, जिसका जड़त्व आघूर्ण I हो, कोणीय संवेग होता है :

$$\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\omega} \qquad (12.25\text{क})$$

और

$$L = I\omega \qquad (12.25\text{ख})$$

कोणीय संवेग की SI इकाई $\text{kgm}^2\,\text{s}^{-1}$ है।

वर्तुल गति के लिए कोणीय संवेग

आपने सीखा है कि कोणीय संवेग रैखिक संवेग के अनुरूप होता है। अब आप जानना चाहेंगे : क्या बल आघूर्ण और कोणीय संवेग में भी कोई संबंध होता है जो न्यूटन के दूसरे नियम $\vec{\mathbf{F}} = \dfrac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$ के अनुरूप हो? आइए, जानें कि यह संबंध क्या है।

12.5.2 बल आघूर्ण और कोणीय संवेग में संबंध

आइए, हम समीकरण 12.3क से बल आघूर्ण की परिभाषा में $\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$ रखें। तब हमें मिलता है :

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} \tag{12.26}$$

चूंकि $\vec{\mathbf{F}}$ नेट बाह्य बल है, अतः समीकरण 12.26 में बल आघूर्ण, **नेट बाह्य बल आघूर्ण** है। अब हम समीकरण 12.23क द्वारा परिभाषित **कोणीय संवेग को समय के सापेक्ष अवकलित करते** हैं। तब हमें मिलता है :

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}) = \left(\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times \vec{\mathbf{p}}\right) + \left(\vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}\right) \tag{12.27क}$$

चूंकि $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$, समीकरण 12.27क हो जाता है :

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \left(\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times m\vec{\mathbf{v}}\right) + \left(\vec{\mathbf{r}} \times \frac{d(m\vec{\mathbf{v}})}{dt}\right) \tag{12.27ख}$$

अचर द्रव्यमान वाले पिंड के लिए हम समीकरण 12.27ख को इस तरह लिख सकते हैं :

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = m(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{v}}) + m\left(\vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}\right) \tag{12.27ग}$$

चूंकि वेग सदिश स्वयं के समांतर होता है, अतः $(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{v}})$ शून्य है और हमें मिलता है :

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = m\left(\vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}\right) = \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} \tag{12.27घ}$$

समीकरण 12.27घ की समीकरण 12.26 से तुलना करने पर हमें बल आघूर्ण और कोणीय संवेग का संबंध प्राप्त होता है।

बल आघूर्ण और कोणीय संवेग

बल आघूर्ण और कोणीय संवेग

किसी पिंड पर लग रहे **नेट बाह्य बल आघूर्ण** का उसके **कोणीय संवेग** से निम्नलिखित संबंध होता है :

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} \tag{12.28}$$

इस तरह, **किसी पिंड पर लग रहा नेट बाह्य बल आघूर्ण उसके कोणीय संवेग में परिवर्तन की दर के बराबर होता है।**

आपने सीखा है कि जब किसी पिंड पर एक नेट बाह्य बल आघूर्ण आरोपित किया जाता है तो उसके कोणीय संवेग में परिवर्तन होता है। अब हम जानना चाहेंगे : **जब पिंड पर आरोपित नेट बल आघूर्ण शून्य होता है तब उसके कोणीय संवेग का मान क्या होता है?** तब हमें **कोणीय संवेग संरक्षण नियम** प्राप्त होता है। इसके बारे में आप इस इकाई के अंतिम भाग में पढ़ेंगे।

लेकिन आगे पढ़ने से पहले आप भिन्न स्थितियों के लिए कोणीय संवेग की गणना करें।

बोध प्रश्न 8 – कोणीय संवेग

द्रव्यमान 25 kg की एक बच्ची 2.5 m त्रिज्या के मेरी-गो-राउन्ड के किनारे पर बैठी है। मेरी-गो-राउन्ड दक्षिणावर्त घूर्णन कर रहा है। जिस क्षण पर मेरी-गो-राउन्ड की कोणीय चाल 4.0 rpm है, उस क्षण पर बच्ची का कोणीय संवेग क्या है? बच्ची पर आरोपित बल आघूर्ण का परिमाण क्या है यदि मेरी-गो-राउन्ड की कोणीय चाल समय के साथ $\omega = 0.80t \text{ rads}^{-1}$ के अनुसार बदलती है?

12.6 कोणीय संवेग संरक्षण

जब पिंड पर आरोपित नेट बाह्य बल आघूर्ण शून्य होता है, तब समीकरण 12.28 से

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

या

$$\boxed{\vec{L} = \text{अचर}} \qquad (12.29)$$

इस तरह हमें कोणीय संवेग संरक्षण नियम प्राप्त होता है।

कोणीय संवेग संरक्षण

यदि किसी निकाय पर आरोपित नेट बाह्य बल आघूर्ण शून्य हो, तो उसका **कोणीय संवेग अचर रहता है** (संरक्षित रहता है) :

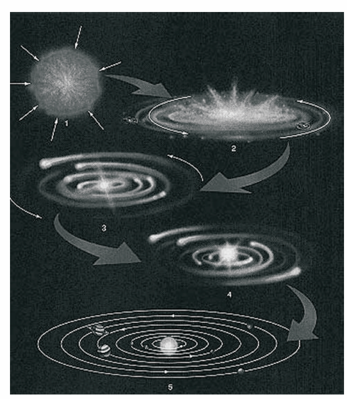
$$\vec{L} = \text{अचर} \quad \text{यदि} \quad \vec{\tau} = \vec{0} \qquad (12.29)$$

कोणीय संवेग संरक्षण

अब हम कोणीय संवेग संरक्षण के कुछ उदाहरण लेंगे।

उदाहरण 12.6 : कोणीय संवेग संरक्षण

हमारा सौर मंडल घूर्णन कर रहे एक विशालकाय गैस के बादल से बना है। हमें यह ज्ञात है कि (प्लूटो के अलावा) सभी ग्रह और सूर्य एक ही समतल में स्थित हैं (चित्र 12.25)। हम इस बात को कोणीय संवेग संरक्षण के आधार पर कैसे समझा सकते हैं?



चित्र. 12.25

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि गैस के बादल पर आरोपित बल और बल आघूर्ण प्राप्त किए जाएं और देखा जाए कि इसके लिए कोणीय संवेग संरक्षित है कि नहीं। अगर कोणीय संवेग संरक्षित है तो उसका सौर मंडल के आकार पर क्या प्रभाव होगा?

गैस के बादल के कणों के बीच केवल गुरुत्वाकर्षण बल लगता है और वह त्रिज्य दिशा में होता है। अतः, निकाय पर नेट बल आघूर्ण शून्य होगा। अतः, गैस के बादल का कोणीय संवेग अचर होगा। इसका अर्थ है कि **कोणीय संवेग के परिमाण और दिशा दोनों ही अचर हैं**। परिभाषा से, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$

यानी $\vec{L}$ सदिशों $\vec{r}$ और $\vec{v}$ का सदिश गुणनफल है और वह $\vec{r}$ और $\vec{v}$ से बने तल के लंबवत् है। चूंकि $\vec{L}$ की दिशा नियत है, इसका अर्थ है कि $\vec{r}$ और $\vec{v}$ सदा ही अचर सदिश $\vec{L}$ के लंबवत् एक **नियत समतल** में बने रहेंगे (देखें चित्र 12.25)। इस तरह गैस के बादल के कण एक नियत समतल में घूर्णन करेंगे। अतः, जब इस गैस के बादल से ग्रहों और सूर्य का निर्माण हुआ तब वे भी एक ही समतल में गति कर रहे थे। इसी कारण से यह आज भी एक ही समतल में पाए जाते हैं।

उदाहरण 12.7 में हम कोणीय संवेग संरक्षण का एक दिलचस्प उदाहरण दे रहे हैं।

उदाहरण 12.7 : कोणीय संवेग संरक्षण

बर्फ़ पर एक मनोरंजक प्रदर्शन में दो बराबर द्रव्यमान वाली कलाकार एक नगण्य द्रव्यमान वाले लंबे छड़ के विपरीत सिरों को चित्र 12.26 के अनुसार पकड़े हैं और छड़ के केंद्र के प्रति वृत्त में गतिमान हैं। इस प्रदर्शन के दौरान प्रत्येक कलाकार छड़ को इस तरह खींचती हैं कि उनके बीच की दूरी अपने प्रारंभिक मान की आधी रह जाती है। यदि छड़ की लंबाई 2.0 m हो, प्रत्येक कलाकार का द्रव्यमान 45.0 kg हो और प्रत्येक कलाकार का प्रारंभिक स्पर्शरेखीय वेग दूसरे कलाकार के प्रारंभिक स्पर्शरेखीय वेग की विपरीत दिशा में $1.5\,\text{ms}^{-1}$ हो, तो उनकी अंतिम स्पर्शरेखीय चाल प्राप्त करें। घर्षण को नगण्य मानें।

चित्र 12.26

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि घर्षण के कारण आरोपित बल आघूर्ण शून्य है। साथ ही दोनों कलाकारों पर गुरुत्व बल के कारण बल आघूर्ण समान तथा विपरीत दिशा में हैं चूंकि वे छड़ के विपरीत सिरों पर हैं (उनके लिए $\vec{r}$ परिमाण में समान लेकिन विपरीत दिशा में हैं)। इसलिए छड़ के केंद्र के प्रति निकाय पर नेट बाह्य बल आघूर्ण शून्य है। अतः, निकाय का कोणीय संवेग संरक्षित रहता है।

चूंकि कलाकार वर्तुल गति कर रही हैं, अतः, हम उन्हें कण मानते हुए समीकरणें 12.25ख और 12.29 उन पर लागू करेंगे। चूंकि दोनों कलाकार वृत्त में एक ही दिशा में गतिमान हैं, उनके कोणीय संवेग एक ही दिशा में होंगे। चूंकि उनके द्रव्यमान, स्पर्शरेखीय चालें और वृत्त के केंद्र से प्रत्येक कलाकार की दूरी समान है, अतः, कुल प्रारंभिक कोणीय संवेग होगा :

$$L_i = mvr + mvr = 2mvr = 2(45.0\,\text{kg})(1.5\,\text{ms}^{-1})(1.0\,\text{m}) = 135\,\text{kgm}^2\text{s}^{-1}$$

माना कि अंतिम स्पर्शरेखीय चाल V है। तब उनका अंतिम कोणीय संवेग है :

$$L_f = \frac{mVr}{2} + \frac{mVr}{2} = mVr$$

चूंकि $L_i = L_f$, अतः, $mVr = 135\,\text{kgm}^2\text{s}^{-1}$

या $$V = \frac{135\,\text{kgm}^2\text{s}^{-1}}{45.0\ \text{kg} \times 1.0\,\text{m}} = 3.0\ \text{ms}^{-1}$$

इस तरह, यदि कलाकारों के बीच की दूरी उनकी आरंभिक दूरी की आधी रह जाती है तो उनकी चाल दो गुनी हो जाती है। उनकी गतिज ऊर्जा चार गुनी हो जाएगी।

उदाहरण 12.7 में आपने देखा कि जब पिंडों का जड़त्व आघूर्ण घट जाता है तब उनकी चालें बढ़ जाती हैं। यह कोणीय संवेग संरक्षण का परिणाम है। कोणीय संवेग संरक्षण ऐसी ही और भी कई स्थितियों में दिखाई देता है जिनका वर्णन हम अब करेंगे।

1. **बर्फ़ पर स्केटिंग** या **नृत्य करने वाले कलाकार** अपनी कोणीय चाल को अपनी फैली हुई बांहों को अंदर की ओर खींच कर बढ़ा लेते हैं जैसा कि चित्र 12.27 में दिखाया गया है। अपनी बांहों को फैलाकर वे अपनी कोणीय चाल कम भी कर सकते हैं। इस तरह अपना जड़त्व आघूर्ण बदल कर वे अपनी कोणीय चाल को नियंत्रित करते हैं।

चित्र 12.27: बर्फ़ पर स्केटिंग कर रही कलाकार अपनी दोनों बांहें और एक पैर फैला कर धीमी कोणीय चाल से घूर्णन करना शुरू करती है। जब वह अपनी बांहें और पैर अंदर खींच लेती है, तब उसका जड़त्व आघूर्ण घट जाता है और कोणीय चाल बढ़ जाती है।

चित्र 12.28 : तैराक का तरण-ताल में कूदते हुए कोणीय संवेग संरक्षित रहता है। जब वह अपनी बांहें और पैर समेट लेती है, उसकी कोणीय चाल बढ़ जाती है। जब वह उन्हें वापिस फैला लेती है तो उसकी कोणीय चाल घट जाती है।

2. **तरण ताल में कूदते हुए एक तैराक** अपने जड़त्व आघूर्ण को बदलकर कलाबाज़ियां लगाती है। डाइविंग बोर्ड से वह एक निश्चित कोणीय संवेग $\vec{L}$ के साथ कूदती है। इस संवेग की दिशा चित्र 12.28 के तल के अंदर की ओर, इस पृष्ठ के लंबवत् है। जितनी देर वह हवा में रहती है उस पर कोई बाह्य बल आघूर्ण आरोपित नहीं होता (यदि हम वायु प्रतिरोध को नगण्य मान लें तो)। अतः, उसका कोणीय संवेग संरक्षित रहता है। जब वह अपनी बांहों और पैरों को अंदर खींच लेती है तब उसका जड़त्व आघूर्ण घट जाता है और इस तरह उसकी कोणीय चाल बढ़ जाती

है। जब वह कूद के अंतिम चरण में वापिस अपनी बांहें और पैर फैला लेती है तो उसका जड़त्व आघूर्ण बढ़ जाता है। इससे उसकी घूर्णन दर कम हो जाती है जिससे कि वह पानी में आराम से प्रवेश करती है। अधिक जटिल कूद में जिसमें और भी अधिक कलाबाज़ियां और घूर्णन किये जाते हैं कूदने वाले तैराक का कोणीय संवेग कूद के दौरान संरक्षित (परिमाण और दिशा दोनों में) रहना चाहिए।

3. जिन **तारों** का नाभिकीय ईंधन समाप्त हो जाता है, उनका निपात होता है जो उनके द्रव्यमान पर निर्भर करता है। कोई तारा इतना भी सिकुड़ सकता है कि उसकी त्रिज्या सूर्य की त्रिज्या के बराबर मान (695 500 km) से घट कर मात्र कुछ किलोमीटर रह जाए। वह तारा **न्यूट्रॉन तारा** बन जाता है क्योंकि उसका पदार्थ संघनित होकर न्यूट्रॉनों की एक सघन गैस में बदल जाता है। सिकुड़ने के दौरान तारा एक वियुक्त निकाय होता है और उसका कोणीय संवेग $\vec{L}$ संरक्षित रहता है। चूंकि **सिकुड़ते हुए तारे** का जड़त्व आघूर्ण बहुत कम रह जाता है, उसकी कोणीय चाल बहुत अधिक बढ़ जाती है।

आप यह गणना स्वयं करके देखना चाहेंगे कि ऐसे एक सिकुड़ते हुए तारे की कोणीय चाल क्या होती है और सूर्य की कोणीय चाल (जो प्रति माह एक परिक्रमण के बराबर है) की तुलना में उसका मान क्या होता है। आप न्यूट्रॉन तारे की कोणीय चाल में परिवर्तन की गणना करना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 9 – कोणीय संवेग संरक्षण

जड़त्व आघूर्ण 8.6×10^{48} kgm^2 वाला एक तारा अपने अक्ष के प्रति 1 परिक्रमण प्रति माह की कोणीय चाल से घूर्णन कर रहा है। उस पर केवल गुरुत्वाकर्षण बल आरोपित होता है। जब उसका नाभिकीय ईंधन खत्म हो जाता है तो वह सिकुड़कर एक न्यूट्रॉन तारे में परिवर्तित हो जाता है जिसका जड़त्व आघूर्ण 4.5×10^{37} kgm^2 है। न्यूट्रॉन तारे की, परिक्रमण प्रति माह में, कोणीय चाल क्या है?

अंतरिक्ष में किसी अक्ष के प्रति घूर्णन कर रहे उपग्रहों को इसी नियम का प्रयोग करके स्थायी रखा जाता है। साइकिल या मोटरसाइकिल चलाते समय उन्हें स्थायी रखने में भी आप कोणीय संवेग संरक्षण का इस्तेमाल करते हैं। घूर्णन करता हुआ लट्टू या फ्रिस्बी तभी तक स्थायी रहते हैं जब तक उनका कोणीय संवेग संरक्षित रहता है।

अभी तक आपने कोणीय संवेग संरक्षण के ऐसे अनेक उदाहरण देखे हैं जिनमें किसी पिंड का जड़त्व आघूर्ण बदलकर उसकी कोणीय चाल बदली जा सकती है।

कोणीय संवेग संरक्षण उन पिंडों के लिए भी उपयोगी होता है जिन्हें किसी अक्ष के प्रति घूर्णन करते समय स्थायी रखना होता है। यह तभी हो सकता है जब कोणीय संवेग संरक्षित रहे ताकि कोणीय संवेग सदिश की दिशा नियत रहे। अतः,

जिस अक्ष के प्रति पिंड घूर्णन करता है वह नियत रहता है और वह पिंड उलटता नहीं : घूर्णन करते समय वह स्थायी रहता है।

इकाइयों 11 और 12 में हमने कोणीय गति से संबंधित बहुत सी नई भौतिक राशियों से आपको परिचित कराया है जैसे कि कोणीय स्थिति, कोणीय विस्थापन, कोणीय वेग, कोणीय त्वरण, जड़त्व आघूर्ण, बल आघूर्ण, घूर्णी गतिज ऊर्जा, घूर्णी गति के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय, न्यूटन के गति के दूसरे नियम का घूर्णी अनुरूप और कोणीय संवेग।

उनका वर्णन करते हुए हमने बताया है कि इनमें से प्रत्येक राशि की स्थानांतरण गति की किसी न किसी राशि से अनुरूपता है।

हम तालिका 12.1 में दोनों प्रकार की गतियों के लिए संगत राशियों और संबंधों की सूची दे रहे हैं।

तालिका 12.1 : स्थानांतरण-गति और घूर्णी गति के लिए अनुरूप राशियां।

विशुद्ध स्थानांतरण गति (नियत दिशा)		विशुद्ध घूर्णी गति (नियत अक्ष)	
स्थिति	x	कोणीय स्थिति	θ
विस्थापन	Δx	कोणीय विस्थापन	$\Delta\theta$
वेग	$v = \dfrac{dx}{dt}$	कोणीय वेग	$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$
त्वरण	$a = \dfrac{dv}{dt}$	कोणीय त्वरण	$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$
द्रव्यमान	m	जड़त्व आघूर्ण	I
बल	$\vec{\mathbf{F}}$	बल आघूर्ण	$\vec{\boldsymbol{\tau}}$
न्यूटन का दूसरा नियम :	$\vec{\mathbf{F}}_{net} = m\vec{\mathbf{a}}$	न्यूटन का दूसरा नियम:	$\vec{\boldsymbol{\tau}}_{net} = I\vec{\alpha}$
किया गया कार्य	$W = \int F\,dx$	किया गया कार्य	$W = \int \tau\, d\theta$
गतिज ऊर्जा	$\text{K.E.} = \dfrac{1}{2}mv^2$	घूर्णी गतिज ऊर्जा	$\text{K.E.} = \dfrac{1}{2}I\omega^2$
रैखिक संवेग	$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$	कोणीय संवेग	$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$

इसी के साथ हम कोणीय/घूर्णी गति की गतिकी पर चर्चा समाप्त करते हैं और आपने इस इकाई में जो पढ़ा है, उसका सारांश देते हैं।

12.7 सारांश

अवधारणा	विवरण
एकसमान वर्तुल गति की गतिकी	■ द्रव्यमान m वाले कण को एकसमान वर्तुल गति में अचर कोणीय चाल ω से गतिमान रखने के लिए आवश्यक नेट बल को **अभिकेंद्र बल** कहते हैं। इसका **परिमाण** है : $$F_c = \frac{mv^2}{r}$$ जहां r उस वृत्त की त्रिज्या है जिसमें कण गतिमान है और v कण की चाल है। अभिकेंद्र बल सदैव वृत्त के केंद्र की ओर लगता है और इसकी दिशा वृत्त में कण की गति के साथ निरंतर बदलती है। एकक सदिश संकेतन पद्धति में, हम अभिकेंद्र बल को ऐसे लिख सकते हैं : $$\vec{\mathbf{F}}_c = -\frac{mv^2}{r}\hat{\mathbf{r}} = -m\omega^2 r\,\hat{\mathbf{r}}$$

असमान वर्तुल गति की गतिकी

■ त्रिज्या r वाले वृत्ताकार पथ में गतिमान द्रव्यमान m के कण पर जिसकी कोणीय चाल बदल रही हो और जिसका कोणीय त्वरण α हो, लग रहा नेट बल है :

$$\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} = m(\vec{\mathbf{a}}_r + \vec{\mathbf{a}}_t) = \vec{\mathbf{F}}_r + \vec{\mathbf{F}}_t$$

जहां $\vec{\mathbf{F}}_r$ और $\vec{\mathbf{F}}_t$ क्रमशः बल के **त्रिज्य** (या **अभिकेंद्र**) और **स्पर्शरेखीय** घटक हैं और इनके मान हैं :

$$\vec{\mathbf{F}}_r = -\frac{mv^2}{r}\hat{\mathbf{r}} = -m\omega^2 r\,\hat{\mathbf{r}} \qquad \text{(त्रिज्य घटक)}$$

और $$\vec{\mathbf{F}}_t = m\alpha r\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad \text{(स्पर्शरेखीय घटक)}$$

नेट बल का **परिमाण** है :

$$|\vec{\mathbf{F}}| = \sqrt{F_r^2 + F_t^2} = m\sqrt{(\omega^2 r)^2 + (\alpha r)^2}$$

और त्रिज्य दिशा तथा उसके बीच का कोण β है, जहां

$$\tan\beta = \frac{ma_t}{ma_r} = -\frac{\alpha}{\omega^2}$$

बल आघूर्ण

■ यदि किसी बिंदु P पर स्थित कण पर जिसका मूल बिंदु O के सापेक्ष स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}$ हो, नेट बल $\vec{\mathbf{F}}$ आरोपित किया जाता है तो O के सापेक्ष कण पर आरोपित **बल आघूर्ण** होता है :

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$

बल आघूर्ण का परिमाण होता है $\tau = rF\sin\theta$, जहां θ, $\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{F}}$ के बीच का कोण है जब इन्हें इनकी पूंछें मिला कर रखा जाता है। बल आघूर्ण की दिशा दक्षिणहस्त नियम द्वारा की जाती है और वह $\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{F}}$ द्वारा बने तल के लंबवत् होती है। नेट बाह्य बल आघूर्ण, किसी अक्ष के अनुदिश **घूर्णी गति की अवस्था में परिवर्तन** लाता है। इसे बल का घूर्णी प्रभाव भी कहते हैं। जब कण पर अनेक बल आघूर्ण लग रहे होते हैं तो **नेट** या **परिणामी बल आघूर्ण** उन सभी बल आघूर्णों का सदिश योगफल होता है :

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_{net} = \sum_i \vec{\boldsymbol{\tau}}_i$$

न्यूटन के गति के दूसरे नियम का घूर्णी अनुरूप

■ **न्यूटन के गति के दूसरे नियम का घूर्णी अनुरूप** है :

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_{net} = I\vec{\boldsymbol{\alpha}}$$

जहां $\vec{\boldsymbol{\tau}}_{net}$ कण पर लग रहा है नेट बाह्य बल आघूर्ण है, I जड़त्व आघूर्ण है, और $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ कण का कोणीय त्वरण है।

जड़त्व आघूर्ण

- **जड़त्व आघूर्ण *I*** द्रव्यमान *m* का **घूर्णी अनुरूप** है। जड़त्व आघूर्ण की घूर्णी गति में वही भूमिका है जो द्रव्यमान की स्थानांतरण-गति में है। जिस तरह जड़त्वीय द्रव्यमान, किसी कण की स्थानांतरण-गति में विरोध का मान देता है, उसी तरह जड़त्व आघूर्ण किसी कण की घूर्णी गति में परिवर्तन के विरोध का मान देता है। द्रव्यमान ***m*** के कण का जो घूर्णन अक्ष से दूरी ***r*** पर हो, जड़त्व आघूर्ण होता है :

$$I = mr^2$$

बल आघूर्ण द्वारा किया गया कार्य

- कोणीय स्थिति θ_1 से θ_2 तक एक पिंड को घूर्णन देने में **नेट बल आघूर्ण द्वारा किया गया कार्य** होता है :

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau \, d\theta$$

अचर बल आघूर्ण τ द्वारा पिंड को कोण θ से घूर्णन देने में किया गया कार्य होता है :

$$W = \tau\theta$$

कार्य-ऊर्जा प्रमेय और घूर्णी गतिज ऊर्जा

- **कोणीय गति के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय** होती है :

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau \, d\theta = \Delta K.E. = \frac{1}{2} I \omega_2^2 - \frac{1}{2} I \omega_1^2$$

जहां $K.E. = \frac{1}{2} I \omega^2$ एक नियत अक्ष के प्रति कोणीय चाल ω से घूर्णन कर रहे पिंड की, जिसका जड़त्व आघूर्ण *I* है, **घूर्णी गतिज ऊर्जा** है।

कण का कोणीय संवेग

- द्रव्यमान *m* वाले कण का, जिसका मूल बिंदु *O* के सापेक्ष स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}$ है और रैखिक संवेग $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$ है, **कोणीय संवेग** $\vec{\mathbf{L}}$ होता है :

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$$

कोणीय संवेग का परिमाण होता है : $L = rp\sin\theta$ जहां θ, $\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{p}}$ के बीच का कोण है। $\vec{\mathbf{L}}$ की दिशा सदिश गुणनफल के लिए दक्षिणहस्त नियम द्वारा दी जाती है और वह सदिशों $\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{p}}$ द्वारा बने समतल के लंबवत् होती है। $\vec{\mathbf{L}}$ की परिभाषा किसी संदर्भ बिंदु के सापेक्ष दी जाती है और अगर हम कोई दूसरा संदर्भ बिंदु लेते हैं तो उसका मान बदल जाता है। नियत अक्ष के प्रति कोणीय वेग $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ से घूर्णन कर रहे पिंड का, जिसका जड़त्व आघूर्ण *I* हो, कोणीय संवेग होता है :

$$\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\boldsymbol{\omega}} \quad \text{और} \quad L = I\omega$$

बल आघूर्ण और कोणीय संवेग

- **किसी पिंड पर लग रहा नेट बल आघूर्ण उसके कोणीय संवेग में परिवर्तन की दर के बराबर** होता है :

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$$

कोणीय संवेग संरक्षण

- यदि किसी निकाय पर आरोपित नेट बाह्य बल आघूर्ण शून्य हो, तो उसका **कोणीय संवेग अचर रहता है (संरक्षित रहता है)** :

$$\vec{\mathbf{L}} = \text{अचर} \quad \text{यदि} \quad \vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{0}}$$

12.8 अंत में कुछ प्रश्न

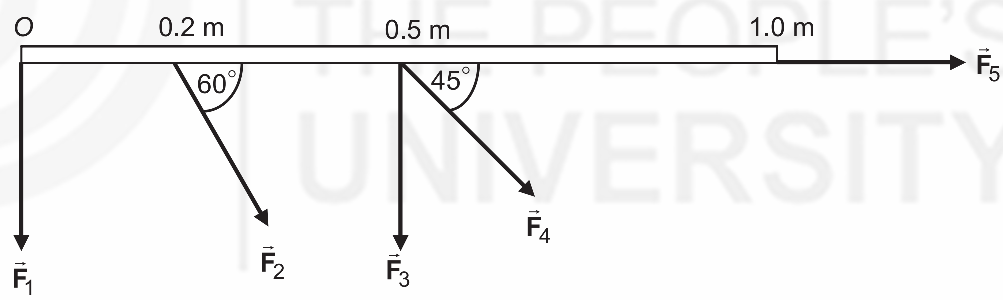
1. बस के टायर में द्रव्यमान 5.0×10^{-3} का एक कंकड़ धंसा हुआ है। कंकड़ और टायर के बीच स्थैतिक घर्षण गुणांक 0.65 है। जब टायर की सतह की चाल $1.5 \, ms^{-1}$ होती है, तो कंकड़ टायर में से निकल जाता है। यदि केवल स्थैतिक घर्षण बल अभिकेंद्र बल प्रदान करता है, तो टायर की त्रिज्या प्राप्त करें। $g = 9.8 \, ms^{-2}$ लें।

2. एक साइकिल सवार विरामावस्था से शुरू करके 2.5 s में $5.0 \, ms^{-1}$ की चाल प्राप्त करता है। साइकिल के पहिये की त्रिज्या 30 cm है। टायर की कोर पर स्थित द्रव्यमान 10 g के कण पर नेट बल के अभिकेंद्र और स्पर्शरेखीय घटक ज्ञात करें। कण पर आरोपित नेट बल ज्ञात करें।

3. एक पहिया विरामावस्था से घूर्णन शुरू करता है और एक अचर बल आघूर्ण के अधीन 4.0 s में 360 rad के कोण से घूमता है। यदि पहिये का जड़त्व आघूर्ण $10 \, kgm^2$ हो तो उस पर लग रहा बल आघूर्ण क्या होगा?

4. किसी दिए क्षण पर द्रव्यमान 5.0 kg वाले एक पिंड का (m में) स्थिति सदिश निर्देशांकों $(2t^2, 3t, 4)$ द्वारा परिभाषित होता है। पिंड का वेग और त्वरण निर्धारित करें, मूल बिंदु के सापेक्ष पिंड का कोणीय संवेग प्राप्त करें और मूल बिंदु के सापेक्ष पिंड पर लग रहा बल आघूर्ण प्राप्त करें।

5. चित्र 12.29 में एक मीटर पैमाना दिखाया गया है जिसकी धुरी बिंदु O पर है। निम्नलिखित में से किन 5 बलों (जिनके परिमाण F बराबर हैं) के संगत O के सापेक्ष बल आघूर्ण का परिमाण सबसे अधिक है?



चित्र 12.29

6. द्रव्यमान 200 kg की एक नाव एक झील पर 30.0 m त्रिज्या के वृत्त में घूमती है। घूमते हुए नाव पर इंजन द्वारा 500 N का स्पर्शरेखीय बल आरोपित किया जाता है। नाव की प्रारंभिक स्पर्शरेखीय चाल $5.00 \, ms^{-1}$ है।

   क) नाव का स्पर्शरेखीय त्वरण ज्ञात करें। 2.00 s बाद उसका अभिकेंद्र त्वरण क्या होगा?

   ख) एकक सदिशों $\hat{\mathbf{r}}$ और $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ के पदों में नेट बल का व्यंजक लिखें।

   ग) नेट बल का परिमाण और त्रिज्य दिशा से उसका कोण ज्ञात करें।

7. एक पहिये का अपने घूर्णन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $3.0 \, kgm^2$ है। आरंभ में पहिया विरामावस्था में है। फिर उसे एक मोटर से जोड़ दिया जाता है जो उस पर

उसके अक्ष के प्रति 30 Nm का बल आघूर्ण आरोपित करती है। 8.0 परिक्रमण पूरे कर लेने पर मोटर द्वारा पहिये पर कितना कार्य किया जाता है? उस समय पहिये की कोणीय चाल क्या है?

8. 1.0 m लंबी एक हल्की छड़ *xy* समतल में छड़ के केंद्र पर स्थित धुरी के गिर्द घूर्णन करती है। छड़ के सिरों पर 2.0 kg और 3.0 kg द्रव्यमान वाले दो कण जुड़े हैं। जिस क्षण पर प्रत्येक कण की चाल 10 ms^{-1} हो, उस क्षण पर निकाय का कोणीय संवेग प्राप्त करें।

9. 20 kg द्रव्यमान वाली एक लड़की, 5.0 m त्रिज्या और 500 kgm^2 जड़त्व आघूर्ण वाले एक मेरी-गो-राउन्ड के किनारे पर खड़ी है। आरंभ में मेरी-गो-राउन्ड विरामावस्था में है। फिर लड़की मेरी-गो-राउन्ड के किनारे पर दक्षिणावर्त दिशा में 1.5 ms^{-1} की अचर चाल से चलने लगती है।

   क) मेरी-गो-राउन्ड किस दिशा में और किस कोणीय चाल से घूर्णन करता है?

   ख) मेरी-गो-राउन्ड और अपने को घूर्णी गति देने के लिए लड़की को कितना कार्य करना पड़ता है?

10. एक मेरी-गो-राउन्ड जिसका जड़त्व आघूर्ण 4500 kgm^2 है, एक घर्षणहीन ऊर्ध्वाधर ऐक्सल पर रखा हुआ है। वह प्रारंभ में प्रति मिनट 1 परिक्रमण की कोणीय चाल से घूर्णन कर रहा है। एक लड़की त्रिज्य दिशा में मेरी-गो-राउन्ड पर कूद कर चढ़ जाती है। यदि मेरी-गो-राउन्ड की कोणीय चाल घट कर 0.9 rpm रह जाती है तो लड़की का जड़त्व आघूर्ण प्राप्त करें।

12.9 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. क्योंकि कण पर अभिकेंद्र बल का परिमाण, उस पर स्पर्शरेखीय बल का दोगुना है, अतः, समीकरणों 12.2ख और 12.2ग से,

$$\omega^2 r = 2\alpha r \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = 2\alpha \qquad \text{(i)}$$

अब हम समीकरण 11.8ग में $\omega_0 = 0$ और $\theta_0 = 0$ रख कर उस कोण θ का मान ज्ञात कर सकते हैं जिससे कण घूमा है।

$$\therefore \ \omega^2 = 2\alpha\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\omega^2}{2\alpha} \qquad \text{(ii)}$$

समीकरण (i) से ω^2 समीकरण (ii) में रखने पर, $\theta = \dfrac{2\alpha}{2\alpha} = 1\,\text{rad}$

2. हम समीकरणों 12.3क और ख में $r = 5.0\,\text{m}$, $\theta = 30^\circ$ और $F = 40\ \text{N}$ रखते हैं :

$$\tau = (5.0\,\text{m}) \times (40\,\text{N}) \times \sin 30^\circ = 1.0 \times 10^2\ \text{Nm}$$

बल आघूर्ण की दिशा $\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{F}}$ द्वारा बने तल के लंबवत् और पृष्ठ के भीतर की ओर है।

3. समीकरण 12.3 ख में $r = 1.0\,\text{m}$, $\theta = 90^\circ$ और $F = 50\,\text{N}$ रखने पर,

$$\tau = (1.0\,\text{m})\times(50\,\text{N})\times\sin 90^\circ = 50\ \text{Nm}$$

दक्षिणहस्त नियम से, बल आघूर्ण की दिशा $\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{F}}$ द्वारा बने तल के लंबवत् और ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की दिशा में है।

4. दिया है कि प्रत्येक रिकॉर्ड **समान** समयांतराल में अंतिम कोणीय चाल प्राप्त करता है। अतः समीकरण 11.8क से, शून्य आरंभिक कोणीय चाल $(\omega_0 = 0)$ के लिए कोणीय त्वरण $\alpha = \dfrac{\omega}{t}$ का मान, अंतिम कोणीय चाल ω के अधिक मान के लिए अधिक होगा। अतः समीकरण 12.12 से, समान जड़त्व आघूर्ण के लिए **बल आघूर्ण का मान कोणीय चाल के साथ-साथ बढ़ता है**।

5. समीकरण 12.11 से, मनके का जड़त्व आघूर्ण है :

$$I = (0.50\,\text{kg})\times(1.0\,\text{m})^2 = 0.50\,\text{kgm}^2$$

मनके का कोणीय त्वरण समीकरण 12.12 से प्राप्त होता है। अतः,

क) $\tau = 2.5\,\text{Nm}$ के लिए $\alpha = \dfrac{2.5}{0.50}\,\text{rads}^{-2} = 5.0\ \text{rads}^{-2}$

ख) $\tau = 5.0\,\text{Nm}$ के लिए $\alpha = \dfrac{5.0}{0.50}\,\text{rads}^{-2} = 10\ \text{rads}^{-2}$

6. क) समीकरण 12.20 से, और I का मान समीकरण 12.11 से लेने पर

$$\text{K.E.} = \frac{1}{2}\times(1\,\text{kg})\times(1\,\text{m})^2\times(1\,\text{rad}\,\text{s}^{-1})^2 = 0.5\ \text{J}$$

ख) कण की कोणीय चाल है $\omega = \dfrac{2\pi}{(22.0\,\text{s})} = 0.286\ \text{rads}^{-1}$

समीकरण 12.20 से, कण का जड़त्व आघूर्ण है $I = \dfrac{2(\text{K.E.})}{\omega^2}$

$$\therefore\ I = \frac{2\times(50.0\,\text{J})}{(0.286\,\text{rad}\,\text{s}^{-1})^2} = 1222.6\,\text{kgm}^2 \approx 1.22\times10^3\ \text{kgm}^2$$

7. समीकरण 12.23ख से, कण के कोणीय संवेग का परिमाण है $L = mvr\sin\theta$, जहां θ, $\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{p}}$ के बीच का कोण है। चित्र 12.23 से, बिंदु O और उस सरल रेखा (जिसके अनुदिश कण गतिमान है) तक की लंबवत् दूरी $r\sin\theta$ है। अतः, कोणीय संवेग का परिमाण है

$$L = (5.0\ \text{kg})\times(2.0\,\text{ms}^{-1})\times(2.0\,\text{m}) = 20\ \text{kgm}^2\text{s}^{-1}$$

कोणीय संवेग की दिशा दक्षिणहस्त नियम द्वारा दी जाती है और $\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{p}}$ द्वारा बने तल के लंबवत् और पृष्ठ के भीतर की ओर है।

8. समीकरण 12.24घ से, बच्ची के कोणीय संवेग का परिमाण है

$$L = (25\,\text{kg})\times(2.5\,\text{m})^2\times\left(\frac{4.0\times2\pi}{60}\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}\right) = 65.4\,\text{kgm}^2\text{s}^{-1} \approx 65\,\text{kgm}^2\text{s}^{-1}$$

क्योंकि मेरी-गो-राउन्ड दक्षिणावर्त घूर्णन कर रहा है, अतः, कोणीय संवेग की दिशा घूर्णन अक्ष के अनुदिश नीचे की ओर है। समीकरण 12.12 से, बल आघूर्ण का परिमाण है

$$\tau = I\alpha, \text{ जहां } \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\therefore \tau = (25\,\text{kg})\times(2.5\,\text{m})^2 \times 0.80\,\text{rad}\,\text{s}^{-2} = 125\text{ Nm} \approx 1.3\times10^2\text{ Nm}$$

9. क्योंकि तारे पर केवल गुरुत्वाकर्षण बल आरोपित होता है, अतः उदाहरण 12.6 से, उसका कोणीय संवेग संरक्षित रहता है। तारे का प्रारंभिक कोणीय संवेग है $L_i = (8.6\times10^{48}\,\text{kgm}^2)\times 1$ परिक्रमण प्रति माह

अंतिम कोणीय संवेग है $L_f = (4.5\times10^{37}\,\text{kgm}^2)\times\omega$ जहां ω न्यूट्रॉन तारे की कोणीय चाल है।

$$\because L_i = L_f,\quad \omega = \frac{8.6\times10^{48}\,\text{kgm}^2}{4.5\times10^{37}\,\text{kgm}^2} \text{ परिक्रमण प्रति माह}$$

$$= 1.9\times10^{11} \text{ परिक्रमण प्रति माह।}$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. कंकड़ पर स्थैतिक घर्षण बल है :

$$F_S = 0.65\times(5.0\times10^{-3}\text{ kg})\times(9.8\text{ ms}^{-2}) = 3.18\times10^{-2}\text{ N}$$

यदि केवल यह बल अभिकेंद्र बल प्रदान करता है, तब $v = 1.5\text{ ms}^{-1}$ के लिए

$$F_S = \frac{mv^2}{R} \quad\Rightarrow\quad R = \frac{mv^2}{F_S}, \text{ जहां } R \text{ टायर की त्रिज्या है।}$$

$$\therefore \quad R = \frac{(5.0\times10^{-3}\text{ kg})\times(1.5\text{ ms}^{-1})^2}{3.18\times10^{-2}\text{ N}} = 0.35\text{ m}$$

2. हम पहले टायर की कोर पर स्थित कण के कोणीय चाल और कोणीय त्वरण प्राप्त करते हैं। फिर हम नेट बल के अभिकेंद्र और स्पर्शरेखीय घटक ज्ञात करते हैं। 5.0 ms^{-1} की चाल के संगत कोणीय चाल ज्ञात करने के लिए, हम परिणाम $v = \omega r$ में $r = 30\text{ cm} = 0.30\text{m}$ रखते हैं। अतः,

$$\omega = \frac{5.0\text{ ms}^{-1}}{0.30\text{m}} = 16.7\text{ rads}^{-1}$$

समीकरण 11.8क में $\omega_0 = 0$, $t = 2.5$ s और $\omega = 16.7\text{ rads}^{-1}$ रखने पर

$$\alpha = \frac{16.7}{2.5}\text{ rads}^{-2} = 6.68\text{ rads}^{-2} \approx 6.7\text{ rads}^{-2}$$

समीकरण 12.2ख से कण पर नेट बल का अभिकेंद्र घटक है :

$$\vec{\mathbf{F}}_r = -(1.0\times10^{-2}\text{ kg})\times(16.7\text{ rads}^{-1})^2\times(0.30\text{ m})\,\hat{\mathbf{r}} = -0.84\text{ N}\,\hat{\mathbf{r}}$$

समीकरण 12.2ग से कण पर नेट बल का स्पर्शरेखीय घटक है :

$$\vec{\mathbf{F}}_t = (1.0\times10^{-2}\text{ kg})\times(6.7\text{ rads}^{-2})\times(0.30\text{ m})\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = 2.0\times10^{-2}\text{ N}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

समीकरण 12.2घ से कण पर नेट बल का परिमाण है

$$F = \sqrt{(-0.84)^2 + (0.02)^2}\ \text{N} = 0.84\ \text{N}$$

नेट बल की दिशा, बल और त्रिज्य दिशा के कोण द्वारा दी जाती है। समीकरण 12.2च से यह कोण है :

$$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{6.7\,\text{rad s}^{-2}}{(16.7\,\text{rad s}^{-1})^2}\right) = \tan^{-1}(-0.024) = 178.6^\circ \approx 179^\circ$$

3. समीकरण 11.8ख से पहिये का कोणीय त्वरण है :

$$\alpha = \frac{2\times 360\,\text{rad}}{(4.0\,\text{s})^2} = 45\ \text{rad s}^{-2}$$

समीकरण 12.12 से, $\tau = (10\,\text{kg m}^2)\times 45\,\text{rad s}^{-2} = 450\ \text{Nm}$

4. पिंड का स्थिति सदिश है $\vec{\mathbf{r}} = (2t^2)\text{m}\,\hat{\mathbf{i}} + (3t)\text{m}\,\hat{\mathbf{j}} + 4\text{m}\,\hat{\mathbf{k}}$

पिंड के वेग और त्वरण हैं :

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \left[\frac{d}{dt}(2t^2)\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{d}{dt}(3t)\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{d}{dt}(4)\,\hat{\mathbf{k}}\right]\text{ms}^{-1} = (4t)\text{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}} + 3\,\text{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d}{dt}(4t)\text{ms}^{-2}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{d}{dt}(3)\text{ms}^{-2}\,\hat{\mathbf{j}} = 4\,\text{ms}^{-2}\,\hat{\mathbf{i}}$$

समीकरण 12.23क से, मूल बिंदु के सापेक्ष पिंड का कोणीय संवेग है :

$$\vec{\mathbf{L}} = (5.0\,\text{kg})[(2t^2\,\text{m}\,\hat{\mathbf{i}} + 3t\,\text{m}\,\hat{\mathbf{j}} + 4\,\text{m}\,\hat{\mathbf{k}})\times(4t\,\text{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}} + 3\,\text{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{j}})]$$

$$= -\,60\,\text{kg m}^2\text{s}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}} + 80\,t\,\text{kg m}^2\text{s}^{-1}\,\hat{\mathbf{j}} - 30\,t^2\,\text{kg m}^2\text{s}^{-1}\,\hat{\mathbf{k}}$$

समीकरण 12.28 से, मूल बिंदु के सापेक्ष पिंड पर लग रहा बल आघूर्ण है :

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = (80\ \text{Nm}\,\hat{\mathbf{j}} - 60t\ \text{Nm}\,\hat{\mathbf{k}})$$

5. $\vec{\mathbf{F}}_1$ के संगत बल आघूर्ण है : $\vec{\boldsymbol{\tau}}_1 = \vec{\mathbf{r}}_1\times\vec{\mathbf{F}}_1 = \vec{\mathbf{0}}$ $(\because\ \vec{\mathbf{r}}_1 = \vec{\mathbf{0}})$

$\vec{\mathbf{F}}_2$ के संगत बल आघूर्ण का परिमाण है : $|\vec{\boldsymbol{\tau}}_2| = |\vec{\mathbf{r}}_2\times\vec{\mathbf{F}}_2|$

$$= (0.2\,\text{m})\times(F\sin 60^\circ\,\text{N}) = 0.17\,F\,\text{Nm} \approx 0.2\,F\,\text{Nm}$$

$\vec{\mathbf{F}}_3$ के संगत बल आघूर्ण का परिमाण है $= (0.5\,\text{m})\times(F\sin 90^\circ\,\text{N}) = 0.5\,F\,\text{Nm}$

$\vec{\mathbf{F}}_4$ के संगत बल आघूर्ण का परिमाण है : $= (0.5\,\text{m})\times(F\sin 45^\circ\,\text{N}) = 0.35\,F\,\text{Nm}$

$\vec{\boldsymbol{\tau}}_5 = \vec{\mathbf{r}}_5\times\vec{\mathbf{F}}_5 = \vec{\mathbf{0}}$ चूंकि $\vec{\mathbf{r}}_5$, $\vec{\mathbf{F}}_5$ के समांतर है। अतः, $\vec{\mathbf{F}}_3$ के संगत बल आघूर्ण का परिमाण सबसे अधिक है।

6. क) समीकरण 12.2क से नाव का स्पर्शरेखीय त्वरण है :

$$a_t = \frac{F_t}{m} = \frac{500\,\text{N}}{200\,\text{kg}} = 2.50\,\text{ms}^{-2}$$

अभिकेंद्र त्वरण ज्ञात करने के लिए हमें 2.0 s पर कोणीय चाल की गणना करनी होगी। समीकरण 11.16ग से, कोणीय त्वरण α है

$$\alpha = \frac{a_t}{r} = \frac{2.50\,\text{ms}^{-2}}{30.0\,\text{m}} = 8.33\times10^{-2}\,\text{rad}\,\text{s}^{-2}$$

प्रारंभिक कोणीय चाल है $\omega_0 = \dfrac{v_t}{r} = \dfrac{5.00\,\text{ms}^{-1}}{30.0\,\text{m}} = 0.167\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$

समीकरण 11.8क से 2.00s पर कोणीय चाल है

$$\omega = 0.167\,\text{rad}\,\text{s}^{-1} + 8.33\times10^{-2}\,\text{rad}\,\text{s}^{-2}\times 2.00\,\text{s} = 0.334\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$$

समीकरण 11.16ग से अभिकेंद्र त्वरण है :

$$\vec{\mathbf{a}}_r = -(0.334\,\text{rad}\,\text{s}^{-1})^2\times(30.0\,\text{m})\,\hat{\mathbf{r}} = -\,3.35\,\text{ms}^{-2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

अभिकेंद्र बल है :

$$\vec{\mathbf{F}}_r = m\,\vec{\mathbf{a}}_r = -(200)\text{kg}\times(3.35\,\text{m}\,\text{s}^{-2})\,\hat{\mathbf{r}} = -\,670\,\text{N}\,\hat{\mathbf{r}}$$

ख) नेट बल अभिकेंद्र बल और स्पर्शरेखीय बल का सदिश योग है :

$$\vec{\mathbf{F}} = -670\,\text{N}\hat{\mathbf{r}} + 500\text{N}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

ग) नेट बल का परिमाण है $F = \sqrt{(670)^2 + (500)^2}\ \text{N} = 836\ \text{N}$

समीकरण 12.2च से नेट बल का त्रिज्य दिशा से कोण है :

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{500\,\text{N}}{-670\,\text{N}}\right) = \tan^{-1}[-0.746] = 143.2^\circ \approx 143^\circ$$

7. समीकरण 12.19 से मोटर द्वारा पहिये पर किया गया कार्य है :

$$W = 30\,\text{Nm}\times 8.0\times 2\pi\ \text{rad} = 1.5\times10^3\ \text{J}$$

पहिये की कोणीय चाल ω की गणना करने के लिए हम समीकरण 12.22 में

$W = 1.5\times10^3$ J, $I = 3.0$ kgm^2, $\omega_1 = 0$ और $\omega_2 = \omega$ रखते हैं। अतः,

$$\frac{1}{2}\times(3.0\,\text{kgm}^2)\omega^2 = 1.5\times10^3\ \text{J} \quad\Rightarrow\quad \omega = 31.6\,\text{rads}^{-1} \approx 32\,\text{rads}^{-1}$$

8. निकाय का कुल कोणीय संवेग $= (\vec{\mathbf{r}}_1\times m\vec{\mathbf{v}}_1) + (\vec{\mathbf{r}}_2\times m\vec{\mathbf{v}}_2)$

$$= (0.5\,\text{m}\,\hat{\mathbf{i}})\times(2.0\ \text{kg}\times 10\,\text{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{j}}) + (-0.5\,\text{m}\,\hat{\mathbf{i}})\times(3.0\ \text{kg}\times[-10\,\text{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{j}}])$$

$$= (10\ \text{kgm}^2\,\text{s}^{-1})(\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}}) + (15\ \text{kgm}^2\,\text{s}^{-1})(\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}}) = (25\ \text{kgm}^2\,\text{s}^{-1})\hat{\mathbf{k}}$$

9. क) हम कोणीय संवेग संरक्षण नियम लागू करते हैं।

निकाय का प्रारंभिक कोणीय संवेग $= \vec{\mathbf{L}}_i = \vec{\mathbf{0}}$

समीकरण 12.24च से, निकाय का अंतिम कोणीय संवेग है :

$\vec{\mathbf{L}}_f$ = मेरी-गो-राउन्ड का कोणीय संवेग + लड़की का कोणीय संवेग

$$= 500\,\text{kgm}^2\,\vec{\boldsymbol{\omega}} - 20\,\text{kg}\times(5.0\,\text{m})^2\left(\frac{1.5}{5.0}\text{s}^{-1}\right)\hat{\mathbf{k}} \quad (\because v = r\omega) \quad \text{(i)}$$

यहां $\hat{\mathbf{k}}$ मेरी-गो-राउन्ड के अक्ष के अनुदिश एकक सदिश है। चूंकि $\vec{\mathbf{L}}_i = \vec{\mathbf{L}}_f$

$$\therefore\ 500\,\text{kgm}^2\,\vec{\boldsymbol{\omega}} - 150\,\text{kgm}^2\,\text{s}^{-1}\hat{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{0}} \ \Rightarrow\ \vec{\boldsymbol{\omega}} = 0.30\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}\hat{\mathbf{k}}$$

मेरी-गो-राउन्ड लड़की के चलने की दिशा के विपरीत दिशा में यानी वामावर्त दिशा में घूर्णन करता है।

ख) कार्य-ऊर्जा प्रमेय से, लड़की द्वारा किया गया कार्य, मेरी-गो-राउन्ड और लड़की की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन के बराबर होता है। चूंकि आरंभ में मेरी-गो-राउन्ड और लड़की विरामावस्था में थे, अतः, समीकरण 12.20 से, मेरी-गो-राउन्ड की गतिज ऊर्जा के लिए व्यंजक लेने पर :

$$\Delta \text{K.E.} = \frac{1}{2} m_g v_g^2 + \frac{1}{2} I_m \omega^2 = W$$

यहां m_g और v_g क्रमशः लड़की के द्रव्यमान और चाल हैं, I_m मेरी-गो-राउन्ड का जड़त्व आघूर्ण है और ω उसकी कोणीय चाल है। अतः,

$$W = \frac{1}{2}\times(20\,\text{kg})\times(1.5\,\text{ms}^{-1})^2 + \frac{1}{2}\times(500\,\text{kg}\,\text{m}^2)\times(0.30\,\text{rads}^{-1})^2 = 45\,\text{J}$$

10. चूंकि ऐक्सल घर्षणहीन है, मेरी-गो-राउन्ड पर नेट बाह्य बल आघूर्ण शून्य है और उसका कोणीय संवेग संरक्षित रहता है : $L_i = L_f$ । यहां

$$L_i = (4500\text{ kg m}^2)\times\left(\frac{2\pi}{60}\text{rad s}^{-1}\right)$$

मान लें कि लड़की का जड़त्व आघूर्ण I_g है। तब

$$L_f = (4500\text{ kg m}^2 + I_g)\times\left(0.9\times\frac{2\pi}{60}\text{rad s}^{-1}\right)$$

$$\therefore (4500\,\text{kgm}^2 + I_g)\times\left(0.9\times\frac{2\pi}{60}\text{rad s}^{-1}\right) = 4500\text{ kg m}^2\times\left(\frac{2\pi}{60}\text{rad s}^{-1}\right)$$

$$I_g = \frac{4500}{0.9}\text{kgm}^2 - 4500\,\text{kgm}^2 = 500\,\text{kgm}^2 = 5\times10^2\text{ kgm}^2$$

हैली पुच्छल तारा औसतन 76 वर्षों में पृथ्वी के सर्वाधिक निकट आता है। सूर्य से इस पुच्छल तारे की अधिकतम दूरी क्या है? इस प्रश्न का उत्तर आप इस इकाई में जानेंगे!

इकाई 13

केन्द्रीय बलों के अधीन गति

इकाई की रूपरेखा

अध्ययन निर्देशिका

इस इकाई में आप **केंद्रीय बल** और **केंद्रीय संरक्षी बल** की अवधारणाएं पढ़ेंगे और केंद्रीय संरक्षी बल के अधीन **गति के व्यापक लक्षणों** को समझेंगे। आप ऐसे बलों के अधीन गतिमान किसी पिंड का **गति का समीकरण** भी प्राप्त करेंगे। हमें आपसे यह अपेक्षा नहीं है कि आप इस गति के समीकरण को हल करें लेकिन इस इकाई में दिये गये **गुरुत्वाकर्षण बल के लिए इसके व्यापक हल** की जानकारी आपको ज़रूर होनी चाहिए। आप इस इकाई में दी गई अवधारणाएं **शायद पहली बार पढ़ रहे हों**। हमने यहां दिए गए गणित को सरल रखा है और सभी चरण दिए हैं। इस इकाई में दी गई अवधारणाओं को बेहतर समझने के लिए आपको कार्य, ऊर्जा, संरक्षी बल और यांत्रिक ऊर्जा के संरक्षण की आवधारणाओं की जानकारी होनी चाहिए जिन्हें हमने खंड 2 की इकाइयों 9 और 10 में समझाया है। आप इकाई 12 में दी गई कोणीय संवेग और बल आघूर्ण की अवधारणाएं भी दोहरा लें, विशेषकर त्रिज्य दिशा के अनुदिश बलों के लिए। साथ ही, आप खंड 1 की इकाइयों 1 और 2 में दी गई **अदिश** और **सदिश गुणनफल** की अवधारणाओं को भी दोहरा लें। आपको फिर से हमारी सलाह है कि आप सभी उदाहरण, बोध प्रश्न और अंत के प्रश्न खुद हल करें।

"प्रकृति में घट रही घटनाओं में इतनी अधिक विविधता है और आकाश में छुपे हुए खज़ाने इतने समृद्ध हैं, सिर्फ़ इसलिए कि मनुष्य के मस्तिष्क को कभी भी ताजा चुनौतियों का अभाव न रहे।"

योहान केप्लर

13.1 परिचय

खंड 2 और इस खंड की इकाइयों 11 और 12 में आपने न्यूटनी यांत्रिकी के बारे में पढ़ा है और साथ ही साथ कार्य, ऊर्जा और कोणीय गति की अवधारणाओं को भी समझा है। **न्यूटनी यांत्रिकी** हमें **ब्रह्माण्ड में स्थित सभी पिंडों की गति** के अध्ययन के लिए आवश्यक भौतिक अंतर्दृष्टि और गणितीय भाषा प्रदान करती है। आपने सीखा है कि न्यूटनी यांत्रिकी हमारे चारों ओर के और संपूर्ण ब्रह्माण्ड के वृहत् पिंडों पर लागू होती है। इस इकाई में आप एक विशेष प्रकार के बलों, जिन्हें हम **केंद्रीय बल** कहते हैं, के अधीन पिंडों की गति के बारे में पढ़ेंगे। हमने खंड 2 की इकाइयों 6 और 7 में आपका परिचय ऐसे दो बलों से कराया है : **गुरुत्वाकर्षण बल** और **कमानी बल** जो संरक्षी भी हैं। इस इकाई के भाग 13.2 और 13.3 में आप **केंद्रीय बल और केंद्रीय संरक्षी बल की परिभाषा** सीखेंगे।

भाग 13.4 में हम **केंद्रीय बलों के अधीन गति के विशेष गुणधर्मों** की चर्चा करेंगे। इन गुणधर्मों के कारण हम किसी भी तरह के केंद्रीय बल के अधीन पिंडों की गति की गुणात्मक व्याख्या कर सकते हैं। भाग 13.4 में हम **केंद्रीय संरक्षी बल**, जो एक विशेष प्रकार का केंद्रीय बल है, के अधीन पिंडों की गति की भी चर्चा करेंगे। आप जानते हैं कि गुरुत्वाकर्षण बल संरक्षी बल है। यह केंद्रीय बल भी है। अतः, यह एक केंद्रीय संरक्षी बल है। भाग 13.5 में आप **व्युत्क्रम-वर्ग बलों** के अधीन गति के बारे में पढ़ेंगे और गुरुत्वाकर्षण बल के अधीन पिंड की गति पर विस्तार से पढ़ेंगे। आप सौर मंडल में गतिमान पिंडों की कक्षाओं की गणना करना भी सीखेंगे। आप यह भी समझ पाएंगे कि केप्लर के ग्रहीय गति के नियम वास्तव में न्यूटन के गति के नियमों और गुरुत्वाकर्षण नियम का एक सरल परिणाम हैं। अंत में, आप इन अवधारणाओं को पृथ्वी या अन्य ग्रहों के चारों ओर परिक्रमा कर रहे पिंडों पर लागू करेंगे। अभी तक आपने एकल कणों की यांत्रिकी के बारे में पढ़ा है। अगली इकाई में, आप बहु-कण निकायों के बारे में पढ़ेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- केंद्रीय बलों और केंद्रीय संरक्षी बलों की परिभाषा दे सकेंगे और उन्हें पहचान सकेंगे;
- केंद्रीय संरक्षी बलों के अधीन गति के गुणधर्मों को समझा सकेंगे;
- केंद्रीय बलों के लिए समान-क्षेत्रफल नियम व्युत्पन्न कर सकेंगे;
- गुरुत्वाकर्षण बल के अधीन गति कर रहे पिंड के लिए गति का समीकरण और उसका व्यापक हल लिख सकेंगे;
- उत्केंद्रता के पदों में उन प्रतिबंधों को लिख सकेंगे जिनके लिए व्युत्क्रम-वर्ग बल के अधीन गतिमान पिंड का पथ, वृत्ताकार, दीर्घवृत्ताकार, अतिपरवलयाकार या परवलयाकार होता है;
- गुरुत्वाकर्षण बल के अधीन दीर्घवृत्तीय कक्षा में गतिमान पिंड की कुल यांत्रिक ऊर्जा और आवर्तकाल निर्धारित कर सकेंगे;
- केप्लर के ग्रहीय गति के नियम लागू कर सकेंगे; और

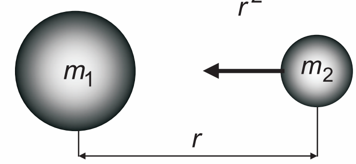
- ❖ सूर्य (पृथ्वी) के गुरुत्वाकर्षण बल के अधीन सौर मंडल में गतिमान किसी पिंड के लिए उसकी कक्षा की उत्केन्द्रता, अर्ध-दीर्घ और अर्ध-लघु अक्ष की लंबाई, रविउच्च (भूमिउच्च) और रविनीच (भूमिनीच) की गणना कर सकेंगे।

13.2 केंद्रीय बल क्या होता है?

आइए, कुछ बलों के उदाहरण लें जिनके बारे में आप स्कूल की भौतिकी में और खंड 2 में पढ़ चुके हैं :

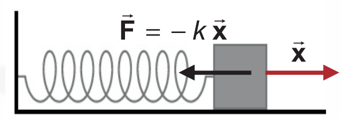
- बिंदु द्रव्यमान m_1 द्वारा दूरी r पर स्थित बिंदु द्रव्यमान m_2 पर आरोपित किया गया **गुरुत्वाकर्षण बल** (चित्र 13.1)। इसका परिमाण $\frac{Gm_1m_2}{r^2}$ है और इसकी दिशा m_1 की ओर और दोनों द्रव्यमानों को जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश होती है।

$$F = G\frac{m_1m_2}{r^2}$$



चित्र 13.1: एक बिंदु द्रव्यमान m_1 के कारण दूरी r पर स्थित बिंदु द्रव्यमान m_2 पर आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल।

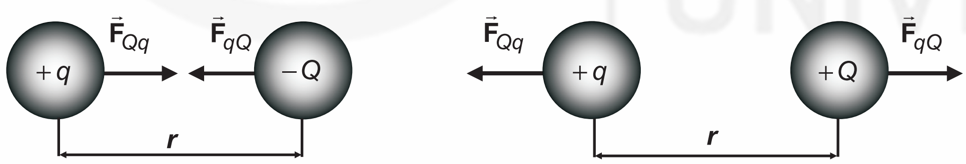
- तनित कमानी के कारण द्रव्यमान पर लग रहा **प्रत्यानयन बल $\vec{\mathbf{F}}$**। यह उस लंबाई x के समानुपाती होता है जिससे कमानी को खींचा जाता है (चित्र 13.2)। इसकी दिशा कमानी के अनुदिश द्रव्यमान के विस्थापन $\vec{\mathbf{x}}$ के विपरीत होती है।



चित्र 13.2: कमानी से जुड़े एक द्रव्यमान पर प्रत्यानयन बल $\vec{\mathbf{F}}$ ।

- बिंदु आवेश q द्वारा दूरी r पर स्थित दूसरे बिंदु आवेश Q पर आरोपित **स्थिर वैद्युत बल** (चित्र 13.3)। इसका परिमाण $k\frac{qQ}{r^2}$ है , जहां k अचर है। इसे **कूलॉम बल** भी कहा जाता है। चित्र 13.3क से आप देख सकते हैं कि जब बल (असमान आवेशों के बीच यानी एक आवेश धनात्मक है और दूसरा ऋणात्मक) आकर्षण बल होता है, तब वह q की ओर होता है। चित्र 13.3ख दिखाता है कि जब वह (समान आवेशों के बीच) प्रतिकर्षण बल होता है तब उसकी दिशा q से परे होती है ।

$$\left|\vec{\mathbf{F}}_{Qq}\right| = \left|\vec{\mathbf{F}}_{qQ}\right| = k\frac{|qQ|}{r^2}$$



(क) (ख)

चित्र 13.3: क) दो असमान आवेशों के बीच लग रहे बल $\vec{\mathbf{F}}_{Qq}$ और $\vec{\mathbf{F}}_{qQ}$ आकर्षण बल हैं; ख) दो समान आवेशों के बीच लग रहे बल $\vec{\mathbf{F}}_{Qq}$ और $\vec{\mathbf{F}}_{qQ}$ प्रतिकर्षण बल हैं।

ध्यान दें

यहां पर अपनाई गई संकेत प्रणाली में :

$\vec{\mathbf{F}}_{qQ}$, q द्वारा Q पर आरोपित बल है।

$\vec{\mathbf{F}}_{Qq}$, Q द्वारा q पर आरोपित बल है ।

आप देख सकते हैं कि ये बल एक-दूसरे से बहुत अधिक भिन्न भौतिक स्थितियों का वर्णन करते हैं। फिर भी **क्या आप इनमें कोई समानता देख सकते हैं**? उत्तर पाने के लिए इनमें से प्रत्येक उदाहरण में **बल की दिशा** पर ध्यान दें।

क्या आपने देखा कि प्रत्येक स्थिति में **बल की दिशा किसी बिंदु विशेष की ओर या उससे परे होती है? साथ ही यह बिंदु नियत रहता है यानी किसी दिए बल के लिए यह समान रहता है।** उदाहरण के लिए, m_1 के कारण m_2 पर लग रहे

गुरुत्वाकर्षण बल की दिशा सदैव द्रव्यमान m_1 की स्थिति की ओर होती है। यह एक विशेष प्रकार के बल का उदाहरण है जिसे हम **केंद्रीय बल** कहते हैं।

चित्र 13.2 और चित्र 13.3 से आप देख सकते हैं कि **कमानी बल** और **स्थिर वैद्युत बल** भी केंद्रीय बलों के उदाहरण हैं। आइए, अब हम केंद्रीय बल की औपचारिक परिभाषा दें।

केंद्रीय बल

केंद्रीय बल वह बल होता है जिसकी दिशा सदैव एक नियत बिंदु की ओर या उसकी विपरीत दिशा में होती है। इस नियत बिंदु को जिसकी ओर या जिससे परे बल की दिशा होती है, बल केंद्र कहते हैं। केंद्रीय बल की दिशा सदैव बल केंद्र की ओर या उसकी विपरीत दिशा में होती है।

आइए, अब हम एक कण पर लग रहे परिमाण F वाले केन्द्रीय बल $\vec{\mathbf{F}}$ का गणितीय व्यंजक लिखें:

केंद्रीय बल

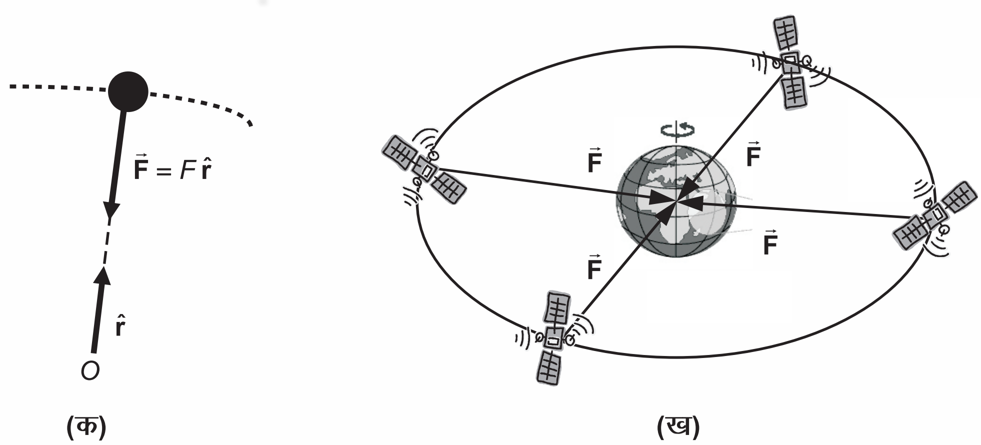
$$\vec{\mathbf{F}} = F\,\hat{\mathbf{r}} \tag{13.1}$$

यहां $\hat{\mathbf{r}}$ **त्रिज्य दिशा में एकक सदिश** है (देखें चित्र 13.4क)। **यह कण को बल के केंद्र से जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश है और बल केन्द्र O की विपरीत दिशा में कण की ओर है**। अतएव, **केंद्रीय बल सदैव त्रिज्य दिशा के अनुदिश होता है**। **द्वि-कण निकायों के लिए** (जैसे कि दो बिंदु द्रव्यमानों के बीच लग रहे गुरुत्वाकर्षण बल या दो आवेशों के बीच लग रहे स्थिर वैद्युत बल के लिए), यह **सदैव उन कणों को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश होता है**। इसी कारण इसे **त्रिज्य बल** भी कहते हैं।

ध्यान दें

जब हम कहते हैं कि बल का केंद्र नियत है तो इसका अर्थ होता है कि किसी दिए बल के लिए वह बिंदु समान रहता है। वह बिंदु अंतरिक्ष में गतिमान हो सकता है या स्थिर भी। उदाहरण के लिए, सूर्य के कारण पृथ्वी पर या अन्य किसी ग्रह पर लग रहा गुरुत्वाकर्षण बल सदैव सूर्य की ओर होता है। बल का केंद्र सूर्य की स्थिति पर होता है। अतः, भले ही सूर्य अंतरिक्ष में गति करता है, बल का केंद्र सूर्य के चारों ओर ग्रहों पर लग रहे गुरुत्वाकर्षण बल के लिए सदैव सूर्य पर स्थित होता है।

ध्यान दें कि बल के अधीन कण की गति के साथ एकक सदिश $\hat{\mathbf{r}}$ की दिशा बदलती है। इकाई 7 का उदाहरण 7.1 याद करें जिसमें आपने गुरुत्वाकर्षण बल के कारण अपनी कक्षा में परिक्रमण करते भूस्थावर उपग्रह के बारे में पढ़ा है। उपग्रह पर बल सदैव पृथ्वी के केंद्र की ओर होता है। इस तरह, उसकी कक्षा के प्रत्येक बिंदु पर बल के अनुदिश एकक सदिश की दिशा बदल जाती है (देखें चित्र 13.4ख)।



चित्र 13.4 : क) केंद्रीय बल $\vec{\mathbf{F}}$ जिसके लिए बल केंद्र O पर है। ध्यान दें कि $\hat{\mathbf{r}}$ त्रिज्य दिशा में एकक सदिश है। इसकी दिशा बल केंद्र से परे है; ख) पृथ्वी के कारण (अपनी कक्षा में परिक्रमण कर रहे) उपग्रह पर लग रहे गुरुत्वाकर्षण बल $\vec{\mathbf{F}}$ की दिशा सदैव पृथ्वी की ओर होती है। यह केंद्रीय बल होता है।

आपने अभी तक के केंद्रीय बलों के उदाहरण में **बल के परिमाण** के बारे में क्या पाया है? इन सभी उदाहरणों में कण पर **बल का परिमाण बल केंद्र से केवल उसकी दूरी पर निर्भर करता है** (अन्य अचर भौतिक राशियों जैसे कि द्रव्यमान, आवेश या कमानी नियतांक आदि के अलावा)। अतः, समीकरण 13.1 में हम बल के परिमाण का व्यंजक $F = f(r)$ लिख सकते हैं और बल का व्यंजक इस तरह लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{F}} = f(r)\,\hat{\mathbf{r}} \qquad (13.2)$$

केंद्रीय संरक्षी बल

समीकरण 13.2 हमें बताता है कि $\vec{\mathbf{F}}$ **का परिमाण** $f(r)$ **केवल बल केंद्र से कण की दूरी पर निर्भर करता है**। समीकरण 13.2 द्वारा परिभाषित बलों को **केंद्रीय संरक्षी बल** कहते हैं। इन्हें यह नाम क्यों दिया जाता है, यह बात आपको अगले भाग में स्पष्ट हो जाएगी। लेकिन आगे पढ़ने से पहले आप समीकरण 13.1 का प्रयोग करके कुछ केंद्रीय बलों की पहचान करें।

आम तौर पर, त्रिविम समष्टि में समीकरण 13.1 का फलन F तीन गोलीय ध्रुवीय निर्देशांकों (r, θ, ϕ) पर निर्भर करता है। लेकिन यह चर्चा हम इस पाठ्यक्रम में नहीं करेंगे।

बोध प्रश्न 1 – केंद्रीय बलों की पहचान

नीचे दिए गए कौन से बल केंद्रीय हैं? (**संकेत** : आपको यह पता लगाना है कि कौन से बल केवल त्रिज्य दिशा $\hat{\mathbf{r}}$ के अनुदिश हैं।)

क) समष्टि में दोलन कर रहे सरल आवर्ती दोलक के लिए बल $\vec{\mathbf{F}} = -k\vec{\mathbf{r}}$, जहां $\vec{\mathbf{r}}$ दोलक का स्थिति सदिश है और k अचर है।

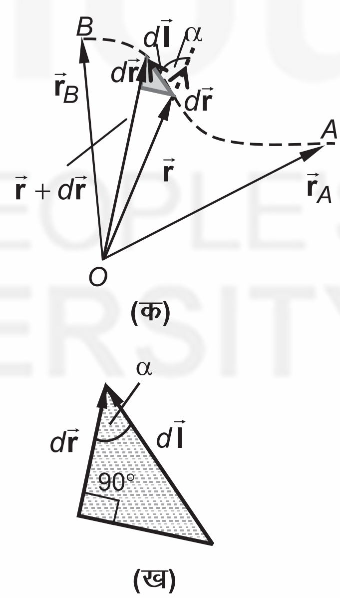
ख) बदल रहे कोणीय वेग से घूर्णन करते कण पर लग रहा बल $\vec{\mathbf{F}} = ar\hat{\mathbf{r}} + br\hat{\boldsymbol{\theta}}$ जहां a और b अचर हैं।

ग) बल $\vec{\mathbf{F}} = -(k/r^3)\,\hat{\mathbf{r}}$ जहां k अचर है।

13.3 केंद्रीय संरक्षी बल क्या होता है?

मान लें कि एक कण बल $\vec{\mathbf{F}} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$ के अधीन समष्टि में पथ AB के अनुदिश गतिमान है (चित्र 13.5क)। इकाई 9 के भाग 9.4. का समीकरण 9.11 याद करें जो बल $\vec{\mathbf{F}}$ द्वारा कण को एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक ले जाने के लिए किए गए कार्य को परिभाषित करता है। समीकरण 9.11 से, बिंदु A से बिंदु B तक कण को ले जाने में किसी बल $\vec{\mathbf{F}}$ द्वारा किया गया कार्य होता है :

$$W = \int_A^B \vec{\mathbf{F}}.d\vec{\mathbf{l}} \qquad (13.3)$$

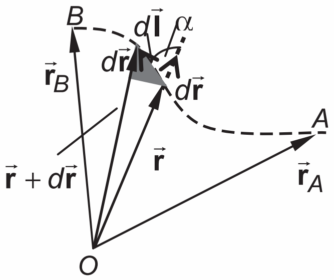


$$\cos\alpha = \frac{dr}{dl}$$
$$\therefore dr = dl\cos\alpha$$

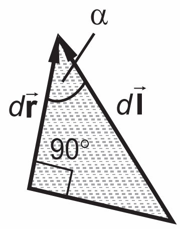
चित्र 13.5: केंद्रीय संरक्षी बल द्वारा किया गया कार्य।

जहां $d\vec{\mathbf{l}}$ पथ के अनुदिश विस्थापन का अवकली अवयव है। ध्यान दें कि हमने समीकरण 13.3 में विस्थापन के अवयव के लिए एक अलग प्रतीक का उपयोग किया है। आइए, हम समीकरण 13.2 से बल का व्यंजक समीकरण 13.3 में रखें। तब बिंदु A से बिंदु B तक कण को ले जाने में बल $\vec{\mathbf{F}} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$ द्वारा किया गया कार्य है :

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{\mathbf{F}}.d\vec{\mathbf{l}} = \int_A^B f(r)\hat{\mathbf{r}}.d\vec{\mathbf{l}} \qquad (13.4\text{क})$$



(क)



(ख)

$$\cos\alpha = \frac{dr}{dl}$$
$$\therefore dr = dl\cos\alpha$$

चित्र 13.5: केंद्रीय संरक्षी बल द्वारा किया गया कार्य।

आइए, अब हम $\hat{\mathbf{r}}.d\vec{\mathbf{l}}$ का मान प्राप्त करें। चित्र 13.5क से ध्यान दें कि $d\vec{\mathbf{l}}$ कण के पथ के अनुदिश सूक्ष्म विस्थापन है और $d\vec{\mathbf{r}}$ त्रिज्य सदिश $\vec{\mathbf{r}} + d\vec{\mathbf{r}}$ के अनुदिश सूक्ष्म अवयव है। मान लें कि अवयव $d\vec{\mathbf{l}}$ और त्रिज्य सदिश $\vec{\mathbf{r}} + d\vec{\mathbf{r}}$ के बीच का कोण α है। चूंकि $d\vec{\mathbf{l}}$ अत्यल्प है, α लगभग $d\vec{\mathbf{l}}$ और त्रिज्य सदिश $\vec{\mathbf{r}}$ के अनुदिश एकक सदिश $\hat{\mathbf{r}}$ के बीच का कोण भी है।

अदिश गुणनफल की परिभाषा से,

$$\hat{\mathbf{r}}.d\vec{\mathbf{l}} = dl\cos\alpha \qquad (13.4\text{ख})$$

अब चित्र 13.5ख देखें जिसमें 13.5क के छायांकित क्षेत्र को आवर्धित करके दिखाया गया है। इसमें अवयव $d\vec{\mathbf{l}}$ और $d\hat{\mathbf{r}}$ और उनके बीच का कोण α दिखाए गए हैं। मान लें कि $d\vec{\mathbf{l}}$ और $d\hat{\mathbf{r}}$ के परिमाण क्रमशः dl और dr हैं। चित्र 13.5ख के समकोण त्रिभुज से आप देख सकते हैं कि $dl\cos\alpha = dr$ । अतः,

$$\hat{\mathbf{r}}.d\vec{\mathbf{l}} = dl\cos\alpha = dr \qquad (13.4\text{ग})$$

समीकरण 13.4क में समीकरण 13.4ग को रखने पर हम पाते हैं कि

$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} f(r)\,dr \qquad (13.5)$$

समीकरण 13.5 हमें बताता है कि $\vec{\mathbf{F}} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$ के स्वरूप के बल द्वारा किन्हीं दो बिंदुओं A और B के बीच गतिमान कण पर किया गया कार्य **बल केंद्र से इन बिंदुओं की दूरी पर ही निर्भर करता है। वह इन दोनों बिंदुओं के बीच कण के वास्तविक पथ पर निर्भर नहीं करता।** जैसा कि आपने इकाई 10 के भाग 10.2 में पढ़ा है, यह संरक्षी बल की परिभाषा है। इस तरह, संरक्षी बल की परिभाषा और समीकरण 13.5 मिलकर हमें बताते हैं कि $\vec{\mathbf{F}} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$ **के स्वरूप के बल संरक्षी होते हैं।** आप समीकरण 13.1 से यह भी जानते हैं कि ये बल **केंद्रीय बल** भी हैं। अतः ऐसे **केंद्रीय बल जो संरक्षी भी होते हैं, केंद्रीय संरक्षी बल कहलाते हैं।** आइए, अब हम केंद्रीय संरक्षी बल की औपचारिक परिभाषा दें।

ध्यान दें

ध्यान दें कि समीकरण 13.5 में हमने बिंदु A से बिंदु B तक की समाकलन सीमाओं को r_A और r_B लिखा है क्योंकि अब समाकलन चर r है। समीकरण 13.5 संरक्षी बल को परिभाषित करने का एक और तरीका है। लेकिन समीकरण 13.5 हमें यह भी बताता है कि $\vec{\mathbf{F}} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$ के स्वरूप के बल संरक्षी होते हैं।

इकाई 10 से याद करें कि कोई बल संरक्षी इसलिए कहलाता है क्योंकि उसके अधीन गतिमान पिंडों की कुल यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित रहती है।

केंद्रीय संरक्षी बल

केंद्रीय संरक्षी बल की दिशा सदैव एक बिंदु विशेष की ओर या उससे परे होती है। यह बिंदु नियत रहता है। बल का परिमाण केवल बल केंद्र से कण की दूरी पर निर्भर करता है। अतः, निम्नलिखित स्वरूप के सभी बल केंद्रीय संरक्षी बल होते हैं :

$$\vec{\mathbf{F}} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$$

ऐसे बलों के लिए कण को एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक ले जाने में किया गया कार्य समीकरण 13.5 द्वारा दिया जाता है। यह केवल उन बिंदुओं पर बल केंद्र से कण की दूरी पर निर्भर करता है **न कि उसके पथ पर। सभी संरक्षी बल केंद्रीय बल होते हैं।**

केंद्रीय संरक्षी बलों के अधीन गति का अध्ययन करने से पहले आप ऐसे कुछ बलों को पहचानें।

बोध प्रश्न 2 – केंद्रीय संरक्षी बलों की पहचान

नीचे दिए गए बलों में से कौन से बल केंद्रीय संरक्षी बल हैं? (**संकेत**: आपको यह पता लगाना है कि इनमें से किन बलों के परिमाण केवल r पर निर्भर करते हैं और दिशाएं केवल त्रिज्य दिशा $\hat{\mathbf{r}}$ के अनुदिश हैं)।

क) x-अक्ष के अनुदिश गतिमान अवमंदित आवर्त दोलक पर लग रहा बल $\vec{\mathbf{F}} = -kx\,\hat{\mathbf{x}} - b\vec{\mathbf{v}}$, जहां $\vec{\mathbf{v}}$ दोलक का वेग है और k और b अचर हैं।

ख) बल $\vec{\mathbf{F}} = -\left(\dfrac{K}{r^3}\right)\hat{\mathbf{r}}$, जहां K अचर है।

ग) बल $\vec{\mathbf{F}} = k\dfrac{\cos\theta}{r^3}\hat{\mathbf{r}}$, जहां k अचर है।

13.4 केंद्रीय संरक्षी बलों के अधीन गति

आइए, अब हम केंद्रीय संरक्षी बलों के अधीन गति का अध्ययन करें। हम **गति का समीकरण** हल करके किसी भी केंद्रीय संरक्षी बल के अधीन गतिमान कणों की स्थितियां और वेग प्राप्त कर सकते हैं। आइए, हम एक केंद्रीय संरक्षी बल के अधीन त्वरण $\vec{\mathbf{a}}$ से गतिमान द्रव्यमान m के कण के लिए **गति का समीकरण** लिखें। इसके लिए हम समीकरण 13.2 से बल $\vec{\mathbf{F}}$ का व्यंजक न्यूटन के गति के दूसरे नियम में रखते हैं :

$$m\vec{\mathbf{a}} = f(r)\hat{\mathbf{r}} \qquad \text{या} \qquad m\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = f(r)\hat{\mathbf{r}} \tag{13.6}$$

अब फलन $f(r)$ के भिन्न रूपों यानी अलग-अलग केंद्रीय संरक्षी बलों के लिए गति के समीकरण भिन्न होंगे। अतः, समीकरण 13.6 के हल भी भिन्न होंगे। लेकिन ऐसे बलों के अधीन गति के कुछ **व्यापक गुणधर्म** होते हैं, जिनके कारण गति के समीकरण को हल करना आसान हो जाता है। आइए, समझें कि ये गुणधर्म क्या हैं।

ध्यान दें

उदाहरण के लिए, एक दूसरे से दूरी r पर स्थित द्रव्यमान m और M के कणों के बीच लग रहे गुरुत्वाकर्षण बल के लिए

$$f(r) = \frac{GMm}{r^2}$$

और एक दूसरे से दूरी r पर स्थित आवेशों q और Q के बीच लग रहे स्थिर वैद्युत बल के लिए

$$f(r) = k\frac{|qQ|}{r^2}$$

13.4.1 केंद्रीय संरक्षी बलों के अधीन गति के गुणधर्म

फलन $f(r)$ का वास्तविक स्वरूप जाने बिना ही केंद्रीय संरक्षी बलों के अधीन गति के कुछ गुणधर्मों का पता लगाया जा सकता है। अब हम इन गुणधर्मों का अध्ययन करेंगे।

1. **कुल यांत्रिक ऊर्जा अचर रहती है।**

   आपने इकाई 10 में पढ़ा है कि संरक्षी बल के अधीन गतिमान कण की कुल यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित रहती है। यह बात उन सभी केंद्रीय बलों पर लागू होती है जो संरक्षी हैं। अतः,

केंद्रीय संरक्षी बलों के अधीन गति के लिए कुल यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित रहती है।

कभी न भूलें

2. **कोणीय संवेग अचर होता है।**

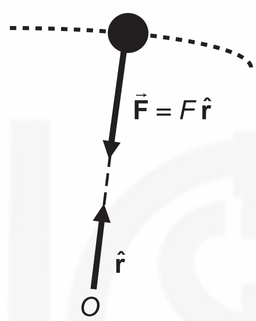
संरक्षी बल की परिभाषा याद करें – इसकी दिशा सदैव एक बिंदु विशेष की ओर या उससे परे होती है। इस कारण से इसका एक विशेष गुणधर्म होता है। इसे पता लगाने के लिए आइए, हम बल केंद्र के सापेक्ष केंद्रीय बल $\vec{\mathbf{F}} = F\hat{\mathbf{r}}$ के कारण लग रहा बल आघूर्ण $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ प्राप्त करें (चित्र 13.6)। चूंकि $\hat{\mathbf{r}}$ सदिश $\vec{\mathbf{r}}$ की दिशा में एकक सदिश है, इसलिए :

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{r}} \times F\hat{\mathbf{r}} = r\hat{\mathbf{r}} \times F\hat{\mathbf{r}} \qquad (13.7\text{क})$$

जहां हमने समीकरण 13.7क में $\vec{\mathbf{r}} = r\hat{\mathbf{r}}$ रखा है। यहां r सदिश $\vec{\mathbf{r}}$ का परिमाण है। अब यह जाने बिना कि फलन F किस प्रकार का है, क्या आप बता सकते हैं कि समीकरण 13.7क में $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ का मान क्या है? यह **शून्य सदिश** है। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों है? ऐसा इसलिए है कि $\hat{\mathbf{r}}$ का अपने साथ सदिश गुणनफल शून्य है (दोनों सदिश एक ही दिशा में हैं) :

$$\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{0}} \qquad (\because |\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}}| = |\hat{\mathbf{r}}||\hat{\mathbf{r}}| \sin 0^\circ = 0) \qquad (13.7\text{ख})$$

समीकरण 13.7क में समीकरण 13.7ख रखने पर हमें मिलता है :



चित्र 13.6: बल केंद्र के प्रति केंद्रीय बल का बल आघूर्ण शून्य होता है क्योंकि बल $\vec{\mathbf{F}}$, $\hat{\mathbf{r}}$ के समांतर होता है।

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{0}} \qquad \text{केंद्रीय बलों के लिए} \qquad (13.7\text{ग})$$

इस तरह, **बल केंद्र के प्रति केंद्रीय बल का बल आघूर्ण सदैव शून्य होता है**। ध्यान दें कि यह केंद्रीय संरक्षी बल के लिए ही नहीं बल्कि किसी भी प्रकार के केंद्रीय बल के लिए भी सत्य है **भले ही उसका परिमाण F कुछ भी हो**। इकाई 12 के समीकरण 12.28 से याद करें कि **किसी बिंदु के प्रति बल का बल आघूर्ण, उस बिंदु के प्रति उसके कोणीय संवेग $\vec{\mathbf{L}}$ में परिवर्तन की दर के बराबर होता है** :

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} \qquad (13.7\text{घ})$$

अतः, केंद्रीय बल के लिए :

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{0}} \quad \text{या} \quad \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\mathbf{0}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{L}} = \text{अचर} \qquad (13.7\text{च})$$

इस तरह, हमें यह परिणाम मिलता है :

$$\text{केंद्रीय और केंद्रीय संरक्षी बलों के लिए } \vec{\mathbf{L}} = \text{अचर} \qquad (13.8)$$

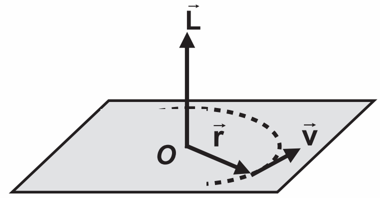
यहां $\vec{\mathbf{L}}$ एक सदिश राशि है। अतः, आप कह सकते हैं कि

कभी न भूलें

केंद्रीय और केंद्रीय संरक्षी बलों के लिए बल केंद्र के प्रति कोणीय संवेग के परिमाण और दिशा दोनों ही अचर होते हैं।

इस तथ्य से कि केंद्रीय बलों के अधीन गति में कोणीय संवेग संरक्षित रहता है, हमें ऐसी गति का एक और गुणधर्म प्राप्त होता है।

3. केंद्रीय बलों के अधीन गतिमान कण केवल एक समतल में गति करते हैं।



चित्र 13.7: अचर कोणीय संवेग $\vec{L}$ वाला कण, $\vec{L}$ के लंबवत् नियत समतल में गति करता है।

इकाई 12 के समीकरण 12.23क को याद करें, जो कोणीय संवेग को परिभाषित करता है। आप जानते हैं कि बिंदु O के गिर्द द्रव्यमान m के कण का कोणीय संवेग होता है :

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{r}} \times m\vec{\mathbf{v}} \tag{13.9}$$

जहां $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$ कण का रैखिक संवेग है, $\vec{\mathbf{v}}$ उसका वेग है और $\vec{\mathbf{r}}$, O के सापेक्ष उसका स्थिति सदिश है। समीकरण 13.9 हमें बताता है कि $\vec{\mathbf{L}}$ सदैव $\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{v}}$ से बने हुए समतल के लंबवत् होता है (देखें चित्र 13.7)। ऐसा क्यों है?

इकाई 12 का उदाहरण 12.6 और सदिश गुणनफल की परिभाषा याद करें। आपने पढ़ा है कि सदिश $\vec{\mathbf{c}}(=\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}})$ की दिशा दक्षिणहस्त नियम द्वारा दी जाती है और वह सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ से बने हुए समतल के लंबवत् होती है।

आप समीकरण 13.8 से यह भी जानते हैं कि केंद्रीय बल के लिए, $\vec{\mathbf{L}}$ की दिशा नियत होती है। **इसका अर्थ है कि इसकी दिशा के लंबवत् समतल भी नियत है** (देखें चित्र 13.7)। यानी **$\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{v}}$ से बना हुआ समतल नियत है**। चूंकि $\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{v}}$ कण का पथ निर्धारित करते हैं, अतः, $\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{v}}$ से बना हुआ समतल वह समतल है जिसमें कण गति करता है। अतः,

केंद्रीय बल के अधीन गतिमान कण सदैव अपने कोणीय संवेग $\vec{\mathbf{L}}$ की दिशा के लंबवत् एक नियत तल में गति करता है।

कभी न भूलें

एक बार फिर केंद्रीय बलों के अधीन गति का यह गुणधर्म किसी भी केंद्रीय बल पर लागू होता है। यह उस बल की प्रकृति पर, जो F द्वारा वर्णित होती है, निर्भर नहीं करता।

आइए, अब हम केंद्रीय संरक्षी बलों के अधीन गति के गुणधर्मों को एक साथ लिखें।

केंद्रीय संरक्षी बलों के अधीन गति के गुणधर्म

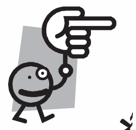
दोहराएं

केंद्रीय संरक्षी बलों के अधीन गति के लिए,

1. **कुल यांत्रिक ऊर्जा अचर होती है,**
2. **बल केंद्र के प्रति कोणीय संवेग के परिमाण और दिशा दोनों ही अचर होते हैं, और**
3. **कण सदैव कोणीय संवेग की दिशा के लंबवत् तल में गति करता है।**

आखिरी दो गुणधर्म उन केंद्रीय बलों के अधीन गति पर भी लागू होते हैं जो संरक्षी नहीं होते।

किसी भी प्रकार की गति में संरक्षित भौतिक राशियों को **गति का अचर** कहा जाता है। अभी तक हमने गति के दो अचर पहचाने हैं।



कभी न भूलें

केंद्रीय संरक्षी बलों के अधीन गति के लिए गति के दो अचर होते हैं : संपूर्ण यांत्रिक ऊर्जा और कोणीय संवेग।

केंद्रीय संरक्षी बलों के अधीन गति के लिए गति के अचर

केंद्रीय संरक्षी बल के लिए गति के अचर हैं :

- **बल के केंद्र के प्रति और कण के पथ के लंबवत् कोणीय संवेग, और**
- **कुल यांत्रिक ऊर्जा।**

अब हम केंद्रीय बलों और केंद्रीय संरक्षी बलों के अधीन गति में कोणीय संवेग संरक्षण का एक रोचक अनुप्रयोग पढ़ेंगे। इसे **समान-क्षेत्रफल नियम** कहते हैं। इसे आप स्कूल की भौतिकी में केप्लर के ग्रहीय गति के नियम के तौर पर पढ़ चुके हैं। लेकिन आगे पढ़ने से पहले आप यह परखें कि आपने केंद्रीय संरक्षी बलों के अधीन गति के गुणधर्मों को समझा है कि नहीं।

बोध प्रश्न 3 – केंद्रीय संरक्षी बलों के अधीन गति

नीचे दिये गए प्रत्येक बल के लिए गति के अचर पहचानें। इनमें से किन बलों के लिए कण समतल में गति करेगा? (**संकेत** : आपको पता लगाना है कि इनमें से कौन से बल केंद्रीय बल हैं और कौन से केंद्रीय संरक्षी बल हैं)।

क) x-अक्ष के अनुदिश गतिमान अवमंदित आवर्त दोलक पर लग रहा बल $\vec{\mathbf{F}} = -kx\,\hat{\mathbf{x}} - b\vec{\mathbf{v}}$, जहां $\vec{\mathbf{v}}$ दोलक का वेग है।

ख) बल $\vec{\mathbf{F}} = -\left(\dfrac{k\cos\theta}{r^3}\right)\hat{\mathbf{r}}$, जहां k अचर है।

ग) बल $\vec{\mathbf{F}} = -\dfrac{GmM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$, जहां G, m और M अचर हैं।

समान-क्षेत्रफल नियम प्राप्त करने के लिए पहले हम **केंद्रीय बल के अधीन xy समतल में गतिमान कण के कोणीय संवेग** का व्यंजक प्राप्त करेंगे।

13.4.2 केंद्रीय बल के अधीन गति के लिए कोणीय संवेग

मान लें कि द्रव्यमान m का एक कण केंद्रीय बल के अधीन एक समतल में गतिमान है। चूंकि कण हमेशा समतल में गति करता है, इसलिए हम उसकी गति का वर्णन **द्विविम निर्देशांक तंत्र में कर सकते हैं** जिसमें **बल केंद्र मूल बिंदु** पर है। हम किसी बिंदु के **समतल ध्रुवीय निर्देशांकों** r और θ का प्रयोग करके गति का अध्ययन कर सकते हैं।

हम कोणीय संवेग की परिभाषा से शुरू करते हैं और समीकरण 12.23क का उपयोग करके बल केंद्र (जिसे हमने मूल बिंदु पर लिया है) के प्रति $\vec{\mathbf{L}}$ का व्यंजक प्राप्त करते हैं। अतः,

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{r}} \times m\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{r}} \times m\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \qquad (13.10)$$

समीकरण 13.10 में $\vec{\mathbf{r}} = r\hat{\mathbf{r}}$ रखकर हम लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{L}} = r\hat{\mathbf{r}} \times m\frac{d(r\hat{\mathbf{r}})}{dt} = r\hat{\mathbf{r}} \times m\left(\hat{\mathbf{r}}\frac{dr}{dt} + r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}\right)$$

या $$\vec{\mathbf{L}} = mr\frac{dr}{dt}(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}}) + mr^2\left(\hat{\mathbf{r}} \times \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}\right) = \vec{\mathbf{0}} + mr^2\left(\hat{\mathbf{r}} \times \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}\right) \qquad (13.11)$$

समीकरण 13.11 के दाईं ओर, पहला पद शून्य है क्योंकि $(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}}) = \vec{\mathbf{0}}$ । अब हम पहले परिणाम $\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ (हाशिए पर दी गई टिप्पणी पढ़ें) का उपयोग समीकरण 13.11 में करके कोणीय संवेग का मान प्राप्त करते हैं :

$$\vec{\mathbf{L}} = mr^2(\hat{\mathbf{r}} \times \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}) = mr^2\dot{\theta}(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}) \qquad (13.12)$$

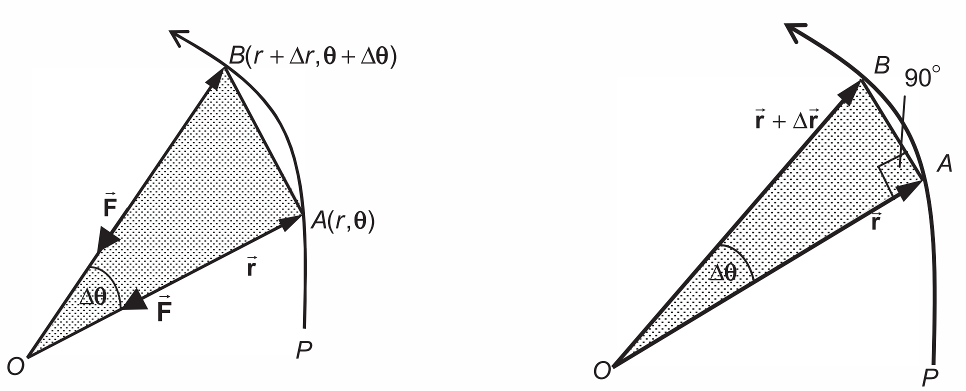
चूंकि एकक सदिश $\hat{\mathbf{r}}$ और $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ xy तल में हैं, अतः, उनका सदिश गुणनफल xy तल के लंबवत् एकक सदिश होगा। उसकी दिशा दक्षिण हस्तनियम द्वारा दी जाएगी और वह z-अक्ष के अनुदिश होगी। इस एकक सदिश के लिए प्रतीक $\hat{\mathbf{k}}$ लेने पर हमें मिलता है : $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{k}}$ । अतः,

$$\boxed{\vec{\mathbf{L}} = mr^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}}} \qquad (13.13)$$

यह एक **केंद्रीय बल के अधीन बल केंद्र के प्रति xy तल में गतिमान द्रव्यमान m वाले कण के कोणीय संवेग का व्यंजक है**। अब हम समान-क्षेत्रफल नियम व्युत्पन्न करेंगे। यह केंद्रीय बल के लिए कोणीय संवेग संरक्षण नियम का ही एक दूसरा स्वरूप है।

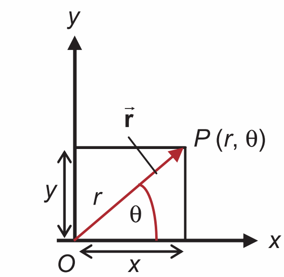
13.4.3 समान-क्षेत्रफल नियम

चित्र 13.8क देखें। इसमें केंद्रीय बल $\vec{\mathbf{F}}$ के अधीन गतिमान कण का पथ PAB दिखाया गया है। मान लें कि पथ के बिंदु A पर किसी क्षण t पर कण का स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}$ है।



(क) (ख)

चित्र 13.8 : समान-क्षेत्रफल नियम प्राप्त करना। क) PAB, **समयांतराल** Δt **में कण का पथ है; ख)** $\Delta\theta$ **के बहुत छोटे मानों के लिए कण का पथ।**



बिंदु P के समतल ध्रुवीय निर्देशांक r और θ है:

$x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\tan\theta = y/x$

तब स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}$ है :

$$\vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$$
$$= r\cos\theta\hat{\mathbf{i}} + r\sin\theta\hat{\mathbf{j}}$$

$\vec{\mathbf{r}}$ के अनुदिश एकक सदिश हैं :

$\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}$ और

$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}$

अतः,

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\theta)\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{d}{dt}(\sin\theta)\,\hat{\mathbf{j}}$$
$$= -\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\mathbf{j}}$$
$$= \dot{\theta}\left(-\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}\right) = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

जहां हमने $\frac{d\theta}{dt}$ के लिए प्रतीक $\dot{\theta}$ लिखा है। साथ ही समीकरण 13.12 प्राप्त करने के लिए हमने अवकली गणित का यह फार्मूला इस्तेमाल किया है :

$$\frac{d}{dt}(fg) = f\frac{dg}{dt} + g\frac{df}{dt}$$

जहां f और g, t के फलन हैं।

चूंकि बल केंद्रीय है, इसलिए कण केवल समतल में गति करेगा। अतः, इसकी गति का वर्णन करने के लिए हमें केवल दो निर्देशांक चाहिए। माना कि बिंदु A के निर्देशांक (r, θ) हैं। मान लें कि कण समयांतराल Δt में A से B तक चलता है जहां उसका स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}} + \Delta\vec{\mathbf{r}}$ है। मान लें कि बिंदु B के निर्देशांक $(r + \Delta r, \theta + \Delta\theta)$ हैं।

चित्र 13.8क से ध्यान दें कि समयांतराल Δt में कण का स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}$ गति के तल में क्षेत्रफल OAB तय करता है (जिसे हमने छायांकित भाग से दिखाया है)। आइए, हम क्षेत्रफल OAB के लिए प्रतीक ΔA लिखें। चित्र 13.8ख से ध्यान दें कि $\Delta\theta$ के बहुत छोटे मानों के लिए बिंदु A, बिंदु B के बहुत निकट है। अतः, क्षेत्रफल ΔA, त्रिभुज OAB के क्षेत्रफल के लगभग बराबर है। यह भी ध्यान दें कि $\Delta\theta$ के बहुत छोटे मानों के लिए चाप AB $(= r\Delta\theta)$ एक सरल रेखा है जिसकी लंबाई त्रिभुज OAB की ऊंचाई के बराबर है। अतः, $\Delta\theta$ के बहुत छोटे मानों के लिए त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल है :

$$\Delta A = \frac{1}{2}\left[\text{आधार } (OA) \times \text{ऊंचाई } (AB)\right] = \frac{1}{2} r \times (r\,\Delta\theta) \tag{13.14}$$

या

$$\Delta A = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta \tag{13.15}$$

हम क्षेत्रीय वेग की परिभाषा इस तरह देते हैं : **क्षेत्रीय वेग स्थिति सदिश द्वारा क्षेत्रफल तय करने की दर है**। अतः, यह समीकरण 13.15 द्वारा दिए गए क्षेत्रफल ΔA का समय के सापेक्ष अवकलज है। अवकली गणित से इसका मान है :

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \tag{13.16}$$

अब आप समीकरण 13.16 की तुलना समीकरण 13.13 से करें। समीकरण 13.13 से कोणीय संवेग का परिमाण $mr^2\dot{\theta}$ है। अतः **क्षेत्रीय वेग** का व्यंजक है :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2\dot{\theta} = \frac{mr^2\dot{\theta}}{2m} = \frac{L}{2m} \tag{13.17}$$

चूंकि **केंद्रीय बलों के अधीन गतिमान अचर द्रव्यमान वाले पिंडों का कोणीय संवेग अचर होता है, अतः, उनका क्षेत्रीय वेग भी अचर होगा**। यही **समान-क्षेत्रफल नियम** है।

समान-क्षेत्रफल नियम

केंद्रीय बलों के लिए समान-क्षेत्रफल नियम

किसी भी केंद्रीय बल के लिए बल केंद्र से कण को जोड़ने वाला त्रिज्य सदिश समान समयांतराल में समान क्षेत्रफल तय करता है :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2\dot{\theta} = \frac{L}{2m} = \text{अचर} \tag{13.17}$$

कोणीय वेग होता है $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ है। यह $\dot{\theta}$ ही है।

पिंड की गति के बारे में हमें समान-क्षेत्रफल नियम [समीकरण 13.17] क्या बताता है? व्यापक तौर पर, यह हमें बताता है : **जब पिंड बल केंद्र के निकट होगा तो वह अधिक वेग से गति करेगा**। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों है? समीकरण 13.17 से आप देख सकते हैं कि r जितना छोटा होगा उतना ही $\dot{\theta}$ (पिंड का कोणीय वेग) अधिक होगा। ऐसा इसलिए है क्योंकि क्षेत्रीय वेग $\left(\frac{1}{2} r^2\dot{\theta}\right)$ अचर है। इस तरह

जब r कम होगा (यानी पिंड बल के केंद्र के निकट होगा) तब पिंड अधिक वेग से गतिमान होगा। r के अधिक मानों के लिए यानी जब पिंड बल के केन्द्र से अधिक दूरी पर होता है क्या होगा? इस प्रश्न का उत्तर आप स्वयं दें।

बोध प्रश्न 4 – समान-क्षेत्रफल नियम

समान-क्षेत्रफल नियम का प्रयोग करके समझाएं कि बल के केंद्र से अधिक दूरी होने पर पिंड का वेग कम क्यों होता है।

ग्रहीय गति का केप्लर का दूसरा नियम समान-क्षेत्रफल नियम का विशेष उदाहरण है। जब हम समान-क्षेत्रफल नियम को सूर्य के चारों ओर उसके गुरुत्वाकर्षण बल के अधीन गति कर रहे ग्रहों पर लागू करते हैं तो हमें केप्लर का दूसरा नियम प्राप्त होता है। इसे आप अगले भाग में पढ़ेंगे।

आइए, अब हम **व्युत्क्रम-वर्ग बल के अधीन गति का अध्ययन करें**। यह हमारे चारों ओर सबसे अधिक व्याप्त केंद्रीय संरक्षी बल है। यह अध्ययन महत्वपूर्ण है क्योंकि बिंदु द्रव्यमानों के बीच लग रहे गुरुत्वाकर्षण बल और आवेशों के बीच लग रहे स्थिर वैद्युत बल व्युत्क्रम-वर्ग बल होते हैं। भाग 13.5 में हम **पिंडों के बीच लग रहे गुरुत्वाकर्षण बल** की चर्चा करेंगे और सौर मंडल में भिन्न पिंडों की कक्षाएं प्राप्त करेंगे।

13.5 व्युत्क्रम-वर्ग बल के अधीन गति

व्युत्क्रम-वर्ग बल का व्यापक स्वरूप है,

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (13.18)$$

व्युत्क्रम-वर्ग बल

यदि समीकरण 13.18 में अचर k ऋणात्मक है (यानी $k < 0$), तब बल की दिशा $\hat{\mathbf{r}}$ के विपरीत और बल के केंद्र की ओर होती है। अतः, यह एक **आकर्षण बल** है।
चित्र 13.1 और 13.3क से याद करें कि **दो द्रव्यमानों के बीच लग रहा गुरुत्वाकर्षण बल और दो विजातीय आवेशों के बीच लग रहा कूलॉम बल व्युत्क्रम-वर्ग आकर्षण बल हैं**। दूसरी ओर यदि k धनात्मक हो (यानी $k > 0$), तब बल की दिशा, बल के केंद्र से परे होती है और वह **व्युत्क्रम-वर्ग प्रतिकर्षण बल** होता है। **दो सजातीय आवेशों के बीच का कूलॉम बल व्युत्क्रम-वर्ग प्रतिकर्षण बल होता है।**

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad k < 0 \text{ के लिए आकर्षण बल} \qquad (13.19\text{क})$$

व्युत्क्रम-वर्ग आकर्षण बल

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad k > 0 \text{ के लिए प्रतिकर्षण बल} \qquad (13.19\text{ख})$$

व्युत्क्रम-वर्ग प्रतिकर्षण बल

अब इस भाग में हम सूर्य के गुरुत्वाकर्षण बल के अधीन गतिमान पिंडों की गति की चर्चा करेंगे। ध्यान रहे कि **बाकी व्युत्क्रम-वर्ग केंद्रीय संरक्षी बलों के लिए विश्लेषण की विधि यही रहेगी**।

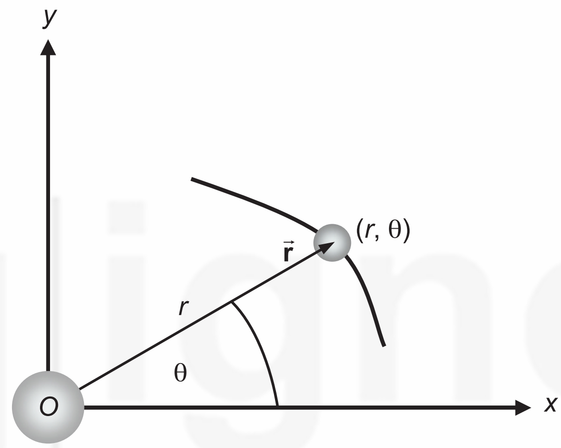
13.5.1 सूर्य के गुरुत्वाकर्षण बल के अधीन गतिमान पिंड

आइए, हम द्रव्यमान M वाले सूर्य के गुरुत्वाकर्षण बल के अधीन गतिमान द्रव्यमान m वाले पिंड का गति का समीकरण लिखें। सौर मंडल में सूर्य का द्रव्यमान किसी भी अन्य पिंड के द्रव्यमान से बहुत अधिक होता है : $M >> m$। हम मान लेते हैं कि **सूर्य विरामावस्था में है** और **निर्देशांक तंत्र का मूल बिंदु सूर्य पर लेते हैं**। तब r पिंड की सूर्य से दूरी है (चित्र 13.9)। गुरुत्वाकर्षण बल का मान न्यूटन के दूसरे नियम में रखने पर हमें मिलता है :

$$m\vec{\mathbf{a}} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (13.20\text{क})$$

सौर मंडल में किसी पिंड का गति का समीकरण

$$\text{अतः,} \quad \vec{\mathbf{a}} = \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad \textbf{गति का समीकरण} \qquad (13.20\text{ख})$$



चित्र 13.9 : सूर्य मूल बिंदु पर है और (r, θ) सौर मंडल में किसी भी पिंड के समतल ध्रुवीय निर्देशांक हैं।

समीकरण 13.20ख लिखने के लिए हमने इन परिणामों का प्रयोग किया है :

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}$$

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2}$$

तब हम समीकरण 13.20ख को समतल ध्रुवीय निर्देशांकों का प्रयोग करके हल कर सकते हैं और पिंड का पथ प्राप्त कर सकते हैं। **हम इस पाठ्यक्रम में समीकरण 13.20ख को हल नहीं करेंगे**। यहां हम अंतिम हल लिखेंगे और फिर भिन्न स्थितियों के लिए विशेष हलों की चर्चा करेंगे। द्रव्यमान M वाले सूर्य के गुरुत्वाकर्षण बल के अधीन द्रव्यमान m वाले पिंड के लिए 13.20ख का व्यापक हल है :

$$\frac{L^2}{GMm^2}\frac{1}{r} = (1 + e\cos\theta) \qquad (13.21\text{क})$$

जहां L सूर्य के प्रति पिंड का कोणीय संवेग है। समीकरण 13.13 से $L = mr^2\dot{\theta}$, जहां $\dot{\theta}$ पिंड का कोणीय वेग है जब वह सूर्य से r की दूरी पर होता है। लेकिन हम जानते हैं कि केंद्रीय बल के अधीन कोणीय संवेग L गति का अचर होता है। यहां

$$e = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{G^2M^2m^3}} \qquad (13.21\text{ख})$$

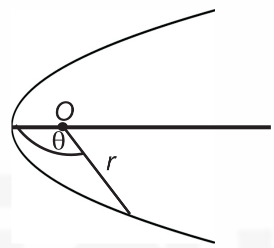
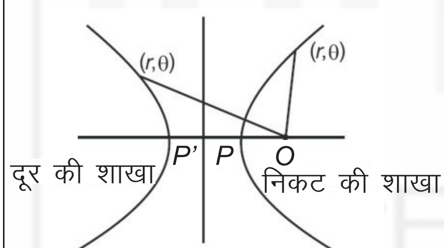
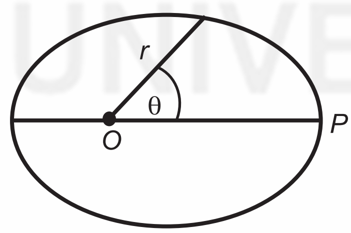
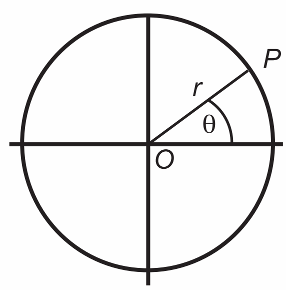
और E निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा है जो कि अचर है। समीकरण 13.21क हमें r और θ के बीच का संबंध देता है जिससे हमें सूर्य के सापेक्ष पिंड की स्थिति प्राप्त होती है। **ध्यान दें** कि जहां समीकरण 13.20ख समय t के सापेक्ष r का परिवर्तन बताता है,

वहां समीकरण 13.21क सूर्य के चारों ओर गतिमान पिंड के **पथ का समीकरण** है। अब हम एक नया अचर $p = \dfrac{L^2}{GMm^2}$ परिभाषित करते हैं और समीकरण 13.21क को इस प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{p}{r} = (1 + e\cos\theta), \qquad \text{जहां} \quad p = \frac{L^2}{GMm^2} \qquad (13.22)$$

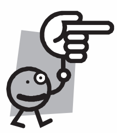
उत्केन्द्रता e के शंकु-परिच्छेद का समीकरण

समीकरण 13.22 एक शंकु-परिच्छेद का समीकरण है जिसकी **उत्केन्द्रता** e है। उत्क्रेन्द्रता के मान से **शंकु-परिच्छेद का आकार और प्रकार** निर्धारित होते हैं (देखें चित्र 13.10क से घ)।

	उत्केन्द्रता	शंकु-परिच्छेद	आकार
क)	$e = 1$	**परवलय**	 (क)
ख)	$e > 1$	**अतिपरवलय**	 (ख)
ग)	$e < 1$	**दीर्घवृत्त**	 (ग)
घ)	$e = 0$	**वृत्त**	 (घ)

चित्र 13.10: शंकु-परिच्छेद का आकार और प्रकार उसकी उत्केन्द्रता के मान से निर्धारित होता है। क) परवलय के लिए $e=1$; ख) अतिपरवलय के लिए $e>1$; ग) दीर्घवृत्त के लिए $e<1$; घ) वृत्त के लिए $e=0$ ।

चित्र 13.10क और ख में ध्यान दें कि यदि पिंड का पथ **परवलय** या **अतिपरवलय** हो तो वह सूर्य (बल के केंद्र) की ओर आएगा और फिर कभी न लौटने के लिए चला जाएगा। ऐसी कक्षाओं को **खुली कक्षाएं** कहा जाता है। यदि पिंड का पथ **दीर्घवृत्त** या **वृत्त** हो तो वह सूर्य के चारों ओर अपनी कक्षा में चक्कर लगाता रहता है। ऐसी कक्षाओं को **संवृत कक्षा** कहते हैं। आइए, अब हम इन बातों का सार दें।



कभी न भूलें

- **सूर्य के गुरुत्वाकर्षण बल के अधीन गतिमान पिंड का पथ एक शंकु-परिच्छेद (वृत्त, दीर्घवृत्त, परवलय या अतिपरवलय) होता है। यह परिणाम सभी व्युत्क्रम-वर्ग बलों के लिए सत्य है।**
- **जब सूर्य के चारों ओर गतिमान पिंड का पथ परवलय या अतिपरवलय होता है तो वह एक खुला पथ होता है। पिंड सूर्य की ओर आता है और फिर निकटतम दूरी पर मुड़ जाता है और कभी लौट कर नहीं आता।**
- **जब सूर्य के चारों ओर गतिमान पिंड की कक्षा वृत्त या दीर्घवृत्त होती है तो वह एक संवृत कक्षा होती है। तब पिंड सूर्य के चारों ओर अपनी कक्षा में गति करता रहता है।**

याद रहे : समीकरण 13.21क द्वारा दिया गया हल हमने निम्न सरल प्रतिबंधों के अधीन लिखा है :

(i) सूर्य स्थिर है, और

(ii) पिंड पर केवल सूर्य का गुरुत्वाकर्षण बल लग रहा है। उस पर सौर मंडल के अन्य पिंडों द्वारा आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल नगण्य हैं।

हम जानते हैं कि वास्तविक सौर मंडल के लिए ये दोनों ही प्रतिबंध सही नहीं हैं क्योंकि सूर्य स्थिर नहीं है और किसी भी पिंड पर सौर मंडल के अन्य पिंड गुरुत्वाकर्षण बल आरोपित करते हैं। लेकिन ये बल सूर्य के गुरुत्वाकर्षण बल की तुलना में नगण्य हैं क्योंकि सूर्य का द्रव्यमान किसी भी अन्य पिंड के द्रव्यमान से बहुत अधिक है। अतः, हमारे सौर मंडल के लिए, जिसमें एक विशाल सूर्य है और अन्य ग्रहों, उनके उपग्रहों, पुच्छल तारों और ग्रहिकाओं जैसे कई छोटे पिंड हैं, ये सरल प्रतिबंध सही हैं।

अब आप समीकरण 13.21क को लागू करने के लिए एक बोध प्रश्न करें।

बोध प्रश्न 5 – उत्केन्द्रता और कक्षा

एक उपग्रह की पृथ्वी के चारों ओर कक्षा का समीकरण है :

$$r = \frac{8000}{1+0.5\cos\theta}\,\text{km}$$

कक्षा की उत्केन्द्रता और आकार क्या हैं?

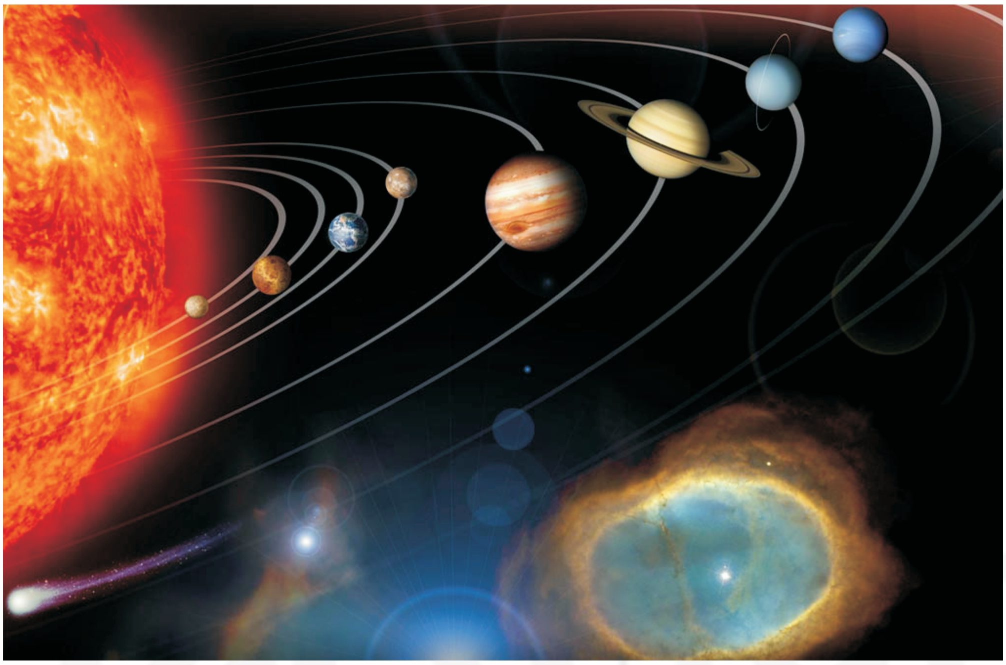
अब हम दीर्घवृत्तीय कक्षाओं की कुछ विस्तार से चर्चा करेंगे क्योंकि सूर्य की परिक्रमा कर रहे ग्रहों, उपग्रहों और पुच्छल तारों की कक्षाएं इसी आकार की होती हैं।

13.5.2 सौर मंडल में दीर्घवृत्तीय कक्षाएं

सौर मंडल में अधिकांश पिंड सूर्य के चारों ओर संवृत दीर्घवृत्तीय कक्षाओं में गतिमान हैं। सूर्य इन दीर्घवृत्तों की एक नाभि पर स्थित है। **सौर मंडल में अधिकतर ग्रहों की कक्षाएं लगभग वृत्ताकार हैं** (चित्र 13.11) **क्योंकि उनकी उत्केन्द्रताओं के मान बहुत कम हैं**। ये मान तालिका 13.1 में दिए गए हैं।

तालिका 13.1 : सौर मंडल में ग्रहों की उत्केन्द्रताएं।

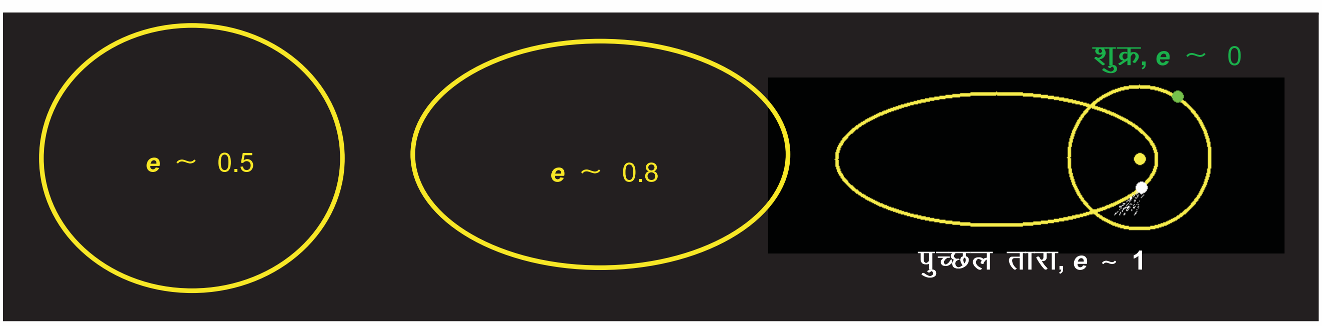
ग्रह	e
बुध	0.2056
शुक्र	0.0068
पृथ्वी	0.0167
मंगल	0.0934
बृहस्पति	0.0483
शनि	0.0560
अरुण	0.0461
वरुण	0.0100



चित्र 13.11: सौर मंडल में ग्रहों की कक्षाओं का मॉडल। स्रोत : www.jpl.nasa.gov

आइए, अब हम दीर्घवृत्तीय कक्षाओं के गुणधर्म कुछ विस्तार से समझें। सबसे पहले हम कुछ कक्षा प्राचलों की परिभाषा देंगे।

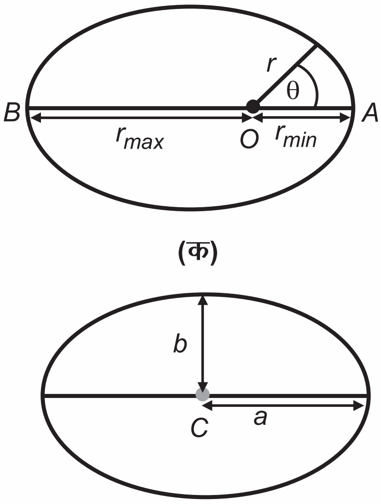
1. **दीर्घवृत्त का आकार उसकी उत्केन्द्रता से निर्धारित होता है** जैसाकि आप चित्र 13.12 में देख सकते हैं। जब e का मान शून्य के निकट होता है तो दीर्घवृत्त लगभग वृत्ताकार होता है, उदाहरण के लिए, सूर्य के चारों ओर शुक्र की कक्षा। जैसे-जैसे यह मान 1 के निकट पहुंचता है, कक्षा दीर्घवृत्ताकार हो जाती है, उदाहरण के लिए, पुच्छल तारों की कक्षाएं।



चित्र 13.12: भिन्न उत्केन्द्रताओं वाले दीर्घवृत्त।

2. आइए, अब हम कुछ अन्य **कक्षीय प्राचलों की गणना करें जो दीर्घवृत्तीय कक्षाओं के ज्यामितीय गुणधर्म निर्धारित करते हैं**। स्कूली गणित से याद करें कि दीर्घवृत्त की दो नाभियां होती हैं। चित्र 13.13क में बिंदु O, जो बल के केंद्र पर है, दीर्घवृत्त की एक नाभि पर स्थित है। चित्र से आप देख सकते हैं कि $\theta = \pi$ पर

r का मान अधिकतम होगा और $\theta = 0$ पर उसका मान न्यूनतम होगा। अतः, समीकरण 13.22 से :



(क)

(ख)

चित्र 13.13 : दीर्घवृत्ताकार कक्षा के प्राचल।

$$\theta = \pi \text{ के लिए} \qquad r_{\max} = \frac{p}{1-e} \tag{13.23क}$$

$$\text{और } \theta = 0 \text{ के लिए} \qquad r_{\min} = \frac{p}{1+e} \tag{13.23ख}$$

बिंदु B पर, जिस पर r अधिकतम है, पिंड बल के केंद्र से अधिकतम दूरी पर होता है। **इस बिंदु को सूर्य की परिक्रमा कर रहे पिंडों के लिए <u>रविउच्च</u> (aphelion) कहा जाता है और पृथ्वी की परिक्रमा कर रहे पिंडों के लिए <u>भूमिउच्च</u> (apogee) कहा जाता है**। बिंदु A पर, जिस पर r न्यूनतम है, पिंड बल के केंद्र से निकटतम होता है। इस बिंदु को बल के केंद्र के सापेक्ष परिक्रमा कर रहे पिंड का **उपगमन बिंदु** कहते हैं। सूर्य की परिक्रमा कर रहे पिंडों के लिए इस बिंदु को **<u>रविनीच</u> (perihelion)** और पृथ्वी की परिक्रमा कर रहे पिंडों के लिए इसे **<u>भूमिनीच</u> (perigee)** कहा जाता है।

चित्र 13.13क में आप देख सकते हैं कि AB दीर्घवृत्त का **दीर्घ अक्ष** है और उसकी लंबाई (A) दो दूरियों $r_{\max}$ और $r_{\min}$ का योग है :

दीर्घ अक्ष

$$A = r_{\max} + r_{\min} = \frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e} = \frac{2p}{1-e^2} \tag{13.24क}$$

दीर्घवृत्त के **अर्ध-दीर्घ अक्ष** की **लंबाई** (a) और **अर्ध-लघु अक्ष** की **लंबाई** (b) (चित्र 13.13ख) की परिभाषाएं इस प्रकार हैं :

अर्ध-दीर्घ अक्ष और अर्ध-लघु अक्ष

$$a = \frac{A}{2} = \frac{p}{1-e^2} \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} \tag{13.24ख}$$

हम समीकरण 13.24ख का प्रयोग करके अर्ध-दीर्घ अक्ष की लंबाई के पदों में रविउच्च (भूमिउच्च) और रविनीच (भूमिनीच) को व्यक्त कर सकते हैं।

रविनीच/भूमिनीच और रविउच्च/भूमिउच्च

रविनीच (या **भूमिनीच**) परिक्रमण कर रहे पिंड का बल के केंद्र से उपगमन बिंदु है। यह पिंड की कक्षा पर वह बिंदु है जिस पर r न्यूनतम होता है, और **रविनीच/भूमिनीच दूरी** का मान होता है :

$$r_p = \frac{p}{1+e} = a(1-e) \tag{13.25क}$$

रविउच्च (या **भूमिउच्च**) पिंड की कक्षा पर वह बिंदु है जो बल के केंद्र से अधिकतम दूरी पर है। यह वह बिंदु है जिसके लिए r अधिकतम है और रविउच्च/भूमिउच्च दूरी का मान होता है :

$$r_a = \frac{p}{1-e} = a(1+e) \tag{13.25ख}$$

हम कुल यांत्रिक ऊर्जा E को भी a के पदों में लिख सकते हैं। यहां हम बिना व्युत्पत्ति दिए हुए सिर्फ परिणाम लिख रहे हैं :

$$E = -\frac{GMm}{2a} \tag{13.26}$$

हम इन परिणामों का सार तालिका 13.2 में दे रहे हैं।

तालिका 13.2 : दीर्घवृत्तीय कक्षाओं के प्राचल।

प्राचल	व्यंजक
अर्ध-दीर्घ अक्ष की लंबाई, a	$a = \frac{p}{1-e^2}$
अर्ध-लघु अक्ष की लंबाई, b	$b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$
रविनीच दूरी, r_p	$r_p = a(1-e)$
रविउच्च दूरी, r_a	$r_a = a(1+e)$
ऊर्जा	$E = -\frac{GMm}{2a}$

आइए, अब हम हैली पुच्छल तारे का उदाहरण लें और उसकी कक्षा के प्राचल दिए होने पर उसकी सूर्य से **रविनीच** और **रविउच्च** दूरियां निर्धारित करें।

उदाहरण 13.1 : हैली पुच्छल तारे की कक्षा

हैली पुच्छल तारा सूर्य के चारों ओर उत्केन्द्रता 0.967 वाली दीर्घवृत्तीय कक्षा में परिक्रमा करता है (चित्र 13.14)। कक्षा के अर्ध-दीर्घ अक्ष की लंबाई 2.7×10^{12} m है। रविनीच और रविउच्च पर सूर्य से पुच्छल तारे की दूरियां प्राप्त करें।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि समीकरणों 13.25क और ख का प्रयोग करके ये दूरियां निर्धारित की जाएं।

कक्षा की रविनीच दूरी है :

$$r_p = a(1-e) = 2.7 \times 10^{12}\,\text{m} \times (1-0.967) = 8.9 \times 10^{10}\,\text{m}$$

कक्षा की रविउच्च दूरी है :

$$r_a = a(1+e) = 2.7 \times 10^{12}\,\text{m} \times (1+0.967) = 5.3 \times 10^{12}\,\text{m}$$

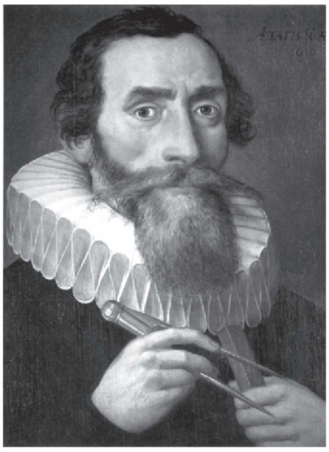
चित्र 13.14: हैली पुच्छल तारा अत्यधिक दीर्घवृत्ताकार कक्षा में चलता है और पृथ्वी पर 76 वर्षों में एक बार लौटता है।

स्रोत: www.nasa.gov

अब आप इन अवधारणाओं पर आधारित एक बोध प्रश्न करें।

बोध प्रश्न 6 – दीर्घवृत्ताकार कक्षा

यम की दीर्घवृत्ताकार कक्षा के लिए अर्ध-दीर्घ अक्ष $a = 5.9 \times 10^{11}$ m और $e = 0.25$ हैं। ग्रह की रविउच्च और रविनीच दूरियों, और कुल यांत्रिक ऊर्जा की गणना करें। यम का द्रव्यमान 1.3×10^{22} kg लें।



चित्र 13.15: योहान केप्लर जर्मनी के गणितज्ञ और खगोलविद थे जो ग्रहीय गति के तीन नियमों के लिए विख्यात हैं।

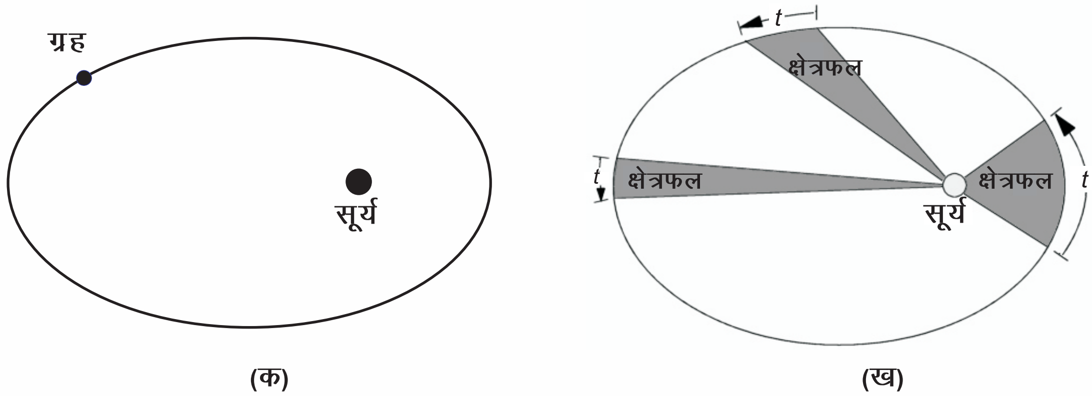
आपने स्कूल की भौतिकी में केप्लर के ग्रहीय गति के नियम पढ़े हैं। अब हम इन नियमों का इस भाग में दी गई जानकारी से संबंध स्थापित करेंगे।

13.5.3 केप्लर के ग्रहीय गति के नियम

योहान केप्लर (चित्र 13.15) ने सूर्य के चारों ओर ग्रहीय गति की व्याख्या के लिए निम्नलिखित तीन नियम दिए थे :

1. सूर्य के चारों ओर ग्रहों के पथ दीर्घवृत्ताकार होते हैं और सूर्य का केंद्र उस दीर्घवृत्त की एक नाभि पर होता है (**दीर्घवृत्त का नियम**)।
2. सूर्य के केंद्र से ग्रह के केंद्र को जोड़ने वाली एक काल्पनिक रेखा समान समयांतरालों में समान क्षेत्रफल तय करती है (**समान-क्षेत्रफल नियम**)।
3. किन्हीं दो ग्रहों के आवर्तकालों के वर्गों का अनुपात सूर्य से उनकी दूरी के घन के अनुपात के बराबर होता है। (**सह-स्वरता का नियम**)

आपने भाग 13.5.1 और 13.5.2 में सीखा है कि केप्लर के पहले दो नियम (देखें चित्र 13.16) व्युत्क्रम-वर्ग गुरुत्वाकर्षण बल के अधीन गति के परिणाम हैं। आपने यह भी स्थापित किया है कि सूर्य द्वारा आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल के अधीन, **ग्रह, ग्रहिकाएं और पुच्छल तारे संवृत दीर्घवृत्ताकार कक्षाओं में गति करते हैं जिनकी एक नाभि पर सूर्य होता है**। केप्लर का ग्रहीय गति का पहला नियम जो हमें संवृत दीर्घवृत्ताकार कक्षाओं के बारे में बताता है, वास्तव में, इस बात का परिणाम है कि गुरुत्वाकर्षण बल, एक व्युत्क्रम-वर्ग बल है और आकर्षण बल है।



चित्र 13.16: केप्लर के ग्रहीय गति के पहले दो नियम। क) ग्रहों की कक्षाएं दीर्घवृत्ताकार हैं; ख) त्रिज्य सदिश द्वारा समान समयांतरालों में तय किया गया क्षेत्रफल अचर रहता

सूर्य का गुरुत्वाकर्षण बल केंद्रीय बल है और वह ग्रह को सूर्य से मिलाने वाली रेखा के अनुदिश होता है। भाग 13.4.3 में व्युत्पन्न किये गए समान-क्षेत्रफल नियम को याद करें। आइए, इसे हम सूर्य के चारों ओर ग्रहीय गति पर लागू करें। यह हमें बताता है कि **सूर्य को ग्रह से जोड़ने वाली रेखा समान समयांतरालों में समान-क्षेत्रफल तय करती है**। यही केप्लर का दूसरा नियम है।

इन दो नियमों से हम केप्लर का तीसरा नियम प्राप्त कर सकते हैं।

आप जानते हैं कि **ग्रह का क्षेत्रीय वेग यानी ग्रह के स्थिति सदिश द्वारा प्रति इकाई समय में तय किया गया क्षेत्रफल अचर होता है**। अतः,

प्रति एकक समय में तय किया गया क्षेत्रफल, $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{L}{2m}$

यदि **ग्रह द्वारा दीर्घवृत्ताकार कक्षा के एक संपूर्ण परिक्रमण में लिया गया समय यानी उसका आवर्तकाल** T हो, तो

एक आवर्तकाल या समय T में तय किया गया क्षेत्रफल $= \left(\dfrac{L}{2m}\right)T$ (13.27क)

अब, **दीर्घवृत्ताकार कक्षा का क्षेत्रफल** $= \pi a b$ (13.27ख)

जहां a अर्ध-दीर्घ अक्ष की लंबाई और b अर्ध-लघु अक्ष की लंबाई है। समीकरणों 13.27क और ख का उपयोग करके हम लिख सकते हैं :

$$\frac{LT}{2m} = \pi a b \qquad (13.27\text{ग})$$

या

$$T^2 = \left(\frac{2m\pi}{L}\right)^2 a^2 b^2 \qquad (13.28)$$

समीकरण 13.24ख से, आप दिखा सकते हैं कि दीर्घवृत्त के अर्ध-दीर्घ अक्ष और अर्ध-लघु अक्ष की लंबाइयों में यह संबंध होता है :

$$b^2 = a^2 (1 - e^2) \qquad (13.29\text{क})$$

चूंकि तालिका 13.2 से $p = a(1 - e^2)$, इसलिए समीकरण 13.29क से हम लिख सकते हैं :

$$b^2 = ap \qquad (13.29\text{ख})$$

समीकरण 13.24ख से हम जानते हैं कि

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$$

अतः, $b^2 = \dfrac{p^2}{(1-e^2)}$

इसे हम ऐसे भी लिख सकते हैं :

$$b^2 = \left[\frac{p}{(1-e^2)}\right]p$$

तालिका 13.2 से हम जानते हैं कि

$$a = \frac{p}{1-e^2}$$

अतः, $b^2 = ap$

समीकरण 13.29ख से b^2 का मान और समीकरण 13.22 से $p = \dfrac{L^2}{GMm^2}$ का मान समीकरण 13.28 में रखने पर हमें मिलता है :

$$T^2 = \left(\frac{2m\pi}{L}\right)^2 pa^3 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$

या

$$\boxed{T^2 = ka^3 \quad \text{जहां} \quad k = \frac{4\pi^2}{GM}} \qquad (13.30)$$

केप्लर का तीसरा नियम

यह **केप्लर का तीसरा नियम** ही है। यह नियम हमें बताता है कि **एक ही वृहत् पिंड के चारों ओर गतिमान ग्रहों के लिए अनुपात $\frac{T^2}{a^3}$ का मान सदैव समान रहता है।**

अभी तक **व्युत्पन्न किये गए परिणामों और केप्लर के नियमों को हम न सिर्फ़ सूर्य के चारों ओर ग्रहों की गति पर लागू कर सकते हैं बल्कि ग्रहों के चारों ओर (प्राकृतिक और कृत्रिम) उपग्रहों की गति पर भी लागू कर सकते हैं**। ये उपग्रह, ग्रह के गुरुत्वाकर्षण बल के अधीन गति करते हैं। चूंकि बल की प्रकृति एक ही है, इसलिए उनकी गति पर लागू होने वाले नियम भी एक ही होंगे। किसी ग्रह के चारों ओर गतिमान पिंडों के लिए, M ग्रह का द्रव्यमान होगा।

क्या आप किसी सरल उदाहरण की कल्पना कर सकते हैं जिसमें उपगमन दूरी की गणना महत्त्वपूर्ण होती है? कल्पना करें कि एक ग्रहिका पृथ्वी की ओर किसी वेग से गतिमान है। क्या वह पृथ्वी से टकराएगी? स्पष्ट है कि अगर उसकी उपगमन दूरी पृथ्वी की त्रिज्या से कम होगी तो वह पृथ्वी से टकरा जाएगी! अब आप केप्लर के नियमों को हेल-बॉप पुच्छल तारे के कक्षीय प्राचलों की गणना के लिए लागू करें।

बोध प्रश्न 7 – हेल-बॉप पुच्छल तारे का आवर्तकाल

सूर्य के चारों ओर गतिमान हेल-बॉप पुच्छल तारे का आवर्तकाल ज्ञात करें। दिया है कि उसकी कक्षा के लिए अर्ध-दीर्घ अक्ष की लम्बाई 2.79×10^{13} m है।

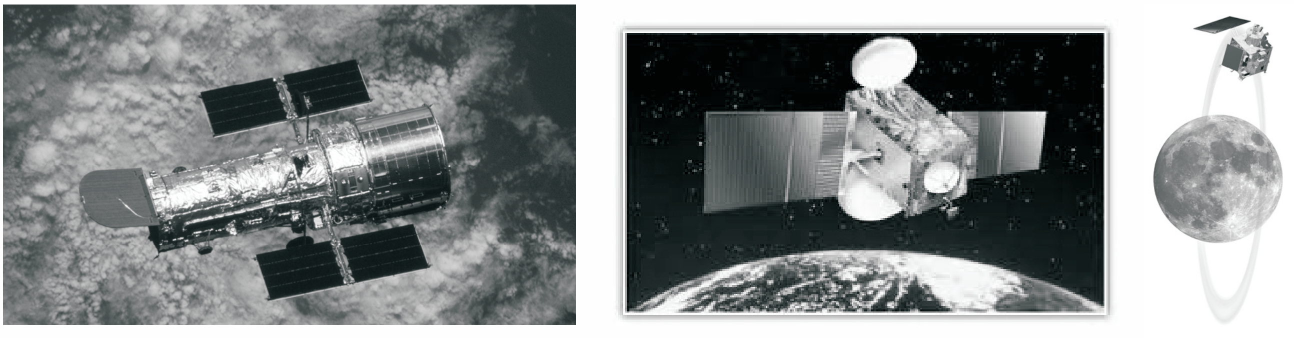
आइए, अभी तक आपने जो सीखा है उसे हम पृथ्वी या अंतरिक्ष में किसी अन्य पिंड के चारों ओर परिक्रमा कर रहे कृत्रिम उपग्रह की गति पर लागू करें।

13.5.4 कृत्रिम उपग्रह

कृत्रिम उपग्रह एक मानव निर्मित पिंड होता है जो लगातार पृथ्वी या अंतरिक्ष में अन्य किसी पिंड की परिक्रमा करता है। जहां आज अधिकांश कृत्रिम उपग्रह पृथ्वी की परिक्रमा करते हैं, कुछ ऐसे भी उपग्रह हैं जो चन्द्रमा, सूर्य, ग्रहिकाओं और शुक्र, मंगल और बृहस्पति जैसे ग्रहों की परिक्रमा कर रहे हैं।

कृत्रिम उपग्रहों के बहुत से अनुप्रयोग होते हैं (देखें चित्र 13.17)। उनका प्रयोग मौसम के पूर्वानुमान के लिए, टेलीफोन और टेलीविज़न संकेतों को समुद्रों के पार पहुंचाने के लिए, पानी के जहाज़ों और हवाई जहाज़ों के संचालन में मदद करने के लिए, फसलों और अन्य संसाधनों को मॉनीटर करने के लिए और रक्षा संबंधी गतिविधियों में होता है। अंतरिक्ष यान अंतरिक्ष यात्रियों को अंतरिक्ष में पहुंचाते हैं। पृथ्वी की परिक्रमा कर रही अंतरिक्ष दूरबीनें ब्रह्माण्ड के सुदूर कोनों के बारे में भी हमें जानकारी देती हैं।

कृत्रिम उपग्रहों की गति पर भी वही नियम लागू होते हैं जिनकी चर्चा हमने पिछले भाग में की है। आइए, हम इनकी संक्षेप में चर्चा करें। मान लें कि द्रव्यमान m का एक कृत्रिम उपग्रह द्रव्यमान M के एक आकाशीय पिंड के चारों ओर दीर्घ वृत्ताकार कक्षा में गतिमान है। माना कि कक्षा के अर्ध-दीर्घ अक्ष की लंबाई a है।



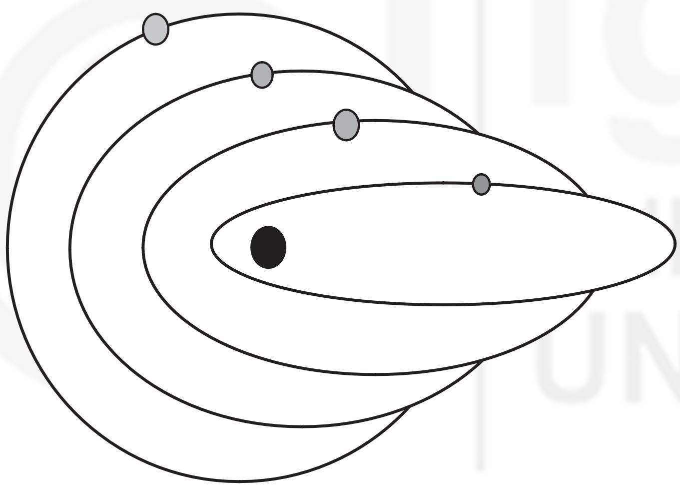
(क) (ख) (ग)

चित्र 13.17: कुछ कृत्रिम उपग्रह। क) हबल अंतरिक्ष दूरबीन; ख) एडूसैट, एक भारतीय भूस्थावर उपग्रह; ग) चंद्रमा की परिक्रमा कर रहा भारतीय उपग्रह, चंद्रयान।

कक्षा में उपग्रह की कुल यांत्रिक ऊर्जा अचर होगी और उसका मान समीकरण 13.26 से है :

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

इस समीकरण का अर्थ समझने के लिए चित्र 13.18 देखें। यह पृथ्वी के चारों ओर परिक्रमा कर रहे समान द्रव्यमान वाले चार उपग्रहों को दिखाता है जिनके अर्ध-दीर्घ अक्ष भी बराबर हैं। आप इन उपग्रहों की ऊर्जा के बारे में क्या कह सकते हैं?



चित्र 13.18: समान दीर्घ अक्ष, अतएव समान ऊर्जा वाले कृत्रिम उपग्रहों की संभव कक्षाएं।

कृत्रिम उपग्रहों की अनेक प्रकार की कक्षाएं संभव हैं। इनमें से कुछ हैं: **भूस्थावर** और **ध्रुवीय कक्षाएं**।

- **भूस्थावर कक्षाएं** : आपने इन कक्षाओं के बारे में इस पाठ्यक्रम की इकाई 7 के उदाहरण 7.1 में पढ़ा है। आपने पृथ्वी की सतह से भूतुल्यकाली उपग्रहों की ऊंचाई की गणना की है। संचार उपग्रह जो टेलीविज़न और टेलीफ़ोन के संकेतों को प्रेषित करते हैं, भूस्थावर कक्षाओं में गति करते हैं। भूमि से देखने पर वे सदैव एक ही स्थिति में दिखाई पड़ते हैं। क्या आप बता सकते हैं कि यह बात किस मायने में उपयोगी है? इसी के कारण टेलीविज़न संकेतों को ग्रहण करने वाले डिश एंटिना

की स्थिति स्थिर रखी जा सकती है और उन्हें गति करने की कोई आवश्यकता नहीं होती।

चित्र 13.19: ध्रुवीय कक्षाओं में कृत्रिम उपग्रह। स्रोत : http://www.enjoyspace.com

- **ध्रुवीय कक्षाएं :** प्रेक्षण और मॉनीटर करने वाले उपग्रहों को ध्रुवीय कक्षाओं में रखा जाता है (चित्र 13.19)। ये कक्षाएं भूमध्य रेखा से 90° के कोण पर होती हैं और इनमें गतिमान उपग्रह पृथ्वी के दोनों ध्रुवों के ऊपर से गति करते हैं। ध्रुवीय कक्षाएं भूस्थावर कक्षाओं की अपेक्षा पृथ्वी की सतह से कम ऊंचाई पर होती हैं। अतः, इन कक्षाओं में गतिमान उपग्रह, पृथ्वी की एक संपूर्ण परिक्रमा में एक दिन से कम समय लेते हैं। फलस्वरूप, उपग्रह के नीचे पृथ्वी गतिमान होती है और इस तरह उपग्रह पृथ्वी की संपूर्ण सतह को मॉनीटर कर सकता है।

इसके साथ ही हम केंद्रीय बलों के अधीन गति पर यह चर्चा समाप्त करते हैं और इस इकाई की अवधारणाओं का सारांश देते हैं।

13.6 सारांश

अवधारणा	विवरण
केंद्रीय बल	■ **केंद्रीय बल** वह बल होता है जिसकी **दिशा सदैव एक नियत बिंदु की ओर या उससे परे होती है।** इस नियत बिंदु को जिसकी ओर या जिससे परे बल की दिशा होती है, **बल का केंद्र** कहते हैं। इस बल का व्यंजक है : $$\vec{\mathbf{F}} = F\hat{\mathbf{r}}$$
केंद्रीय संरक्षी बल	■ जब बल का परिमाण F केवल बल के केंद्र से कण की दूरी पर निर्भर करता है, तब उसे **केंद्रीय संरक्षी बल** कहते हैं। इस बल का व्यंजक है : $$\vec{\mathbf{F}} = f(r)\,\hat{\mathbf{r}}$$ यह बल संरक्षी होता है क्योंकि बल द्वारा कण को किसी पथ के एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक ले जाने में किया गया कार्य केवल उन बिंदुओं पर बल के केंद्र से कण की **दूरी** पर निर्भर करता है **न कि उस कण के पथ पर**।
केंद्रीय बलों और केंद्रीय संरक्षी बलों के अधीन गति के गुणधर्म	■ **केंद्रीय बलों** और **केंद्रीय संरक्षी बलों** के अधीन गति के लिए, i) **बल के केंद्र के प्रति कोणीय संवेग के परिमाण और दिशा दोनों ही अचर होते हैं, और** ii) अतः, वह **कण जिस पर केंद्रीय बल लगता है, सदैव कोणीय संवेग की दिशा के लंबवत् तल में गति करता है।** ■ साथ ही, **केंद्रीय संरक्षी बलों** के अधीन गति के लिए **कुल यांत्रिक ऊर्जा अचर होती है।**
गति के अचर	■ **केंद्रीय संरक्षी बलों के लिए कुल यांत्रिक ऊर्जा और कोणीय संवेग गति के अचर हैं। कोणीय संवेग केंद्रीय बलों के लिए गति का अचर है।**
केंद्रीय संरक्षी बलों के अधीन गति	■ **केंद्रीय संरक्षी बलों** के लिए **गति का समीकरण** होता है : $$\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \frac{f(r)}{m}\hat{\mathbf{r}}$$

इस समीकरण के हल से पिंड का पथ मिलता है। व्युत्क्रम-वर्ग बलों के अधीन गतिमान पिंड की कक्षाओं का उसकी कुल यांत्रिक ऊर्जा E के आधार पर **खुली** और **संवृत** कक्षाओं में वर्गीकरण होता है। व्युत्क्रम-वर्ग बलों के अधीन गतिमान पिंड का **पथ** एक **शंकु-परिच्छेद** होता है। कक्षा की उत्केन्द्रता का मान और शंकु-परिच्छेद का आमाप कोणीय संवेग और कुल यांत्रिक ऊर्जा से निर्धारित होते हैं जो **गति के अचर** हैं।

गुरुत्वाकर्षण बल के अधीन कक्षाएं

■ **गुरुत्वाकर्षण बल के अधीन गतिमान पिंड** की कक्षा का समीकरण होता है :

$$\frac{p}{r} = (1 + e\cos\theta) \qquad \text{जहां} \qquad p = \frac{L^2}{GMm^2}$$

उत्केन्द्रता और कक्षाएं

■ कक्षा की **उत्केन्द्रता** का मान कुल यांत्रिक ऊर्जा और कोणीय संवेग से निर्धारित होता है :

$$e = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{G^2M^2m^3}}$$

$E > 0$ के लिए $e > 1$ **कक्षा अतिपरवलय होती है।**

$E = 0$ के लिए $e = 1$ **कक्षा परवलय होती है।**

$-\frac{L^2}{2mp^2} < E < 0$ के लिए $0 < e < 1$ **कक्षा दीर्घवृत्त होती है।**

$E = -\frac{L^2}{2mp^2}$ के लिए $e = 0$ **कक्षा वृत्त होती है।**

दीर्घवृत्तीय कक्षाओं के लिए कक्षीय प्राचल

■ **दीर्घवृत्तीय कक्षाओं** का आकार उनकी उत्केन्द्रता से निर्धारित होता है और अर्ध-दीर्घ अक्ष और अर्ध-लघु अक्ष से कक्षाओं का आमाप निर्धारित होता है। **कक्षीय प्राचलों** की परिभाषा है :

अर्ध-दीर्घ अक्ष की लंबाई $$a = \frac{p}{1-e^2}$$

अर्ध-लघु अक्ष की लंबाई $$b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$$

रविनीच/भूमिनीच दूरी $$r_p = \frac{p}{1+e} = a(1-e)$$

रविउच्च/भूमिउच्च दूरी $$r_a = \frac{p}{1-e} = a(1+e)$$

गुरुत्वाकर्षण बल के लिए ऊर्जा और कोणीय संवेग

■ गुरुत्वाकर्षण बल के अधीन दीर्घवृत्तीय कक्षाओं में गतिमान पिंड की **कुल यांत्रिक ऊर्जा** का मान होता है :

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

पिंड के **कोणीय संवेग का परिमाण** होता है :

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

कोणीय संवेग की दिशा कण की गति के तल के लंबवत् होती है।

13.7 अंत में कुछ प्रश्न

1. निम्नलिखित में से कौन-से बल केंद्रीय बल हैं? अपने उत्तर के कारण दें।

   क) $\vec{\mathbf{F}} = -4r^2\hat{\mathbf{r}} + k\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$

   ख) $\vec{\mathbf{F}} = \dfrac{\hat{\mathbf{r}}}{\sqrt{r}}$

   ग) $\vec{\mathbf{F}} = -k\hat{\boldsymbol{\theta}}$

   घ) $\vec{\mathbf{F}} = \dfrac{(r-1)}{r^2+1}\hat{\mathbf{r}}$

2. निम्नलिखित में से कौन-से बल केंद्रीय संरक्षी बल हैं? अपने उत्तर के कारण दें।

   क) $\vec{\mathbf{F}} = -4r^2\hat{\mathbf{r}} + k\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$

   ख) $\vec{\mathbf{F}} = \dfrac{\hat{\mathbf{r}}}{\sqrt{r}}$

   ग) $\vec{\mathbf{F}} = -k\hat{\boldsymbol{\theta}}$

   घ) $\vec{\mathbf{F}} = \dfrac{(r-1)}{r^2+1}\hat{\mathbf{r}}$

3. नीचे दिए गए प्रत्येक प्रेक्षण के सामने लिखें कि वह सही है या ग़लत। अपने उत्तर के कारण दें।

   क) पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण बल के अधीन उसकी परिक्रमा कर रहे एक कृत्रिम उपग्रह का कोणीय संवेग समय के साथ परिवर्तित होता है।

   ख) एक ऋणात्मक आयन की ओर गतिमान अल्फ़ा कण समतल में गति करता है।

   ग) एक कृत्रिम उपग्रह पृथ्वी के निकट अधिक चाल से गति करता है।

4. केंद्रीय संरक्षी बलों के अधीन गति के लिए निम्नलिखित में से कौन-सी राशियां गति की अचर हैं?

   क) गतिज ऊर्जा

   ख) स्थितिज ऊर्जा

   ग) रैखिक संवेग

   घ) कोणीय संवेग

   च) कुल यांत्रिक ऊर्जा

   छ) घूर्णी ऊर्जा

5. पृथ्वी की परिक्रमा कर रहे एक उपग्रह के लिए $e = 0.15$ है। कक्षा के अर्ध-दीर्घ अक्ष के निम्नलिखित मानों के लिए उसकी भूमिउच्च और भूमिनीच दूरियों की गणना करें।

   क) $a = 7000\,\text{km}$

   ख) $a = 36000\,\text{km}$

   यदि उपग्रह का द्रव्यमान 2000 kg हो तो प्रत्येक स्थिति के लिए उसकी ऊर्जा की गणना करें।

6. पृथ्वी के चारों ओर परिक्रमा कर रहे द्रव्यमान 1000 kg वाले उपग्रह की कुल यांत्रिक ऊर्जा क्या होगी यदि $a = 5000$ km? निम्नलिखित भूमिउच्च दूरियों के लिए कक्षा की उत्केन्द्रता और आकार प्राप्त करें :

   क) $r_a = 5000$ km

   ख) $r_a = 7500$ km

7. एक तारा 2, 500,000 km त्रिज्या वाली वृत्ताकार कक्षा में एक अन्य वृहत् तारे की परिक्रमा करता है। उसका आवर्तकाल 18 घंटे है और वृहत् तारे का द्रव्यमान 1.00×10^{30} kg है। उन दोनों तारों के बीच की दूरी क्या है?

8. बुध ग्रह की कक्षा दीर्घ-वृत्ताकार है जिसके लिए $e = 0.2056$ है। उसका द्रव्यमान 3.3×10^{23} kg है और कक्षा के अर्ध-दीर्घ अक्ष की लंबाई 57.9×10^{6} km है। निम्नलिखित गणनाएं करें :

   क) रविउच्च और रविनीच दूरियां,

   ख) कुल ऊर्जा, और

   ग) ग्रह की कक्षा का आवर्तकाल।

9. गैलीलियो ने बृहस्पति ग्रह के चार उपग्रहों की खोज की थी। उनमें से एक उपग्रह आयो का कक्षीय आवर्तकाल 1.8 दिन है। बृहस्पति के केंद्र से आयो की दूरी 4.2 इकाई है। दूसरे उपग्रह गैनीमीड की बृहस्पति के केंद्र से दूरी 10.7 इकाई है। केप्लर के तीसरे नियम का प्रयोग करके गैनीमीड के कक्षीय आवर्तकाल की गणना करें।

10. शनि का द्रव्यमान पृथ्वी के द्रव्यमान का 95.18 गुना है। उसके एक उपग्रह टाइटन का कक्षीय आवर्तकाल 15.95 दिन है। टाइटन की शनि से दूरी की गणना करें।

13.8 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. केंद्रीय बल $\vec{\mathbf{F}}$ को हम इस तरह लिख सकते हैं $\vec{\mathbf{F}} = F\,\hat{\mathbf{r}}$ (समीकरण 13.1)। (क) और (ग) में दिये गए बल केंद्रीय बल हैं क्योंकि वे त्रिज्य दिशा में हैं लेकिन (ख) में दिया

गया बल केंद्रीय बल नहीं है क्योंकि उसमें न सिर्फ़ एक त्रिज्य घटक $ar\hat{\mathbf{r}}$ है बल्कि त्रिज्य दिशा के लंबवत् दिशा में भी एक घटक $br\hat{\boldsymbol{\theta}}$ है।

2. केवल (ख) में दिया गया बल $F = -(K/r^3)\hat{\mathbf{r}}$ केंद्रीय संरक्षी बल है क्योंकि यह त्रिज्य दिशा में है और इसका परिमाण (K/r^3) केवल r का फलन है। (क) में दिया गया बल भी त्रिज्य दिशा में है लेकिन इसका परिमाण दोलक के वेग पर निर्भर करता है, अतः यह संरक्षी बल नहीं है। (ग) में दिया गया बल r और θ दोनों ही पर निर्भर करता है, अतः यह संरक्षी बल नहीं है।

3. गति के अचर पहचानने के लिए हमें पहले यह पता लगाना होगा कि इनमें से कौन-से बल केंद्रीय संरक्षी बल हैं। (क) और (ख) में दिये गए बल केंद्रीय बल हैं पर केंद्रीय संरक्षी बल नहीं हैं। (ग) में दिया गया बल केंद्रीय संरक्षी बल है। अतः, (क) और (ख) में दिए गए बलों के अधीन गतिमान कण के लिए कोणीय संवेग संरक्षित रहता है और कण एक समतल में गति करता है। (ग) द्वारा दिये गए बल के लिए दोनों ही कोणीय संवेग और कुल यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित रहते हैं। साथ ही यह कण समतल में गति करता है।

4. यह केंद्रीय बलों के लिए समान क्षेत्रफल नियम का परिणाम है। समीकरण 13.17 में दिये गए समान क्षेत्रफल नियम से : $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} =$ अचर, जहां r बल के केंद्र से पिंड की दूरी है और $\dot{\theta}$ उसकी कोणीय चाल है। चूंकि $r^2\dot{\theta}$ अचर है, अतः कोणीय चाल $\dot{\theta}$ बल के केंद्र से पिंड की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती है : $\dot{\theta} \propto \frac{1}{r^2}$ । अतः, जब पिंड बल के केंद्र के निकट होता है यानी r का मान कम होता है, तब $\dot{\theta}$ का मान अधिक होता है और जब r अधिक होता है, तब $\dot{\theta}$ कम होता है। अतः, बल के केंद्र से अधिक दूरी पर पिंड धीमी चाल से चलता है।

5. यहां हम सूर्य के गुरुत्वाकर्षण बल के अधीन गतिमान पिंड के पथ का समीकरण 13.22 इस्तेमाल करेंगे :

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\theta \qquad \text{(i)}$$

कक्षा की समीकरण $r = \frac{8000}{1 + 0.5\cos\theta}$ km को हम इस प्रकार लिखते हैं

$$\frac{8000}{r} = 1 + 0.5\cos\theta \qquad \text{(ii)}$$

समीकरणों (i) और (ii) की तुलना करके हम लिख सकते हैं :

$$p = 8000\,\text{km} = 8.0 \times 10^6\,\text{m} \quad \text{और} \quad e = 0.5$$

अतः, कक्षा की उत्केन्द्रता 0.5 है और यह दीर्घवृत्ताकार है (क्योंकि $0 < e < 1$) जोकि एक संवृत कक्षा है।

6. हम तालिका 13.2 में दी गई समीकरणों में $a = 5.9 \times 10^{11}\,\text{m}$ और $e = 0.25$ रखेंगे।

रविनीच दूरी है $r_p = a(1 - e) = 4.4 \times 10^{11}\,\text{m}$

रविउच्च दूरी है $r_a = a(1 + e) = 7.4 \times 10^{11}\,\text{m}$

कुल ऊर्जा है $E = -\dfrac{GMm}{2a}$ जहां सूर्य का द्रव्यमान $M = 2.0 \times 10^{30}$ kg, m यम का द्रव्यमान $= 1.3 \times 10^{22}$ kg और $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\text{Nm}^2\,\text{kg}^{-2}$ ।

G, M, m और a के मान रखने पर :

$$E = -\frac{(6.67\times10^{-11}\,\text{Nm}^2\,\text{kg}^{-2})\times(2.0\times10^{30}\,\text{kg})\times(1.3\times10^{22}\,\text{kg})}{2\times(5.9\times10^{11}\,\text{m})} = -1.5\times10^{30}\,\text{J}$$

7. हम समीकरण 13.30 में, $a = 2.79\times10^{13}$ m, $G = 6.67\times10^{-11}\,\text{Nm}^2\,\text{kg}^{-2}$ और सूर्य का द्रव्यमान $M = 2.00\times10^{30}$ kg रखते हैं। तब

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 (2.79\times10^{13}\,\text{m})^3}{6.67\times10^{-11}\,\text{Nm}^2\,\text{kg}^{-2}\times(2.00\times10^{30}\,\text{kg})}}$$

$$= 8.01\times10^{10}\,\text{s} \approx 2543 \text{ वर्ष}$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. (ख) और (घ) में दिये गए बल केंद्रीय बल हैं क्योंकि वे त्रिज्य दिशा में हैं।

2. (ख) और (घ) में दिये गए बल केंद्रीय संरक्षी बल हैं क्योंकि इन बलों के परिमाण केवल बल के केंद्र से दूरी पर निर्भर करते हैं। (क) और (ग) में दिये गए बल केंद्रीय बल नहीं हैं क्योंकि उनके $\hat{\theta}$ के अनुदिश परिमित घटक हैं।

3. क) ग़लत; उपग्रह का कोणीय संवेग अचर है क्योंकि वह गुरुत्वाकर्षण बल के अधीन गतिमान है जोकि एक केंद्रीय बल है।

   ख) सही, ऋणात्मक आयन और अल्फ़ा कण के बीच का बल स्थिर वैद्युत बल है जो एक केंद्रीय बल है। अतः, गति समतल में सीमित होती है।

   ग) सही, यह समान क्षेत्रफल नियम का परिणाम है। केंद्रीय बल के अधीन गति में कोणीय संवेग संरक्षित रहता है। कृत्रिम उपग्रह पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण बल के अधीन गतिमान है जो एक केंद्रीय बल है।

4. केंद्रीय संरक्षी बल के लिए कुल यांत्रिक ऊर्जा और कोणीय संवेग गति के अचर हैं।

5. भूमिउच्च और भूमिनीच दूरियों की गणना के लिए हम $e = 0.15$ और a के मान रख कर समीकरणों 13.25क और ख का प्रयोग करेंगे। ऊर्जा के मान के लिए हम समीकरण 13.26 में G, M (पृथ्वी का द्रव्यमान) और m (उपग्रह का द्रव्यमान) रखेंगे।

   क) $a = 7000\,\text{km}$ के लिए, $r_p = 5950\,\text{km}$, $r_a = 8050\,\text{km}$ और

$$E = -\frac{GMm}{2a} = -\frac{(6.67\times10^{-11}\,\text{Nm}^2\,\text{kg}^{-2})\times(5.97\times10^{24}\,\text{kg})\times(2000\,\text{kg})}{2\times7000\times10^3\,\text{m}}$$

$$= -5.70\times10^{10}\,\text{J}$$

ख) $a = 36000\,\text{km}$ के लिए, $r_p = 30600\,\text{km}$, $r_a = 41400\,\text{km}$ और $E = -1.11 \times 10^{10}\,\text{J}$

6. समीकरण 13.26 से कुल यांत्रिक ऊर्जा है : $E = -\dfrac{GMm}{2a}$, जहां पृथ्वी का द्रव्यमान $M = 5.97 \times 10^{24}\,\text{kg}$, उपग्रह का द्रव्यमान $m = 1000\,\text{kg}$, $a = 5000\,\text{km} = 5.00 \times 10^{6}\,\text{m}$ और $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\text{Nm}^2\,\text{kg}^{-2}$ ।

$$\therefore E = -\frac{6.67 \times 10^{-11}\,\text{Nm}^2\,\text{kg}^{-2} \times 5.97 \times 10^{24}\,\text{kg} \times 1000\,\text{kg}}{2 \times 5.00 \times 10^{6}\,\text{m}} = -3.98 \times 10^{10}\,\text{J}$$

कक्षा की उत्केन्द्रता और आकार के लिए हम समीकरण 13.25ख से लिखते हैं

$$e = \frac{r_a}{a} - 1 \qquad \text{(i)}$$

r_a और $a = 5000$ km दिया है जिससे हम (i) से e निकाल सकते हैं।

क) $r_a = 5000$ km के लिए, $e = 0$ । अतः, उपग्रह की कक्षा वृत्ताकार है।

ख) $r_a = 7500$ km के लिए, $e = \dfrac{7500}{5000} - 1 = 0.5$ । अतः, उपग्रह की कक्षा दीर्घवृत्ताकार है चूंकि $0 < e < 1$ ।

7. हम दोनों तारों के बीच की दूरी समीकरण 13.30 से प्राप्त करते हैं। यहां a तारे की वृत्तीय कक्षा की त्रिज्या है जो तारों के बीच की दूरी भी है। दिया है $T = 18$ घंटे $= 18 \times 3600\,\text{s} = 64800\,\text{s}$, तारे का द्रव्यमान $M = 1.00 \times 10^{30}\,\text{kg}$ और $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\text{Nm}^2\,\text{kg}^{-2}$ । अतः,

$$a = \left[\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right]^{1/3} = \left(\frac{6.67 \times 10^{-11}\,\text{Nm}^2\,\text{kg}^{-2} \times 1.00 \times 10^{30}\,\text{kg} \times (64800\,\text{s})^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

$$= 1.92 \times 10^{9}\,\text{m}$$

8. क) रविउच्च और रविनीच दूरियों की गणना के लिए हम समीकरणों 13.25क और ख में $a = 57.9 \times 10^{6}\,\text{km}$ और $e = 0.2056$ रखते हैं। अतः,

$$r_a = 57.9 \times 10^{6}\,\text{km} \times (1 + 0.2056) = 69.8 \times 10^{6}\,\text{km}$$

$$r_p = 57.9 \times 10^{6}\,\text{km} \times (1 - 0.2056) = 46.0 \times 10^{6}\,\text{km}$$

ख) कुल ऊर्जा की गणना के लिए हम समीकरण 13.26 में सूर्य का द्रव्यमान $M = 2.0 \times 10^{30}\,\text{kg}$, बुध का द्रव्यमान $m = 3.3 \times 10^{23}\,\text{kg}$ और $a = 57.9 \times 10^{6}\,\text{km} = 57.9 \times 10^{9}\,\text{m}$ रखते हैं। अतः,

$$E = -\frac{6.67 \times 10^{-11}\,\text{Nm}^2\,\text{kg}^{-2} \times 2.0 \times 10^{30}\,\text{kg} \times 3.3 \times 10^{23}\,\text{kg}}{2 \times 57.9 \times 10^{9}\,\text{m}} = -3.8 \times 10^{32}\,\text{J}$$

ग) कक्षा के आवर्तकाल की गणना के लिए हम समीकरण 13.30 में
$a = 57.9\times10^9\,\text{m}$, $G = 6.67\times10^{-11}\,\text{Nm}^2\,\text{kg}^{-2}$ और $M = 2.0\times10^{30}\,\text{kg}$
रखते हैं। अतः,

$$T = \left[\frac{4\pi^2(57.9\times10^9\,\text{m})^3}{6.67\times10^{-11}\,\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}\times2.0\times10^{30}\,\text{kg}}\right]^{1/2}\text{s}$$

या $T = 7.6\times10^6\,\text{s} \approx 88$ पृथ्वी के दिन

9. मान लें कि क्रमशः T_1 और T_2, आयो और गैनीमीड के कक्षीय आवर्तकाल हैं और क्रमशः a_1 और a_2, बृहस्पति के केंद्र से उनकी दूरियां हैं। यदि बृहस्पति का द्रव्यमान M_J हो तो समीकरण 13.30 से

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2}{GM_J}a_1^3 \quad \text{और} \quad T_2^2 = \frac{4\pi^2}{GM_J}a_2^3$$

दिया है $T_1 = 1.8$ दिन, $a_1 = 4.2$ इकाई, और $a_2 = 10.7$ इकाई।

अतः, गैनीमीड का कक्षीय आवर्तकाल है :

$$T_2 = \left(\frac{T_1^2\,a_2^3}{a_1^3}\right)^{1/2} = \left[\frac{(1.8\ \text{दिन})^2\times(10.7\ \text{इकाई})^3}{(4.2\ \text{इकाई})^3}\right]^{1/2} = 7.3\ \text{दिन}$$

10. दूरी a की गणना के लिए हम केप्लर के तीसरे नियम यानी समीकरण 13.30 का उपयोग करेंगे जिससे

$$a = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

दिया है $M = 95.18\times5.97\times10^{24}\,\text{kg} = 5.68\times10^{26}\,\text{kg}$

$T = 15.95\times86400\,\text{s} = 1.38\times10^6\,\text{s}$ और $G = 6.67\times10^{-11}\,\text{Nm}^2\,\text{kg}^{-2}$

$$\therefore\ a = \left[\frac{6.67\times10^{-11}\,\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}\times5.68\times10^{26}\,\text{kg}\times(1.38\times10^6\,\text{s})^2}{4\times3.14\times3.14}\right]^{1/3}$$

$$= 1.22\times10^9\,\text{m}$$

ऐसी आतिशबाज़ी में कणों के पथ का वर्णन हम कैसे कर सकते हैं? चित्र का स्रोत : http://www.colorado.edu/physics/ उत्तर आप इस इकाई में सीखेंगे!

इकाई 14

बहु-कण निकायों की गतिकी

इकाई की रूपरेखा

अध्ययन निर्देशिका

इस इकाई में आप पहले **द्वि-कण निकायों** की गतिकी के बारे में पढ़ेंगे। आप देखेंगे कि ऐसे निकायों के लिए युग्मित समीकरणों को दो स्वतंत्र समीकरणों में समानीत करके कैसे हल किया जाता है। यहां पर आप उन सभी अवधारणाओं का प्रयोग करेंगे जिन्हें आपने एकल कण की गति के अध्ययन में सीखा था। इस इकाई में दिए गए गणित को शायद आप पहली बार पढ़ रहे हों। इसलिए हमने उसे सरल रखने की कोशिश की है और गणना के सभी चरण दिए हैं। इसी इकाई में आप इन अवधारणाओं को **बहु-कण निकायों** पर लागू करना सीखेंगे। इस इकाई में दी गई अवधारणाओं को अच्छी तरह समझने के लिए आपको इस पाठ्यक्रम के खंड 2 में दिए गए एकल कण की न्यूटनी यांत्रिकी की सभी अवधारणाओं को अच्छी तरह समझना होगा। अतः, आप खंड 2 में दी गई यांत्रिकी की अवधारणाओं को अच्छी तरह दोहरा लें। साथ ही आपको खंड 1 की इकाइयों 1 और 2 में दी गई **सदिश बीजगणित** और स्कूल की गणित से **कलन** की अवधारणाओं को भी दोहरा लेना चाहिए। आपको फिर से हमारी सलाह है कि आप सभी उदाहरण, बोध प्रश्न और अंत के प्रश्न खुद हल करें।

> **"विज्ञान भिन्न कोटियों की निश्चितताओं वाले कथनों से बना ज्ञान का भंडार है – इनमें से कुछ कथन अत्यधिक अनिश्चित होते हैं, कुछ लगभग निश्चित लेकिन कोई भी कथन पूरी तरह निश्चित नहीं होता।"**
>
> **रिचर्ड फाइनमैन**

14.1 परिचय

खंड 2 में आपने **एकल कणों की गतिकी** और अनेक भौतिक स्थितियों में उनके अनुप्रयोगों के बारे में पढ़ा है। लेकिन अपने चारों ओर हम सूर्य और ग्रह या सौर मंडल में पृथ्वी और चंद्रमा के अलावा द्वि-कण निकायों के बहुत से उदाहरण देखते हैं (चित्र 14.1)। उदाहरण के लिए, हॉकी स्टिक या बल्ले द्वारा मारी गई एक गेंद, द्वि-परमाण्वीय अणु, युग्म-तारा निकाय द्वि-पिंड निकाय हैं। इसी तरह, बहु-कण निकाय भी हमारे चारों ओर मौजूद हैं। उदाहरण के लिए, सूर्य, ग्रह, ग्रहिकाओं और पुच्छल तारों से बना सौर मंडल ऐसा ही एक निकाय है। गैस से भरा सिलिंडर, विस्फोटी तारे, आतिशबाज़ी, चाय का प्याला, हवाई कलाबाज़, गाड़ी, गेंद आदि सभी बहु-कण निकायों के उदाहरण हैं।

चित्र 14.1 : द्वि-कण निकायों के कुछ उदाहरण।

हम ऐसे निकायों की गति का वर्णन कैसे करते हैं? एक तरीका तो यह है कि हम निकाय के प्रत्येक कण पर न्यूटन के गति के दूसरे नियम को लागू करें। उदाहरण के लिए, पृथ्वी-चंद्रमा निकाय लें। पृथ्वी और चंद्रमा की गति निर्धारित करने के लिए हम इन दोनों के लिए अलग-अलग गति के समीकरण लिख सकते हैं और उन्हें हल करके दोनों पिंडों के पथ प्राप्त कर सकते हैं। लेकिन ऐसा करने पर हम पाते हैं कि गणित काफ़ी कठिन हो जाता है। ऐसे निकायों की गतिकी का अध्ययन **संहति केंद्र** की अवधारणा देकर हम काफ़ी सरल कर सकते हैं।

अतः, हम द्वि-कण निकायों के अध्ययन की शुरुआत इस इकाई के भाग 14.2 में संहति केंद्र के अध्ययन से करेंगे। साथ ही हम आपका परिचय **संहति केंद्र निर्देशांकों** और **आपेक्षिक निर्देशांकों** से कराएंगे। फिर भाग 14.3 में हम इन निर्देशांकों के पदों में द्वि-कण निकायों के लिए गति का समीकरण प्राप्त करेंगे। भाग 14.4 में इन अवधारणाओं को हम बहु-कण निकायों पर लागू करेंगे। अगली इकाई में हम द्वि-कण और बहु-कण निकायों के लिए रैखिक संवेग, कोणीय संवेग और ऊर्जा के व्यंजक और उनके संरक्षण नियमों को प्राप्त करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- संहति केंद्र की परिभाषा दे सकेंगे और द्वि-कण निकायों के लिए संहति केंद्र निर्देशांक प्राप्त कर सकेंगे;
- द्वि-कण निकायों के लिए आपेक्षिक निर्देशांक प्राप्त कर सकेंगे;
- द्वि-कण निकायों के गति के समीकरण को संहति केंद्र निर्देशांकों और एकल कण के आपेक्षिक निर्देशांकों में गति के समीकरणों में समानीत कर सकेंगे;
- द्वि-कण निकायों का समानीत द्रव्यमान ज्ञात कर सकेंगे;
- बहु-कण निकायों के लिए संहति केंद्र के निर्देशांक प्राप्त कर सकेंगे; और
- गुरुत्व बल के अधीन बहु-कण निकायों के संहति केंद्र की गति का वर्णन कर सकेंगे।

14.2 द्वि-कण निकायों की गतिकी

निम्नलिखित निकायों को लें :

- पृथ्वी-चंद्रमा निकाय (या सूर्य और किसी एक ग्रह से बना निकाय);
- गैस निष्कासित कर रहा रॉकेट (जहां निष्कासित गैस को एक पिंड माना जा सके);
- युग्म-तारा निकाय;
- हाइड्रोजन परमाणु जो एक इलेक्ट्रॉन और एक प्रोटॉन से बना है;
- द्वि-परमाण्वीय अणु;
- एक कंचे से टकराता दूसरा कंचा;
- एक मूलभूत कण से प्रकीर्णित एक अन्य मूलभूत कण, आदि।

इन निकायों की विशेषता क्या है? इन सभी उदाहरणों में से प्रत्येक में **दो पिंड** हैं जो एक-दूसरे से पारस्परिक क्रिया करते हैं। ये पिंड ब्रह्माण्ड में स्थित अन्य पिंडों से भी पारस्परिक क्रिया कर रहे हो सकते हैं। लेकिन अभी के लिए हम मान लेते हैं कि उन दोनों की पारस्परिक क्रिया के अलावा अन्य सभी पारस्परिक क्रियाएं नगण्य हैं। **ऐसे द्वि-पिंड निकायों को युग्म निकाय भी कहा जाता है।**

अब सवाल यह है : हम **आसान से आसान तरीके से इस द्वि-पिंड निकाय में प्रत्येक पिंड की गति का वर्णन कैसे करें**? इस सवाल का उत्तर **संहति केंद्र** की अवधारणा में निहित है। इसलिए पहले हम पूछते हैं : **संहति केंद्र को परिभाषित करने की आवश्यकता क्यों पड़ती है?**

चित्र 14.2: पृथ्वी-चंद्रमा निकाय।

ध्यान दें

हम इस इकाई में सभी पिंडों को कण मानेंगे। यद्यपि पृथ्वी और चन्द्रमा विस्तारित पिंड हैं, **आप उन्हें इस प्रतिबंध के अधीन कि उनके बीच की दूरी उनकी त्रिज्याओं से कहीं अधिक है, कण मान सकते हैं।**

14.2.1 संहति केंद्र की आवश्यकता क्यों पड़ती है?

आप युग्म निकाय में प्रत्येक पिंड का पथ जानने के लिए न्यूटन के गति के दूसरे नियम को लागू कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, पृथ्वी-चंद्रमा निकाय लें (चित्र 14.2)। चंद्रमा और पृथ्वी की गति निर्धारित करने के लिए आप क्रमशः चंद्रमा (द्रव्यमान m_1, स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}_1$), और पृथ्वी (द्रव्यमान m_2, स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}_2$) के लिए गति के समीकरण इस तरह लिख सकते हैं :

$$m_1 \vec{\mathbf{a}}_1 = m_1 \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_1}{dt^2} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{\mathbf{r}}_{12} \qquad (14.1\text{क})$$

$$m_2 \vec{\mathbf{a}}_2 = m_2 \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_2}{dt^2} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{\mathbf{r}}_{21} \qquad (14.1\text{ख})$$

ध्यान दें कि समीकरण 14.1क में पृथ्वी और चंद्रमा दोनों के ही स्थिति सदिश शामिल हैं चूंकि $\hat{\mathbf{r}}_{12} = \hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2$ । इसी तरह समीकरण 14.1ख में भी पृथ्वी और चंद्रमा दोनों के ही स्थिति सदिश शामिल हैं। साथ ही ध्यान दें कि समीकरण 14.1क और ख को लिखते हुए **हमने पृथ्वी और चंद्रमा को कण माना है हालांकि वे विस्तारित पिंड हैं।**

ऐसा हम कैसे कर सकते हैं? इसके लिए हाशिए में दी गई टिप्पणी पढ़ें।

आम तौर पर द्वि-कण निकायों के गति के समीकरण निम्न स्वरूप के होंगे :

$$m_1 \vec{\mathbf{a}}_1 = m_1 \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}_1}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_1 \qquad (14.1\text{ग})$$

और

$$m_2 \vec{\mathbf{a}}_2 = m_2 \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}_2}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_2 \qquad (14.1\text{घ})$$

जहां $\vec{\mathbf{F}}_1$ और $\vec{\mathbf{F}}_2$ इन कणों पर नेट बल हैं। समीकरणों 14.1ग और घ को जोड़ने पर हम लिख सकते हैं :

$$m_1 \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}_2}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}} \qquad \text{जहां} \quad \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 \qquad (14.1\text{च})$$

इस तरह, $\vec{\mathbf{F}}$ निकाय पर लग रहा नेट बल है। अब इन दो कणों का पथ ज्ञात करने के लिए हमें समीकरणों 14.1क और ख, 14.1ग और घ या 14.1च को हल करना होगा और $\vec{\mathbf{r}}_1$ और $\vec{\mathbf{r}}_2$ के लिए हल प्राप्त करने होंगे। चूंकि ये दोनों ही सदिश दोनों समीकरणों में मौजूद हैं, इसलिए ऐसे समीकरणों (जिन्हें **युग्मित अवकल समीकरण** कहा जाता है) को हल करना कठिन होता है। उदाहरण के लिए, यदि हम अंतरिक्ष में चंद्रमा-पृथ्वी निकाय की गति लें तो हमें **प्रत्येक पिंड के लिए तीन निर्देशांकों का प्रयोग करना होगा**। यानी हमें प्रत्येक पिंड के तीन निर्देशांकों के पदों में **छह युग्मित समीकरण** मिलेंगे। इन छह समीकरणों को हल करना आसान बात नहीं है।

इस तरह आप देख सकते हैं कि **एकल कण की गति निर्धारित करने की अपेक्षा द्वि-कण निकायों में कणों की गति निर्धारित करना कहीं अधिक जटिल होता है**। अब आप पूछेंगे : **क्या इस समस्या को आसान बनाया जा सकता है**? इसका उत्तर है, हां और इसके लिए हम **संहति केंद्र** की अवधारणा देते हैं। आइए, इस अवधारणा को समझें।

14.2.2 संहति केंद्र क्या होता है?

आइए, हम पूछें : क्या हम समीकरणों 14.1क, ख, ग या घ को **निकाय के कुल द्रव्यमान और किसी त्वरण के गुणनफल** के रूप में लिख सकते हैं? हम बेशक ऐसा कर सकते हैं। आइए, देखें कि कैसे।

मान लें कि दोनों द्रव्यमानों का योग, यानी द्वि-कण निकाय का कुल द्रव्यमान $M\ (= m_1 + m_2)$ है। तब अगर हम एक सदिश $\vec{\mathbf{R}}_{cm}$ की परिभाषा इस प्रकार दें :

$$\vec{\mathbf{R}}_{cm} = \frac{m_1 \vec{\mathbf{r}}_1 + m_2 \vec{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2} \qquad (14.2)$$

संहति केंद्र

तो हम समीकरण 14.1च को इस तरह लिख सकते हैं :

$$M \frac{d^2 \vec{\mathbf{R}}_{cm}}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}} \qquad \text{जहां} \quad M = m_1 + m_2 \qquad (14.3)$$

संहति केंद्र का गति का समीकरण

समीकरण 14.3 को लिखते हुए हमने यह माना है कि M अचर है। क्या आप समीकरण 14.3 के परिणाम की जांच करना चाहेंगे?

इसके लिए हम समीकरण 14.2 को इस तरह लिखते हैं :

$$M\vec{\mathbf{R}}_{cm} = m_1\vec{\mathbf{r}}_1 + m_2\vec{\mathbf{r}}_2 \qquad (14.4)$$

आइए, अब हम समीकरण 14.4 का समय के सापेक्ष दो बार अवकलन करें। तब हमें मिलता है :

आप इस अवधारणा पर एक वीडियो देखना चाहेंगे जो http://www.answers.com/topic/center-of-mass पर उपलब्ध है।

$$M\frac{d\vec{\mathbf{R}}_{cm}}{dt} = m_1\frac{d\vec{\mathbf{r}}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{\mathbf{r}}_2}{dt} \qquad (14.5\text{क})$$

और

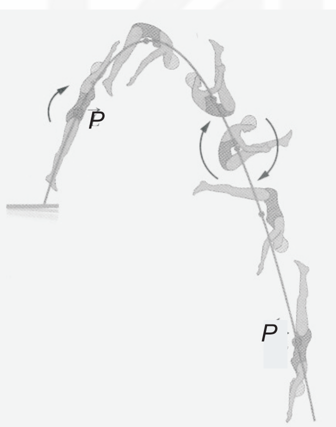
$$M\frac{d^2\vec{\mathbf{R}}_{cm}}{dt^2} = m_1\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_1}{dt^2} + m_2\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_2}{dt^2} \qquad (14.5\text{ख})$$

समीकरण 14.1च से $\vec{\mathbf{F}}$ का मान समीकरण 14.5ख में रखने पर हमें समीकरण 14.3 मिलता है।

इस तरह, हम पाते हैं कि

द्वि-कण निकाय पर लग रहा नेट बाह्य बल उसके कुल द्रव्यमान और एक काल्पनिक बिन्दु के, जिसका स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{R}}_{cm}$ द्वारा दिया जाता है, त्वरण के गुणनफल के बराबर है। इस बिन्दु को निकाय का संहति केंद्र कहते हैं। ध्यान रहे कि यह एक काल्पनिक बिन्दु है और केवल एक गणितीय संकल्पना है।

आप पूछ सकते हैं : **संहति केंद्र की अवधारणा की क्या उपयोगिता है**? इस सवाल का जवाब देने के लिए आइए, देखें कि समीकरण 14.3 हमें क्या बताता है। यह हमें बताता है कि



चित्र 14.3: तरण ताल में कूदती एक तैराक। यद्यपि उसके शरीर पर स्थित अधिकतर बिंदुओं के पथ जटिल हैं, एक विशेष बिंदु जिसे हमने चित्र में दिखाया है परवलयाकार पथ पर चलता है। यह बिंदु उसका संहति केंद्र है। यदि हम तैराक को एक कण मानें तो यही उसका पथ होगा।

1. **निकाय का संहति केंद्र इस प्रकार गति करता है मानो द्रव्यमान M (निकाय का कुल द्रव्यमान) का एक कण उस बिन्दु पर स्थित हो। इस कण पर नेट बल लगता है जो निकाय के कणों पर लग रहे सभी बाह्य बलों का परिणामी होता है।**
2. यदि निकाय पर लग रहा नेट बाह्य बल शून्य हो, तो भले ही निकाय के कण किसी भी प्रकार से गति करें, **उसका संहति केंद्र अचर वेग से गति करेगा**। यदि वह प्रारंभ में विरामावस्था में होगा तो वह सदैव ही विरामावस्था में रहेगा।
3. संहति केंद्र की गति निकाय के कणों की गति पर निर्भर नहीं करती। वह उनसे स्वतंत्र होती है।

इस तरह संहति केंद्र की अवधारणा देकर और उसे समीकरण 14.2 द्वारा परिभाषित करके हम उसके घटकों की गति के बजाय **संपूर्ण निकाय** की गति का विश्लेषण कर सकते हैं। यदि हम केवल कणों के निकाय या विस्तारित पिंडों (जिनमें अनगिनत कण होते हैं) के संहति केंद्र की गति पर ध्यान दें तो हम निकाय की जटिल गति का एक सरल तरीके से वर्णन कर सकते हैं।

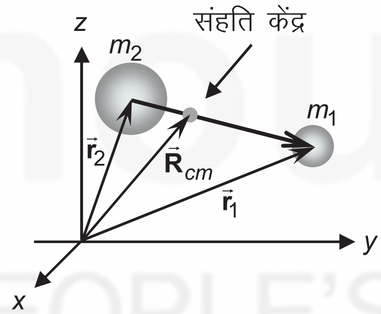
उदाहरण के लिए, तरण ताल में गोता लगा रही एक तैराक का चित्र देखें (चित्र 14.3)। उसके शरीर पर अंकित बिन्दु P पर ध्यान दें। जब तैराक बोर्ड से कूदती है तो इस बिन्दु का पथ क्या होता है? यह एक परवलय है जो कि प्रक्षेप्य गति कर रहे कण का

पथ होता है। यानी उसके शरीर पर एक बिन्दु ऐसा है जो ठीक उस तरह गति करता है जैसे कि उसका शरीर करता यदि हम उसे एक कण मानते। यह बिन्दु उसके **शरीर का संहति केंद्र** है। यानी हमें यदि इस बात में कोई दिलचस्पी नहीं है कि तैराक की बांहें और पैर उसके कूदने के दौरान किस तरह गति करते हैं तो हमें केवल उसके संहति केंद्र की गति का विश्लेषण करना होगा। संहति केंद्र को परिभाषित करने का एक और फ़ायदा है। समीकरण 14.5क लें। हम इसे ऐसे लिख सकते हैं :

$$M\vec{\mathbf{V}}_{cm} = m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2 \qquad (14.6)$$

जहां $\vec{\mathbf{V}}_{cm}$ संहति केंद्र का वेग है, $\vec{\mathbf{v}}_1$ और $\vec{\mathbf{v}}_2$ क्रमशः द्रव्यमानों m_1 और m_2 के वेग हैं। समीकरण 14.6 हमें क्या बताता है? यह हमें बताता है कि **द्वि-कण निकाय के संहति केंद्र पर स्थित कुल द्रव्यमान का रैखिक संवेग उसके कणों के रैखिक संवेगों के योग के बराबर होता है**। आप इस समीकरण का महत्त्व अगली इकाई में पहचानेंगे जब आप रैखिक संवेग संरक्षण के बारे में पढ़ेंगे।

आइए, अब हम द्वि-कण निकाय के संहति केंद्र की औपचारिक परिभाषा दें। चित्र 14.4 में दो कणों 1 और 2 का निकाय देखें। मान लें कि कणों के द्रव्यमान क्रमशः m_1 और m_2 हैं। उनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{\mathbf{r}}_1$ और $\vec{\mathbf{r}}_2$ हैं। तब हम संहति केंद्र की परिभाषा इस तरह देते हैं।



चित्र 14.4: द्वि-कण निकाय का संहति केंद्र। यह उन दोनों द्रव्यमानों को जोड़ने वाली रेखा पर स्थित होता है।

संहति केंद्र

किसी पिंड या कणों के निकाय का **संहति केंद्र वह बिंदु होता है जो इस तरह गति करता है मानो निकाय का कुल द्रव्यमान उस बिंदु पर स्थित हो और सभी बाह्य बल उस बिंदु पर आरोपित हो रहे हों। द्वि-पिंड निकाय के लिए संहति केंद्र का स्थिति सदिश होता है :**

$$\vec{\mathbf{R}}_{cm} = \frac{m_1\vec{\mathbf{r}}_1 + m_2\vec{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2} \qquad (14.7\text{क})$$

त्रिविम कार्तीय निर्देशांक तंत्र में संहति केंद्र के स्थिति सदिश के (x, y, z) **निर्देशांक** होते हैं :

संहति केंद्र के निर्देशांक

$$X_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \qquad (14.7\text{ख})$$

$$Y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2} \qquad (14.7\text{ग})$$

$$Z_{cm} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2} \qquad (14.7\text{घ})$$

जहां (x_1, y_1, z_1) और (x_2, y_2, z_2) उन कणों के निर्देशांक हैं जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{\mathbf{r}}_1$ और $\vec{\mathbf{r}}_2$ हैं।

द्वि-पिंड निकाय का संहति केंद्र दोनों द्रव्यमानों को जोड़ने वाली रेखा पर स्थित होता है (देखें चित्र 14.4)।

अभी तक हमने क्या सीखा है?

हमने एक ऐसे बिन्दु की अवधारणा सीखी है जो इस तरह गति करता है मानो निकाय का कुल द्रव्यमान उस पर स्थित हो और नेट बाह्य बल उस बिन्दु पर लग रहा हो। यह बिन्दु जिसकी स्थिति समीकरणों 14.7क से घ द्वारा परिभाषित होती है **संहति केंद्र** कहलाता है।

ध्यान दें कि हम यहां **नेट बाह्य बल की बात कर रहे हैं और कणों के बीच पारस्परिक क्रिया के आंतरिक बलों की बात नहीं कर रहे हैं**। इस बात की हम भाग 14.3 में विस्तार से चर्चा करेंगे जब हम गति का समीकरण लिखेंगे।

इस तरह, समीकरण 14.7क का उपयोग करके **हम जटिल निकायों की गति का आसान तरीके से अध्ययन कर सकते हैं अगर हम केवल उनके संहति केंद्र की गति पर ध्यान दें**।

अभी तक आपने जाना है कि संहति केंद्र की अवधारणा का प्रयोग करके हम द्वि-कण निकायों की जटिल गति का एक सरल तरीके से वर्णन कर सकते हैं। हम इसमें **संहति केंद्र निर्देशांक** और **आपेक्षिक निर्देशांक** शामिल करके गणित को और भी सरल बना सकते हैं।

आइए, अब हम इनकी परिभाषा दें।

14.2.3 संहति केंद्र निर्देशांक और आपेक्षिक निर्देशांक

द्वि-कण निकाय के संहति केंद्र निर्देशांक की परिभाषा समीकरण 14.7क में दिए $\vec{\mathbf{R}}_{cm}$ द्वारा दी जाती है। कार्तीय निर्देशांकों के पदों में इसका परिमाण होता है :

संहति केंद्र निर्देशांक

$$R_{cm} = \sqrt{X_{cm}^2 + Y_{cm}^2 + Z_{cm}^2} \qquad (14.8)$$

जहां X_{cm}, Y_{cm} और Z_{cm} क्रमशः समीकरणों 14.7ख से घ द्वारा दिए जाते हैं। द्वि-कण निकाय के लिए आपेक्षिक निर्देशांक $\vec{\mathbf{r}}$ की परिभाषा है :

आपेक्षिक निर्देशांक

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2 \qquad (14.9\text{क})$$

ध्यान दें कि आपेक्षिक निर्देशांक वास्तव में **द्रव्यमान m_2 के सापेक्ष द्रव्यमान m_1 की स्थिति** है।

आइए, अब हम द्वि-कण निकाय के लिए आपेक्षिक निर्देशांक की परिभाषा दें।

आपेक्षिक निर्देशांक

द्वि-पिंड निकाय का आपेक्षिक निर्देशांक द्रव्यमान m_2 के सापेक्ष द्रव्यमान m_1 की स्थिति द्वारा परिभाषित होता है :

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (14.9क)$$

त्रिविम कार्तीय निर्देशांक तंत्र में इसका मान होता है :

$$x = x_1 - x_2 \quad (14.9ख)$$

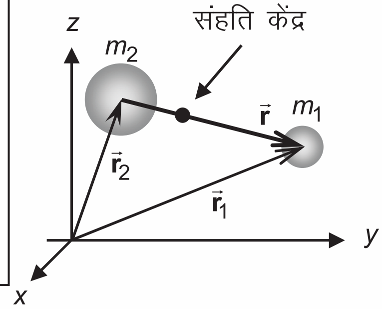
$$y = y_1 - y_2 \quad (14.9ग)$$

$$z = z_1 - z_2 \quad (14.9घ)$$

जहां (x_1, y_1, z_1) और (x_2, y_2, z_2) क्रमशः स्थिति सदिश $\vec{r}_1$ और $\vec{r}_2$ वाले कणों के निर्देशांक हैं। $\vec{r}$ का परिमाण है :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (14.9च)$$

आपेक्षिक निर्देशांक



चित्र 14.5: द्वि-कण निकाय का आपेक्षिक निर्देशांक।

चित्र 14.5 में हमने द्वि-कण निकाय का आपेक्षिक निर्देशांक दिखाया है।

उदाहरण 14.1 : संहति केंद्र और आपेक्षिक निर्देशांक

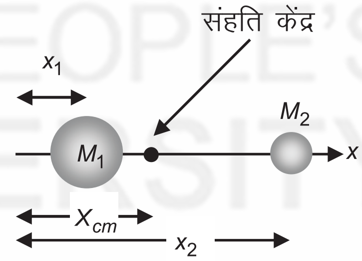
क) चित्र 14.6 के द्वि-कण निकाय के संहति केंद्र और आपेक्षिक निर्देशांक क्या हैं जबकि दिया है कि क्रमशः द्रव्यमान M_1 और M_2 वाले ये कण x-अक्ष पर स्थित हैं?

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि समीकरण 14.7ख और समीकरण 14.9ख का एक विमा में प्रयोग किया जाए क्योंकि दोनों कण x-अक्ष पर स्थित हैं और उनके लिए केवल x-निर्देशांक शून्य नहीं होगा।

चित्र 14.6 देखें। मान लें कि कणों के x-निर्देशांक क्रमशः x_1 और x_2 हैं। तब समीकरण 14.7ख और समीकरण 14.9ख से संहति केंद्र निर्देशांक और आपेक्षिक निर्देशांक हैं :

$$X_{cm} = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2} \quad \text{और} \quad x = x_1 - x_2$$

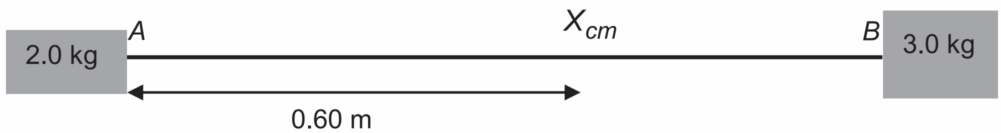
आइए, हम इस परिणाम को लागू करके एक **द्वि-कण निकाय** के संहति केंद्र की स्थिति प्राप्त करें। इस निकाय में दो कणों को जिनके द्रव्यमान क्रमशः 2.0 kg और 3.0 kg हैं, लम्बाई 1.0 m वाली एक हल्की छड़ AB के बिंदुओं A और B पर जोड़ा गया है (चित्र 14.7)।



चित्र 14.6: x-अक्ष पर रखे दो कणों के निकाय का संहति केंद्र। ध्यान दें कि इसकी स्थिति अधिक द्रव्यमान वाले कण के निकट है।

मूल बिंदु को बिंदु A पर लेने पर हमें मिलता है :

$M_1 = 2.0$ kg के लिए $x_1 = 0$ और $M_2 = 3.0$ kg के लिए $x_2 = 1.0$ m



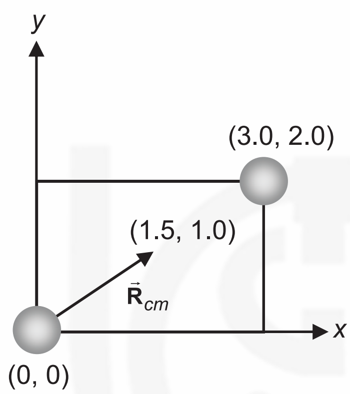
चित्र 14.7

अतः, इस निकाय के लिए संहति केंद्र और आपेक्षिक निर्देशांक हैं :

$$X_{cm} = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2} = \frac{(2.0\,\text{kg})(0\,\text{m}) + (3.0\,\text{kg})(1.0\,\text{m})}{2.0\,\text{kg} + 3.0\,\text{kg}} = \frac{3.0}{5.0}\,\text{m} = 0.60\,\text{m}$$

और $\quad x = x_1 - x_2 = -1.0\,\text{m}$ (2 के सापेक्ष 1 का निर्देशांक)

ख) xy तल में रखे द्वि-कण निकाय (जिसमें प्रत्येक कण का द्रव्यमान 1.0 kg है) के संहति केंद्र निर्देशांक और आपेक्षिक निर्देशांक प्राप्त करें। दिया है कि इनके निर्देशांक m में क्रमशः (0, 0) और (3.0, 2.0) हैं (चित्र 14.8)।



चित्र 14.8: $\vec{R}_{cm}$ संहति केंद्र का स्थिति सदिश है। इसके निर्देशांक m में (1.5, 1.0) हैं।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि समीकरणों 14.7ख और ग और 14.9ख और ग को द्वि-विम तंत्र में इस्तेमाल किया जाए क्योंकि ये कण xy तल में स्थित हैं और उनके केवल x और y निर्देशांक शून्य नहीं होंगे।

समीकरणों 14.7ख और ग से :

$$X_{cm} = \frac{(1.0 \times 0 + 1.0 \times 3.0)\,\text{kg.m}}{(1.0 + 1.0)\,\text{kg}} = 1.5\,\text{m}$$

$$Y_{cm} = \frac{(1.0 \times 0 + 1.0 \times 2.0)\,\text{kg.m}}{(1.0 + 1.0)\,\text{kg}} = 1.0\,\text{m}$$

$$\therefore \quad R_{cm} = \sqrt{(1.5)^2 + (1.0)^2} = 1.8\,\text{m}$$

समीकरणों 14.9ख और ग से :

$$x = x_1 - x_2 = (0 - 3.0)\,\text{m} = -3.0\,\text{m}$$

$$y = y_1 - y_2 = (0 - 2.0)\,\text{m} = -2.0\,\text{m}$$

$$\therefore \quad r = \sqrt{(-3.0)^2 + (-2.0)^2} = 3.6\,\text{m}$$

अब आप कुछ द्वि-पिंड निकायों के संहति केंद्र निर्देशांक और आपेक्षिक निर्देशांक ज्ञात करें।

बोध प्रश्न 1 – संहति केंद्र और आपेक्षिक निर्देशांक

नीचे दिए गए द्वि-पिंड निकायों में से प्रत्येक के संहति केंद्र निर्देशांक और आपेक्षिक निर्देशांक की गणना करें :

क) द्रव्यमान 2.5 kg का एक पिंड जो द्रव्यमान 25 kg के दूसरे पिंड से 1.0 m की दूरी पर स्थित है।

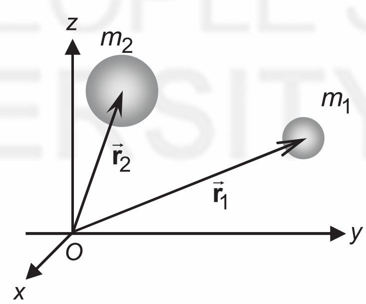
ख) पृथ्वी-चंद्रमा निकाय, जिसमें $M_e = 5.97 \times 10^{24}$ kg, $M_m = 7.35 \times 10^{22}$ kg और पृथ्वी और चन्द्रमा के बीच की दूरी 3.84×10^8 m है।

ग) समान द्रव्यमान (5.0 kg) वाले दो पिंड जिनके निर्देशांक m में क्रमशः (0,0) और (0,2.0) हैं।

इस भाग में हमने क्या किया है? हमने द्वि-कण निकाय का वर्णन दो पिंडों के दो निर्देशांकों $\vec{\mathbf{r}}_1$ और $\vec{\mathbf{r}}_2$ (जो द्रव्यमान m_1 और m_2 वाले उन पिंडों के स्थिति सदिश हैं) द्वारा प्रारंभ किया। अब हमने दो **नए निर्देशांकों** $\vec{\mathbf{R}}_{cm}$ और $\vec{\mathbf{r}}$ की परिभाषा दी है। आप द्वि-पिंड निकाय का वर्णन या तो निर्देशांकों $(\vec{\mathbf{r}}_1, \vec{\mathbf{r}}_2)$ के पदों में कर सकते हैं या नए निर्देशांकों $(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{R}}_{cm})$ के पदों में। निर्देशांकों $(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{R}}_{cm})$ का उपयोग करने से द्वि-कण निकाय के गति के समीकरण को हल करना आसान होता है। अगले भाग में आप यही सीखेंगे।

14.3 संहति केंद्र और आपेक्षिक निर्देशांकों में द्वि-कण निकाय का गति का समीकरण

माना कि दो कणों 1 और 2 के निकाय में कणों के द्रव्यमान क्रमशः m_1 और m_2 हैं। माना कि एक जड़त्वीय निर्देश तंत्र में मूल बिन्दु O के सापेक्ष क्षण t पर उनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{\mathbf{r}}_1$ और $\vec{\mathbf{r}}_2$ हैं (चित्र 14.9)। मान लें कि कण 1 पर **नेट बल** $\vec{\mathbf{F}}_1$ है और कण 2 पर **नेट बल** $\vec{\mathbf{F}}_2$ है। तब न्यूटन के गति के दूसरे नियम से द्वि-कण निकाय के गति के समीकरण हैं :



चित्र 14.9: द्वि-कण निकाय के लिए स्थिति सदिश।

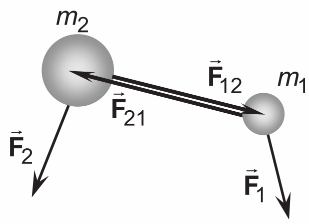
$$m_1 \vec{\mathbf{a}}_1 = m_1 \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}_1}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_1 \qquad (14.10\text{क})$$

$$m_2 \vec{\mathbf{a}}_2 = m_2 \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}_2}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_2 \qquad (14.10\text{ख})$$

ध्यान दें कि ये समीकरणें निर्देशांकों $(\vec{\mathbf{r}}_1, \vec{\mathbf{r}}_2)$ के पदों में हैं। हमें इन समीकरणों को हल करके इन दोनों कणों के पथ प्राप्त करने हैं। इन समीकरणों को हल करना काफ़ी कठिन है क्योंकि ये युग्मित समीकरण हैं। इसलिए हम इन्हें आपेक्षिक और संहति केंद्र निर्देशांकों $(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{R}}_{cm})$ के पदों में लिखेंगे।

ध्यान दें कि $\vec{\mathbf{F}}_1$ और $\vec{\mathbf{F}}_2$ क्रमशः कणों 1 और 2 पर **नेट बल** हैं (चित्र 14.10)। ये

प्रत्येक कण पर लग रहे नेट बाह्य बल और कणों के बीच लग रहे पारस्परिक क्रिया आंतरिक बलों के परिणामी बल हैं।



चित्र 14.10: कण 1 और कण 2 पर लग रहे बल। याद रहे कि यहां दिखाए गए पारस्परिक क्रिया के बल आकर्षण बल हैं।

अतः, इन्हें हम ऐसे लिख सकते हैं :

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{e1} + \vec{F}_{21} \qquad (14.11\text{क})$$

और

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{e2} + \vec{F}_{12} \qquad (14.11\text{ख})$$

जहां $\vec{F}_{e1}$ – कण 1 पर लग रहा नेट बाह्य बल,

$\vec{F}_{21}$ – कण 2 के कारण कण 1 पर लग रहा आंतरिक बल,

$\vec{F}_{e2}$ – कण 2 पर लग रहा नेट बाह्य बल, और

$\vec{F}_{12}$ – कण 1 के कारण कण 2 पर लग रहा आंतरिक बल।

ध्यान दें कि न्यूटन के गति के तीसरे नियम से कण 1 के कारण कण 2 पर लग रहा बल, कण 2 के कारण कण 1 पर लग रहे बल के बराबर और विपरीत दिशा में होता है :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad (14.11\text{ग})$$

अब दो स्थितियां संभव हैं :

1. द्वि-कण निकाय पर लग रहा **नेट बाह्य बल शून्य** है।
2. द्वि-कण निकाय पर लग रहा **नेट बाह्य बल शून्य नहीं है।**

आसानी के लिए हम पहली स्थिति पर पहले चर्चा करेंगे जब द्वि-कण निकाय पर लग रहा नेट बाह्य बल शून्य है।

14.3.1 शून्य नेट बाह्य बल के लिए द्वि-पिंड समस्या

इस स्थिति में, कण केवल एक-दूसरे से पारस्परिक क्रिया करते हैं। अतः, **इन दोनों कणों पर केवल क्रिया और प्रतिक्रिया के आंतरिक और पारस्परिक बल लग रहे हैं** : कण 1 पर केवल कण 2 के कारण बल लग रहा है और कण 2 पर केवल कण 1 के कारण बल लग रहा है। समीकरण 14.11ग से आप देख सकते हैं कि ये बल एक दूसरे के बराबर लेकिन विपरीत दिशा में हैं। प्रकृति में ऐसे निकायों के अनेक उदाहरण हैं। उदाहरण के लिए, **पृथ्वी-चंद्रमा निकाय** में, पृथ्वी पर केवल चंद्रमा के कारण गुरुत्वाकर्षण बल लगता है और चंद्रमा पर केवल पृथ्वी के कारण गुरुत्वाकर्षण बल लगता है। यही बात **सूर्य-ग्रह निकाय** पर लागू होती है। इसी तरह दो आवेशों के निकाय में सजातीय आवेशों के लिए कूलॉम बल प्रतिकर्षण बल होता है और विजातीय आवेशों के लिए कूलॉम बल आकर्षण बल होता है। इन सभी निकायों में निकाय पर कोई नेट बाह्य बल नहीं लगता (जब तक कि आखिरी उदाहरण में हम आवेशों को किसी बाह्य विद्युत् क्षेत्र में नहीं रखते)।

आइए, अब हम निर्देशांकों $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ के पदों में उस द्वि-कण निकाय के गति के समीकरण लिखें जिस पर लग रहा नेट बाह्य बल शून्य है। हम समीकरणों 14.11क और ख से $\vec{F}_1$ और $\vec{F}_2$ के मान समीकरणों 14.10क और ख में रखते हैं और साथ ही इनमें $\vec{F}_{e1} = \vec{0}$ और $\vec{F}_{e2} = \vec{0}$ रखते हैं जिससे हमें मिलता है :

$$m_1\vec{\mathbf{a}}_1 = m_1\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_1}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_{21} \qquad (14.12क)$$

$$m_2\vec{\mathbf{a}}_2 = m_2\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_2}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21} \qquad (14.12ख)$$

ध्यान रखें कि समीकरण 14.12ख को लिखने में हमने समीकरण 14.11ग का भी प्रयोग किया है।

अब हम समीकरणों 14.12क और ख को आपेक्षिक और संहति केंद्र निर्देशांकों $(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{R}}_{cm})$ के पदों में व्यक्त करेंगे। इसके लिए हम पहले समीकरणों 14.12क और ख को जोड़ते हैं जिससे हमें मिलता है :

$$m_1\vec{\mathbf{a}}_1 + m_2\vec{\mathbf{a}}_2 = m_1\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_1}{dt^2} + m_2\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_2}{dt^2} = \vec{\mathbf{0}}$$

या $$\frac{d^2}{dt^2}(m_1\vec{\mathbf{r}}_1 + m_2\vec{\mathbf{r}}_2) = \vec{\mathbf{0}} \text{ चूंकि } m_1 \text{ और } m_2 \text{ अचर हैं} \qquad (14.13)$$

समीकरण 14.7क का प्रयोग करके हम समीकरण 14.13 को इस तरह लिख सकते हैं :

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1 + m_2)\vec{\mathbf{R}}_{cm} = \vec{\mathbf{0}}$$

या $$\boxed{M\frac{d^2\vec{\mathbf{R}}_{cm}}{dt^2} = \vec{\mathbf{0}}} \qquad (\because M = m_1 + m_2) \qquad (14.14)$$

शून्य नेट बाह्य बल के लिए संहति केंद्र का गति का समीकरण

हम समीकरणों 14.12क और ख को इस तरह भी लिख सकते हैं :

$$\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_1}{dt^2} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_{21}}{m_1} \qquad (14.15क)$$

और $$\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_2}{dt^2} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_{12}}{m_2} = -\frac{\vec{\mathbf{F}}_{21}}{m_2} \qquad (14.15ख)$$

समीकरण 14.15ख को समीकरण 14.15क से घटाने पर हमें मिलता है :

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{\mathbf{F}}_{21} \qquad (14.16)$$

चूंकि $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2$, हम समीकरण 14.16 को इस तरह लिख सकते हैं

$$\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{\mathbf{F}}_{21} \qquad (14.17)$$

ध्यान रखें कि समीकरण 14.18 को लिखने में हमने समीकरण 14.17 में समीकरण 14.19क का प्रयोग इस प्रकार किया है :

$$\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \frac{1}{\mu}\vec{\mathbf{F}}_{21}$$

या $$\mu\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_{21}$$

हम समीकरण 14.17 को न्यूटन के गति के दूसरे नियम के रूप में इस तरह से लिख सकते हैं :

$$\boxed{\mu\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_{21}} \qquad (14.18)$$

आपेक्षिक निर्देशांक में गति का समीकरण

यहां हमने एक नई राशि μ का प्रयोग किया है :

$$\frac{1}{\mu} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \tag{14.19क}$$

समानीत द्रव्यमान

या
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \tag{14.19ख}$$

समीकरणों 14.19क और ख में राशि μ को द्वि-कण निकाय का **समानीत द्रव्यमान** कहा जाता है। इसे ऐसा क्यों कहा जाता है, यह आप अगले भाग में सीखेंगे। $\vec{\mathbf{F}}_{21} = -\vec{\mathbf{F}}_{12}$ लिखकर आप सिद्ध कर सकते हैं कि :

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1 \quad \text{के लिए} \quad \mu \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_{12} \tag{14.20}$$

ध्यान दें

ध्यान दें कि द्वि-कण निकाय की समस्या हल करने के लिए हम समीकरण 14.18 या समीकरण 14.20 का उपयोग कर सकते हैं।

आगे पढ़ने से पहले आप समीकरणों 14.18 और 14.20 को व्युत्पन्न ज़रूर कर लें। वास्तव में, समीकरण 14.18 या 14.20 द्रव्यमान μ वाले कण का गति का समीकरण है जो मूल बिंदू से दूरी r पर है। यह एक **काल्पनिक कण** है और वास्तव में स्थिति $\vec{\mathbf{r}}$ पर कोई कण मौजूद नहीं होता। फिर भी इसकी एक उपयोगिता ज़रूर है। इस काल्पनिक कण का गति का समीकरण युग्मित समीकरण नहीं है यदि $\vec{\mathbf{F}}_{21}$ और $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ केवल $\vec{\mathbf{r}}$ पर निर्भर करते हों। अब आप इस समीकरण को जानी-पहचानी विधियों से हल कर सकते हैं। क्या आपने ध्यान दिया कि **समीकरण 14.14** और **14.18 / 14.20 संहति केंद्र और आपेक्षिक निर्देशांकों** में गति के समीकरण हैं? इस तरह हमने निर्देशांकों $(\vec{\mathbf{r}}_1, \vec{\mathbf{r}}_2)$ में युग्मित गति के समीकरणों को आपेक्षिक और संहति केंद्र निर्देशांकों $(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{R}}_{cm})$ में दो वियुक्त गति के समीकरणों में समानीत कर लिया है। आइए, अब हम इन समीकरणों को एक साथ लिखें।

शून्य नेट बाह्य बल के लिए संहति केंद्र और आपेक्षिक निर्देशांकों में गति के समीकरण

यदि एक द्वि-कण निकाय पर जिसमें कणों के द्रव्यमान क्रमशः m_1 और m_2 हैं लग रहा नेट बाह्य बल शून्य हो **तो निर्देशांकों $(\vec{\mathbf{r}}_1, \vec{\mathbf{r}}_2)$ के पदों में निकाय के लिए युग्मित गति के समीकरण** होते हैं

$$m_1 \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_1}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_{21} \quad \text{और} \quad m_2 \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_2}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21}$$

यदि $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ और $\vec{\mathbf{F}}_{21}$ केवल $\vec{\mathbf{r}}$ पर निर्भर करते हों, तो ये समीकरण आपेक्षिक और संहति केंद्र निर्देशांकों $(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{R}}_{cm})$ के पदों में निम्नलिखित समीकरणों में समानीत हो जाते हैं:

$$M \frac{d^2\vec{\mathbf{R}}_{cm}}{dt^2} = \vec{\mathbf{0}} \quad \text{जहां } M = m_1 + m_2 \tag{14.21क}$$

संहति केंद्र और आपेक्षिक निर्देशांकों में द्वि-कण निकाय के गति के समीकरण

और
$$\mu \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_{21} \quad \text{या} \quad \mu \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = -\vec{\mathbf{F}}_{12} \tag{14.21ख}$$

जहां
$$\frac{1}{\mu} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \quad \text{या} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \tag{14.21ग}$$

क्या आप बता सकते हैं कि समीकरण 14.21ग में दी गई इस नई राशि μ को निकाय का समानीत द्रव्यमान क्यों कहा जाता है? आइए, पता लगाएं।

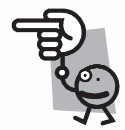
14.3.2 समानीत द्रव्यमान

समीकरण 14.21ग से आप देख सकते हैं कि μ **की विमा द्रव्यमान की विमा** है। लेकिन μ न तो कण 1 का द्रव्यमान है और न ही कण 2 का। यह किसी क्षण t पर मूल बिन्दु से दूरी r पर स्थित एक काल्पनिक कण का द्रव्यमान है।

हम μ को द्वि-कण निकाय का <u>समानीत द्रव्यमान</u> कहते हैं। **समीकरण 14.18 या समीकरण 14.21ख द्रव्यमान μ वाले कण का गति का समीकरण है जो पारस्परिक क्रिया बल $\vec{F}_{21}$ के अधीन गतिमान है।**

हम कहते हैं कि

> **समीकरण 14.21ख एक "काल्पनिक" कण का गति का समीकरण है जिसका द्रव्यमान μ है। इसे हम समानीत द्रव्यमान कहते हैं।**



कभी न भूलें

आप सोच रहे होंगे : **μ को निकाय का समानीत द्रव्यमान क्यों कहा जाता है**? अब हम कुछ उदाहरणों की मदद से इस अवधारणा को समझाएंगे।

आइए, हम कुछ द्वि-कण निकायों के लिए (चित्र 14.11 देखें) समीकरण 14.21ग का उपयोग करके समानीत द्रव्यमान का मान प्राप्त करें।

1. **सूर्य-पृथ्वी निकाय** के लिए μ का मान है

$$\mu = \frac{m_s\, m_e}{(m_s + m_e)}$$

जहां m_s सूर्य का द्रव्यमान है और m_e पृथ्वी का द्रव्यमान है। हम जानते हैं कि $m_s >> m_e$ क्योंकि $m_s = 1.99 \times 10^{30}$ kg और $m_e = 5.97 \times 10^{24}$ kg। अतः भिन्न के हर में m_e को हम नगण्य मान सकते हैं और लिख सकते हैं :

$$m_s + m_e \approx m_s$$

इस तरह,

$$\mu \approx \frac{m_s\, m_e}{m_s} = m_e \qquad (14.22\text{क})$$

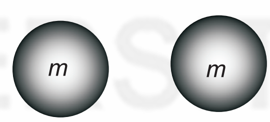
अतः समीकरण 14.18 के काल्पनिक कण का द्रव्यमान पृथ्वी के द्रव्यमान के बराबर है जो पृथ्वी-सूर्य निकाय के कुल द्रव्यमान की तुलना में बहुत कम है।

हम इस परिणाम को किसी भी द्वि-कण निकाय के लिए व्यापक रूप में लिख सकते हैं जिसमें एक कण का द्रव्यमान दूसरे कण के द्रव्यमान से बहुत अधिक हो। एक ऐसे द्वि-कण निकाय के लिए जिसके लिए $m_1 >> m_2$, μ का मान होता है :

$$\mu \approx m_2 \qquad m_1 >> m_2 \text{ के लिए} \qquad (14.22\text{ख})$$

समानीत द्रव्यमान = m_e, पृथ्वी का द्रव्यमान

(क)



समानीत द्रव्यमान $= \frac{m}{2}$, जहां m प्रत्येक कण का द्रव्यमान है।

(ख)

चित्र 14.11: क) सूर्य पृथ्वी निकाय का समानीत द्रव्यमान (चित्र पैमाने के अनुसार नहीं है); ख) समान द्रव्यमान वाले 2 कणों का समानीत द्रव्यमान।

काल्पनिक कण का द्रव्यमान घट जाता है और लगभग m_2 के बराबर होता है जो कम द्रव्यमान वाले कण का द्रव्यमान है।

2. समान द्रव्यमान वाले कणों के द्वि-कण निकाय के लिए μ का मान होता है :

$$\mu = \frac{m \times m}{(m+m)} = \frac{m}{2} \tag{14.22ग}$$

जो प्रत्येक कण के द्रव्यमान का आधा है।

इस तरह, ऊपर दी गई सभी स्थितियों में "काल्पनिक" कण का द्रव्यमान द्वि-कण निकाय के कुल द्रव्यमान से कम है। इसीलिए इसे **समानीत द्रव्यमान** कहा जाता है। इस अवधारणा को समझने के लिए आप कुछ द्वि-कण निकायों के समानीत द्रव्यमान का मान निकालें।

बोध प्रश्न 2 – समानीत द्रव्यमान

नीचे दिए गए प्रत्येक द्वि-पिंड निकाय के लिए समानीत द्रव्यमान प्राप्त करें :

क) पृथ्वी-चंद्रमा निकाय।

ख) दो कंचों का निकाय जिसमें प्रत्येक का द्रव्यमान 0.2 kg है।

ग) हाइड्रोजन परमाणु में इलेक्ट्रॉन-प्रोटॉन निकाय।

घ) एक ब्लैक होल और एक तारे से बना द्वि-कण निकाय जिसमें तारा ब्लैक होल की परिक्रमा कर रहा है और ब्लैक होल का द्रव्यमान तारे के द्रव्यमान का 100 गुना है।

हमें आशा है कि इस अभ्यास के बाद आपको समानीत द्रव्यमान की अवधारणा समझ आ गई होगी। आइए, हम समानीत द्रव्यमान की औपचारिक परिभाषा दोहराएं।

दोहराएं

समानीत द्रव्यमान

समानीत द्रव्यमान

एक द्वि-कण निकाय का जिसमें कणों के द्रव्यमान क्रमशः m_1 और m_2 हैं, **समानीत द्रव्यमान** होता है :

$$\frac{1}{\mu} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

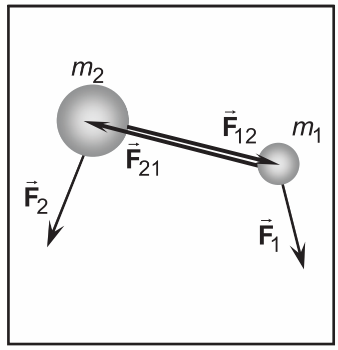
या

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}$$

यह एक **काल्पनिक कण** का द्रव्यमान है जिसका गति का समीकरण (समीकरण 14.21ख) द्वि-कण निकाय (जिस पर लग रहा नेट बाह्य बल शून्य है) के आपेक्षिक निर्देशांक के पदों में दिया जाता है।

अभी तक आपने सीखा है कि जब नेट बाह्य बल शून्य हो, तब दो पिंडों वाले निकाय के गति के समीकरण को एकल पिंड के गति के समीकरण में कैसे समानीत किया जाता है। हमने समानीत द्रव्यमान की अवधारणा भी दी है। अब आप जानना चाहेंगे : **जब द्वि-कण निकाय पर एक नेट बाह्य बल लग रहा होता है तो इन समीकरणों में क्या परिवर्तन होता है**? अब हम इस स्थिति की चर्चा करेंगे।

14.3.3 परिमित नेट बाह्य बल के लिए द्वि-पिंड समस्या



चित्र 14.12: कण 1 और 2 पर आरोपित बल। ध्यान दें कि दोनों के बीच पारस्परिक क्रिया के बल आकर्षण बल हैं।

सिवाय कुछ विशिष्ट स्थितियों के, उस द्वि-कण निकाय के, जिस पर एक नेट बाह्य बल लग रहा हो, प्रत्येक कण के पथ का व्यापक वैश्लेषिक हल प्राप्त करना संभव नहीं होता। अब हम द्वि-कण निकाय के लिए व्यापक गति का समीकरण लिख कर उसे उस स्थिति के लिए हल करेंगे जिसमें **बाह्य बल केवल गुरुत्व बल** हो। इसके उदाहरण हैं डम्बेल और बैंडमास्टर का छड़। हम द्रव्यमान m_1 और m_2 वाले दो कणों 1 और 2 के निकाय के लिए समीकरणों 14.10क और ख से चर्चा शुरू करते हैं। माना कि एक जड़त्वीय निर्देश तंत्र में मूल बिन्दु O के सापेक्ष किसी क्षण t पर उनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{\mathbf{r}}_1$ और $\vec{\mathbf{r}}_2$ हैं। उन पर लग रहे बल चित्र 14.12 में दिखाए गए हैं। यहां हम गति के समीकरण दोबारा लिख रहे हैं :

$$m_1 \vec{\mathbf{a}}_1 = m_1 \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}_1}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_1 \quad \text{और} \quad m_2 \vec{\mathbf{a}}_2 = m_2 \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}_2}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_2$$

आप जानते हैं कि इन समीकरणों में $\vec{\mathbf{F}}_1$ कण 1 पर **नेट बल** है और $\vec{\mathbf{F}}_2$ कण 2 पर **नेट बल** है। हम समीकरणों 14.11क और ख दोबारा लिख रहे हैं :

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = \vec{\mathbf{F}}_{e1} + \vec{\mathbf{F}}_{21} \quad \text{और} \quad \vec{\mathbf{F}}_2 = \vec{\mathbf{F}}_{e2} + \vec{\mathbf{F}}_{12}$$

जहां $\vec{\mathbf{F}}_{e1}$ कण 1 पर नेट बाह्य बल है, $\vec{\mathbf{F}}_{21}$ कण 1 पर कण 2 के कारण आंतरिक बल है, $\vec{\mathbf{F}}_{e2}$ कण 2 पर नेट बाह्य बल है और $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ कण 2 पर कण 1 के कारण आंतरिक बल है। न्यूटन के गति के तीसरे नियम से कण 1 पर कण 2 के कारण और कण 2 पर कण 1 के कारण लग रहे बल बराबर लेकिन विपरीत दिशा में हैं :

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21}$$

अब हमें द्वि-कण निकाय के लिए गति के समीकरण निर्देशांकों $(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{R}}_{cm})$ के पदों में लिखने हैं जब उस पर लग रहा **नेट बाह्य बल शून्य नहीं है**। आइए, हम समीकरणों 14.11क और ख से $\vec{\mathbf{F}}_1$ और $\vec{\mathbf{F}}_2$ के मान समीकरणों 14.10क और ख में रखें और उन्हें जोड़ें। तब हमें मिलता है :

$$m_1 \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}_2}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 \qquad (14.23\text{क})$$

समीकरणों 14.11क, ख और ग का प्रयोग करके हम लिख सकते हैं :

$$m_1 \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}_2}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 = \vec{\mathbf{F}}_{e1} + \vec{\mathbf{F}}_{e2}$$

या $$m_1 \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}_2}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_e \quad \text{जहां} \quad \vec{\mathbf{F}}_e = \vec{\mathbf{F}}_{e1} + \vec{\mathbf{F}}_{e2} \qquad (14.23\text{ख})$$

इस तरह, $\vec{\mathbf{F}}_e$ द्वि-कण निकाय पर **नेट बाह्य बल** है। अब इस निकाय के संहति केंद्र निर्देशांक की परिभाषा याद करें :

$$\vec{\mathbf{R}}_{cm} = \frac{(m_1\vec{\mathbf{r}}_1 + m_2\vec{\mathbf{r}}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1\vec{\mathbf{r}}_1 + m_2\vec{\mathbf{r}}_2)}{M} \qquad (14.24\text{क})$$

इस समीकरण का समय के सापेक्ष दो बार अवकलन करने पर हमें अचर द्रव्यमान के लिए मिलता है :

$$M\frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{\mathbf{R}}_{cm}\right) = \frac{d^2}{dt^2}\left(m_1\vec{\mathbf{r}}_1 + m_2\vec{\mathbf{r}}_2\right) = m_1\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_1}{dt^2} + m_2\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_2}{dt^2} \qquad (14.24\text{ख})$$

समीकरण 14.23ख को समीकरण 14.24ख में रखने पर हमें मिलता है :

परिमित बाह्य बल के लिए संहति केंद्र का गति का समीकरण

$$\boxed{M\frac{d^2\vec{\mathbf{R}}_{cm}}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_e} \qquad (14.25)$$

समीकरण 14.25 द्रव्यमान M वाले कण का गति का समीकरण है जिसका स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{R}}_{cm}$ है और जो नेट बाह्य बल $\vec{\mathbf{F}}_e$ के अधीन गति करता है। यदि आपको बल का व्यंजक मालूम हो तो आप इस समीकरण को इकाई 5 और 6 में बताई गई विधियों का प्रयोग करके हल कर सकते हैं। ध्यान दें कि समीकरण 14.25 संहति केंद्र का गति का समीकरण है। इसका हल करने से हमें **निकाय के संहति केंद्र का पथ** प्राप्त होता है।

निकाय का संहति केंद्र इस प्रकार गति करता है मानो द्रव्यमान M (निकाय का कुल द्रव्यमान) उस बिन्दु पर स्थित हो और निकाय के सभी कणों पर लग रहे बाह्य बलों का परिणामी बल उस पर लग रहा हो।

इस तरह, यदि एक द्वि-पिंड निकाय जिसके वेग का क्षैतिज घटक परिमित हो, मुक्त रूप से गिर रहा हो तो उसका संहति केंद्र परवलयाकार पथ पर गति करेगा। आप इस परिणाम की जांच एक सरल गतिविधि करके कर सकते हैं।

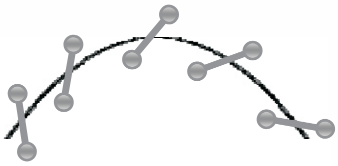
गतिविधि

द्वि-कण निकाय के संहति केंद्र की गति

समान द्रव्यमानों वाला एक डम्बेल लें। आप डम्बेल को खुद भी बना सकते हैं। इसके लिए एक जैसी दो रबड़ की गेंदों में छेद करें और उन छेदों में हल्की छड़ डालकर गेंदों को जोड़ दें (देखें चित्र 14.13)। इस निकाय का संहति केंद्र किस बिन्दु पर है?

उस बिन्दु पर जो छड़ के मध्य में स्थित है निशान लगा दें या कागज़ की एक पट्टी चिपका दें। अब डम्बेल को उसके संहति केंद्र पर पकड़ कर उसे हवा में फेंकें। निकाय का संहति केंद्र किस पथ पर गति करता है?

आप देखेंगे कि अगर आप डम्बेल के संहति केंद्र पर बल लगाते हैं तो वह बिना घूर्णन के गति करता है और उसका संहति केंद्र परवलयाकार पथ पर चलता है।

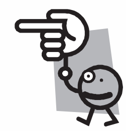


चित्र 14.13: गुरुत्व के अधीन मुक्त रूप से गिरते हुए डम्बेल के संहति केंद्र की गति।

अगले भाग में आप जानेंगे कि यही परिणाम मुक्त रूप से गिरते हुए बहु-कण निकाय पर भी लागू होता है। अब हम इस भाग की महत्वपूर्ण बातों को दोहरा कर इसका अंत कर रहे हैं।

समीकरण 14.25 को लिखने में हमने ये बातें मानी हैं :

1. **समीकरण 14.23क को लिखने में न्यूटन का गति का दूसरे नियम,**
2. **समीकरण 14.23क से 14.23ख तक जाने में न्यूटन का गति का तीसरा नियम,**
3. **समीकरणों 14.24क और 14.24ख से समीकरण 14.25 तक पहुंचने में कणों के द्रव्यमान और M का अचर होना। यह मानना तब सही नहीं होता जब हम वेग के साथ द्रव्यमान के आपेक्षिकीय परिवर्तन को लेते हैं।**
4. **समीकरण 14.24क लिखने में $(m_1 + m_2) \neq 0$। यह मानना तर्कसंगत है क्योंकि सारे द्रव्यमान धनात्मक हैं।**



कभी न भूलें

आइए, अब यह पता लगाएं कि हम इस स्थिति के लिए द्वि-कण निकाय की गति को एकल कण की गति में समानीत कर सकते हैं या नहीं। समीकरणों 14.10क, ख और 14.11क, ख से हम लिख सकते हैं

$$\frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}_1}{dt^2} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_1}{m_1} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_{e1} + \vec{\mathbf{F}}_{21}}{m_1} \quad (14.26\text{क})$$

और

$$\frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}_2}{dt^2} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_2}{m_2} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_{e2} + \vec{\mathbf{F}}_{12}}{m_2} \quad (14.26\text{ख})$$

समीकरण 14.26ख को समीकरण 14.26क से घटाने पर हमें मिलता है :

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{\mathbf{F}}_{21} + \left(\frac{\vec{\mathbf{F}}_{e1}}{m_1} - \frac{\vec{\mathbf{F}}_{e2}}{m_2}\right) \quad \left(\because \vec{\mathbf{F}}_{21} = -\vec{\mathbf{F}}_{12}\right)$$

या

$$\frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \frac{1}{\mu}\vec{\mathbf{F}}_{21} + \left(\frac{\vec{\mathbf{F}}_{e1}}{m_1} - \frac{\vec{\mathbf{F}}_{e2}}{m_2}\right) \quad (14.27)$$

याद करें कि

$$\frac{1}{\mu} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

या $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}$

जहां μ निकाय का समानीत द्रव्यमान है।

आइए, इन परिणामों को एक साथ लिखें।

परिमित बाह्य बल के लिए संहति केंद्र और आपेक्षिक निर्देशांकों में गति के समीकरण

यदि एक परिमित बाह्य बल $\vec{\mathbf{F}}_e = \vec{\mathbf{F}}_{e1} + \vec{\mathbf{F}}_{e2}$ द्रव्यमान m_1 और m_2 वाले 2 कणों के निकाय पर लगता है तो कणों के निर्देशांकों $(\vec{\mathbf{r}}_1, \vec{\mathbf{r}}_2)$ में **गति के युग्मित समीकरण** होते हैं :

$$m_1 \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}_1}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_1 \quad \text{और} \quad m_2 \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}_2}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_2$$

ये समीकरण संहति केंद्र और आपेक्षिक निर्देशांकों $(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{R}}_{cm})$ के पदों में निम्नलिखित रूप में रूपांतरित हो जाते हैं :

परिमित बाह्य बल के लिए संहति केंद्र और आपेक्षिक निर्देशांकों में गति के समीकरण

$$M \frac{d^2 \vec{\mathbf{R}}_{cm}}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_e \quad \text{जहां} \quad M = m_1 + m_2 \qquad (14.25)$$

और

$$\frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \frac{1}{\mu} \vec{\mathbf{F}}_{21} + \left(\frac{\vec{\mathbf{F}}_{e1}}{m_1} - \frac{\vec{\mathbf{F}}_{e2}}{m_2} \right) \qquad (14.27)$$

इस तरह, हमने **दो अलग-अलग समीकरण** (14.25 और 14.27) प्राप्त किए हैं। समीकरण 14.25 निकाय के संहति केंद्र का गति का समीकरण है। हम निकाय की गति के लिए इसे ऐसे हल कर सकते हैं मानो निकाय का समस्त द्रव्यमान संहति केंद्र पर स्थित हो।

लेकिन हम निकाय के प्रत्येक कण के लिए समीकरण 14.27 का व्यापक हल प्राप्त नहीं कर सकते सिवाय कुछ विशिष्ट स्थितियों के जो निम्नवत् हैं :

1. $\vec{\mathbf{F}}_{e1} = \vec{\mathbf{F}}_{e2} = \vec{\mathbf{0}}$

2. $\dfrac{\vec{\mathbf{F}}_{e1}}{m_1} = \dfrac{\vec{\mathbf{F}}_{e2}}{m_2}$

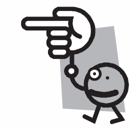
गुरुत्व बल दूसरे प्रकार की स्थिति का उदाहरण है।

इस तरह, हमें निकाय के कणों की गति निर्धारित करने के लिए दो समीकरणें हल करनी पड़ेंगी यानी हम इस समस्या को एक समतुल्य एकल कण समस्या में समानीत नहीं कर सकते। अतः, हम द्वि-कण निकाय में इस स्थिति में प्रत्येक कण की गति के लिए व्यापक हल नहीं प्राप्त कर सकते। इसका अपवाद कुछ विशिष्ट स्थितियां हैं जिनकी बात ऊपर की गई है।

लेकिन फिर भी हम यह पता लगा सकते हैं कि निकाय का संहति केंद्र कैसे गति करता है यानी अगर हम मान लें कि निकाय का समस्त द्रव्यमान उसके संहति केंद्र पर स्थित है तो निकाय कैसे गति करता है।

इस भाग में आपने सीखा है कि

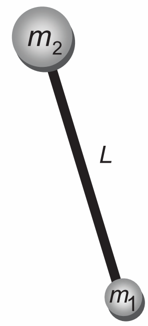
> **यदि एक द्वि-कण निकाय पर नेट बाह्य बल लगता है तो विशिष्ट स्थितियों के अलावा निकाय के कणों के पथों के लिए व्यापक हल ज्ञात करना संभव नहीं होता। हम उसके संहति केंद्र का पथ ज्ञात कर सकते हैं और निकाय की गति का अध्ययन ऐसे कर सकते हैं मानो उसका समस्त द्रव्यमान उसके संहति केंद्र पर स्थित हो।**



अभ्यास के लिए आप गुरुत्व के अधीन गिर रहे द्वि-कण निकाय के संहति केंद्र का गति का समीकरण व्युत्पन्न करें।

बोध प्रश्न 3 – गुरुत्व के अधीन द्वि-पिंड निकाय की गति

एक बैंड का नियंत्रण कर रहे बैंड मास्टर के पतले, हल्के छड़ में दो द्रव्यमान m_1 और m_2 जुड़े हैं। छड़ की लंबाई L है (चित्र 14.14)। छड़ के संहति केंद्र के सापेक्ष द्रव्यमानों की स्थितियां प्राप्त करें। जब छड़ को हवा में फेंका जाता है तब संहति केंद्र का गति का समीकरण लिखें। वायु प्रतिरोध को नगण्य मानें और संहति केंद्र का पथ ज्ञात करें।



चित्र 14.14: बैंड मास्टर का छड़।

आइए, इन अवधारणाओं को बहु-कण निकायों की गतिकी पर लागू करें।

14.4 बहु-कण निकायों की गतिकी

आइए, हम तीन कणों के निकाय के सरल उदाहरण से चर्चा शुरू करें। मान लें कि इनके द्रव्यमान m_1, m_2 और m_3 हैं और मूल बिन्दु O के सापेक्ष इनके स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}_1, \vec{\mathbf{r}}_2, \vec{\mathbf{r}}_3$ हैं। चित्र 14.15 में तीन कणों के निकाय का उदाहरण दिखाया गया है – यह जानवरों को फंसाने के लिए प्रयुक्त एक हथियार है जिसे बोला कहते हैं। यह चमड़े की पट्टियों से जोड़ी गई तीन लोहे या पत्थर की गेंदों का बना होता है। जब इसे घुमाकर हवा में फेका जाता है तो इसकी गति कैसी होती है?

चित्र 14.15: बोला, तीन कणों के निकाय का उदाहरण है।

अभी तक आपने जो पढ़ा है उसके आधार पर आप कह सकते हैं कि निकाय का संहति केंद्र परवलयाकार पथ पर चलेगा। यह परिणाम बहुत उपयोगी है, क्योंकि जब कोई भी व्यक्ति बोला को जानवर पर फेंकता है तो वह उसे **एक** पिंड की तरह मान सकता है और तब उसे उसकी जटिल गति के बारे में परवाह करने की ज़रूरत नहीं होती। इस निकाय की गति के समीकरण क्या हैं? ये हैं :

$$m_1 \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}_1}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_1 , \qquad m_2 \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}_2}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_2 \quad \text{और} \quad m_3 \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}_3}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_3 \qquad (14.28)$$

जहां

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = \vec{\mathbf{F}}_{e1} + \vec{\mathbf{F}}_{21} + \vec{\mathbf{F}}_{31}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_2 = \vec{\mathbf{F}}_{e2} + \vec{\mathbf{F}}_{12} + \vec{\mathbf{F}}_{32} \qquad (14.29\text{क})$$

$$\vec{\mathbf{F}}_3 = \vec{\mathbf{F}}_{e3} + \vec{\mathbf{F}}_{13} + \vec{\mathbf{F}}_{23}$$

और $\quad \vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21}, \quad \vec{\mathbf{F}}_{23} = -\vec{\mathbf{F}}_{32}$ और $\vec{\mathbf{F}}_{13} = -\vec{\mathbf{F}}_{31}$ (14.29ख)

अब समीकरण 14.28 की तीनों समीकरणों को जोड़ने पर और समीकरणों 14.29क और ख का उपयोग करने पर हम लिख सकते हैं :

$$m_1\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_1}{dt^2} + m_2\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_2}{dt^2} + m_3\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_3}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \vec{\mathbf{F}}_3 = \vec{\mathbf{F}}_{e1} + \vec{\mathbf{F}}_{e2} + \vec{\mathbf{F}}_{e3} \quad (14.30\text{क})$$

$$\vec{\mathbf{R}}_{cm} = \frac{(m_1\vec{\mathbf{r}}_1 + m_2\vec{\mathbf{r}}_2 + m_3\vec{\mathbf{r}}_3)}{(m_1 + m_2 + m_3)} \quad (14.30\text{ख})$$

का उपयोग करने पर हम लिख सकते हैं :

$$M\frac{d^2\vec{\mathbf{R}}_{cm}}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_e \quad (14.30\text{ग})$$

जहां $M = m_1 + m_2 + m_3$ और $\vec{\mathbf{F}}_e = \vec{\mathbf{F}}_{e1} + \vec{\mathbf{F}}_{e2} + \vec{\mathbf{F}}_{e3}$ (14.30घ)

अब, तीन कणों के निकाय पर नेट बाह्य बल केवल गुरुत्व बल है। अतः

$$\vec{\mathbf{F}}_{e1} = m_1\vec{\mathbf{g}}, \quad \vec{\mathbf{F}}_{e2} = m_2\vec{\mathbf{g}} \quad \text{और} \quad \vec{\mathbf{F}}_{e3} = m_3\vec{\mathbf{g}} \quad (14.31\text{क})$$

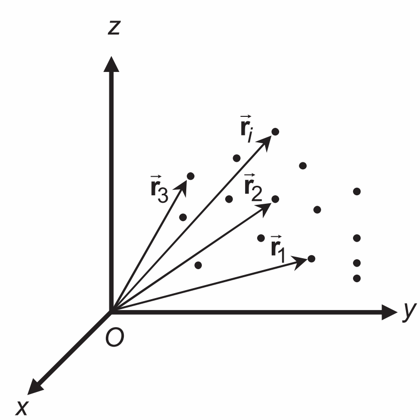
अब समीकरण 14.31क को समीकरण 14.30ग में रख कर और समीकरण 14.30घ का प्रयोग करके हम लिख सकते हैं :

$$M\frac{d^2\vec{\mathbf{R}}_{cm}}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_e = (m_1 + m_2 + m_3)\vec{\mathbf{g}} = M\vec{\mathbf{g}} \quad (14.31\text{ख})$$

या
$$\frac{d^2\vec{\mathbf{R}}_{cm}}{dt^2} = \vec{\mathbf{g}} \quad (14.32)$$

समीकरण 14.32 हमें बताता है कि बोला का संहति केंद्र गुरुत्व के अधीन मुक्त रूप से गिरता है। यानी अगर इसे परिमित क्षैतिज वेग से फेंका जाए तो इसका संहति केंद्र प्रक्षेप्य की तरह परवलयाकार पथ में चलेगा भले ही इसके कणों की गति कुछ भी क्यों न हो। अब हम इस परिणाम को बिना व्युत्पत्ति दिए N-कण निकाय के लिए देने जा रहे हैं।

आइए, हम N कणों का एक निकाय लें जिसमें द्रव्यमान $m_1, m_2, m_3, m_4, ..., m_N$ के कण हों (चित्र 14.16)। मान लें कि मूल बिन्दु O के सापेक्ष इन कणों के स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}_1, \vec{\mathbf{r}}_2, \vec{\mathbf{r}}_3, \vec{\mathbf{r}}_4, ..., \vec{\mathbf{r}}_N$ हैं।



चित्र 14.16 : बहु-कण निकाय में स्थिति सदिश।

तीन कणों के निकाय के संहति केंद्र की परिभाषा इस निकाय पर लागू करने पर हमें N-कण निकाय के लिए संहति केंद्र की निम्नलिखित परिभाषा प्राप्त होती है :

$$\vec{\mathbf{R}}_{cm} = \frac{(m_1\vec{\mathbf{r}}_1 + m_2\vec{\mathbf{r}}_2 + m_3\vec{\mathbf{r}}_3 + m_4\vec{\mathbf{r}}_4 + \ldots\ldots + m_N\vec{\mathbf{r}}_N)}{(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \ldots\ldots + m_N)} \qquad (14.33\text{क})$$

N-कण निकाय का संहति केंद्र

आप यह बात तो मानेंगे कि यह एक बहुत लंबा व्यंजक है जिसे बार-बार लिखने में परेशानी होगी। इसलिए हम इस **योग के लिए एक विशेष प्रतीक** का प्रयोग करते हैं। हम योग

$(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \ldots\ldots + m_N)$ को $\sum\limits_{i=1}^{N} m_i$ लिखते हैं और

$(m_1\vec{\mathbf{r}}_1 + m_2\vec{\mathbf{r}}_2 + m_3\vec{\mathbf{r}}_3 + m_4\vec{\mathbf{r}}_4 + \ldots\ldots + m_N\vec{\mathbf{r}}_N)$ को $\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\vec{\mathbf{r}}_i$ लिखते हैं।

प्रतीक $\sum\limits_{i=1}^{N}$ उसके बाद आने वाली राशि का, **सूचक** i के मानों के लिए योग दर्शाता है। प्रतीक $\sum$ को सिगमा कहते हैं। यह बड़ा सिगमा है। याद करें कि छोटे सिगमा का प्रतीक σ है। सूचक का प्रतीक i के बजाय कोई भी अक्षर हो सकता है जैसे कि j, n, p, m, आदि।

अतः, आप जब भी प्रतीक $\sum\limits_{i=1}^{N}$ देखें जिसके आगे अधोलिखित अक्षर i हो या $\sum\limits_{m=1}^{N}$ देखें जिसके आगे अधोलिखित अक्षर m हो तो वह N राशियों का योग है।

उदाहरण के लिए, $\sum\limits_{i=1}^{N} c_i = (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \ldots\ldots + c_N)$

या $\sum\limits_{m=1}^{N} \vec{\mathbf{r}}_m = (\vec{\mathbf{r}}_1 + \vec{\mathbf{r}}_2 + \vec{\mathbf{r}}_3 + \vec{\mathbf{r}}_4 + \ldots\ldots + \vec{\mathbf{r}}_N)$

आप इस संकेत पद्धति का प्रयोग करने का अभ्यास ज़रूर करें। इसके लिए बहु-कण निकायों से संबंधित कुछ भौतिक राशियों को इस संकेत पद्धति में लिखें। उदाहरण के लिए, N कणों के निकाय के कुल रैखिक संवेग, कुल गतिज ऊर्जा और कुल कोणीय संवेग के व्यंजक लिखें और उन्हें इस संकेत पद्धति में व्यक्त करें। इस तरह, इस संकेत पद्धति में हम समीकरण 14.33क द्वारा दिया गया निकाय के संहति केंद्र का व्यंजक इस संहत रूप में लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{R}}_{cm} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\vec{\mathbf{r}}_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i}$$

N-कण निकाय का संहति केंद्र

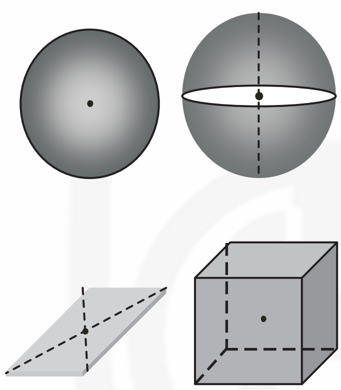
या
$$\vec{\mathbf{R}}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\mathbf{r}}_i}{M} \qquad \text{जहां} \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i \tag{14.33ख}$$

आइए, अब हम *N*-कण निकाय के लिए इस संकेत पद्धति में गति के समीकरण लिखें। *x*, *y*, *z* निर्देशांकों के पदों में हम संहति केंद्र निर्देशांकों को इस तरह लिख सकते हैं :

N-कण निकाय के संहति केंद्र के निर्देशांक

$$X_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \qquad Y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, y_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \qquad Z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, z_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \tag{14.33ग}$$

दृढ़ पिंड बहु-कण निकाय का एक परिचित उदाहरण है। परिभाषा से, दृढ़ पिंड ऐसे बिंदु द्रव्यमानों का संतत समुच्चय होते हैं जिससे कि पिंड के किन्हीं भी दो बिंदु द्रव्यमानों के बीच की दूरी सदैव अचर रहती है। दृढ़ पिंड आकार में सममित या असममित हो सकते हैं।



चित्र 14.17: कुछ सममित दृढ़ पिंडों के संहति केंद्र की स्थितियाँ।

उदाहरण के लिए गोला, दंड, पटल, बेलन, घन और चकती सममित दृढ़ पिंडों के उदाहरण हैं। असममित दृढ़ पिंडों के संहति केंद्र निर्धारित करने की समस्या काफी जटिल होती है। इस पाठ्यक्रम में हम दृढ़ पिंडों का संहति केंद्र निकालने की विधि नहीं समझाएंगे। लेकिन, चित्र 14.17 में कुछ सममित दृढ़ पिंडों के संहति केंद्र की स्थितियां दिखाई गई हैं।

आइए, अब हम *N*-कण निकाय के लिए संहति केंद्र निर्देशांक का गति का समीकरण लिखें :

$$M\ddot{\vec{\mathbf{R}}}_{cm} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_{ei} = \vec{\mathbf{F}}_{e} \tag{14.34}$$

जहां $\vec{\mathbf{R}}_{cm}$ समीकरण 14.33ख द्वारा दिया जाता है और $\vec{\mathbf{F}}_e$ **निकाय पर लग रहा नेट बाह्य बल है।**

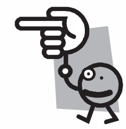
क्या आप पहचान सके कि समीकरण 14.34 द्रव्यमान *M* वाले कण का गति का समीकरण है जो निकाय के संहति केंद्र पर स्थित है?

तो हमने इस भाग में क्या किया है?

हमने *N* **कणों के निकाय के गति के** *N* **समीकरणों को द्रव्यमान** $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ **वाले एकल कण के एक समीकरण से प्रतिस्थापित किया है। यह कण निकाय के संहति केंद्र पर स्थित है। भौतिक रूप से** *N* **कणों का निकाय इस प्रकार व्यवहार करता है मानो निकाय का संपूर्ण द्रव्यमान निकाय के संहति केंद्र पर**

स्थित हो। इसीलिए संहति केंद्र की अवधारणा इतनी उपयोगी होती है। आइए, इसे एक बार फिर दोहराएं।

> **जब तक हमें संपूर्ण निकाय की गति में रुचि होती है, तब तक हम इस पूरे निकाय को द्रव्यमान M वाले एक कण से प्रतिस्थापित कर सकते हैं जहां M उसके कुल द्रव्यमान के बराबर है। यह कण निकाय के संहति केंद्र पर स्थित है।**


कभी न भूलें

बोला के उदाहरण में आपने गुरुत्व के बाह्य बल के लिए इस परिणाम को लागू किया है। इस समीकरण का हल हमें बताता है कि गुरुत्व के अधीन किसी भी जटिल निकाय या पिंड का संहति केंद्र एक परवलयाकार पथ पर चलता है भले ही उसमें मौजूद कणों या अवयवों की गतियां जटिल हों। अब हम इस भाग का सार देते हैं।

N-कण निकाय के लिए संहति केंद्र का गति समीकरण

N कणों के निकाय के लिए जिनके कणों के द्रव्यमान क्रमशः $m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_N$ हों और मूल बिन्दु O के सापेक्ष स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}_1, \vec{\mathbf{r}}_2, \vec{\mathbf{r}}_3, \ldots, \vec{\mathbf{r}}_N$ हों और जिन पर नेट बाह्य बल $\vec{\mathbf{F}}_e$ लग रहा हो, संहति केंद्र का गति का समीकरण होता है :

$$M\ddot{\vec{\mathbf{R}}}_{cm} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_{ei} = \vec{\mathbf{F}}_e \qquad (14.34)$$

जहां $\vec{\mathbf{R}}_{cm}$, N-कण निकाय के संहति केंद्र की स्थिति परिभाषित करता है और उसका मान है :

$$\vec{\mathbf{R}}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\mathbf{r}}_i}{\sum^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\mathbf{r}}_i}{M} \qquad \text{जहां} \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i \qquad (14.33\text{ख})$$

इसके साथ हम इस इकाई का अंत करते हैं और इसका सारांश देते हैं।

14.5 सारांश

अवधारणा	विवरण
द्वि-कण निकाय का संहति केंद्र	■ किसी पिंड या कणों के निकाय का **संहति केंद्र** वह बिन्दु होता है जो इस प्रकार गति करता है मानो उस बिन्दु पर निकाय का कुल द्रव्यमान उपस्थित हो और उस पर सभी बाह्य बल लग रहे हों। **द्वि-कण निकाय** के लिए जिसके कणों के द्रव्यमान क्रमशः m_1 और m_2 हों और मूल बिन्दु O के सापेक्ष स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}_1$ और $\vec{\mathbf{r}}_2$ हों उसका **स्थिति सदिश** होता है :

$$\vec{\mathbf{R}}_{cm} = \frac{m_1\vec{\mathbf{r}}_1 + m_2\vec{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2}$$

आपेक्षिक निर्देशांक

- **एक द्वि-कण निकाय का आपेक्षिक निर्देशांक** द्रव्यमान m_2 के सापेक्ष द्रव्यमान m_1 का स्थिति सदिश होता है :

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2$$

शून्य नेट बाह्य बल के लिए संहति केंद्र और आपेक्षिक निर्देशांकों में द्वि-कण निकाय का गति का समीकरण

- यदि द्रव्यमान m_1 और m_2 वाले द्वि-कण निकाय पर नेट बाह्य बल शून्य हो तो **निर्देशांकों $(\vec{\mathbf{r}}_1, \vec{\mathbf{r}}_2)$ में निकाय के युग्मित गति के समीकरण** होते हैं,

$$m_1\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_1}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_{21} \qquad \text{और} \qquad m_2\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_2}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21}$$

संहति केंद्र और आपेक्षिक निर्देशांकों $(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{R}}_{cm})$ के पदों में ये समीकरण निम्न समीकरणों में समानीत हो जाते हैं :

$$M\frac{d^2\vec{\mathbf{R}}_{cm}}{dt^2} = \vec{\mathbf{0}} \qquad \text{जहां } M = m_1 + m_2$$

$$\text{और} \qquad \mu\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_{21} \qquad \text{या} \qquad \mu\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = -\vec{\mathbf{F}}_{12}$$

$$\text{जहां} \qquad \frac{1}{\mu} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \qquad \text{या} \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}$$

समानीत द्रव्यमान

- द्रव्यमान m_1 और m_2 वाले **दो कणों के निकाय का समानीत द्रव्यमान** होता है :

$$\frac{1}{\mu} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \qquad \text{या} \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

परिमित नेट बाह्य बल के लिए संहति केंद्र और आपेक्षिक निर्देशांकों में द्वि-कण निकाय का गति का समीकरण

- यदि द्वि-कण निकाय के द्रव्यमान m_1 और m_2 वाले दो कणों पर क्रमशः नेट बल $\vec{\mathbf{F}}_1$ और $\vec{\mathbf{F}}_2$ आरोपित होते हैं तो निर्देशांकों $(\vec{\mathbf{r}}_1, \vec{\mathbf{r}}_2)$ में **निकाय के युग्मित गति के समीकरण** होते हैं :

$$m_1\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_1}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_1 \qquad \text{और} \qquad m_2\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_2}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_2$$

और ये समीकरण संहति केंद्र और आपेक्षिक निर्देशांकों $(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{R}}_{cm})$ में इस प्रकार रूपांतरित हो जाते हैं :

$$M\frac{d^2\vec{\mathbf{R}}}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_e, \qquad \text{जहां } M = m_1 + m_2$$

$$\text{और} \qquad \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \frac{1}{\mu}\vec{\mathbf{F}}_{21} + \left(\frac{\vec{\mathbf{F}}_{e1}}{m_1} - \frac{\vec{\mathbf{F}}_{e2}}{m_2}\right)$$

जहां $\vec{\mathbf{F}}_e = \vec{\mathbf{F}}_{e1} + \vec{\mathbf{F}}_{e2}$ निकाय पर नेट बाह्य बल है और $\vec{\mathbf{F}}_{e1}$ और $\vec{\mathbf{F}}_{e2}$ क्रमशः कणों 1 और 2 पर लग रहे नेट बाह्य बल हैं।

N-कण निकाय का संहति केंद्र

■ **N कणों के निकाय के लिए** जिनके कणों के द्रव्यमान क्रमशः $m_1, m_2, m_3, m_4,...,m_N$ हों और मूल बिन्दु O के सापेक्ष स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{\mathbf{r}}_1, \vec{\mathbf{r}}_2, \vec{\mathbf{r}}_3,...,\vec{\mathbf{r}}_N$ हों, परिभाषा से **संहति केन्द्र का स्थिति सदिश** होता है :

$$\vec{\mathbf{R}}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\mathbf{r}}_i}{M} \qquad \text{जहां} \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

x, y और z निर्देशांकों में संहति केन्द्र निर्देशांक होता है :

$$X_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \quad Y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, y_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \quad Z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, z_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

N-कण निकाय के संहति केंद्र का गति का समीकरण

■ **N कणों के निकाय के लिए** जिनके कणों के द्रव्यमान क्रमशः $m_1, m_2, m_3, m_4,...,m_N$ हों और मूल बिन्दु O के सापेक्ष स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{\mathbf{r}}_1, \vec{\mathbf{r}}_2, \vec{\mathbf{r}}_3,...,\vec{\mathbf{r}}_N$ हों और जिस पर नेट बाह्य बल $\vec{\mathbf{F}}_e$ लग रहा हो, संहति केंद्र का **गति का समीकरण** होता है :

$$M\ddot{\vec{\mathbf{R}}}_{cm} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_{ei} = \vec{\mathbf{F}}_e$$

जहां $\vec{\mathbf{R}}_{cm}$, N-कण निकाय के संहति केंद्र का स्थिति सदिश है।

14.6 अंत में कुछ प्रश्न

1. द्रव्यमान 2 kg और 8 kg वाले दो कण एक-दूसरे से 1 m की दूरी पर स्थित हैं। अधिक द्रव्यमान वाले कण की उनके संहति केंद्र से दूरी है :

   क) 0.5 m

   ख) 0.2 m

   ग) 0.8 m

   घ) 0.1 m

2. एक प्रोटॉन और एक इलेक्ट्रॉन आरंभ में विरामावस्था में हैं। फिर वे पारस्परिक आकर्षण बल के अधीन गति करते हैं। उनका संहति केंद्र

   क) प्रोटॉन की ओर गति करता है।

   ख) इलेक्ट्रॉन की ओर गति करता है।

   ग) विरामावस्था में रहता है।

   घ) अनपेक्षित रूप से गति करता है।

3. द्रव्यमान 2.0 kg, 3.0 kg और 5.0 kg वाले तीन समांग गोलों को इस तरह रखा जाता है कि उनके केंद्र क्रमशः $(2.0\,\text{m}\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0\,\text{m}\,\hat{\mathbf{j}} + 5.0\,\text{m}\,\hat{\mathbf{k}})$,

$(3.0\,\text{m}\,\hat{\mathbf{i}} - 4.0\,\text{m}\,\hat{\mathbf{j}} - 1.0\,\text{m}\,\hat{\mathbf{k}})$ और $(4.0\,\text{m}\,\hat{\mathbf{i}} - 2.0\,\text{m}\,\hat{\mathbf{j}} - 2.0\,\text{m}\,\hat{\mathbf{k}})$ पर हों। गोलों के निकाय के संहति केंद्र का y-निर्देशांक है :

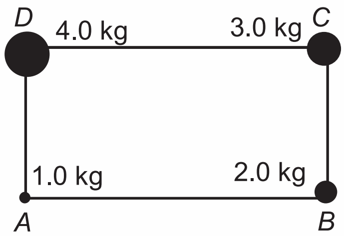
क) 3.3 m

ख) 0.3 m

ग) 1.8 m

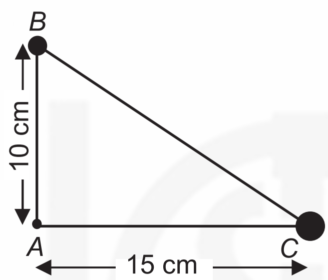
घ) – 1.8 m

4. दो कणों के एक निकाय के जिसमें द्रव्यमान 1.5 kg और 2.5 kg वाले दो कण एक-दूसरे से 3.0 m की दूरी पर रखे हैं, संहति केंद्र निर्देशांक और आपेक्षिक निर्देशांक ज्ञात करें।



चित्र 14.18: अंत के प्रश्न 5 के लिए आरेख।

5. द्रव्यमान 1.0 kg, 2.0 kg, 3.0 kg और 4.0 kg वाले कण एक आयत $ABCD$ के सिरों पर चित्र 14.18 के अनुसार रखे हैं। दिया है कि $AB = 8.0$ cm और $AD = 4.0$ cm । निकाय के संहति केंद्र की स्थिति ज्ञात करें।
6. समकोण त्रिभुज ABC के शीर्षों पर रखे द्रव्यमान 1.0 kg, 2.0 kg और 3.0 kg वाले तीन कणों के निकाय (चित्र 14.19) का संहति केंद्र निर्धारित करें।
7. CO अणु का समानीत द्रव्यमान (au में) ज्ञात करें जबकि दिया है कि कार्बन और ऑक्सीजन परमाणुओं के द्रव्यमान क्रमशः 12 au और 16 au हैं।



चित्र 14.19: अंत के प्रश्न 6 के लिए आरेख।

8. एक युग्म-तारा निकाय का समानीत द्रव्यमान (सूर्य के द्रव्यमान के पदों में) ज्ञात करें जबकि दिया है कि इसके दोनों तारों के द्रव्यमान सूर्य के द्रव्यमान के क्रमशः 1.1 और 0.90 गुना हैं।
9. यम और उसके उपग्रह के निकाय का समानीत द्रव्यमान ज्ञात करें जबकि दिया है कि यम का द्रव्यमान 1.31×10^{22} kg है और उसके उपग्रह का द्रव्यमान 1.52×10^{21} kg है।
10. द्रव्यमान $m_1 = 2.0\,\text{kg}$, $m_2 = 3.0\,\text{kg}$ और $m_3 = 5.0\,\text{kg}$ वाले तीन कणों के स्थिति सदिश हैं क्रमशः

$$\vec{\mathbf{r}}_1 = (2t + 5t^2)\text{m}\,\hat{\mathbf{i}} + 3t\,\text{m}\,\hat{\mathbf{j}},\ \vec{\mathbf{r}}_2 = 4\,\text{m}\,\hat{\mathbf{i}} + (7t^2)\text{m}\,\hat{\mathbf{j}} \text{ और } \vec{\mathbf{r}}_3 = 6t\,\text{m}\,\hat{\mathbf{i}} + 2\,\text{m}\,\hat{\mathbf{j}}$$

इस निकाय के संहति केंद्र का वेग और त्वरण ज्ञात करें।

14.7 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. क) मान लें कि दोनों पिंड x-अक्ष के अनुदिश स्थित हैं और द्रव्यमान 2.5 kg वाला पिंड मूल बिन्दु पर है। तब दोनों द्रव्यमानों $m_1 = 2.5$ kg और $m_2 = 25$ kg के निर्देशांक क्रमशः $x_1 = 0$ और $x_2 = 1.0$ m हैं। समीकरणों 14.7ख और 14.9ख से संहति केंद्र के निर्देशांक और आपेक्षिक निर्देशांक हैं, क्रमशः

$$X_{cm} = \frac{2.5\,\text{kg} \times 0 + 25\,\text{kg} \times 1.0\,\text{m}}{2.5\,\text{kg} + 25\,\text{kg}} = 0.91\,\text{m} \quad \text{और} \quad x = x_1 - x_2 = -1.0\,\text{m}$$

ख) मान लें कि पृथ्वी और चंद्रमा के केंद्र x-अक्ष के अनुदिश हैं और पृथ्वी का केंद्र मूल बिन्दु पर है। समीकरणों 14.7ख और 14.9ख में

$m_1 = M_e = 5.97 \times 10^{24}$ kg और $m_2 = M_m = 7.35 \times 10^{22}$ kg

रखने पर और x_1 = पृथ्वी का x निर्देशांक = 0 और

x_2 = पृथ्वी और चंद्रमा के बीच की दूरी = 3.84×10^8 m रखने पर संहति केंद्र का निर्देशांक है :

$$X_{cm} = \frac{5.97 \times 10^{24}\,\text{kg} \times 0 + 7.35 \times 10^{22}\,\text{kg} \times 3.84 \times 10^8\,\text{m}}{5.97 \times 10^{24}\,\text{kg} + 7.35 \times 10^{22}\,\text{kg}} = 4.67 \times 10^6\,\text{m}$$

अतः, इस स्थिति के लिए संहति केंद्र पृथ्वी के बहुत अधिक निकट है और उसके केंद्र से 4.67×10^3 km की दूरी पर है। आपेक्षिक निर्देशांक है

$$x = x_1 - x_2 = -3.84 \times 10^8\,\text{m}$$

ग) समीकरणों 14.7ख और ग और 14.9ख और ग में $m_1 = m_2 = 5.0$kg, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$ और $y_2 = 2.0$ m रखने पर संहति केंद्र के निर्देशांक हैं :

$$X_{cm} = 0 \text{ और } Y_{cm} = \frac{5.0\,\text{kg} \times 0 + 5.0\,\text{kg} \times 2.0\,\text{m}}{5.0\,\text{kg} + 5.0\,\text{kg}} = 1.0\,\text{m}$$

m में संहति केंद्र के निर्देशांक (0, 1.0) हैं। आपेक्षिक निर्देशांक हैं

$$x = x_1 - x_2 = 0 \text{ और } y = y_1 - y_2 = -2.0\,\text{m}$$

2. क) समीकरण 14.19ख में $m_1 = M_e = 5.97 \times 10^{24}$ kg और $m_2 = M_m = 7.35 \times 10^{22}$ kg रखने पर समानीत द्रव्यमान है :

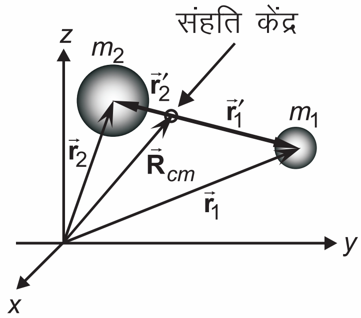
$$\mu = \frac{5.97 \times 10^{24}\,\text{kg} \times 7.35 \times 10^{22}\,\text{kg}}{5.97 \times 10^{24}\,\text{kg} + 7.35 \times 10^{22}\,\text{kg}} = 7.26 \times 10^{22}\,\text{kg} \cong M_m$$

ख) समान द्रव्यमान वाले 2 कणों के निकाय के लिए समानीत द्रव्यमान प्रत्येक कण के द्रव्यमान का आधा होता है। इस स्थिति के लिए समानीत द्रव्यमान प्रत्येक कंचे के द्रव्यमान के आधा है। अतः $\mu = \frac{1}{2} \times (0.2\,\text{kg}) = 0.1\,\text{kg}$

ग) प्रोटॉन का द्रव्यमान है $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg और इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान है $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg। चूंकि प्रोटॉन का द्रव्यमान इलेक्ट्रॉन के द्रव्यमान से बहुत अधिक है ($m_p \approx 1836\, m_e$), अतः निकाय का समानीत द्रव्यमान लगभग इलेक्ट्रॉन के द्रव्यमान के बराबर है।

घ) समीकरण 14.19ख में m_1 = तारे का द्रव्यमान = m और m_2 = ब्लैक होल का द्रव्यमान = $100m$ रखने पर

$$\mu = \frac{m \times 100\,m}{100\,m + m} = 0.99\,m \approx m \cong \text{तारे का द्रव्यमान}$$



चित्र 14.20: बोध प्रश्न 3 के उत्तर के लिए चित्र।

3. माना कि छड़ के दोनों द्रव्यमानों m_1 और m_2 की संहति केंद्र के सापेक्ष स्थितियां क्रमशः $\vec{r}'_1$ और $\vec{r}'_2$ हैं (चित्र 14.20)। पतले, हल्के छड़ के द्रव्यमान को नगण्य मान कर हम चित्र 14.20 से दोनों द्रव्यमानों के संहति केंद्र के सापेक्ष स्थिति सदिश लिख सकते हैं : $\vec{r}'_1 = \vec{r}_1 - \vec{R}_{cm}$ और $\vec{r}'_2 = \vec{r}_2 - \vec{R}_{cm}$

संहति केंद्र निर्देशांक का व्यंजक रखने पर हमें मिलता है

$$\vec{\mathbf{r}}_1' = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{\mathbf{r}} \text{ और } \vec{\mathbf{r}}_2' = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{\mathbf{r}}, \text{ जहां } \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2$$

इन सदिशों के परिमाण हैं :

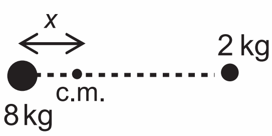
$$|\vec{\mathbf{r}}_1'| = \frac{m_2}{m_1+m_2}|\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2| = \frac{m_2 L}{m_1+m_2} \text{ और } |\vec{\mathbf{r}}_2'| = \frac{m_1}{m_1+m_2}|\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2| = \frac{m_1 L}{m_1+m_2}$$

गुरुत्व के अधीन संहति केंद्र का गति का समीकरण, समीकरण 14.25 में $M = m_1 + m_2$ और $\vec{\mathbf{F}}_e = \vec{\mathbf{F}}_{e1} + \vec{\mathbf{F}}_{e2} = m_1\vec{\mathbf{g}} + m_2\vec{\mathbf{g}} = (m_1+m_2)\vec{\mathbf{g}}$ रखने पर मिलता है।

$$\therefore \quad \frac{d^2\vec{\mathbf{R}}_{cm}}{dt^2} = \vec{\mathbf{g}}$$

यह गुरुत्व के अधीन मुक्त रूप से गिर रहे पिंड का गति का समीकरण है। अतः, संहति केंद्र का पथ परवलय है।

अंत में कुछ प्रश्न



चित्र 14.21: चित्र पैमाने के अनुसार नहीं है।

1. सही विकल्प ख है। मान लें कि दोनों कण x-अक्ष पर हैं और अधिक (8 kg) द्रव्यमान वाला कण मूल बिन्दु पर है (चित्र 14.21)। मान लें कि संहति केंद्र मूल बिन्दु से दूरी x पर है। समीकरण 14.7ख से संहति केंद्र का निर्देशांक है :

$$x_{cm} = \frac{(8\,\text{kg} \times 0 + 2\,\text{kg} \times 1\,\text{m})}{10\,\text{kg}} = 0.2\,\text{m}$$

2. सही विकल्प ग है। क्योंकि कणों के निकाय के संहति केंद्र को गति देने के लिए बाह्य बल चाहिए होता है। वैद्युत् आकर्षण बल आंतरिक बल है जो निकाय के संहति केंद्र की स्थिति को प्रभावित नहीं कर सकता।

3. सही विकल्प घ है। समीकरण 14.33ग से संहति केंद्र के स्थिति सदिश का y-घटक है

$$Y_{cm} = \frac{[2.0\,\text{kg} \times 2.0\,\text{m} + 3.0\,\text{kg} \times (-4.0\,\text{m}) + 5.0\,\text{kg} \times (-2.0\,\text{m})]}{(2.0\,\text{kg} + 3.0\,\text{kg} + 5.0\,\text{kg})} = -1.8\,\text{m}$$

4. मान लें कि दोनों द्रव्यमान x-अक्ष पर हैं और 1.5 kg का द्रव्यमान मूल बिन्दु पर है। समीकरण 14.7ख में $m_1 = 1.5$ kg, $m_2 = 2.5$ kg, $x_1 = 0$ और $x_2 = 3.0$ m रखने पर संहति केंद्र का निर्देशांक है :

$$X_{cm} = \frac{1.5\,\text{kg} \times 0 + 2.5\,\text{kg} \times 3.0\,\text{m}}{1.5\,\text{kg} + 2.5\,\text{kg}} = 1.9\,\text{m}$$

आपेक्षिक निर्देशांक है : $x = x_1 - x_2 = -3.0\,\text{m}$

5. चित्र 14.18 में हम x और y-अक्षों को क्रमशः AB और AD के अनुदिश लेते हैं और A को मूल बिन्दु पर लेते हैं। समीकरण 14.33ग में

$$m_1 = 1.0\,\text{kg} \quad m_2 = 2.0\,\text{kg} \quad m_3 = 3.0\,\text{kg} \text{ और } m_4 = 4.0\,\text{kg}$$
$$x_1 = 0 \quad x_2 = 8.0\,\text{cm} \quad x_3 = 8.0\,\text{cm} \text{ और } x_4 = 0\,\text{cm}$$
$$y_1 = 0 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = 4.0\,\text{cm} \text{ और } y_4 = 4.0\,\text{cm}$$

रखने पर संहति केंद्र के निर्देशांक हैं :

$$X_{cm} = \frac{1.0\,\text{kg} \times 0 + 2.0\,\text{kg} \times 8.0\,\text{cm} + 3.0\,\text{kg} \times 8.0\,\text{cm} + 4.0\,\text{kg} \times 0}{1.0\,\text{kg} + 2.0\,\text{kg} + 3.0\,\text{kg} + 4.0\,\text{kg}}$$

$$= 4.0\,\text{cm}$$

$$Y_{cm} = \frac{1.0\,\text{kg} \times 0 + 2.0\,\text{kg} \times 0 + 3.0\,\text{kg} \times 4.0\,\text{cm} + 4.0\,\text{kg} \times 4.0\,\text{cm}}{10\,\text{kg}}$$

$$= 2.8\,\text{cm}$$

6. चित्र 14.19 में मान लें कि x और y-अक्ष क्रमशः AC और AB के अनुदिश हैं। तब हम समीकरण 14.33ग से संहति केंद्र के निर्देशांक ज्ञात कर सकते हैं। A, B और C के निर्देशांक m में हैं क्रमशः (0, 0), (0, 0.10) और (0.15, 0)। तब निकाय के संहति केंद्र के निर्देशांक हैं :

$$X_{cm} = \frac{1.0\,\text{kg} \times 0 + 2.0\,\text{kg} \times 0\,\text{m} + 3.0\,\text{kg} \times 0.15\,\text{m}}{6.0\,\text{kg}} = 7.5 \times 10^{-2}\,\text{m}$$

$$Y_{cm} = \frac{1.0\,\text{kg} \times 0 + 2.0\,\text{kg} \times 0.1\,\text{m} + 3.0\,\text{kg} \times 0}{6.0\,\text{kg}} = 3.3 \times 10^{-2}\,\text{m}$$

संहति केंद्र के निर्देशांक $(7.5 \times 10^{-2}\,\text{m}, 3.3 \times 10^{-2}\,\text{m})$ हैं।

7. समीकरण 14.19ख से $m_1 = 12$ au और $m_2 = 16$ au के लिए समानीत द्रव्यमान है :

$$\mu = \frac{12\,\text{au} \times 16\,\text{au}}{12\,\text{au} + 16\,\text{au}} = 6.9\,\text{au}$$

8. समीकरण 14.19ख से $m_1 = 1.1\,M_s$ और $m_2 = 0.90\,M_s$ (जहां M_s सूर्य का द्रव्यमान है) के लिए समानीत द्रव्यमान है :

$$\mu = \frac{1.1 M_s \times 0.90\,M_s}{1.1 M_s + 0.90\,M_s} = 0.495\,M_s \approx 0.5\,M_s$$

9. समीकरण 14.19ख से $m_1 = 1.31 \times 10^{22}\,\text{kg}$ और $m_2 = 1.52 \times 10^{21}\,\text{kg}$ के लिए समानीत द्रव्यमान है :

$$\mu = \frac{1.31 \times 10^{22}\,\text{kg} \times 1.52 \times 10^{21}\,\text{kg}}{1.31 \times 10^{22}\,\text{kg} + 1.52 \times 10^{21}\,\text{kg}} = 1.36 \times 10^{21}\,\text{kg}$$

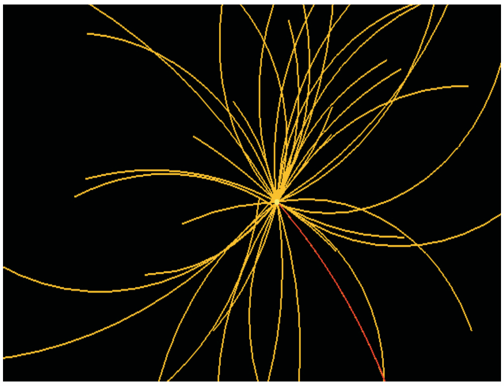
10. समीकरण 14.33क से निकाय के संहति केंद्र का स्थिति सदिश है :

$$\vec{\mathbf{R}}_{cm} = (1.2 + 3.4t + t^2)\,\text{m}\,\hat{\mathbf{i}} + (1.0 + 0.6t + 2.1t^2)\,\text{m}\,\hat{\mathbf{j}}$$

अतः, संहति केंद्र के वेग और त्वरण हैं :

$$\vec{\mathbf{v}}_{cm} = \frac{d\vec{\mathbf{R}}_{cm}}{dt} = (3.4 + 2t)\,\text{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}} + (0.6 + 4.2t)\,\text{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathbf{a}}_{cm} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{cm}}{dt} = 2.0\,\text{ms}^{-2}\,\hat{\mathbf{i}} + 4.2\,\text{ms}^{-2}\,\hat{\mathbf{j}}$$



मूल कणों के संघट्टनों पर संरक्षण नियम लागू करने पर सूक्ष्म संसार के रहस्य कैसे उजागर होते हैं? उत्तर आप इस इकाई में सीखेंगे।

इकाई 15

बहु-कण निकायों के लिए संरक्षण नियम

इकाई की रूपरेखा

अध्ययन निर्देशिका

इस इकाई में हम द्वि-कण और बहु-कण निकायों के रैखिक संवेग, कोणीय संवेग और ऊर्जा के व्यंजक प्राप्त करेंगे। साथ ही हम इनसे संबद्ध संरक्षण नियम भी प्राप्त करेंगे। इस इकाई की अवधारणाओं को अच्छी तरह समझने के लिए आपको एकल कणों के रैखिक संवेग, ऊर्जा और कोणीय संवेग की अवधारणाओं की जानकारी होनी चाहिए। साथ ही आपको उनके संगत संरक्षण नियमों की भी जानकारी होनी चाहिए। इसके लिए आपको खंड 2 में दी गई इन अवधारणाओं को दोहरा लेना चाहिए। आपको खंड 1 में दी गई सदिश बीजगणित की अवधारणाओं को भी दोहरा लेना चाहिए। इस इकाई के कुछ अंशों में गणित का काफ़ी प्रयोग किया गया है और इसमें दी गई कुछ अवधारणाएं अमूर्त हैं। उन्हें पढ़ते समय **हमेशा अपने साथ कागज़ और कलम रखें और सभी गणितीय चरण खुद हल करें**। इससे आपको इस इकाई की अवधारणाओं को अच्छी तरह समझने में मदद मिलेगी। आप सभी उदाहरण, बोध प्रश्न और अंत के प्रश्न खुद हल करें।

> "प्रकृति अपने नियमों को कभी नहीं तोड़ती।"
>
> **लियोनार्दो दा विंची**

15.1 परिचय

इकाई 14 में आपने द्वि-कण निकायों की गतिकी का अध्ययन किया है और संहति केंद्र की अवधारणा सीखी है। आपने सीखा है कि द्वि-कण निकायों के युग्मित गति के समीकरणों को **संहति केंद्र** और **आपेक्षिक निर्देशांकों** के पदों में अयुग्मित समीकरणों के रूप में कैसे लिखा जाता है। आपने इन अवधारणाओं को बहु-कण निकायों पर लागू करना भी सीखा है। इस इकाई में हम द्वि-कण और बहु-कण निकायों के रैखिक संवेग, कोणीय संवेग और ऊर्जा के मान प्राप्त करेंगे। साथ ही हम इनसे संबद्ध संरक्षण नियमों की चर्चा भी करेंगे। इकाइयों 8, 10 और 12 से याद करें कि इन नियमों के कारण पिंडों की गति का अध्ययन काफ़ी आसान हो जाता है। इसीलिए हम इन्हें बहु-कण निकायों पर भी लागू करेंगे।

भाग 15.2 में हम **द्वि-कण निकायों का रैखिक संवेग** और **रैखिक संवेग संरक्षण नियम** प्राप्त करेंगे जिनके बारे में आपने इकाई 8 में पढ़ा है। इन्हें हम बहु-कण निकायों के लिए भी प्राप्त करेंगे। भाग 15.3 में हम द्वि-कण निकायों और बहु-कण निकायों के लिए **यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण** की चर्चा करेंगे। भाग 15.4 में हम रैखिक संवेग और ऊर्जा संरक्षण नियमों को **दो कणों के प्रत्यास्थ संघट्टन** पर लागू करेंगे। भाग 15.5 में हम द्वि-कण और बहु-कण निकायों के **कोणीय संवेग संरक्षण** की चर्चा करेंगे। इस इकाई के साथ हम प्रारंभिक यांत्रिकी जिसका उपयोग पिंडों के स्थानांतरण और घूर्णी गति में होता है की पढ़ाई समाप्त करेंगे। अगले खंड में आप दोलनी गति के बारे में पढ़ेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- द्वि-कण और बहु-कण निकायों के रैखिक संवेग, कोणीय संवेग और गतिज ऊर्जा की गणना कर सकेंगे;
- द्वि-कण निकायों के रैखिक संवेग, गतिज ऊर्जा, और कोणीय संवेग के व्यंजकों को संहति केंद्र और आपेक्षिक निर्देशांकों के पदों में व्युत्पन्न कर सकेंगे;
- संहति केंद्र और आपेक्षिक निर्देशांकों के पदों में बहु-कण निकायों के लिए रैखिक संवेग, यांत्रिक ऊर्जा और कोणीय संवेग के व्यंजक लिख सकेंगे;
- द्वि-कण और बहु-कण निकायों के लिए रैखिक संवेग, यांत्रिक ऊर्जा और कोणीय संवेग के संरक्षण नियमों का कथन दे सकेंगे;
- रैखिक संवेग, यांत्रिक ऊर्जा और कोणीय संवेग के संरक्षण नियमों को सरल द्वि-कण निकायों पर लागू कर सकेंगे, और
- दो कणों के प्रत्यास्थ संघट्टन पर आधारित सवाल हल कर सकेंगे।

15.2 रैखिक संवेग संरक्षण

इस भाग में पहले हम एक द्वि-कण निकाय के रैखिक संवेग को संहति केंद्र और आपेक्षिक निर्देशांकों के पदों में लिखेंगे। फिर इस अवधारणा को बहु-कण निकायों पर लागू करेंगे। साथ ही हम द्वि-कण और बहु-कण निकायों के लिए रैखिक संवेग संरक्षण नियम की चर्चा भी करेंगे।

15.2.1 द्वि-कण निकाय

द्वि-कण निकाय का **कुल रैखिक संवेग** निकाय में स्थित दोनों कणों के रैखिक संवेगों के योग के बराबर होता है :

$$\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2 \qquad (15.1\text{क})$$

जहां $\vec{\mathbf{p}}_1 = m_1\vec{\mathbf{v}}_1$ और $\vec{\mathbf{p}}_2 = m_2\vec{\mathbf{v}}_2$। इकाई 14 के समीकरण 14.2 से संहति केंद्र निर्देशांक की परिभाषा का प्रयोग करके हम समीकरण 15.1क को संहति केंद्र निर्देशांक के पदों में लिख सकते हैं। इसके लिए हम समीकरण 15.1क को इस तरह लिखते हैं :

$$\vec{\mathbf{p}} = m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2 = m_1\frac{d\vec{\mathbf{r}}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{\mathbf{r}}_2}{dt} \qquad (15.1\text{ख})$$

अब हम समीकरण 15.1ख के दायें पक्ष को $(m_1 + m_2)$ से भाग देते हैं और गुणा करते हैं।

इस तरह हमें मिलता है $$\vec{\mathbf{p}} = (m_1 + m_2)\left(\frac{m_1\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}_1}{dt} + m_2\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}_2}{dt}}{m_1 + m_2}\right) \qquad (15.1\text{ग})$$

समीकरण 14.2 से $$\vec{\mathbf{R}}_{cm} = \frac{m_1\vec{\mathbf{r}}_1 + m_2\vec{\mathbf{r}}_2}{(m_1 + m_2)}$$

ऊपर दिए गए समीकरण 14.2 का समय के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें द्वि-कण निकाय के संहति केंद्र का वेग मिलता है :

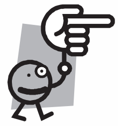
$$\vec{\mathbf{V}}_{cm} = \frac{d\vec{\mathbf{R}}_{cm}}{dt} = \frac{m_1\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}_1}{dt} + m_2\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}_2}{dt}}{m_1 + m_2} \qquad (15.1\text{घ})$$

समीकरण 15.1घ को समीकरण 15.1ग में रखने पर हमें मिलता है :

द्वि-कण निकाय का रैखिक संवेग

$$\vec{\mathbf{p}} = M\vec{\mathbf{V}}_{cm} \quad \text{जहां} \quad M = m_1 + m_2 \qquad (15.1\text{च})$$

इस तरह,



कभी न भूलें

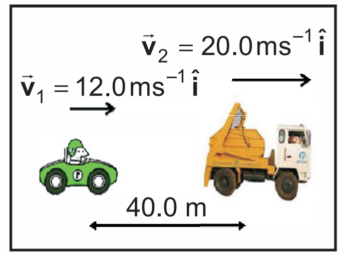
द्वि-कण निकाय का कुल रैखिक संवेग संहति केंद्र के रैखिक संवेग के बराबर होता है।

आइए, अब इस परिणाम को लागू करें।

उदाहरण 15.1 : दो वाहनों की गति

द्रव्यमान 1200 kg की एक गाड़ी 12.0 ms^{-1} की चाल से सीधी सड़क पर गतिमान है। द्रव्यमान 1800 kg और चाल 20.0 ms^{-1} वाला एक ट्रक गाड़ी की दिशा में ही गतिमान है। किसी क्षण पर देखा जाता है कि ट्रक गाड़ी से 40.0 m आगे है। उस क्षण पर गाड़ी और ट्रक से बने निकाय के संहति केंद्र की स्थिति प्राप्त करें। उसी क्षण पर निकाय के कुल रैखिक संवेग और संहति केंद्र के वेग की गणना करें।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि गाड़ी और ट्रक को कण माना जाए और गाड़ी और ट्रक से बने निकाय को द्वि-कण निकाय। हम गाड़ी और ट्रक के निर्देशांक प्राप्त कर सकते हैं और इस तरह संहति केंद्र निर्देशांक प्राप्त कर सकते हैं। निकाय का रैखिक संवेग समीकरण 15.1क से मिलता है और संहति केंद्र का वेग समीकरण 15.1च से।



चित्र 15.1: द्वि-कण निकाय का रैखिक संवेग और संहति केंद्र के स्थिति और वेग।

चूंकि दोनों वाहन सरल रेखा में गतिमान हैं (चित्र 15.1), इसलिए हम गति की दिशा *x*-अक्ष के अनुदिश लेते हैं। इस तरह किसी क्षण पर दोनों पिंड *x*-अक्ष पर स्थित हैं। यदि दिए क्षण पर गाड़ी मूल बिन्दु $x = 0$ m पर है तो ट्रक का निर्देशांक है $x = 40.0$ m। उस क्षण पर गाड़ी और ट्रक के स्थिति सदिश हैं क्रमशः $\vec{\mathbf{r}}_1 = \vec{\mathbf{0}}$ और $\vec{\mathbf{r}}_2 = (40.0\text{ m})\,\hat{\mathbf{i}}$। निकाय के संहति केंद्र की स्थिति है :

$$\vec{\mathbf{R}}_{cm} = \frac{(1200\,\text{kg})\,\vec{\mathbf{r}}_1 + (1800\,\text{kg})\,\vec{\mathbf{r}}_2}{(1200 + 1800)\text{ kg}} = \frac{(1800\,\text{kg})\,(40.0\,\text{m})\,\hat{\mathbf{i}}}{3000\text{ kg}} = 24.0\,\text{m}\,\hat{\mathbf{i}}$$

गाड़ी और ट्रक के वेग क्रमशः $12.0\text{ ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}}$ और $20.0\text{ ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}}$ हैं।
निकाय का कुल रैखिक संवेग है :

$$\vec{\mathbf{p}} = m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2 = (1200\text{ kg})\,\vec{\mathbf{v}}_1 + (1800\,\text{kg})\,\vec{\mathbf{v}}_2$$

$$= \left(1200\text{ kg} \times 12.0\text{ ms}^{-1}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(1800\text{ kg} \times 20.0\text{ ms}^{-1}\right)\hat{\mathbf{i}} = 5.04\times10^4\text{ kgms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}}$$

समीकरण 15.1च से निकाय के संहति केंद्र का वेग है :

$$\vec{\mathbf{V}}_{cm} = \frac{\vec{\mathbf{p}}}{M} = \frac{5.04\times10^4\text{ kgms}^{-1}}{3000\,\text{kg}}\,\hat{\mathbf{i}} = 16.8\text{ ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}}$$

अब उस स्थिति के लिए इकाई 14 से समीकरण 14.14 याद करें जब निकाय पर कोई बाह्य बल नहीं लग रहा हो। जो भी बल है वह दोनों कणों के बीच का पारस्परिक क्रिया बल है। समीकरण 14.14 का समय के सापेक्ष समाकल निकालने पर हमें मिलता है:

$$M\frac{d\vec{\mathbf{R}}_{cm}}{dt} = \text{अचर} \qquad (15.2)$$

समीकरण 15.1च के साथ समीकरण 15.2 हमें बताता है कि **जब निकाय पर कोई बाह्य बल नहीं लगता तब निकाय के संहति केंद्र का रैखिक संवेग अचर होता है**। इससे हम द्वि-कण निकाय के रैखिक संवेग संरक्षण नियम पर पहुंचते हैं।

द्वि-कण निकाय का रैखिक संवेग संरक्षण

अगर एक द्वि-कण निकाय पर लग रहा नेट बाह्य बल शून्य हो तो निकाय का कुल रैखिक संवेग अचर रहता है :

$$M\frac{d\vec{\mathbf{R}}_{cm}}{dt} = M\vec{\mathbf{V}}_{cm} = \text{अचर} \qquad (15.2)$$

रैखिक संवेग संरक्षण

आइए, अब हम इस नियम का एक सरल अनुप्रयोग लें।

उदाहरण 15.2 : रैखिक संवेग संरक्षण

स्केटिंग कर रहे दो व्यक्ति जिनमें से एक का द्रव्यमान 40 kg है और दूसरे का 50 kg, एक हल्की छड़ को उसके किनारों पर पकड़े हुए बर्फ पर खड़े हैं। छड़ के किनारों से वे उसके केंद्र की ओर अचर वेग से चलते हैं जब तक कि वे मिल नहीं जाते। 50 kg द्रव्यमान वाले व्यक्ति का वेग क्या होगा यदि 40 kg द्रव्यमान वाले व्यक्ति की वेग 10 ms^{-1} है। घर्षण को नगण्य मानें।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि निकाय को द्वि-कण निकाय माना जाए, देखा जाए कि इस पर रैखिक संवेग संरक्षण नियम लागू होता है कि नहीं और यदि लागू होता है तब उसे लागू किया जाए।

क्योंकि निकाय पर कोई बाह्य बल नहीं लग रहा है, निकाय का कुल रैखिक संवेग संरक्षित रहेगा। क्योंकि दोनों व्यक्ति प्रारंभ में विरामावस्था में है, निकाय का आरंभिक रैखिक संवेग शून्य है।

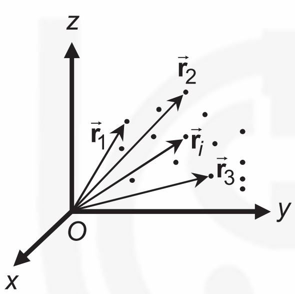
मान लें कि 40 kg और 50 kg वाले व्यक्तियों के वेग क्रमशः $\vec{\mathbf{v}}_1$ और $\vec{\mathbf{v}}_2$ हैं। क्योंकि गति सीधी रेखा के अनुदिश है, मान लें कि 40 kg वाले व्यक्ति की गति धनात्मक x- अक्ष के अनुदिश है। तब रैखिक संवेग संरक्षण के नियम के अनुसार :

$$m_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + m_2 \vec{\mathbf{v}}_2 = \vec{\mathbf{0}}$$

और
$$m_1 v_1 \hat{\mathbf{i}} - m_2 v_2 \hat{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{0}} \qquad \text{(i)}$$

क्योंकि दोनों व्यक्ति एक दूसरे से विपरीत दिशा में गतिमान हैं।
$m_1 = 40$ kg, $m_2 = 50$ kg और $v_1 = 10\ ms^{-1}$ का मान समीकरण (i) में रखने पर हमें मिलता है :

ऋणात्मक x- अक्ष के अनुदिश $v_2 = \dfrac{40\ kg \times 10\ ms^{-1}}{50\ kg} = 8\ ms^{-1}$



चित्र. 15.2

बोध प्रश्न 1 – रैखिक संवेग संरक्षण

क) एक 2 kg की गेंद और एक 3 kg की गेंद एक-दूसरे की ओर 5 ms^{-1} की बराबर चाल से गतिमान हैं। निकाय के संहति केंद्र का वेग क्या है?

ख) 10 g की एक गोली को एक लकड़ी के ब्लॉक पर दागा जाता है और वह उसी के अंदर रह जाती है। गोली और ब्लॉक की चाल 0.2 ms^{-1} है। गोली की आरंभिक चाल क्या है?

15.2.2 बहु-कण निकाय

आइये, हम N कणों का निकाय लें जिनके द्रव्यमान $m_1, m_2, m_3, m_4, ..., m_N$ हैं जैसाकि हमने इकाई 14 में लिया था। मान लें कि मूल बिन्दु O के सापेक्ष इनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{\mathbf{r}}_1, \vec{\mathbf{r}}_2, \vec{\mathbf{r}}_3, \vec{\mathbf{r}}_4, ..., \vec{\mathbf{r}}_N$ हैं (चित्र 15.2)। इस निकाय का कुल रैखिक संवेग क्या है? इसका मान है :

$$\vec{\mathbf{P}} = m_1\dot{\vec{\mathbf{r}}}_1 + m_2\dot{\vec{\mathbf{r}}}_2 + \ldots + m_N\dot{\vec{\mathbf{r}}}_N \qquad (15.3\text{क})$$

जहां $\dot{\vec{\mathbf{r}}}_1, \dot{\vec{\mathbf{r}}}_2, \ldots, \dot{\vec{\mathbf{r}}}_N$ डॉट संकेत पद्धति में कणों के वेग हैं। हम योग के संकेत का प्रयोग करके कुल रैखिक संवेग को इस तरह लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{\mathbf{r}}}_i = M\dot{\vec{\mathbf{R}}}_{cm} \qquad (15.3\text{ख})$$

N-कण निकाय का रैखिक संवेग

जहां हमने समीकरण 14.3ख से $\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{\mathbf{r}}}_i = M\dot{\vec{\mathbf{R}}}_{cm}$ रखा है। समीकरण 15.3ख का समय के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें बहु-कण निकाय के लिए गति का समीकरण प्राप्त होता है।

$$\frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} = M\ddot{\vec{\mathbf{R}}}_{cm} = \vec{\mathbf{F}}_e \qquad (15.3\text{ग})$$

N-कण निकाय का गति का समीकरण

यदि निकाय पर नेट बाह्य बल शून्य हो तो हमें मिलता है :

$$\frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} = M\ddot{\vec{\mathbf{R}}}_{cm} = \vec{\mathbf{0}} \qquad (15.4\text{क})$$

या

$$\vec{\mathbf{P}} = M\dot{\vec{\mathbf{R}}}_{cm} = M\vec{\mathbf{V}}_{cm} = \text{अचर} \qquad (15.4\text{ख})$$

यही *N*-कण निकाय के लिए रैखिक संवेग संरक्षण नियम है।

डॉट संकेत पद्धति में

$$\dot{\vec{\mathbf{r}}}_1 = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_1}{dt},\ \dot{\vec{\mathbf{r}}}_2 = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_2}{dt}\ldots$$

और

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}}_1 = \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_1}{dt^2},\ \ddot{\vec{\mathbf{r}}}_2 = \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_2}{dt^2}\ldots$$

बहु-कण निकाय के लिए रैखिक संवेग संरक्षण

एक *N*-कण निकाय का कुल रैखिक संवेग अचर रहता है यदि उस पर कोई नेट बाह्य बल नहीं आरोपित होता :

$$M\vec{\mathbf{V}}_{cm} = \text{अचर} \qquad (15.4\text{ख})$$

इस तरह **जब एक बहु-कण निकाय पर कोई नेट बाह्य बल आरोपित नहीं होता** तब **निकाय के संहति केन्द्र का वेग अचर रहता है। संहति केंद्र सरल रेखा में गतिमान होता है।**

उदाहरण 15.3 : रैखिक संवेग

समान द्रव्यमान *m* वाले तीन कणों का निकाय लें जिनके स्थिति सदिश (m में) तीन भिन्न क्षणों पर नीचे दिए गए हैं।

t (in s)	$\vec{\mathbf{r}}_1$	$\vec{\mathbf{r}}_2$	$\vec{\mathbf{r}}_3$
0	$\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$	$2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$	$3\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$
1	$\hat{\mathbf{i}}$	$\hat{\mathbf{j}}$	$3\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$
2	$\hat{\mathbf{j}}$	$\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$	$2\hat{\mathbf{i}}$

तीनों क्षणों पर निकाय के संहति केंद्र पर की स्थिति प्राप्त करें। 0 से 1s और 1s से 2s के समयांतरालों में संहति केंद्र का औसत वेग प्राप्त करें। क्या निकाय पर नेट बाह्य बल लग रहा है? क्या उसका रैखिक संवेग संरक्षित है?

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि तीन कणों के इस निकाय के संहति केंद्र का औसत वेग ज्ञात किया जाए और देखा जाए कि वह अचर रहता है या बदलता है। इससे हमें पता चलेगा कि निकाय पर कोई नेट बाह्य बल लग रहा है या नहीं और उसका रैखिक संवेग संरक्षित रहता है या नहीं।

तीनों क्षणों पर संहति केंद्र की स्थिति के मान हैं :

$$\vec{\mathbf{R}}_{cm}\ (t=0) = \frac{m(\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}) + m(2\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}) + m(3\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}})}{3m} = 2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathbf{R}}_{cm}\ (t=1\text{s}) = \frac{m\,\hat{\mathbf{i}} + m\,\hat{\mathbf{j}} + m(3\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}})}{3m} = \frac{4}{3}\hat{\mathbf{i}} + \frac{4}{3}\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathbf{R}}_{cm}\ (t=2\text{s}) = \frac{m\hat{\mathbf{j}} + m(\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}) + m(2\hat{\mathbf{i}})}{3m} = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$$

आइये, अब हम 0 और 1s और 1s और 2s के बीच के समयांतरालों में संहति केंद्र का औसत वेग निकालें। 0 और 1s और 1s और 2s के बीच के समयांतरालों में संहति केंद्र के औसत वेग के (ms^{-1} में) मान हैं क्रमशः

$$\vec{\mathbf{V}}_{cm1} = \frac{\vec{\mathbf{R}}_{cm}\ (t=1\text{s}) - \vec{\mathbf{R}}_{cm}\ (t=0)}{1\text{s}} = \left(\frac{4}{3}\hat{\mathbf{i}} + \frac{4}{3}\hat{\mathbf{j}}\right) - \left(2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$= -\frac{2}{3}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$$

$$\vec{\mathbf{V}}_{cm2} = \frac{\vec{\mathbf{R}}_{cm}\ (t=2\text{s}) - \vec{\mathbf{R}}_{cm}\ (t=1\text{s})}{1\text{s}} = (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}) - \left(\frac{4}{3}\hat{\mathbf{i}} + \frac{4}{3}\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$$

इस तरह हम पाते हैं कि दो अलग-अलग समयांतरालों में संहति केंद्र का औसत वेग अलग है यानी **वह अचर नहीं है**। इसका अर्थ यह है कि निकाय पर एक नेट बाह्य बल लग रहा है और उसका रैखिक संवेग संरक्षित नहीं है।

आइये, अब हम बहु-कण निकायों की गतिज ऊर्जा प्राप्त करें और ऐसे निकायों के लिए ऊर्जा संरक्षण नियम लिखें।

15.3 ऊर्जा का संरक्षण

इस भाग में हम पहले एक द्वि-कण निकाय की गतिज ऊर्जा को संहति केंद्र और आपेक्षिक निर्देशांकों के पदों में लिखेंगे। फिर हम इस अवधारणा को बहु-कण निकायों के लिए लिखेंगे। अंत में हम इन निकायों के लिए यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम लिखेंगे। इस भाग में गणित का काफ़ी प्रयोग किया गया है। इसलिए आप इसे बेहतर समझने के लिए गणित के सभी चरण खुद हल करें।

15.3.1 द्वि-कण निकाय की गतिज ऊर्जा

द्वि-कण निकाय की गतिज ऊर्जा (K) का मान होता है :

$$K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \qquad (15.5)$$

जहां $\vec{\mathbf{v}}_1 = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_1}{dt}$ और $\vec{\mathbf{v}}_2 = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_2}{dt}$ । हमें K **का मान संहति केंद्र और आपेक्षिक निर्देशांकों के पदों में निकालना है**। समीकरण 14.2 $\left(\vec{\mathbf{R}}_{cm} = \frac{m_1\vec{\mathbf{r}}_1 + m_2\vec{\mathbf{r}}_2}{M}\right)$

जहां $M = m_1 + m_2$, को हम इस तरह भी लिख सकते हैं :

$$(m_1 + m_2)\vec{\mathbf{R}}_{cm} = m_1\vec{\mathbf{r}}_1 + m_2\vec{\mathbf{r}}_2 \qquad (15.6\text{क})$$

या $$m_1(\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{R}}_{cm}) + m_2(\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{R}}_{cm}) = \vec{\mathbf{0}} \qquad (15.6\text{ख})$$

इकाई 14 में बोध प्रश्न 3 का हल करते हुए आपने देखा है कि संहति केंद्र के सापेक्ष कणों के स्थिति सदिश हैं :

$$\vec{\mathbf{r}}'_1 = \vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{R}}_{cm} \quad \text{और} \quad \vec{\mathbf{r}}'_2 = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{R}}_{cm} \qquad (15.6\text{ग})$$

समीकरण 15.6ख में 15.6ग रखने पर हमें मिलता है :

$$m_1\vec{\mathbf{r}}'_1 + m_2\vec{\mathbf{r}}'_2 = \vec{\mathbf{0}} \qquad (15.6\text{घ})$$

समीकरण 15.6घ और ग का समय के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें मिलता है :

$$m_1\vec{\mathbf{v}}'_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}'_2 = \vec{\mathbf{0}} \qquad (15.6\text{च})$$

$$\vec{\mathbf{v}}'_1 = \vec{\mathbf{v}}_1 - \vec{\mathbf{V}}_{cm} \quad \text{और} \quad \vec{\mathbf{v}}'_2 = \vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{V}}_{cm} \qquad (15.6\text{छ})$$

चूंकि $v_1^2 = \vec{\mathbf{v}}_1 . \vec{\mathbf{v}}_1$ और $v_2^2 = \vec{\mathbf{v}}_2 . \vec{\mathbf{v}}_2$, अतः समीकरण 15.6छ से $\vec{\mathbf{v}}_1$ और $\vec{\mathbf{v}}_2$ समीकरण 15.5 में रखकर हम उसे इस तरह लिख सकते हैं :

$$K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1(\vec{\mathbf{v}}_1 . \vec{\mathbf{v}}_1) + \frac{1}{2}m_2(\vec{\mathbf{v}}_2 . \vec{\mathbf{v}}_2)$$

$$= \frac{1}{2}m_1[(\vec{\mathbf{v}}'_1 + \vec{\mathbf{V}}_{cm}).(\vec{\mathbf{v}}'_1 + \vec{\mathbf{V}}_{cm})] + \frac{1}{2}m_2[(\vec{\mathbf{v}}'_2 + \vec{\mathbf{V}}_{cm}).(\vec{\mathbf{v}}'_2 + \vec{\mathbf{V}}_{cm})]$$

या $$K = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_{cm}^2 + (m_1\vec{\mathbf{v}}'_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}'_2).\vec{\mathbf{V}}_{cm} \qquad (15.6\text{ज})$$

अब समीकरण 15.6च से $m_1\vec{\mathbf{v}}'_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}'_2 = \vec{\mathbf{0}}$

साथ ही, $m_1 + m_2 = M$ । अतः हम समीकरण 15.6ज को ऐसे लिख सकते हैं :

$$\boxed{K = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2} \qquad (15.7)$$

द्वि-कण निकाय की गतिज ऊर्जा

यह **द्वि-कण निकाय की कुल गतिज ऊर्जा है जिसे संहति केंद्र के वेग और संहति केंद्र के सापेक्ष कणों के वेगों के पदों में लिखा गया है**। समीकरण 15.7 हमें क्या बताता है? यह हमें बताता है कि द्वि-कण निकाय की गतिज ऊर्जा के दो भाग होते हैं :

1. संहति केंद्र की चाल से गतिमान कुल द्रव्यमान M (निकाय के दोनों कणों के द्रव्यमानों का योग) की गतिज ऊर्जा। इस तरह कुल गतिज ऊर्जा का कुछ अंश निकाय के संहति केंद्र से संबद्ध है। जब निकाय पर नेट बाह्य बल शून्य होता है, तब संहति केंद्र की चाल अचर रहती है। अतः कुल गतिज ऊर्जा का यह अंश बदलता नहीं, इसका मान वही रहता है।

2. संहति केंद्र के सापेक्ष कणों की गतिज ऊर्जाओं का योग।

हम द्वि-कण निकाय की गतिज ऊर्जा को संहति केंद्र के वेग से गतिमान कुल द्रव्यमान की गतिज ऊर्जा और समानीत द्रव्यमान μ वाले कण (जो आपेक्षिक वेग $\vec{\mathbf{v}}$ से गतिमान है) की गतिज ऊर्जा के योग के रूप में भी लिख सकते हैं। इकाई 14 के बोध प्रश्न 3 में आपने सिद्ध किया है कि :

$$\vec{\mathbf{r}}_1' = \vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{R}}_{CM} = \vec{\mathbf{r}}_1 - \frac{m_1\vec{\mathbf{r}}_1 + m_2\vec{\mathbf{r}}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2(\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2)}{m_1+m_2} = \frac{m_2}{M}\vec{\mathbf{r}} \quad (15.8\text{क})$$

और $$\vec{\mathbf{r}}_2' = -\frac{m_1}{M}\vec{\mathbf{r}}, \quad \text{जहां} \quad \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2 \quad (15.8\text{ख})$$

अतः $$\frac{d\vec{\mathbf{r}}_1'}{dt} = \frac{m_2}{M}\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \quad \text{या} \quad \vec{\mathbf{v}}_1' = \frac{m_2}{M}\vec{\mathbf{v}} \quad (15.8\text{ग})$$

और $$\frac{d\vec{\mathbf{r}}_2'}{dt} = -\frac{m_1}{M}\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \quad \text{या} \quad \vec{\mathbf{v}}_2' = -\frac{m_1}{M}\vec{\mathbf{v}} \quad (15.8\text{घ})$$

समीकरणों 15.8ग और घ से $\vec{\mathbf{v}}_1'$ और $\vec{\mathbf{v}}_2'$ के मान समीकरण 15.7 में रखने पर और दोनों वेगों के लिए संबंध $v^2 = \vec{\mathbf{v}} \,.\, \vec{\mathbf{v}}$ का प्रयोग करने पर हमें मिलता है :

$$K = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}m_1(\vec{\mathbf{v}}_1' \,.\, \vec{\mathbf{v}}_1') + \frac{1}{2}m_2(\vec{\mathbf{v}}_2' \,.\, \vec{\mathbf{v}}_2')$$

या $$K = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2^2}{M^2}\right)v^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1^2}{M^2}\right)v^2$$

या $$K = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{M}\left(\frac{m_1+m_2}{M}\right)v^2$$

या $$K = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_1m_2}{M}\right)v^2 \qquad (\because M = m_1 + m_2)$$

द्वि-कण निकाय की गतिज ऊर्जा

इस तरह $$\boxed{K = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mu v^2} \qquad \left(\because \mu = \frac{m_1 m_2}{M}\right) \quad (15.9)$$

समीकरण 15.9 हम बताता है कि द्वि-कण निकाय की गतिज ऊर्जा के दो भाग हैं :

1. संहति केंद्र की चाल से गतिमान कुल द्रव्यमान M (निकाय के दोनों कणों के द्रव्यमानों का योग) की गतिज ऊर्जा।

2. द्रव्यमान μ वाले एक काल्पनिक कण की गतिज ऊर्जा जो आपेक्षिक वेग $\vec{\mathbf{v}}$ से गतिमान है।

अब हम विस्तृत व्युत्पत्ति किये बिना बहु-कण निकाय के लिए गतिज ऊर्जा का व्यंजक लिखेंगे। इस व्यंजक की व्युत्पत्ति आप ठीक उसी तरह कर सकते हैं जैसेकि हमने द्वि-कण निकाय की गतिज ऊर्जा का व्यंजक व्युत्पन्न किया है।

15.3.2 बहु-कण निकाय की गतिज ऊर्जा

N-कण निकाय की कुल गतिज ऊर्जा (K) है :

$$K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_3 v_3^2 + \ldots + \frac{1}{2}m_N v_N^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 \quad (15.10\text{क})$$

जहां m_i, iवें कण का द्रव्यमान है और $\vec{\mathbf{v}}_i$, उसका वेग।

समीकरण 15.6छ के नतीजे का N-कणों के लिए व्यापकीकरण करने पर हम कुल गतिज ऊर्जा को संहति केंद्र और आपेक्षिक निर्देशांकों में इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{\mathbf{v}}_i . \vec{\mathbf{v}}_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i [(\vec{\mathbf{v}}_i' + \vec{\mathbf{V}}_{cm}).(\vec{\mathbf{v}}_i' + \vec{\mathbf{V}}_{cm})]$$

या
$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{N} m_i) V_{cm}^2 + (\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\mathbf{v}}_i').\vec{\mathbf{V}}_{cm} \quad (15.10\text{ख})$$

चूंकि $\vec{\mathbf{V}}_{cm}$, i पर निर्भर नहीं करता। साथ ही समीकरण 15.6च से $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\mathbf{v}}_i' = \vec{\mathbf{0}}$ और $\sum_{i=1}^{N} m_i = M$। अतः, हम समीकरण 15.10ख को इस तरह लिख सकते हैं :

$$\boxed{K = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i'^2} \quad (15.11)$$

N-कण निकाय की गतिज ऊर्जा

यह **एक N-कण निकाय की कुल गतिज ऊर्जा है जिसे संहति केंद्र और आपेक्षिक निर्देशांकों के पदों में लिखा गया है।**

समीकरण 15.11 का पहला पद संहति केंद्र की चाल से गतिमान कुल द्रव्यमान M (निकाय के सभी कणों के द्रव्यमानों का योग) की गतिज ऊर्जा देता है। इस तरह कुल गतिज ऊर्जा का कुछ अंश निकाय के संहति केंद्र से संबद्ध रहता है। जब निकाय पर नेट बाह्य बल शून्य होता है, तब संहति केंद्र की चाल अचर रहती है। अतः कुल गतिज ऊर्जा का यह अंश बदलता नहीं, इसका मान वही रहता है। समीकरण 15.11 का दूसरा पद निकाय के संहति केंद्र के सापेक्ष कणों की गतिज ऊर्जाओं का योग है।

अब हम कणों के निकाय के लिए ऊर्जा संरक्षण नियम प्राप्त करेंगे।

15.3.3 यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण

इकाई 10 और 13 से याद करें कि अगर किसी निकाय पर लग रहा बल **संरक्षी** हो तो उसकी यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित रहती है। इसका अर्थ यह है कि बल केवल कणों के बीच की दूरी पर यानी उनकी आपेक्षिक स्थितियों पर निर्भर करता है। आइये, पहले हम इकाई 10 में दी गई विधि से अलग विधि का इस्तेमाल करके एकल कण के लिए यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण का नियम प्राप्त करें।

दोनों पक्षों का $\vec{\mathbf{v}}\,dt$ के साथ अदिश गुणनफल लेकर और उसका t के सापेक्ष समाकलन करने पर हमें मिलता है।

$$\int m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}.\vec{\mathbf{v}}\,dt = \int \vec{\mathbf{F}}\,.\,\vec{\mathbf{v}}\,dt \quad \text{(i)}$$

(I) से समीकरण 15.12क तक हम इस तरह पहुंच सकते हैं : पहले हम (i) के बायें पक्ष को गतिज ऊर्जा के पदों में इस तरह लिखेंगे। हम जानते हैं कि

$$\frac{d}{dt}(v^2) = \frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{v}}.\vec{\mathbf{v}}) = 2\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}.\vec{\mathbf{v}}$$

इस परिणाम से हम लिख सकते हैं :

$$m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}.\vec{\mathbf{v}}\,dt = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(v^2)$$

इस समीकरण को समय के सापेक्ष समाकलित करने पर हमें मिलता है :

$$\int m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}.\vec{\mathbf{v}}\,dt = \int \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(v^2)dt = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{(ii)}$$

साथ ही $\vec{\mathbf{v}}\,dt = d\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{F}}\,.\,\vec{\mathbf{v}}\,dt = \vec{\mathbf{F}}.d\vec{\mathbf{r}}$ जिससे कि

$$\int \vec{\mathbf{F}}\,.\,\vec{\mathbf{v}}\,dt = \int \vec{\mathbf{F}}.d\vec{\mathbf{r}} \quad \text{(iii)}$$

(ii) और (iii) को (i) में रखने पर हमें समीकरण 15.12क प्राप्त होता है।

एकल कण के लिए : $\quad m\dfrac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}}$

इस समीकरण के दोनों पक्षों का $\vec{\mathbf{v}}\,dt$ से अदिश गुणनफल लेकर और परिणाम का समाकलन करने पर हमें मिलता है (बीच के चरण हाशिये पर दी गई टिप्पणी में समझाये गए हैं) :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \int \vec{\mathbf{F}}\,.\,d\vec{\mathbf{r}} \qquad \text{(15.12क)}$$

इकाई 10 से याद करें कि संरक्षी बल के लिए समाकल $\int \vec{\mathbf{F}}.d\vec{\mathbf{r}}$ केवल समाकलन की सीमाओं पर निर्भर करता है, उस पथ पर नहीं जो कण की आरंभिक और अंतिम स्थितियों को जोड़ता है। ऐसे बल से हम एक अदिश स्थितिज ऊर्जा फलन U जो केवल निर्देशांकों पर निर्भर करता है, संबद्ध कर सकते हैं :

$$U = -\int \vec{\mathbf{F}}\,.\,d\vec{\mathbf{r}} \qquad \text{(15.12ख)}$$

तब हम समीकरण 15.12क को इस तरह लिख सकते हैं :

$$\frac{1}{2}mv^2 + U = \text{अचर} \qquad \text{(15.12ग)}$$

समीकरण 15.12ग **एकल कण के लिए यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम** है जो **संरक्षी बलों पर लागू होता है**। इस नियम को आपने इकाइयों 10 और 13 में पढ़ा है। हम इस नियम को **द्वि-कण निकाय** पर लागू कर सकते हैं जिस पर संरक्षी बल लग रहे हों। इसके लिए इकाई 14 के भाग 14.3 को दोबारा पढ़ें। मान लें कि कणों के द्रव्यमान क्रमशः m_1 और m_2 हैं। मान लें कि एक जड़त्वीय निर्देश तंत्र के मूल बिन्दु O के सापेक्ष क्षण t पर उनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{\mathbf{r}}_1$ और $\vec{\mathbf{r}}_2$ हैं।

द्वि-कण निकाय के लिए यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम होता है:

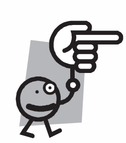
$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + U = \text{अचर} \qquad \text{(15.13)}$$

जहां U अदिश स्थितिज ऊर्जा फलन $U(\vec{\mathbf{r}}_1, \vec{\mathbf{r}}_2)$ है जो समीकरण 15.12ख से परिभाषित होता है। समीकरण 15.13 की व्युत्पत्ति इस पाठ्यक्रम के बाहर है।

द्वि-कण निकाय के लिए यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम

द्वि-कण निकाय के लिए यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण

यदि एक द्वि-कण निकाय के प्रत्येक कण पर लग रहा नेट बल केवल उस कण की दूसरे कण से दूरी पर निर्भर करता है, यानी वह केंद्रीय संरक्षी बल है, तब इस द्वि-कण निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा सदैव अचर रहती है (समीकरण 15.13)।



कभी न भूलें

यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम केवल संरक्षी बलों पर लागू होता है।

प्रकृति में गुरुत्वाकर्षण और स्थिर वैद्युत बल जैसे बल संरक्षी होते हैं, लेकिन घर्षण बल जैसे बल संरक्षी नहीं होते। आपने इकाई 10 में पढ़ा है कि जब निकाय पर असंरक्षी बल लगते हैं तब उस पर यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम लागू नहीं होता। लेकिन ऊर्जा के अन्य स्वरूपों जैसे कि उष्मा, विद्युत्-चुम्बकीय ऊर्जा आदि को शामिल करके हम **ऊर्जा संरक्षण नियम** पर पहुंच सकते हैं।

अब हम यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम को उस बहु-कण निकाय पर लागू करेंगे जिस पर संरक्षी बल लग रहे हैं।

यहां हम इसकी व्युत्पत्ति दिए बिना परिणाम का कथन दे रहे हैं, क्योंकि यह इस पाठ्यक्रम के बाहर है :

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right) + U = \text{अचर} \qquad (15.14)$$

जहां U बहु-कण निकाय के लिए स्थितिज ऊर्जा फलन है।

अब हम अभी तक समझाई गई अवधारणाओं को दो कणों के संघट्टन पर लागू करेंगे।

15.4 दो कणों का संघट्टन

आइये, पहले हम समझें कि **दो पिंडों के संघट्टन का क्या अर्थ है।**

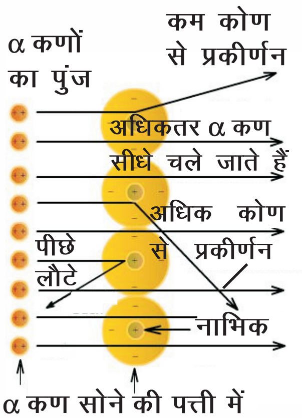
पिंडों का संघट्टन

दो या अधिक पिंडों के बीच में संघट्टन का अर्थ है कि वे पिंड एक-दूसरे के इतने नज़दीक आ जाते हैं कि एक संक्षिप्त समायांतराल के लिए उनमें आपस में पारस्परिक क्रिया बल लगता है।

ध्यान दें कि संघट्टन प्रक्रिया में यह ज़रूरी नहीं कि पिंडों में आपस में टक्कर हो ही। साथ ही उन पर बाह्य बल लग भी सकते हैं और नहीं भी लग सकते।

उदाहरण के लिए, रदरफ़र्ड प्रकीर्णन प्रयोग में परमाण्वीय नाभिकों पर आपतित अल्फ़ा कण **वास्तव में नाभिकों से टकराते नहीं**। पर उनके बीच में एक स्थिर वैद्युत बल लगता है और हम इस प्रक्रिया को नाभिकों के साथ अल्फा कणों का **संघट्टन** कहते हैं। लेकिन बिलियर्ड्स की गेंद को जब दूसरी बिलियर्ड्स की गेंद की ओर मारा जाता है, तब वह उससे **वास्तव में टकराती** है। दो गाड़ियों के संघट्टन में वे गाड़ियां **वास्तव में एक-दूसरे से टकराती** हैं।

शायद आप जानना चाहें कि **हमें संघट्टन के बारे में पढ़ने की क्या ज़रूरत है**? आपको यह जानकर आश्चर्य हो सकता है कि कणों का संघट्टन (जिसे प्रकीर्णन भी कहते हैं) भौतिक ब्रह्मांड का एक महत्वपूर्ण लक्षण है। **परमाणुओं, अणुओं, नाभिकों और मूल कणों** के बारे में हमारी अधिकतर जानकारी संघट्टन के प्रयोगों से मिली है। इन प्रयोगों से हमें सूक्ष्म कणों के बीच लग रहे बलों या उनके बीच की पारस्परिक क्रिया की जानकारी मिलती है। कणों के बीच हुए संघट्टनों के कारण उन कणों के पथ और



(क)

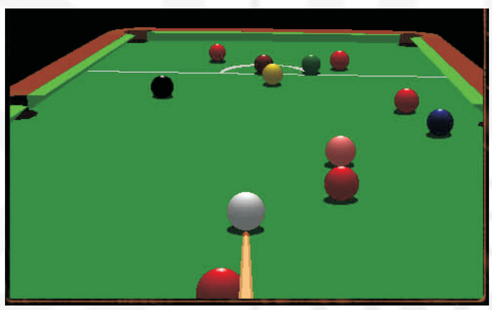
(ख)

चित्र 15.3: क) रदरफ़र्ड प्रकीर्णन प्रयोग; ख) अर्नेस्ट रदरफ़र्ड (1871–1937) न्यूज़ीलैण्ड में जन्मे अंग्रेज़ भौतिकशास्त्री थे। उन्होंने परमाणु का नाभिकीय मॉडल पेश किया और वे नाभिकीय भौतिकी के जन्मदाता माने जाते हैं। 1908 में उन्हें रसायन विज्ञान का नोबेल पुरस्कार उनके रेडियोएक्टिव तत्वों के अनुसंधान के लिए दिया गया।

ऊर्जाएं बदल जाते हैं। संघट्टन के बाद कणों की ऊर्जाओं और उनके कोणीय वितरण का मापन करके हम उनकी संरचना और उनके बीच लग रहे बलों की प्रकृति की जानकारी हासिल कर सकते हैं।

प्रकीर्णन प्रयोगों में शायद सबसे मशहूर प्रयोग 1911 में अर्नेस्ट रदरफ़र्ड द्वारा किया गया प्रयोग था (चित्र 15.3)। इस प्रयोग में सोने की पतली पत्ती पर अल्फ़ा कणों की बमबारी की गई। इनमें यह पाया गया कि प्रकीर्णित अल्फ़ा कणों की संख्या प्रकीर्णन कोण पर निर्भर करती है। प्रकीर्णित अल्फ़ा कणों के वितरण का अध्ययन करके रदरफ़र्ड ने **परमाण्वीय नाभिक की परिकल्पना** पेश की। आज कई किलोमीटर लंबाई वाले उच्च-ऊर्जा कण त्वरित्रों में वैज्ञानिक मूल कणों का विभिन्न लक्ष्यों से प्रकीर्णन करते हैं। फिर प्रकीर्णित कणों के कोणीय वितरण का अध्ययन करके वे उन कणों के बीच के पारस्परिक क्रिया बलों का पता लगाते हैं।

संघट्टनों के हमारे दैनिक जीवन में भी बहुत से अनुप्रयोग हैं। उदाहरण के लिए, हम संघट्टन के बाद बिलियर्ड्स की गेंदों के वेगों और प्रकीर्णन कोणों का पता लगा सकते हैं। यह गणना वास्तव में बिलियर्ड्स की खिलाड़ियों को यह तय करने में मदद करती है कि वे किसी गेंद को किस कोण पर मारें (देखें चित्र 15.4क)। इन गणनाओं की मदद से हम यह पता लगा सकते हैं कि गाड़ियों की टक्कर से हुई दुर्घटनाओं में टकराने से पहले उन गाड़ियों के वेग क्या थे। इस तरह हम इन दुर्घटनाओं के दृश्य की पुनः संरचना कर सकते हैं (चित्र 15.4ख)।



(क)

(ख)

चित्र 15.4 : क) बिलियर्ड्स की गेंदों का संघट्टन; ख) गाड़ियों के संघट्टन में उनका वेग निर्धारण ।

कभी न भूलें

यह न सोचें कि संघट्टन प्रक्रिया में एक पिंड दूसरे पिंड से *हमेशा टकराता ही है* । संघट्टन प्रक्रिया में पिंडों के बीच पारस्परिक क्रिया बल भी लग सकते हैं।

हम सिर्फ़ संरक्षण नियमों को लागू करके ही संघट्टनों के बारे में काफ़ी जानकारी पा सकते हैं भले ही हमें उनमें लग रहे पारस्परिक क्रिया बल की कोई जानकारी न हो। इस भाग में आप पढ़ेंगे कि दो कणों के संघट्टनों पर रैखिक संवेग और ऊर्जा संरक्षण के नियमों को कैसे लागू किया जाता है।

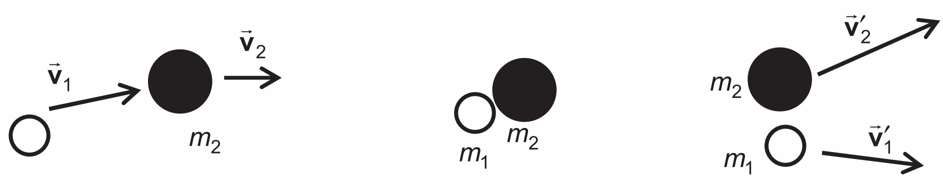
आइये, शुरू में हम संघट्टन प्रक्रिया का संक्षेप में वर्णन करें। चित्र 15.5 देखें।

इसमें संघट्टन प्रक्रिया की तीन अवस्थाएं दिखाई गई हैं, जिनमें पारस्परिक क्रिया के बल बहुत सूक्ष्म दूरियों पर और संक्षिप्त समायांतराल के लिए लगते हैं।

अवस्था 1 : संघट्टन से बहुत पहले के समय पर, जब प्रत्येक कण मुक्त है यानी प्रत्येक कण की कुल ऊर्जा कण की गतिज ऊर्जा है।

अवस्था 2 : जब वे कण एक-दूसरे के नज़दीक आते हैं, प्रत्येक कण के बीच लग रहे पारस्परिक क्रिया बलों के कारण उनके रैखिक संवेग और ऊर्जा बदल जाते हैं।

अवस्था 3 : संघट्टन के बहुत देर बाद, वे कण फिर से मुक्त हैं और नए वेगों से नई दिशाओं में सरल रेखाओं के अनुदिश गति करते हैं।



संघट्टन से पहले (क) संघट्टन के दौरान (ख) संघट्टन के बाद (ग)

चित्र 15.5 : संघट्टन प्रक्रिया।

संघट्टन प्रक्रिया में **प्रकीर्णन के बाद मिले कण संघट्टन से पहले के मौलिक कण भी हो सकते हैं या फिर कोई और कण भी हो सकते हैं**। प्रकीर्णन प्रयोगों में हमें प्रायः आरंभिक वेग पता होते हैं। अक्सर एक कण आरंभ में विरामावस्था में होता है और उस पर ऐसे कण आपतित होते हैं जिनकी ऊर्जा ज्ञात हो। संघट्टन के बाद कणों के अंतिम वेग हम उचित संसूचकों या अन्य विधियों द्वारा पता लगाते हैं। संघट्टनों को **दो** मुख्य वर्गों में बांटा जाता है :

1. **प्रत्यास्थ संघट्टन जिसमें रैखिक संवेग और कुल गतिज ऊर्जा दोनों ही संरक्षित रहते हैं**, और
2. **अप्रत्यास्थ संघट्टन जिसमें रैखिक संवेग संरक्षित रहता है** और **कुल गतिज ऊर्जा संरक्षित नहीं रहती लेकिन कुल ऊर्जा संरक्षित रहती है।**

इस तरह यदि संघट्टन से पहले निकाय के आरंभिक रैखिक संवेग और गतिज ऊर्जा क्रमशः $\vec{\mathbf{p}}_i$ और K_i हैं और संघट्टन के बाद निकाय के अंतिम रैखिक संवेग और गतिज ऊर्जा क्रमशः $\vec{\mathbf{p}}_f$ और K_f हैं, तब

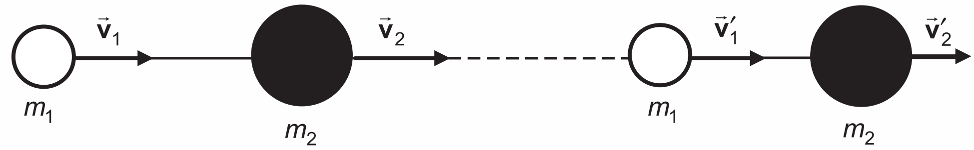
$\vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{p}}_f$ और $K_i = K_f$ **प्रत्यास्थ संघट्टन के लिए** (15.15क) प्रत्यास्थ संघट्टन

$\vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{p}}_f$ और $K_i \neq K_f$ **अप्रत्यास्थ संघट्टन के लिए** (15.15ख) अप्रत्यास्थ संघट्टन

इस पाठ्यक्रम में आप केवल **एकविम** और **द्विविम प्रत्यास्थ संघट्टनों** के विषय में पढ़ेंगे।

15.4.1 एकविम प्रत्यास्थ संघट्टन

आइये, x-अक्ष के अनुदिश सरल रेखा में गतिमान दो कणों के सीधे प्रत्यास्थ संघट्टन की घटना लें। चित्र 15.6 देखें। वेग $\vec{\mathbf{v}}_1$ से गतिमान, द्रव्यमान m_1 का कण (जिसे **आपतित कण** या **प्रक्षेप्य** कहते हैं) द्रव्यमान m_2 वाले दूसरे कण से (जिसे **लक्ष्य कण** कहते हैं) सीधा टकराता है। लक्ष्य कण वेग $\vec{\mathbf{v}}_2$ से गतिमान है।



चित्र 15.6: दो कणों के बीच एकविम सीधा प्रत्यास्थ संघट्टन। क) संघट्टन से पहले; ख) संघट्टन के बाद वेग बदल सकते हैं।

तब समीकरण 15.15क से हम कणों के अंतिम वेग पता लगा सकते हैं भले ही उनके बीच में कोई भी पारस्परिक क्रिया बल लग रहा हो। माना कि द्रव्यमान m_1 का संघट्टन के **बाद वेग** $\vec{\mathbf{v}}'_1$ है और द्रव्यमान m_2 का वेग $\vec{\mathbf{v}}'_2$ है। रैखिक संवेग और गतिज ऊर्जा संरक्षण नियमों को इन कणों के प्रत्यास्थ संघट्टन पर लागू करने पर हमें मिलता है :

$$m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2 = m_1\vec{\mathbf{v}}'_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}'_2 \qquad \textbf{रैखिक संवेग} \qquad (15.16\text{क})$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \qquad \textbf{गतिज ऊर्जा} \qquad (15.16\text{ख})$$

चूंकि गति x-अक्ष के अनुदिश है, इसलिए हम समीकरण 15.16क को ऐसे लिख सकते हैं :

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2 \qquad (15.16\text{ग})$$

समीकरण 15.16क और ख दो अज्ञात चरों के लिए दो समीकरणें हैं। इन्हें हम m_1, m_2, v_1 और v_2 के पदों में v'_1 और v'_2 के लिए **हल कर सकते हैं**। समीकरण 15.16ग का इस्तेमाल करके हम इनमें से v'_1 को निरस्त कर सकते हैं और इन्हें v'_2 के लिए हल कर सकते हैं। हल आसान हो जाता है अगर हम मान लें कि **द्रव्यमान m_2 वाला कण आरंभ में विरामावस्था में है यानी** $v_2 = 0$ । तब समीकरण 15.16ग से :

$$v'_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1}v'_2 \qquad (\because v_2 = 0) \qquad (15.17\text{क})$$

समीकरण 15.17क का वर्ग करने पर हमें मिलता है :

$$v_1'^2 = v_1^2 - 2\frac{m_2}{m_1}v_1v'_2 + \frac{m_2^2}{m_1^2}v_2'^2 \qquad (15.17\text{ख})$$

अब हम समीकरण 15.17ख से $v_1'^2$ का मान समीकरण 15.16ख में रखते हैं और उसे v'_2 के लिए हल करते हैं :

$$m_1 v_1^2 = m_1\left(v_1^2 - 2\frac{m_2}{m_1}v_1 v_2' + \frac{m_2^2}{m_1^2}v_2'^2\right) + m_2 v_2'^2 \qquad (15.17\text{ग})$$

या $$0 = \left(-2m_2 v_1 v_2' + \frac{m_2^2}{m_1}v_2'^2\right) + m_2 v_2'^2 \qquad (15.17\text{घ})$$

या $$v_2'^2\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right) - 2v_1 v_2' = 0 \qquad (15.17\text{च})$$

या $$v_2'\left[v_2'\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right) - 2v_1\right] = 0 \qquad (15.17\text{छ})$$

समीकरण 15.17छ v_2' में एक द्विघात समीकरण है जिसके दो हल हैं :

1. $$v_2' = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1' = v_1 \qquad (15.18)$$

   यह हल केवल आरंभिक प्रतिबंधों को दोहराता है। इस तरह के सवालों में हमें एक ऐसा हल तो ज़रूर ही मिलता है, क्योंकि आरंभिक वेग संरक्षण नियमों को संतुष्ट करते हैं।

2. $$v_2'\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right) - 2v_1 = 0 \qquad (15.19\text{क})$$

   या $$v_2' = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)}v_1 \qquad (15.19\text{ख})$$

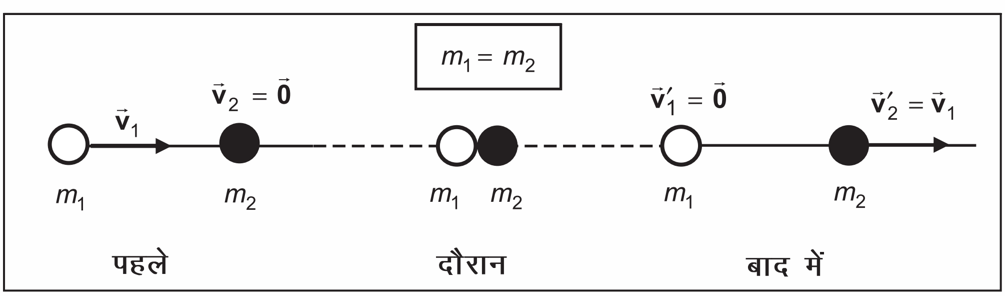
   और समीकरण 15.17क से $$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}v_1 \qquad (15.19\text{ग})$$

अब हम सीधे प्रत्यास्थ संघट्टन के लिए कुछ **विशेष** उदाहरण लेंगे।

1. मान लें कि **इन दोनों कणों के द्रव्यमान बराबर हैं** यानी $m_1 = m_2$। तब समीकरणों 15.19ख और ग से

   $$v_1' = 0 \quad \text{और} \quad v_2' = v_1 \qquad (15.20\text{क})$$

   इस, तरह **जब एक कण का बराबर द्रव्यमान वाले विरामावस्था में स्थित कण से सीधा प्रत्यास्थ संघट्टन होता है तब आपतित कण रुक जाता है और लक्ष्य कण आपतित कण के बराबर के वेग से चलने लगता है** (चित्र 15.7)।

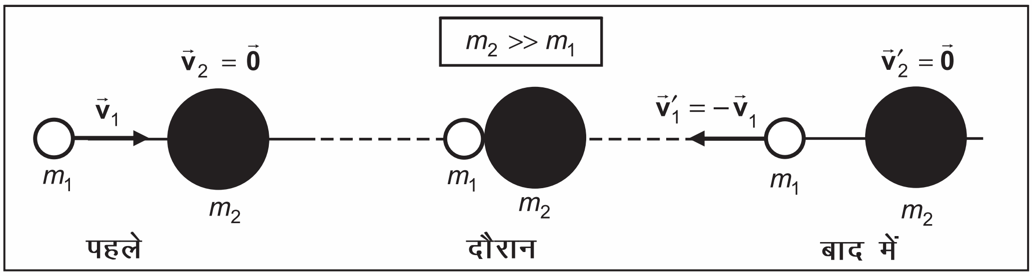


चित्र 15.7: बराबर द्रव्यमान वाले कणों के बीच एकविम प्रत्यास्थ संघट्टन।

2. मान लें कि **एक कण अपने से बहुत अधिक द्रव्यमान वाले कण से टकराता है** यानी $m_1 << m_2$ । तब हमें समीकरणों 15.19ख और ग से मिलता है :

$$v_1' = -v_1 \quad \text{और} \quad v_2' \cong 0 \tag{15.20ख}$$

इस तरह, **जब एक कण का अपने से बहुत अधिक द्रव्यमान वाले विरामावस्था में स्थित कण से सीधा प्रत्यास्थ संघट्टन होता है तब आपतित कण उसी चाल से विपरीत दिशा में लौट जाता है, जबकि लक्ष्य कण अपनी जगह से बिल्कुल नहीं हिलता** (चित्र 15.8)।



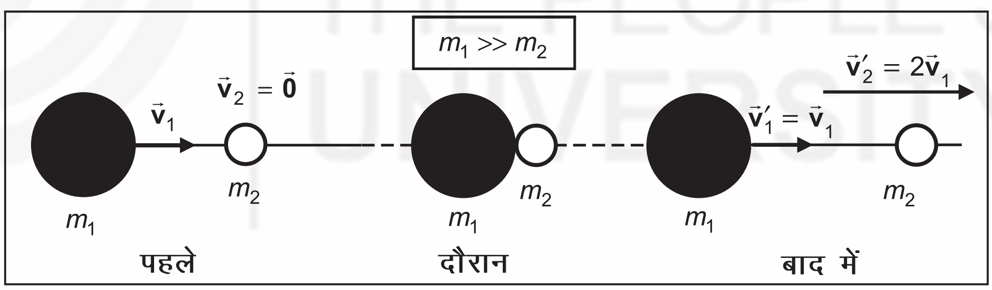
चित्र 15.8 : एक कम द्रव्यमान वाले कण का अपने से बहुत अधिक द्रव्यमान वाले कण से एकविम प्रत्यास्थ संघट्टन।

चित्रों 15.7, 15.8, 15.9, 15.10 और 15.11 में दिखाए गए संघट्टनों की छवि आप अपने मन में बैठा लें या फिर इसी तरह की गतिविधियां कंचों, गेंदों आदि के साथ करें, ताकि आप इन्हें अच्छी तरह समझ सकें।

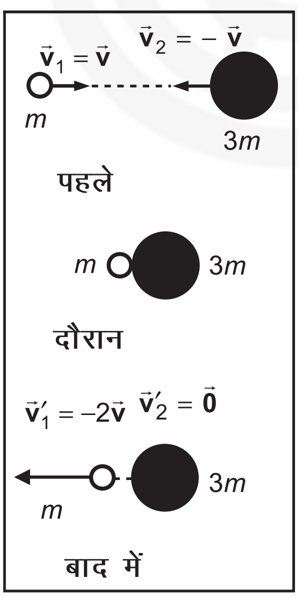
3. माना कि **एक कण का अपने से बहुत कम द्रव्यमान वाले विरामावस्था में स्थित कण से सीधा प्रत्यास्थ संघट्टन होता है** यानी $m_1 >> m_2$ । तब हमें समीकरणों 15.19ख और ग से मिलता है :

$$v_1' = v_1 \quad \text{और} \quad v_2' = 2v_1 \tag{15.20ग}$$

इस तरह जब **एक कण का अपने से बहुत कम द्रव्यमान वाले विरामावस्था में स्थित कण से सीधा प्रत्यास्थ संघट्टन होता है तो आपतित कण बिना किसी बदलाव के चलता रहता है, जबकि लक्ष्य कण आपतित कण के वेग के दोगुने वेग से गतिमान होता है** (चित्र 15.9)।



चित्र 15.9: एक अधिक द्रव्यमान वाले कण का अपने से बहुत कम द्रव्यमान वाले कण से एकविम प्रत्यास्थ संघट्टन।



चित्र 15.10: विपरीत दिशाओं में गतिमान कणों का सीधा संघट्टन।

तब क्या होता है, जब लक्ष्य कण भी गतिमान हो? आइये, पता लगाएं।

उदाहरण 15.4 : सीधा प्रत्यास्थ संघट्टन

समान परिमाण लेकिन विपरीत दिशा वाले वेगों $\vec{v}$ से गतिमान द्रव्यमान m और $3m$ की दो गेंदों का सीधा प्रत्यास्थ संघट्टन होता है (चित्र 15.10)। उनके अंतिम वेग ज्ञात करें।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि रैखिक संवेग और गतिज ऊर्जा संरक्षण नियमों को लागू किया जाए। चूंकि संघट्टन सीधा है इसलिए इसे हम एकविम समस्या मान सकते हैं और इस पर समीकरणें 15.16ख और ग लागू कर सकते हैं।

इस सवाल में दिए गए आंकिक मान इन समीकरणों में रखने पर हमें मिलता है :

$$mv - 3mv = mv_1' + 3mv_2' \quad \text{(i)}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}3mv^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}3mv_2'^2 \quad \text{(ii)}$$

हम (i) और (ii) से v_1' को निरस्त कर सकते हैं। (i) से $v_1' = -2v - 3v_2'$ (iii) को (ii) में रखने पर और v_2' के लिए हल करने पर हमें मिलता है :

$$4v^2 = (-2v - 3v_2')^2 + 3v_2'^2 \quad \Rightarrow \quad v_2'(v_2' + v) = 0$$

इस समीकरण के दो हल हैं, जिनमें से एक आरंभिक प्रतिबंधों जैसा है :
$v_1' = v$ और $v_2' = -v$

रुचिकर हल है : $v_1' = -2v$ और $v_2' = 0$ । यह हल हमें बताता है कि संघट्टन के बाद द्रव्यमान m की गेंद अपने आरंभिक पथ पर वापस अपनी आरंभिक चाल की दोगुनी चाल से लौट जाती है और द्रव्यमान $3m$ की गेंद रुक जाती है (चित्र 15.10)।

बोध प्रश्न 2 – दो कणों का सीधा प्रत्यास्थ संघट्टन

क) 5.0 kg द्रव्यमान की एक गेंद दायीं ओर $3.0\,ms^{-1}$ के वेग से चलती है और विरामावस्था में स्थित 8.0 kg द्रव्यमान की गेंद से सीधी टकराती है। संघट्टन के बाद दोनों गेंदों के वेग ज्ञात करें, जबकि दिया है कि संघट्टन प्रत्यास्थ है।

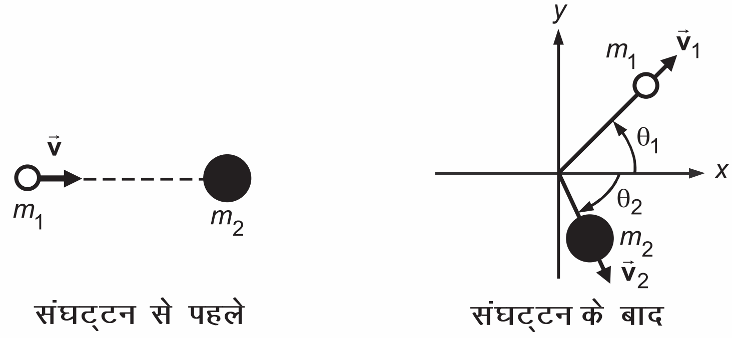
ख) $6.0\,ms^{-1}$ के वेग से गति करता हुआ 40 kg द्रव्यमान वाला एक ठेला, 50 kg द्रव्यमान वाले दूसरे ठेले से सीधा टकराता है। पहले ठेले का अंतिम वेग आरंभिक गति की दिशा की विपरीत दिशा में $1.5\,ms^{-1}$ है। दूसरे ठेले के आरंभिक और अंतिम वेग क्या हैं यदि संघट्टन प्रत्यास्थ है?

अभी तक आपने सीधे संघट्टनों यानी एकविम संघट्टनों के बारे में पढ़ा है। बहुत सी स्थितियों में संघट्टन द्विविम और त्रिविम होते हैं। आइये, अब हम द्विविम संघट्टनों के बारे में जानें। इसके उदाहरण हैं बिलियर्ड्स की गेंदों के संघट्टन, परमाणुओं से अल्फा कणों के संघट्टन, गैस में अणुओं के संघट्टन आदि।

15.4.2 द्विविम प्रत्यास्थ संघट्टन

आइये, हम द्रव्यमान m_1 और m_2 वाले दो कणों का प्रत्यास्थ संघट्टन देखें और आरंभिक प्रतिबंध दिए होने पर संघट्टन के बाद उनके वेग ज्ञात करें। गणित आसान रखने के लिए हम मान लेते हैं कि **लक्ष्य कण आरंभ में विरामावस्था में है**। मान लें कि प्रक्षेप्य कण 1 आरंभ में x-अक्ष के अनुदिश वेग $\vec{\mathbf{v}}$ से गतिमान है (चित्र 15.11क)। माना कि प्रक्षेप्य और लक्ष्य, संघट्टन के बाद क्रमशः वेग $\vec{\mathbf{v}}_1$ और $\vec{\mathbf{v}}_2$ से $x\,y$ तल में चलते हैं (चित्र 15.11ख)। चूंकि निकाय का रैखिक संवेग संरक्षित रहता है इसलिए,

$$m_1\vec{\mathbf{v}} = m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2 \quad (15.21)$$



चित्र 15.11 : दो कणों का द्विविम प्रत्यास्थ संघट्टन।

हम समीकरण 15.21 को x-अक्ष के अनुदिश उसके घटक रूप में लिख सकते हैं :

$$m_1 v\hat{\mathbf{i}} = (m_1 v_1 \cos\theta_1 \hat{\mathbf{i}} + m_1 v_1 \sin\theta_1 \hat{\mathbf{j}}) + (m_2 v_2 \cos\theta_2 \hat{\mathbf{i}} - m_2 v_2 \sin\theta_2 \hat{\mathbf{j}}) \quad (15.22\text{क})$$

θ_1 और θ_2 क्रमशः $\vec{\mathbf{v}}_1$ और $\vec{\mathbf{v}}_2$ और x-अक्ष के बीच के कोण हैं (चित्र 15.11ख)। समीकरण 15.22क में क्रमशः $\hat{\mathbf{i}}$ और $\hat{\mathbf{j}}$ के गुणांकों को बराबर रखने पर :

> प्रारंभिक त्रिकोणमिति से **याद करें** कि
>
> $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
>
> $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
>
> और
>
> $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$
> $= 1 - 2\sin^2\theta$

$$m_1 v = m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 v_2 \cos\theta_2 \quad (15.22\text{ख})$$

और

$$0 = m_1 v_1 \sin\theta_1 - m_2 v_2 \sin\theta_2 \quad (15.22\text{ग})$$

चूंकि निकाय की गतिज ऊर्जा अचर है, अतः

$$m_1 v^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \quad (15.22\text{घ})$$

समीकरणों 15.22ख और ग से θ_1 को निरस्त करने के लिए हम इन्हें इस तरह लिख सकते हैं:

$$m_1 v_1 \cos\theta_1 = m_1 v - m_2 v_2 \cos\theta_2 \quad (15.22\text{च})$$

और

$$m_1 v_1 \sin\theta_1 = m_2 v_2 \sin\theta_2 \quad (15.22\text{छ})$$

समीकरणों 15.22च और छ का वर्ग करके परिणामी समीकरणों को जोड़ने पर हमें मिलता है :

$$(m_1 v_1)^2 (\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1) = (m_1 v - m_2 v_2 \cos\theta_2)^2 + (m_2 v_2 \sin\theta_2)^2$$

या

$$m_1^2 v_1^2 = m_2^2 v_2^2 + m_1^2 v^2 - 2 m_1 m_2 v\, v_2 \cos\theta_2 \quad (15.22\text{ज})$$

अब हम समीकरण 15.22घ का इस्तेमाल करके v और θ_2 के पदों में v_2 का व्यंजक निकालेंगे। समीकरण 15.22घ को m_1 से गुणा करने पर हमें मिलता है :

$$m_1^2 v^2 = m_1^2 v_1^2 + m_1 m_2 v_2^2 \quad (15.22\text{झ})$$

समीकरण 15.22झ को 15.22ज में रखने पर हमें मिलता है :

$$0 = m_2^2 v_2^2 + m_1 m_2 v_2^2 - 2 m_1 m_2 v\, v_2 \cos\theta_2 \quad (15.22\text{त})$$

समीकरण 15.22त, v_2 में एक द्विघात समीकरण है जिसका $v_2 = 0$ एक तुच्छ हल है। इसे हम नहीं लेते और केवल यह हल लेते हैं :

$$v_2 = \frac{2m_1 v \cos\theta_2}{m_1 + m_2} = \frac{2\alpha v \cos\theta_2}{1+\alpha} \quad \text{जहां} \quad \alpha = \frac{m_1}{m_2} \tag{15.23}$$

हम v_1 का मान समीकरण 15.22छ से ज्ञात कर सकते हैं। θ_1 का मान ज्ञात करने के लिए समीकरण 15.22छ को समीकरण 15.22च से भाग दे कर हम लिख सकते हैं :

$$\frac{m_1 v_1 \sin\theta_1}{m_1 v_1 \cos\theta_1} = \frac{m_2 v_2 \sin\theta_2}{m_1 v - m_2 v_2 \cos\theta_2} \qquad (15.24\text{क})$$

कोणों के मान पता लगाने के लिए हम समीकरण 15.24क के दायें पक्ष के अंश और हर को $2\cos\theta_2$ से गुणा करते हैं।

तब हमें मिलता है :

$$\tan\theta_1 = \frac{m_2 v_2 \sin 2\theta_2}{2m_1 v \cos\theta_2 - 2m_2 v_2 \cos^2\theta_2} \qquad (15.24\text{ख})$$

समीकरण 15.23 से हम समीकरण 15.24क के हर में $2m_1 v\cos\theta_2 = (m_1 + m_2)\, v_2$ रखते हैं, जिससे कि

$$\tan\theta_1 = \frac{m_2 v_2 \sin 2\theta_2}{(m_1 + m_2)v_2 - 2m_2 v_2 \cos^2\theta_2} \qquad (15.24\text{ग})$$

या

$$\boxed{\tan\theta_1 = \frac{\sin 2\theta_2}{\alpha - \cos 2\theta_2}} \tag{15.25}$$

समीकरण 15.25 हमें बताता है कि θ_1 और θ_2 का संबंध, α यानी प्रक्षेप्य और लक्ष्य कण के द्रव्यमानों के अनुपात पर बहुत अधिक निर्भर है। आइये, अब हम इस परिणाम को समान द्रव्यमान वाली बिलियर्ड्स की दो गेंदों की संघट्टन पर लागू करें।

उदाहरण 15.5 : बिलियर्ड्स की गेंदों का प्रत्यास्थ संघट्टन

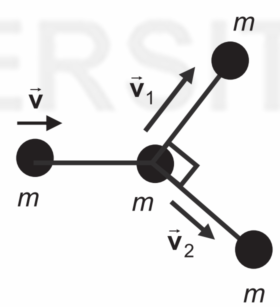
द्रव्यमान m वाली एक बिलियर्ड्स की गेंद विरामावस्था में स्थित समान द्रव्यमान वाली दूसरी बिलियर्ड्स की गेंद से टकराती है। उसके बाद वह अपनी आरंभिक गति की दिशा से θ_1 के कोण पर सरल रेखा में गतिमान होती है। संघट्टन के बाद लक्ष्य और प्रक्षेप्य एक-दूसरे के सापेक्ष किस कोण पर गतिमान होते हैं?

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि गेंदों को कण माना जाए और निकाय को द्वि-कण निकाय माना जाए। यह एक द्विविम प्रत्यास्थ संघट्टन है। अतः इसके लिए रैखिक संवेग और गतिज ऊर्जा संरक्षित रहेंगे। इस स्थिति के लिए, $m_1 = m_2$ और $\alpha = 1$। अतः समीकरण 15.25 से :

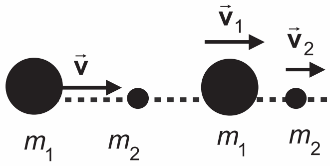
$$\tan\theta_1 = \frac{\sin 2\theta_2}{1-\cos 2\theta_2} = \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_2}{2\sin^2\theta_2} = \cot\theta_2 = \tan(90^\circ - \theta_2)$$

$$\therefore \quad \theta_1 = 90^\circ - \theta_2 \quad \text{या} \quad \theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$$

इस तरह **एक-दूसरे से प्रत्यास्थ संघट्टन के बाद बिलियर्ड्स की गेंदें एक-दूसरे के लंबवत् दिशाओं में चलती हैं** (देखें चित्र 15.12)।



चित्र 15.12: दो समान द्रव्यमान वाले कणों का द्विविम प्रत्यास्थ संघट्टन। ध्यान दें कि संघट्टन के बाद कण एक दूसरे के लंबवत् चलते हैं।

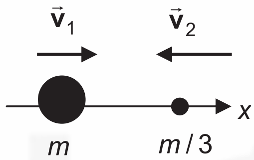


चित्र 15.13: दो कणों का द्विविम प्रत्यास्थ संघट्टन जब $m_1 >> m_2$। संघट्टन के बाद दोनों कण प्रक्षेप्य कण की आरंभिक दिशा के अनुदिश चलते हैं।

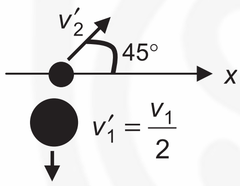
तब क्या होगा जब प्रक्षेप्य का द्रव्यमान लक्ष्य से बहुत अधिक हो, उदाहरण के लिए, जब एक प्रोटॉन, एक इलेक्ट्रॉन से टकराता है? इस स्थिति में $\alpha >> 1$ यानी $m_1 >> m_2$ होता है। चूंकि $\sin 2\theta_2$ और $\cos 2\theta_2$ के मान -1 और $+1$ के बीच में होते हैं, इसलिए इस स्थिति में $\tan\theta_1 \to 0$ या $\theta_1 \to 0$। और जब $\theta_1 \to 0$, तब समीकरण 15.25 से $\theta_2 \to 0$ भी होता है। अतः **जब प्रक्षेप्य का द्रव्यमान लक्ष्य से बहुत अधिक होता है तब दोनों कण प्रक्षेप्य की आरंभिक दिशा के अनुदिश चलते हैं** (चित्र 15.13)। अब आप थोड़ा ठहर कर इस चर्चा को बेहतर समझना चाहेंगे। इसके लिए निम्नलिखित बोध प्रश्न करें।

बोध प्रश्न 3 – द्विविम प्रत्यास्थ संघट्टन

द्रव्यमान m का एक कण (1) आरंभ में धनात्मक x-दिशा में चाल v_1 से गतिमान है (चित्र 15.14)। यह द्रव्यमान $m/3$ वाले एक दूसरे कण (2) से टकराता है जो आरंभ में विपरीत दिशा में अज्ञात चाल v_2 से चल रहा है। मान लें कि कणों पर लग रहा नेट बाह्य बल शून्य है और संघट्टन प्रत्यास्थ है। संघट्टन के बाद कण 1 चाल $v_1' = v_1/2$ से धनात्मक x-दिशा के सापेक्ष कोण $(-90°)$ पर चलता है। कण 2 धनात्मक x-दिशा से $45°$ के कोण पर अज्ञात चाल v_2' से चलता है जैसाकि चित्र में दिखाया गया है। v_1 के पदों में v_2 और v_2' ज्ञात करें।



संघट्टन से पहले



संघट्टन के बाद

चित्र. 15.14

इसके साथ हम कणों के संघट्टन की चर्चा का अंत कर रहे हैं। इस इकाई के अंतिम भाग में हम द्वि-कण और बहु-कण निकायों के लिए कोणीय संवेग संरक्षण की चर्चा करेंगे।

15.5 कोणीय संवेग

अभी तक आपने द्वि-कण और बहु-कण निकायों के रैखिक संवेग और यांत्रिक ऊर्जा की गणना करना सीखा है। आपने रैखिक संवेग संरक्षण नियम और यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम भी पढ़े हैं। अब हम ऐसे निकायों के लिए कोणीय संवेग प्राप्त करेंगे और कोणीय संवेग संरक्षण नियम भी समझेंगे।

15.5.1 द्वि-कण निकाय का कोणीय संवेग

द्वि-कण निकाय का कुल कोणीय संवेग, कणों के कोणीय संवेगों के सदिश योग के बराबर होता है :

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{L}}_1 + \vec{\mathbf{L}}_2 \tag{15.26}$$

इकाई 10 से कोणीय संवेग की परिभाषा याद करें। प्रत्येक कण का कोणीय संवेग है :

$$\vec{\mathbf{L}}_1 = \vec{\mathbf{r}}_1 \times \vec{\mathbf{p}}_1 = m_1 \vec{\mathbf{r}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_1 \quad \text{और} \quad \vec{\mathbf{L}}_2 = \vec{\mathbf{r}}_2 \times \vec{\mathbf{p}}_2 = m_2 \vec{\mathbf{r}}_2 \times \vec{\mathbf{v}}_2 \tag{15.27क}$$

इस तरह

$$\vec{\mathbf{L}} = m_1 \vec{\mathbf{r}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_1 + m_2 \vec{\mathbf{r}}_2 \times \vec{\mathbf{v}}_2 \tag{15.27ख}$$

एक बार फिर हम समीकरणों 15.8क और ख से $\vec{\mathbf{r}}_1$ और $\vec{\mathbf{r}}_2$ के मान समीकरण 15.27ख में रखेंगे और निकाय का कोणीय संवेग संहति केंद्र और आपेक्षिक निर्देशांकों के पदों में लिखेंगे :

$$\vec{\mathbf{L}} = m_1 \left(\vec{\mathbf{R}}_{cm} + \vec{\mathbf{r}}_1'\right) \times \vec{\mathbf{v}}_1 + m_2 \left(\vec{\mathbf{R}}_{cm} + \vec{\mathbf{r}}_2'\right) \times \vec{\mathbf{v}}_2$$

इसे सरल करने पर हमें मिलता है :

$$\vec{\mathbf{L}} = m_1\left(\vec{\mathbf{R}}_{cm} \times \vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{r}}_1' \times \vec{\mathbf{v}}_1\right) + m_2\left(\vec{\mathbf{R}}_{cm} \times \vec{\mathbf{v}}_2 + \vec{\mathbf{r}}_2' \times \vec{\mathbf{v}}_2\right)$$

$$= \vec{\mathbf{R}}_{cm} \times m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_1(\vec{\mathbf{r}}_1' \times \vec{\mathbf{v}}_1) + \vec{\mathbf{R}}_{cm} \times m_2\vec{\mathbf{v}}_2 + m_2(\vec{\mathbf{r}}_2' \times \vec{\mathbf{v}}_2)$$

या $$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{R}}_{cm} \times (m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2) + m_1(\vec{\mathbf{r}}_1' \times \vec{\mathbf{v}}_1) + m_2(\vec{\mathbf{r}}_2' \times \vec{\mathbf{v}}_2) \qquad (15.28\text{क})$$

समीकरण 15.1च से $\vec{\mathbf{p}} = m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2 = M\vec{\mathbf{V}}_{cm}$ और समीकरण 15.28क हो जाता है :

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{R}}_{cm} \times M\vec{\mathbf{V}}_{cm} + m_1(\vec{\mathbf{r}}_1' \times \vec{\mathbf{v}}_1) + m_2(\vec{\mathbf{r}}_2' \times \vec{\mathbf{v}}_2) \qquad (15.28\text{ख})$$

ध्यान दें कि $\vec{\mathbf{r}}_1'$ और $\vec{\mathbf{r}}_2'$ संहति केंद्र के सापेक्ष कणों के स्थिति सदिश हैं। इस तरह, समीकरण 15.28ख में आखिरी दो पद निकाय के संहति केंद्र के सापेक्ष कणों के कोणीय संवेग हैं। हम उनके योग को $\vec{\mathbf{L}}_{cm}$ लिखते हैं। तब

$$\boxed{\vec{\mathbf{L}}_{cm} = m_1(\vec{\mathbf{r}}_1' \times \vec{\mathbf{v}}_1) + m_2(\vec{\mathbf{r}}_2' \times \vec{\mathbf{v}}_2)} \qquad (15.28\text{ग})$$

संहति केंद्र के प्रति द्वि-कण निकाय का कोणीय संवेग

हम $\vec{\mathbf{L}}_{cm}$ के व्यंजक को निकाय के समानीत द्रव्यमान और आपेक्षिक वेग के पदों में भी लिख सकते हैं। इसके लिए समीकरण 15.28ग में समीकरणों 15.8क और ख से $\vec{\mathbf{r}}_1' = \dfrac{m_2}{M}\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{r}}_2' = -\dfrac{m_1}{M}\vec{\mathbf{r}}$ रखने पर हमें मिलता है :

$$\vec{\mathbf{L}}_{cm} = m_1\left(\frac{m_2}{M}\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}_1\right) + m_2\left(-\frac{m_1}{M}\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}_2\right) = \frac{m_1 m_2}{M}\left[\vec{\mathbf{r}} \times (\vec{\mathbf{v}}_1 - \vec{\mathbf{v}}_2)\right]$$

या $$\boxed{\vec{\mathbf{L}}_{cm} = \mu(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}) \quad \text{जहां} \quad \vec{\mathbf{v}} = (\vec{\mathbf{v}}_1 - \vec{\mathbf{v}}_2)} \qquad (15.28\text{घ})$$

संहति केंद्र के प्रति द्वि-कण निकाय का कोणीय संवेग

समीकरण 15.28ग का इस्तेमाल करके हम समीकरण 15.28ख को इस तरह लिख सकते हैं :

$$\boxed{\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{R}}_{cm} \times M\vec{\mathbf{V}}_{cm} + \vec{\mathbf{L}}_{cm} = \vec{\mathbf{R}}_{cm} \times \vec{\mathbf{P}}_{cm} + \vec{\mathbf{L}}_{cm}} \qquad (15.29)$$

द्वि-कण निकाय का कोणीय संवेग

इस तरह **द्वि-कण निकाय का कोणीय संवेग संहति केंद्र के कोणीय संवेग और निकाय के संहति केंद्र के सापेक्ष कणों के कुल कोणीय संवेग का योग है**। यह **संहति केंद्र का कोणीय संवेग और आपेक्षिक वेग $\vec{\mathbf{v}}$ से गतिमान द्रव्यमान μ वाले एक काल्पनिक कण के कोणीय संवेग का योग भी है।**

इन परिणामों को हम N कणों के निकाय पर भी लागू कर सकते हैं। यहां हम व्युत्पति दिए बिना परिणाम का कथन दे रहे हैं।

मूल बिन्दु के प्रति N-कण निकाय का कुल कोणीय संवेग, मूल बिन्दु के प्रति निकाय के कणों के कोणीय संवेगों के सदिश योग के बराबर होता है :

$$\vec{\mathbf{L}} = m_1\vec{\mathbf{r}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{r}}_2 \times \vec{\mathbf{v}}_2 + \ldots + m_N\vec{\mathbf{r}}_N \times \vec{\mathbf{v}}_N \qquad (15.30\text{क})$$

हम $\vec{\mathbf{L}}$ का मान इस तरह लिख सकते हैं :

$$\boxed{\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{L}}_{cm} + \vec{\mathbf{R}}_{cm} \times \vec{\mathbf{P}}_{cm}} \qquad (15.30\text{ख})$$

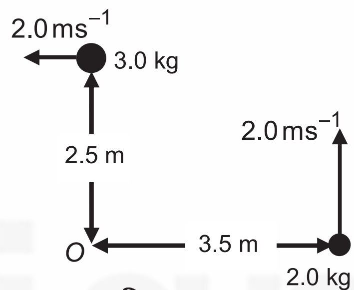
जहां **समीकरण 15.30ख का पहला पद निकाय के संहति केंद्र के प्रति निकाय के सभी कणों के कोणीय संवेगों का योग है**। इसे हम लिखते हैं :

$$\vec{\mathbf{L}}_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\mathbf{r}}_i' \times \vec{\mathbf{v}}_i \qquad (15.30\text{ग})$$

इस इकाई के अंतिम भाग में आप कोणीय संवेग संरक्षण के बारे में पढ़ेंगे। पर पहले हम एक बहु-कण निकाय के कोणीय संवेग की गणना करेंगे।

उदाहरण 15.6 : कोणीय संवेग की गणना

चित्र 15.15 में दिखाये गए क्षण पर इस द्वि-कण निकाय का मूल बिन्दु और निकाय के संहति केंद्र के सापेक्ष कुल कोणीय संवेग प्राप्त करें।



चित्र 15.15

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि एक द्वि-कण निकाय के लिए समीकरणों 15.27ख और 15.28ग का प्रयोग किया जाये।

चित्र 15.15 से 3.0 kg द्रव्यमान वाले कण (1) के m में निर्देशांक हैं (0, 2.5) और 2.0 kg द्रव्यमान वाले कण (2) के निर्देशांक हैं (3.5, 0)। इन कणों के वेग क्रमशः $-2.0\,\text{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}}$ और $2.0\,\text{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{j}}$ हैं। मूल बिंदु O के प्रति निकाय का कोणीय संवेग समीकरण 15.27ख से है :

$$\vec{\mathbf{L}} = 3.0\,\text{kg}(2.5\,\hat{\mathbf{j}})\times(-2.0\,\text{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}}) + 2.0\,\text{kg}(3.5\,\hat{\mathbf{i}})\times(2.0\,\text{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{j}}) = 29\,\text{kgms}^{-1}\,\hat{\mathbf{k}}$$

संहति केंद्र के प्रति निकाय का कुल कोणीय संवेग समीकरण 15.28ग से मिलता है। m में निकाय के संहति केंद्र के निर्देशांक हैं :

$$\vec{\mathbf{R}}_{cm} = \frac{3.0\,\text{kg}(2.5\,\text{m}\,\hat{\mathbf{j}}) + 2.0\,\text{kg}(3.5\,\text{m}\,\hat{\mathbf{i}})}{5.0\,\text{kg}} = 1.4\,\text{m}\,\hat{\mathbf{i}} + 1.5\,\text{m}\,\hat{\mathbf{j}}$$

संहति केंद्र के सापेक्ष दोनों कणों के निर्देशांक हैं :

$$\vec{\mathbf{r}}_1' = \vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{R}}_{cm} = 2.5\,\text{m}\,\hat{\mathbf{j}} - (1.4\,\text{m}\,\hat{\mathbf{i}} + 1.5\,\text{m}\,\hat{\mathbf{j}}) = -1.4\,\text{m}\,\hat{\mathbf{i}} + 1.0\,\text{m}\,\hat{\mathbf{j}} \text{ और}$$

$$\vec{\mathbf{r}}_2' = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{R}}_{cm} = 3.5\,\text{m}\,\hat{\mathbf{i}} - (1.4\,\text{m}\,\hat{\mathbf{i}} + 1.5\,\text{m}\,\hat{\mathbf{j}}) = 2.1\,\text{m}\,\hat{\mathbf{i}} - 1.5\,\text{m}\,\hat{\mathbf{j}}$$

अतः समीकरण 15.28ग से

$$\vec{\mathbf{L}}_{cm} = 3.0\,\text{kg}(-1.4\,\text{m}\,\hat{\mathbf{i}} + 1.0\,\text{m}\,\hat{\mathbf{j}})\times(-2.0\,\text{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}}) + 2.0\,\text{kg}(2.1\,\text{m}\,\hat{\mathbf{i}} - 1.5\,\text{m}\,\hat{\mathbf{j}})\times (2.0\,\text{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{j}})$$
$$= 14.4\,\text{kgms}^{-1}\,\hat{\mathbf{k}}$$

समीकरण 15.28ग के बदले में हम समीकरण 15.28घ का प्रयोग करके भी $\vec{\mathbf{L}}_{cm}$ निर्धारित कर सकते हैं।

15.5.2 कोणीय संवेग संरक्षण

एक बार फिर हम द्वि-कण निकाय से चर्चा शुरू करके उसे बहु-कण निकायों पर लागू करेंगे। समीकरणों 15.29 और 15.28घ से,

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{R}}_{cm} \times M\vec{\mathbf{V}}_{cm} + \mu\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}} \qquad (15.31)$$

कोणीय संवेग संरक्षण नियम प्राप्त करने के लिए हम समीकरण 15.31 का समय के सापेक्ष अवकलन करते हैं और निकाय पर लग रहा नेट बल आघूर्ण प्राप्त करते हैं। अवकलज के लिए डॉट संकेत का इस्तेमाल करके हम लिखते हैं :

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \dot{\vec{\mathbf{R}}}_{cm} \times M\vec{\mathbf{V}}_{cm} + \vec{\mathbf{R}}_{cm} \times M\dot{\vec{\mathbf{V}}}_{cm} + \mu\,\dot{\vec{\mathbf{r}}} \times \vec{\mathbf{v}} + \mu\,\vec{\mathbf{r}} \times \dot{\vec{\mathbf{v}}} \qquad (15.32\text{क})$$

चूंकि $\dot{\vec{\mathbf{R}}}_{cm} = \vec{\mathbf{V}}_{cm}$ और $\dot{\vec{\mathbf{r}}} = \vec{\mathbf{v}}$, अतः समीकरण 15.32क में पहला पद और तीसरा पद शून्य है, क्योंकि किसी सदिश का अपने-आप से सदिश गुणनफल शून्य होता है। अब यदि **निकाय पर कोई बाह्य बल नहीं लग रहा हो** तो संहति केंद्र का वेग अचर होता है और $\dot{\vec{\mathbf{V}}}_{cm} = \vec{\mathbf{0}}$। अतः **जब निकाय पर कोई बाह्य बल नहीं लग रहा होता** तब समीकरण 15.32क का दूसरा पद भी शून्य होता है। तब समीकरण 15.32क हो जाता है

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \mu\,\vec{\mathbf{r}} \times \dot{\vec{\mathbf{v}}} = \vec{\mathbf{r}} \times \mu\dot{\vec{\mathbf{v}}} = \vec{\mathbf{r}} \times \mu\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \qquad (15.32\text{ख})$$

या
$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}_{21} \qquad (15.32\text{ग})$$

जहां $\vec{\mathbf{F}}_{21}$ दोनों कणों के बीच का पारस्परिक क्रिया बल है।

अब मान लें कि **दोनों कणों के बीच लग रहा पारस्परिक क्रिया बल केंद्रीय बल है** यानी वह या तो $\vec{\mathbf{r}}$ **के अनुदिश है या उसके विपरीत दिशा** में है। तब सदिश गुणनफल की परिभाषा से

$$\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}_{21} = \vec{\mathbf{0}} \qquad (15.32\text{घ})$$

इस तरह,
$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\mathbf{0}} \qquad (15.33)$$

इसका अर्थ यह है कि निकाय पर कुल बल आघूर्ण शून्य है और निकाय का कुल कोणीय संवेग $\vec{\mathbf{L}}$ संरक्षित रहता है। इस तरह हम **द्वि-कण निकाय**, जिस पर नेट बाह्य बल शून्य हो और कणों के बीच का पारस्परिक क्रिया बल केंद्रीय बल हो, के लिए **कोणीय संवेग संरक्षण नियम** लिख सकते हैं।

द्वि-कण निकाय के लिए कोणीय संवेग संरक्षण

यदि एक द्वि-कण निकाय पर लग रहा नेट बाह्य बल शून्य हो और कणों के बीच का पारस्परिक क्रिया बल केंद्रीय बल हो यानी वह दोनों कणों के बीच की दूरी पर ही निर्भर करता हो तब निकाय पर नेट बल आघूर्ण शून्य होता है और द्वि-कण निकाय का कोणीय संवेग संरक्षित रहता है :

$$\vec{\mathbf{L}} = \text{अचर} \qquad (15.34)$$

यह परिणाम एक बहु-कण निकाय पर भी लागू होता है।

आइये, अब हम इस इकाई का सारांश दें।

15.6 सारांश

अवधारणा	विवरण
द्वि-कण निकाय का कुल रैखिक संवेग	■ **द्वि-कण निकाय का कुल रैखिक संवेग** उसके संहति केंद्र के रैखिक संवेग के बराबर होता है : $$\vec{\mathbf{p}} = M\frac{d\vec{\mathbf{R}}_{cm}}{dt} = M\vec{\mathbf{V}}_{cm} \quad \text{जहां } M = m_1 + m_2$$
द्वि-कण निकाय का रैखिक संवेग संरक्षण	■ **द्वि-कण निकाय का कुल रैखिक संवेग अचर रहता है यदि निकाय पर लग रहा नेट बाह्य बल शून्य हो :** $$\vec{\mathbf{p}} = M\vec{\mathbf{V}}_{cm} = \text{अचर}$$
***N*-कण निकाय का रैखिक संवेग संरक्षण**	■ ***N*-कण निकाय का कुल रैखिक संवेग अचर रहता है यदि निकाय पर लग रहा नेट बाह्य बल शून्य हो :** $$\vec{\mathbf{P}} = M\vec{\mathbf{V}}_{cm} = \text{अचर} \qquad \text{जहां } M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$
द्वि-कण / *N*-कण निकाय का यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण	■ **यदि निकाय के प्रत्येक कण पर लग रहा नेट बल केवल कणों की बीच की दूरी पर निर्भर करता है यानी बल केंद्रीय संरक्षी बल है तो द्वि-कण निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा अचर रहती है।**
कणों का संघट्टन	■ दो या अधिक कणों में **संघट्टन** तब होता है जब वे कण एक दूसरे के इतने निकट आते हैं कि उनमें एक संक्षिप्त समय के लिए पारस्परिक क्रिया बल लगता है। संघट्टन प्रक्रिया में यह ज़रूरी नहीं कि वे कण एक-दूसरे से टकरायें। साथ ही उन पर बाह्य बल लग भी सकते हैं और नहीं भी ।
प्रत्यास्थ और अप्रत्यास्थ संघट्टन	■ संघट्टन दो तरह के होते हैं : 1. **प्रत्यास्थ संघट्टन** जिनमें रैखिक संवेग और गतिज ऊर्जा दोनों ही का संरक्षण होता है। $$\vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{p}}_f \quad \text{और} \quad K_i = K_f \quad \text{प्रत्यास्थ संघट्टन के लिए}$$ 2. **अप्रत्यास्थ संघट्टन** जिनमें रैखिक संवेग संरक्षित रहता है और गतिज ऊर्जा संरक्षित नहीं रहती। लेकिन कुल ऊर्जा संरक्षित रहती है। $$\vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{p}}_f \quad \text{और} \quad K_i \neq K_f \quad \text{अप्रत्यास्थ संघट्टन के लिए}$$
एकविम प्रत्यास्थ संघट्टन-विशेष स्थितियां	■ जब कोई कण **समान द्रव्यमान** वाले विरामावस्था में स्थित कण से टकराता है, तो प्रक्षेप्य कण रुक जाता है और लक्ष्य कण प्रक्षेप्य के वेग से गति करने लगता है। जब कोई कण अपने से **बहुत अधिक द्रव्यमान** वाले विरामावस्था में स्थित कण से टकराता है तो आपतित कण उसी चाल से लौट जाता है जबकि लक्ष्य कण तकरीबन हिलता ही नहीं। जब कोई कण अपने से **बहुत कम द्रव्यमान** वाले विरामावस्था में स्थित कण से टकराता है तो आपतित कण उसी चाल से चलता रहता है जबकि लक्ष्य कण आपतित कण के वेग के दोगुने वेग से गति करता है।

द्वि-कण निकाय का कोणीय संवेग

■ **द्वि-कण निकाय का कोणीय संवेग** संहति केंद्र के कोणीय संवेग और संहति केंद्र के प्रति कणों के कुल कोणीय संवेग के योग के बराबर होता है :

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{R}}_{cm} \times \vec{\mathbf{P}}_{cm} + \vec{\mathbf{L}}_{cm}$$

जहां $$\vec{\mathbf{L}}_{cm} = m_1(\vec{\mathbf{r}}_1' \times \vec{\mathbf{v}}_1) + m_2(\vec{\mathbf{r}}_2' \times \vec{\mathbf{v}}_2)$$

***N*-कण निकाय का कोणीय संवेग**

■ *N*-कण निकाय का **कोणीय संवेग** होता है :

$$\vec{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{v}}_i$$

इसे हम संहति केंद्र के कोणीय संवेग और संहति केंद्र के प्रति कणों के कुल कोणीय संवेग के योग के रूप में लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{L}}_{cm} + \vec{\mathbf{R}}_{cm} \times \vec{\mathbf{P}}_{cm}$$

जहां $$\vec{\mathbf{L}}_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\mathbf{r}}_i' \times \vec{\mathbf{v}}_i$$

कणों के निकाय का कोणीय संवेग संरक्षण

■ यदि **कणों के निकाय पर लग रहा नेट बाह्य बल शून्य हो और कणों के बीच लग रहे पारस्परिक क्रिया बल केंद्रीय बल हों**, तब निकाय का कुल कोणीय संवेग संरक्षित रहता है : $\vec{\mathbf{L}} =$ **अचर**

15.7 अंत में कुछ प्रश्न

1. समान द्रव्यमान वाले दो कणों के निकाय में एक कण आरंभ में विरामावस्था में है। दूसरा कण बायीं ओर से चाल v से विरामावस्था में स्थित कण पर आपतित होता है। निकाय के संहति केंद्र की चाल है :

   क) 0
   ख) $0.5v$
   ग) v
   घ) $0.75v$

2. ऊपर दिए गए प्रश्न 1 का निकाय लें। दोनों कणों के प्रत्यास्थ संघट्टन के बाद संहति केंद्र का वेग क्या है?

   क) 0
   ख) $0.5v$
   ग) $-0.5v$
   घ) $0.75v$

3. एक दुर्घटना में द्रव्यमान 1000 kg वाली गाड़ी *A* आरंभ में विरामावस्था में है। उससे द्रव्यमान 1500 kg वाली गाड़ी *B* पीछे से टकरा जाती है। सड़क पर बने टायरों के निशानों से पुलिस पता लगा लेती है कि संघट्टन के बाद गाड़ी *A* और गाड़ी *B* की

चालें क्रमशः $12.0\,ms^{-1}$ और $8.0\,ms^{-1}$ हैं। यदि संघट्टन प्रत्यास्थ हो, तो संघट्टन से पहले गाड़ी B की चाल क्या है?

क) $16.0\,ms^{-1}$

ख) $24.0\,ms^{-1}$

ग) $14.0\,ms^{-1}$

घ) $26.0\,ms^{-1}$

4. द्रव्यमान 5.0 kg की एक गेंद $3.5\,ms^{-1}$ की चाल से गतिमान है और वह विरामावस्था में स्थित द्रव्यमान 2.5 kg की गेंद से टकराती है जिसके बाद दोनों गेंदें एक-साथ चलती हैं। यदि गेंदों के बीच का संघट्टन प्रत्यास्थ संघट्टन हो तो द्रव्यमान 2.5 kg वाली गेंद की संघट्टन के बाद गतिज ऊर्जा क्या है?

क) 1.7 J
ख) 3.4 J
ग) 8.1 J
घ) 28 J

5. एक चिकने फ़र्श पर फिसल रहा एक बक्सा ठीक अपने जैसे एक बक्से से जो फ़र्श पर विरामावस्था में रखा है, टकराता है। टक्कर के बाद वे दोनों बक्से एक साथ गति करते हैं। टक्कर से पहले और बाद की गतिज ऊर्जाओं के बारे में निम्नलिखित में से कौन सा कथन सत्य है?

क) $K_i = K_f$
ख) $K_i > K_f$
ग) $K_i < K_f$
घ) दी गई सूचना जवाब देने के लिए काफ़ी नहीं है।

चित्रः 15.16

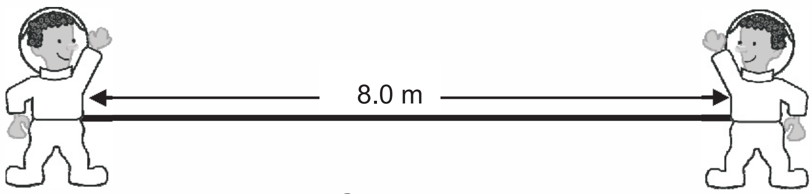
6. आरंभ में विरामावस्था में स्थित हीलियम नाभिक से चाल v से गतिमान एक न्यूट्रॉन का प्रत्यास्थ संघट्टन होता है। यह देखा जाता है कि संघट्टन के बाद हीलियम नाभिक न्यूट्रॉन की गति की आरंभिक दिशा से कोण θ पर गति करता है। हीलियम नाभिक का द्रव्यमान न्यूट्रॉन के द्रव्यमान का चार गुना है। संघट्टन के बाद न्यूट्रॉन की गति की दिशा और दोनों कणों की चाल निर्धारित करें।

7. समान द्रव्यमान वाले चार कणों को एक द्रव्यमानहीन दृढ़ छड़ में चित्र 15.16 के अनुसार बांधा जाता है। छड़ O पर स्थित एक धुरी से जुड़ी हुई है। इस निकाय को अचर कोणीय चाल से O के गिर्द क्षैतिज तल में घुमाया जाता है। कणों के इस निकाय के O के प्रति कोणीय संवेग की उनके द्रव्यमानों, उनके बीच की दूरियों और उनकी कोणीय चाल के पदों में गणना करें।

8. एक प्रोटॉन का विरामावस्था में स्थित एक अज्ञात कण से सीधा प्रत्यास्थ संघट्टन होता है। प्रोटॉन अपनी आरंभिक गतिज ऊर्जा के 4/9 वें हिस्से के बराबर गतिज ऊर्जा से आरंभिक दिशा में वापस लौटता है। अज्ञात कण और प्रोटॉन के द्रव्यमानों का अनुपात प्राप्त करें।

9. एक पिंड को ऊर्ध्वाधर से 45° के कोण पर $20\,ms^{-1}$ के वेग से प्रक्षेपित किया जाता है। अपने पथ के उच्चतम बिंदु पर वह दो टुकड़ों में टूट जाता है। उनमें से एक टुकड़ा ऊर्ध्वाधरतः नीचे की ओर गिरता है। दूसरा टुकड़ा कहां गिरता है? $g = 10\,ms^{-2}$ लें।

10. दो अंतरिक्ष यात्री जिनमें से प्रत्येक का द्रव्यमान 80 kg है, एक हल्की रस्सी से इस तरह बंधे हैं कि उनके बीच की दूरी 8.0 m है (चित्र 15.17)। वे अंतरिक्ष में विलगित हैं और अपने संहति केंद्र की परिक्रमा $5.0\,ms^{-1}$ की चाल से करते हैं। अंतरिक्ष यांत्रियों को कण मानकर इस निकाय के कोणीय संवेग और गतिज ऊर्जा की गणना करें। कुछ समय बाद वे रस्सी को खींच कर एक-दूसरे के नज़दीक आ जाते हैं जिससे कि उनके बीच की दूरी घटकर 4.0 m रह जाती है। निकाय का नया कोणीय संवेग क्या है? उनकी नई चालें क्या है? क्या निकाय की गतिज ऊर्जा बदलती है या वही रहती है?



चित्र 15.17

15.8 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. क) समीकरण 15.1घ और च में $m_1 = 2kg$, $m_2 = 3kg$, $\vec{\mathbf{v}}_1 = 5ms^{-1}\,\hat{\mathbf{i}}$ और $\vec{\mathbf{v}}_2 = -5ms^{-1}\,\hat{\mathbf{i}}$ रखने पर हमें मिलता है :

$$\vec{\mathbf{V}}_{cm} = \frac{2kg \times 5ms^{-1}\,\hat{\mathbf{i}} + 3kg \times (-5ms^{-1})\hat{\mathbf{i}}}{2kg + 3kg} = -1ms^{-1}\hat{\mathbf{i}}$$

ख) चूंकि निकाय पर कोई बाह्य बल नहीं लग रहा, निकाय का रैखिक संवेग संरक्षित है :

$$m_i\vec{\mathbf{v}}_i = m_f\vec{\mathbf{v}}_f \qquad \text{(i)}$$

जहां m_i, m_f और $\vec{\mathbf{v}}_i$, $\vec{\mathbf{v}}_f$ क्रमशः निकाय के आरंभिक और अंतिम द्रव्यमान और वेग है। क्योंकि आरंभ में ब्लॉक विरामावस्था में है, गोली का रैखिक संवेग ही निकाय का आरंभिक रैखिक संवेग है :

$$m_i\vec{\mathbf{v}}_i = 0.01\,kg \times \vec{\mathbf{v}}_i \qquad \text{(ii)}$$

क्योंकि गोली ब्लॉक के अंदर है, संघट्टन के बाद गोली और ब्लॉक दोनों एक ही वेग से गतिमान होते हैं और निकाय का अंतिम रैखिक संवेग है :

$$m_f v_f = 10.01\,kg \times 0.2\,ms^{-1} = 2.002\,kgms^{-1} \qquad \text{(iii)}$$

समीकरण (ii) और (iii) को समीकरण (i) में रखने पर हमें मिलता है :

$$0.01\,kg \times v_i = 2.002\,kgms^{-1} \Rightarrow v_i = 200\,ms^{-1} = 2.0 \times 10^2\,ms^{-1}$$

2. क) प्रत्यास्थ संघट्टन के लिए समीकरणों 15.19ग और ख में $v_1 = 3.0ms^{-1}$, $m_1 = 5.0kg$ और $m_2 = 8.0kg$ रखने पर हमें मिलता है :

$$v_1' = \left(\frac{5.0kg - 8.0kg}{5.0kg + 8.0kg}\right) \times 3.0ms^{-1} = -0.69ms^{-1}$$

और $$v_2' = \frac{2 \times 5.0kg}{5.0kg + 8.0kg} \times 3.0ms^{-1} = 2.3ms^{-1}$$

ख) समीकरणों 15.16क और ख में हम $m_1 = 40\,\text{kg}$, $m_2 = 50\,\text{kg}$, $\vec{\mathbf{v}}_1 = 6.0\,\text{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}}$ और $\vec{\mathbf{v}}'_1 = -1.5\,\text{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}}$ रखेंगे। हमें $\vec{\mathbf{v}}_2$ और $\vec{\mathbf{v}}'_2$ के मान निर्धारित करने हैं जो दूसरे ठेले के आरंभिक और अंतिम वेग हैं। समीकरण 15.16क से :

$$40\,\text{kg} \times 6.0\,\text{ms}^{-1} + 50\,\text{kg} \times v_2 = 40\,\text{kg} \times (-1.5\,\text{ms}^{-1}) + 50\,\text{kg} \times v'_2$$

$$\Rightarrow \qquad v'_2 - v_2 = 6.0 \qquad \text{(i)}$$

समीकरण 15.16ख से $\frac{1}{2}(40\,\text{kg}) \times (6.0\,\text{ms}^{-1})^2 + \frac{1}{2}(50\,\text{kg}) \times v_2^2$

$$= \frac{1}{2}(40\,\text{kg}) \times (-1.5\,\text{ms}^{-1})^2 + \frac{1}{2}(50\,\text{kg}) \times v_2'^2$$

$$\Rightarrow \qquad v_2'^2 - v_2^2 = 27 \qquad \text{(ii)}$$

समीकरण (ii) को (i) से भाग देने पर हमें मिलता है : $v'_2 + v_2 = 4.5$ (iii)

समीकरणों (i) और (iii) से $\vec{\mathbf{v}}_2 = -0.75\,\text{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{v}}'_2 = 5.25\,\text{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}} \approx 5.3\,\text{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}}$

3. कण 2 के आरंभिक और अंतिम वेग हैं $\vec{\mathbf{v}}_2$ और $\vec{\mathbf{v}}'_2$। चूंकि निकाय पर कोई बाह्य बल नहीं लगता, इसलिए उसका रैखिक संवेग संरक्षित रहता है। अतः, निकाय के आरंभिक और अंतिम रैखिक संवेग हैं क्रमशः

$$\vec{\mathbf{p}}_i = mv_1\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{m}{3}v_2\,\hat{\mathbf{i}} = \left(mv_1 - \frac{mv_2}{3}\right)\hat{\mathbf{i}}$$

$$\vec{\mathbf{p}}_f = -m\frac{v_1}{2}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{m}{3}\left(v'_2 \cos 45^\circ\,\hat{\mathbf{i}} + v'_2 \sin 45^\circ\,\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$= \frac{mv'_2}{3\sqrt{2}}\,\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{mv'_2}{3\sqrt{2}} - \frac{mv_1}{2}\right)\hat{\mathbf{j}}$$

चूंकि $\vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{p}}_f$, अतः, हम x और y दिशाओं में रैखिक संवेग के घटकों को बराबर रखते हैं जिससे

$$mv_1 - \frac{mv_2}{3} = \frac{mv'_2}{3\sqrt{2}} \quad \text{और} \quad \frac{mv'_2}{3\sqrt{2}} - \frac{mv_1}{2} = 0 \qquad \text{(i)}$$

v'_2 और v_2 के लिए हल करने पर (i) से हमें मिलता है $v'_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}v_1$ और $v_2 = \frac{3}{2}v_1$।

समीकरण (i) के दूसरे समीकरण से हमें मिलता है :

$$v'_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}v_1$$

इस मान को समीकरण (i) के पहले समीकरण में रखने पर हमें मिलता है :

$$mv_1 - \frac{mv_2}{3} = \frac{m}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}v_1$$

$$\Rightarrow \quad v_2 = \frac{3}{2}v_1$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. सही विकल्प ख है। निकाय का रैखिक संवेग संहति केंद्र के रैखिक संवेग के बराबर है। मान लें कि प्रत्येक कण का द्रव्यमान m है और v धनात्मक x-दिशा में है। समीकरण 15.1च से हम लिख सकते हैं

$$(m+m)\,\vec{\mathbf{V}}_{cm} = m\vec{\mathbf{v}} + m \times \vec{\mathbf{0}} \quad \text{या} \quad V_{cm} = \frac{mv}{2m} = 0.5v$$

2. सही विकल्प ख है। चूंकि निकाय पर कोई बाह्य बल नहीं लग रहा, इसलिए उसका कुल रैखिक संवेग अचर रहता है। अतः समीकरण 15.2 से निकाय के संहति केंद्र का वेग संघट्टन से पहले और संघट्टन के बाद समान रहता है। इसका मान $0.5v$ है।

3. सही विकल्प क है। मान लें कि गाड़ियां धनात्मक x दिशा में गतिमान है। हम एकविम संघट्टन में रैखिक संवेग संरक्षण के लिए समीकरण 15.16क में $m_1 = 1000\,\text{kg},\ m_2 = 1500\,\text{kg},\ v_1 = 0,\ v_1' = 12.0\,\text{ms}^{-1}$ और $v_2' = 8.0\,\text{ms}^{-1}$ रखते हैं। संघट्टन से पहले गाड़ी B का वेग v_2, समीकरण 15.16क से है :

$$1000\,\text{kg}\times 0 + 1500\,\text{kg}\times v_2 = 1000\,\text{kg}\times 12.0\,\text{ms}^{-1} + 1500\,\text{kg}\times 8.0\,\text{ms}^{-1}$$

या $v_2 = 16.0\,\text{ms}^{-1}$

4. सही विकल्प घ है। समीकरण 15.19ख में $m_1 = 5.0\,\text{kg},\ m_2 = 2.5\,\text{kg}$, $v_1 = 3.5\,\text{ms}^{-1},\ v_2 = 0$ रखने पर द्रव्यमान 2.5 kg वाली गेंद का संघट्टन के बाद वेग v_2' है :

$$v_2' = \frac{2\times 5.0\,\text{kg}}{(5.0\,\text{kg} + 2.5\,\text{kg})}\times 3.5\,\text{ms}^{-1} = 4.7\,\text{ms}^{-1}$$ और संघट्टन के बाद गेंद की

गतिज ऊर्जा है $K = \dfrac{1}{2}\times(2.5\,\text{kg})\times(4.7\,\text{ms}^{-1})^2 = 27.6\,\text{J} \approx 28\,\text{J}$

5. सही विकल्प ख है। मान लें कि हर बक्से का द्रव्यमान m है। मान लें कि संघट्टन से पहले बक्से का वेग $v\,\hat{\mathbf{i}}$ है और संघदटन के बाद दोनों बक्सों का वेग $\vec{\mathbf{v}}'$ है। तब रैखिक संवेग संरक्षण से : $mv\,\hat{\mathbf{i}} + m(\vec{\mathbf{0}}) = (2m)\,\vec{\mathbf{v}}' \Rightarrow \vec{\mathbf{v}}' = \dfrac{v}{2}\,\hat{\mathbf{i}}$

आरंभिक गतिज ऊर्जा $K_i = \dfrac{1}{2}mv^2 + 0 = \dfrac{1}{2}mv^2$ और अंतिम गतिज ऊर्जा

$$K_f = \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{mv^2}{4}$$ । अतः $K_i > K_f$ ।

6. पहले हम समीकरण 15.23 में $m_1 = m,\ m_2 = 4m,\ \theta_2 = \theta$ और $\alpha = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{1}{4}$ रखेंगे। मान लें कि v_2 संघट्टन के बाद हीलियम नाभिक का वेग है और θ_1 वह कोण है जो न्यूट्रॉन संघट्टन के बाद गति की दिशा से बनाता है। इस तरह,

$$v_2 = \frac{2v\,\dfrac{1}{4}\cos\theta}{1+\dfrac{1}{4}} = \frac{2}{5}v\cos\theta = 0.4v\cos\theta$$

समीकरण 15.22घ से $v_1^2 = v^2 - \dfrac{m_2}{m_1}v_2^2 = v^2 - 4(0.4v\cos\theta)^2$

$$\Rightarrow v_1 = v(1-0.64\cos^2\theta)^{1/2}$$

समीकरण 15.25 से $\tan\theta_1 = \dfrac{\sin 2\theta}{\dfrac{1}{4}-\cos 2\theta} \Rightarrow \theta_1 = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sin 2\theta}{\dfrac{1}{4}-\cos 2\theta}\right)$

7. चूंकि सभी कण O के प्रति वर्तुल गति कर रहे हैं, इसलिए हरेक कण का कोणीय संवेग $mr^2\omega$ के बराबर है जहां m कण का द्रव्यमान है r, O से उसकी दूरी है और ω उसकी कोणीय चाल है। अतः चार कणों के इस निकाय का कुल कोणीय संवेग है :

$$L = mR^2\omega + m(2R)^2\omega + m(3R)^2\omega + m(4R)^2\omega = 30\,mR^2\omega$$

8. मान लें कि द्रव्यमान m वाला प्रोटॉन x दिशा में गतिमान है। माना कि अज्ञात कण का द्रव्यमान m' है। मान लें कि प्रोटॉन का आरंभिक वेग $v_1\hat{\mathbf{i}}$ है और प्रोटॉन और अज्ञात कण के अंतिम वेग क्रमशः $-v_1'\hat{\mathbf{i}}$ और $v_2'\hat{\mathbf{i}}$ हैं। प्रत्यास्थ संघट्टन के लिए रैखिक संवेग और गतिज ऊर्जा संरक्षित रहते हैं :

$$mv_1\hat{\mathbf{i}} + m'\times\vec{\mathbf{0}} = -mv_1'\hat{\mathbf{i}} + m'v_2'\hat{\mathbf{i}} \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}m'v_2'^2 \qquad \text{(ii)}$$

दिया है कि $\frac{1}{2}mv_1'^2 = \frac{4}{9}\left(\frac{1}{2}mv_1^2\right) \Rightarrow v_1' = \frac{2}{3}v_1$ (iii)

समीकरण (iii) को समीकरण (i) में रखने पर हमें मिलता है :

$$m'v_2'\hat{\mathbf{i}} = m(v_1 + v_1')\hat{\mathbf{i}} = \frac{5}{3}mv_1\hat{\mathbf{i}} \Rightarrow m'v_2' = \frac{5}{3}mv_1 \qquad \text{(iv)}$$

समीकरण (iv) से हमें मिलता है $\frac{1}{2}m'v_2'^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{(m'v_2')^2}{m'}\right) = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{5}{3}mv_1\right)^2}{m'}$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2}m'v_2'^2 = \frac{25}{18}\frac{m^2v_1^2}{m'} \qquad \text{(v)}$$

समीकरणों (v) और (iii) को समीकरण (ii) में रखने पर

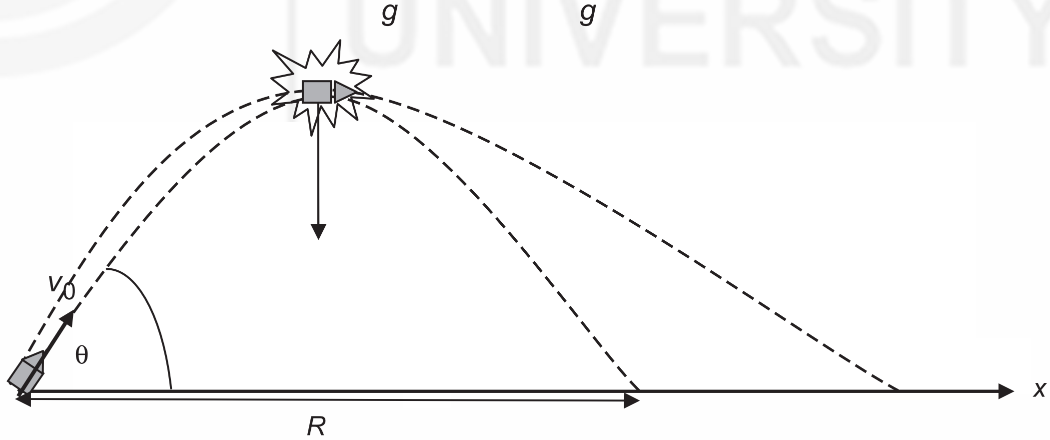
$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{2}{3}v_1\right)^2 + \frac{25}{18}\frac{m}{m'}(mv_1^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{4}{18}mv_1^2 + \frac{25}{18}\frac{m}{m'}mv_1^2 \Rightarrow \frac{25}{18}\cdot\frac{m}{m'} = \frac{5}{18} \Rightarrow m' = 5m$$

अतः अज्ञात कण का द्रव्यमान $5m$ है।

9. चित्र 15.18 देखें। पथ पर उच्चतम बिंदु पर कण प्रक्षेपण बिंदु से $\frac{R}{2}$ की दूरी पर होता है जहां R पिंड का परास है :

$$R = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g} = \frac{v_0^2\, 2\sin\theta\cos\theta}{g}$$



चित्र 15.18

जब पिंड दो टुकड़ों में टूटता है, तब उसका वेग केवल क्षैतिज दिशा में है, क्योंकि उच्चतम बिंदु पर पिंड का ऊर्ध्वाधर वेग शून्य है। माना कि टूटने से पहले पिंड का द्रव्यमान $2m$ है। यह निकाय दो भागों से बना है : द्रव्यमान m वाला भाग 1 जो ऊर्ध्वाधरतः नीचे की ओर गिरता है और द्रव्यमान m वाला भाग 2। मान लें कि क्षैतिज दिशा में भाग 2 का वेग v_2 है। चूंकि क्षैतिज दिशा में कोई बल नहीं लग रहा, अतः इस दिशा में रैखिक संवेग संरक्षित रहता है : $p_{ix} = p_{fx}$

या $(m + m)v_0 \cos\theta = m \times 0 + mv_2 \Rightarrow v_2 = 2v_0 \cos\theta$

इस तरह भाग 2 का एक नया क्षैतिज वेग होता है जो मूल पिंड के क्षैतिज वेग का **दोगुना** है। लेकिन उसके ऊर्ध्वाधर वेग में कोई परिवर्तन नहीं होता, क्योंकि वह गुरुत्व बल के अधीन गिर रहा है। सामान्यतः पूरा पिंड मध्य बिंदु से $\frac{R}{2}$ की क्षैतिज दूरी तय करता। चूंकि भाग 2 को उच्चतम बिंदु से भूमि तक गिरने में उतना ही समय लगता है, जितना मूल पिंड को लेकिन उसका क्षैतिज वेग मूल पिंड के वेग का दोगुना है अतः वह मध्य बिंदु से पिंड के मुकाबले दोगुनी क्षैतिज दूरी तय करेगा। अतः पिंड की आरंभिक स्थिति के सापेक्ष भाग 2 द्वारा चली गई क्षैतिज दूरी है :

$$\frac{R}{2} + 2 \times \frac{R}{2} = \frac{3R}{2} = \frac{3 \times v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} = \frac{3 \times (20\ \text{ms}^{-1})^2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ}{10\ \text{ms}^{-2}}$$

$$= 60\,\text{m}$$

10. चित्र 15.17 देखें। हम निकाय को द्वि-कण निकाय मानते हैं। कणों के कोणीय संवेग एक-दूसरे के समान्तर हैं। वे इस कागज़ के तल के लंबवत् हैं और उनकी दिशा हमारी ओर है। उनके परिमाण बराबर हैं। चूंकि कण वर्तुल गति कर रहे हैं, इसलिए निकाय का कुल आरंभिक कोणीय संवेग है

$$L = L_1 + L_2 = mvr + mvr = 2mvr$$

जहां $m = 80\,\text{kg}, \quad v = 5.0\,\text{ms}^{-1}$ और $r = \left(\frac{8.0}{2}\right)\text{m} = 4.0\,\text{m}.$

$$\therefore \quad L = 2(80\,\text{kg})\ (5.0\,\text{ms}^{-1})\,(4.0\,\text{m}) = 3.2 \times 10^3\ \text{kgm}^2\text{s}^{-1}$$

निकाय की कुल आरंभिक गतिज ऊर्जा दोनों कणों की गतिज ऊर्जाओं के योग के बराबर है।

$$\therefore \quad \text{K.E.} = 2\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = (80\,\text{kg})\ (5\,\text{ms}^{-1})^2 = 2.0 \times 10^3\ \text{J}$$

वे दोनों अंतरिक्ष यात्री एक-दूसरे के नज़दीक उन्हें जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश लग रहे बराबर लेकिन विपरीत आंतरिक बलों के कारण आते हैं। इसका अर्थ है कि पारस्परिक क्रिया बल केंद्रीय बल हैं। निकाय पर कोई बाह्य बल नहीं लग रहा। अतः, निकाय का कोणीय संवेग संरक्षित रहता है। उसका परिमाण $3.2 \times 10^3\ \text{kgm}^2\text{s}^{-1}$ है और दिशा पहले के जैसे ही रहती है।

मान लें कि V और R क्रमशः नई चाल और त्रिज्या हैं। तब कोणीय संवेग संरक्षण से : $2mVR = 3.2 \times 10^3\ \text{kgm}^2\text{s}^{-1}$ जहां $m = 80\,\text{kg}$ और

$$R = \frac{4.0\,\text{m}}{2} = 2.0\,\text{m}\ ।$$

$$\therefore V = \frac{3.2 \times 10^3\ \text{kgm}^2\text{s}^{-1}}{2(80\,\text{kg})\,(2.0\,\text{m})} = 10\,\text{ms}^{-1}$$

कुल नई गतिज ऊर्जा $\text{K.E.} = 2\left(\frac{1}{2}mV^2\right) = (80\,\text{kg})\ (10\,\text{ms}^{-1})^2 = 8.0 \times 10^3\text{J}$

अतः नई कुल गतिज ऊर्जा पहले की गतिज ऊर्जा से अधिक है।

भौतिक नियतांकों की तालिका

प्रतीक	राशि	मान
c	निर्वात में प्रकाश की चाल	3.00×10^{8} ms^{-1}
μ_0	मुक्त आकाश की चुंबकशीलता	1.26×10^{-6} NA^{-2}
ε_0	मुक्त आकाश की विद्युत्शीलता	8.85×10^{-12} $C^2 N^{-1} m^{-2}$
$1/4\pi\varepsilon_0$		8.99×10^{9} $Nm^2 C^{-2}$
e	प्रोटॉन का आवेश	1.60×10^{-19} C
$-e$	इलेक्ट्रॉन का आवेश	-1.60×10^{-19} C
h	प्लांक नियतांक	6.63×10^{-34} Js
$\hbar$	$h / 2\pi$	1.05×10^{-34} Js
m_e	इलेक्ट्रॉन का विराम द्रव्यमान	9.11×10^{-31} kg
$-e/m_e$	इलेक्ट्रॉन के आवेश और द्रव्यमान का अनुपात	-1.76×10^{11} Ckg^{-1}
m_p	प्रोटॉन का विराम द्रव्यमान	1.67×10^{-27} kg (1 amu)
m_n	न्यूट्रॉन का विराम द्रव्यमान	1.68×10^{-27} kg
a_0	बोर त्रिज्या	5.29×10^{-11} m
N_A	आवोगाद्रो नियतांक	6.02×10^{23} mol^{-1}
R	सार्वत्रिक गैस नियतांक	$8.31\ Jmol^{-1} K^{-1}$
k_B	बोल्ट्समान नियतांक	1.38×10^{-23} $J K^{-1}$
G	सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक	6.67×10^{-11} $Nm^2 kg^{-2}$

खगोल भौतिकीय आंकड़े

खगोलीय पिंड	द्रव्यमान (kg)	माध्य त्रिज्या (m)	पृथ्वी के केंद्र से माध्य दूरी (m)
सूर्य	1.99×10^{30}	6.96×10^{8}	1.50×10^{11}
चंद्रमा	7.35×10^{22}	1.74×10^{6}	3.84×10^{8}
पृथ्वी	5.97×10^{24}	6.37×10^{6}	0

BPHCT-131 के खंडों और इकाइयों की तालिका

पाठ्यक्रम :(BPHCT-131) यांत्रिकी 4 क्रेडिट

सदिश बीजगणित: सदिशों का ज्यामितीय और बीजगणितीय निरूपण; सदिश बीजगणित; अदिश और सदिश गुणनफल; किसी अदिश के सापेक्ष सदिश के अवकलज।

प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण : समघात प्रथम कोटि अवकल समीकरण (पृथक्करणीय और रैखिक प्रथम कोटि अवकल समीकरण)।

द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण : अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि समघात अवकल समीकरण।

गति के नियम : निर्देश तंत्र; न्यूटन के गति के नियम; सरल रैखिक गति; समतल में गति; एकसमान वर्तुल गति; त्रिविमीय गति।

न्यूटन के गति के नियमों के अनुप्रयोग : घर्षण; तनाव; गुरुत्वाकर्षण; कमानी-द्रव्यमान निकाय – हुक का नियम; वृत्ताकार कक्षा में उपग्रह की गति और उसके अनुप्रयोग; भूतुल्यकाली कक्षाएं; भूमंडलीय स्थिति निर्धारण प्रणाली (जी पी एस) की अवधारणा; भार और भारहीनता।

रैखिक संवेग और आवेग : संवेग संरक्षण; आवेग; आवेग-संवेग प्रमेय; रॉकेट की गति।

कार्य और ऊर्जा : कार्य और ऊर्जा; ऊर्जा संरक्षण; सीधा और द्विविम संघट्टन।

कोणीय गति की शुद्धगतिकी : कोणीय गति की शुद्धगतिकी, कोणीय विस्थापन, कोणीय वेग और कोणीय त्वरण; व्यापक कोणीय गति।

घूर्णी गति की गतिकी : बल आघूर्ण; जड़त्व आघूर्ण; घूर्णी गतिज ऊर्जा; कोणीय संवेग, कोणीय संवेग संरक्षण और उसके अनुप्रयोग।

केंद्रीय बल क्षेत्र के अधीन गति : केंद्रीय बल क्षेत्र में कण की गति (समतल में गति, कोणीय संवेग संरक्षण, समान-क्षेत्रफल नियम); केप्लर के नियम (केवल कथन)।

बहु-कण निकायों की गतिकी : बहु-कण निकायों की गतिकी, संहति केंद्र; असंतत द्रव्यमान बंटन के लिए संहति केंद्र निर्धारण; दृढ़ पिंड का संहति केंद्र (गुणात्मक विवरण)।

संरक्षण नियम : बहु-कण निकायों के लिए रैखिक संवेग, कोणीय संवेग और ऊर्जा संरक्षण।

सरल आवर्त गति : सरल आवर्त गति; सरल आवर्त गति का अवकल समीकरण और उसके हल; सरल आवर्त गति में गतिज ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा और कुल ऊर्जा और उनके कालिक माध्य।

आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण : रैखिकता और अध्यारोपण सिद्धांत, दो समान या असमान आवृत्ति वाले संरेख आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण; समान या असमान आवृत्ति वाले दो परस्पर लंबवत् आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण; लिसाजू की आकृतियाँ और उनके उपयोग।

अवमंदित दोलन : अवमंदित दोलन के लिए गति समीकरण और उसका हल (बिना व्युत्पत्ति के); प्रबल, क्रांतिक और दुर्बल अवमंदन के लिए हलों का गुणात्मक विवरण; अवमंदन के अभिलक्षण – लघुगणकीय अपक्षय, विश्रांति काल और गुणता कारक।

तरंग गति : गुणात्मक विवरण (तरंग निर्माण और संचरण; तरंग गति का वर्णन, तरंग वेग, आवृत्ति और तरंग दैर्घ्य; तरंग गति का गणितीय वर्णन)।

शब्दावली

कोण	Angle	भूमध्य रेखा	Equator
कोणीय त्वरण	Angular acceleration	साम्यावस्था	Equilibrium
कोणीय विस्थापन	Angular displacement	बल	Force
कोणीय संवेग	Angular momentum	निर्देश तंत्र	Frame of reference
कोणीय गति	Angular motion	भूस्थावर	Geostationary
कोणीय स्थिति	Angular position	भूतुल्यकाली	Geosynchronous
कोणीय चाल	Angular speed	गुरुत्वाकर्षण	Gravitation
कोणीय वेग	Angular velocity	गुरुत्वीय	Gravitational
वामावर्त	Anti-clockwise	गुरुत्व	Gravity
रविउच्च	Aphelion	क्षैतिज	Horizontal
भूमिउच्च	Apogee	अतिपरवलय	Hyperbola
आकर्षण बल	Attractive force	अत्यल्प	Infinitesimal
औसत	Average	तात्क्षणिक	Instantaneous
अक्ष	Axis	पारस्परिक क्रिया	Interaction
युग्म निकाय	Binary system	अंतराल	Interval
परिबद्ध	Bounded	व्युत्क्रम वर्ग	Inverse square
कार्तीय निर्देशांक	Cartesian coordinates	शुद्धगतिकी	Kinematics
केन्द्रीय बल	Central force	गतिज ऊर्जा	Kinetic energy
संहति केन्द्र	Centre of mass	रैखिक	Linear
अभिकेन्द्र	Centripetal	परिमाण	Magnitude
परिवर्तन	Change	बहु-कण निकाय	Many-particle system
वर्तुल गति	Circular motion	महत्तम	Maximum
दक्षिणावर्त	Clockwise	यांत्रिक ऊर्जा	Mechanical energy
संघट्टन	Collision	न्यूनतम	Minimum
क्रम विनिमेय नियम	Commutative law	जड़त्व आघूर्ण	Moment of inertia/ Rotational inertia
घटक	Component		
अवधारणा	Concept	असंरक्षी बल	Non-conservative force
संरक्षण	Conservation	असमान गति	Non-uniform motion
संरक्षी बल	Conservative force	एकविम	One-dimensional
अचर	Constant	कक्षा	Orbit
वामावर्त	Counter-clockwise	कक्षीय	Orbital
बल-युग्म	Couple	मूल बिंदु	Origin
वक्र	Curve	परवलय	Parabola
गतिकी	Dynamics	दोलक	Pendulum
दीर्घवृत्त	Ellipse	भूमिनीच	Perigee
ऊर्जा	Energy	रविनीच	Perihelion

लंबवत्	Perpendicular	स्पर्शरेखा	Tangential
समतल ध्रुवी निर्देशांक	Plane polar coordinates	त्रिविम	Three-dimensional
स्थिति सदिश	Position vector	आवर्तकाल	Time period
त्रिज्य	Radial	बल आघूर्ण	Torque
समानीत द्रव्यमान	Reduced mass	स्थानान्तरण	Translational
संदर्भ अक्ष	Reference axis	अनुप्रस्थ	Transverse
आपेक्षिक निर्देशांक	Relative coordinate	वर्तन बिन्दु	Turning point
परिक्रमण	Revolution	द्वि-पिंड निकाय	Two-body system
दक्षिणहस्त नियम	Right-hand rule	एकसमान गति	Uniform motion
घूर्णन	Rotation	एकक सदिश	Unit vector
घूर्णी	Rotational	अस्थायी साम्यावस्था	Unstable equilibrium
उपग्रह	Satellite	चर बल	Variable force
अदिश गुणनफल	Scalar product	सदिश गुणनफल	Vector product
सार्थक अंक	Significant digits	ऊर्ध्वाधर	Vertical
चाल	Speed	कार्य	Work
कमानी बल	Spring force	कार्य-ऊर्जा प्रमेय	Work-energy theorem
स्थायी साम्यावस्था	Stable equilibrium		

नोट

नोट