इग्नू
जन-जन का
विश्वविद्यालय
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
विज्ञान विद्यापीठ

खंड

2

यांत्रिकी की बुनियादी अवधारणाएं

इकाई 5
न्यूटन के गति के नियम और बल की अवधारणा 7

इकाई 6
न्यूटन के गति के नियमों को लागू करना 31

इकाई 7
गुरुत्वाकर्षण 63

इकाई 8
रैखिक संवेग और आवेग 85

इकाई 9
कार्य और गतिज ऊर्जा 101

इकाई 10
स्थितिज ऊर्जा और ऊर्जा का संरक्षण 127

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति

प्रो. अजय घटक (सेवानिवृत्त)
आई.आई.टी. दिल्ली
नई दिल्ली

डा. नरेश कुमार (सेवानिवृत्त)
हिन्दू कॉलेज,
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

डा. प्रगति अशधीर
हिन्दू कॉलेज,
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

प्रो. सुरेश गर्ग
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय, नई दिल्ली

डा. शुभलक्ष्मी लाम्बा
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय, नई दिल्ली

प्रो. विजयश्री
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
नई दिल्ली

प्रो. सुदीप रंजन झा
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
नई दिल्ली

प्रो. एस. गोखले
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
नई दिल्ली

डा. संजय गुप्ता
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
नई दिल्ली

खंड निर्माण दल

डा. शुभलक्ष्मी लाम्बा (इकाई 5 से 10)
विज्ञान विद्यापीठ
इग्नू, नई दिल्ली

प्रो. विजयश्री (इकाई 5 से 10)
विज्ञान विद्यापीठ
इग्नू, नई दिल्ली

पाठ्यक्रम समन्वयक : डा. शुभलक्ष्मी लांबा और प्रो. सुदीप रंजन झा

खंड मुद्रण

सुनील कुमार
सहायक कुलसचिव (प्रकाशन), इग्नू

अगस्त, 2019

© इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय, 2019

अस्वीकरण : इस पाठ्यक्रम में इंटरनेट से ली गई किसी भी सामग्री का उपयोग केवल शैक्षिक उद्देश्यों के लिए किया जा रहा है, व्यावसायिक उद्देश्यों के लिए नहीं।

ISBN: 978-93-89499-96-4

सर्वाधिकार सुरक्षित। इस कार्य का कोई भी अंश इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की लिखित अनुमति लिए बिना मिमियोग्राफ अथवा किसी अन्य साधन से पुनः प्रस्तुत करने की अनुमति नहीं है।

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय के पाठ्यक्रमों के विषय में और अधिक जानकारी विश्वविद्यालय के कार्यालय मैदान गढ़ी, नई दिल्ली–110 068 और इग्नू की वेबसाइट www.ignou.ac.in से प्राप्त की जा सकती है।

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की ओर से प्रो. पूर्णिमा मितल, निदेशक, विज्ञान विद्यापीठ द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित।
मुद्रकः गीता ऑफसेट प्रिंटर्स प्रा. लि., सी–90, ओखला औद्योगिक क्षेत्र, फेज़–1, नई दिल्ली–110020

विषय सूची

खंड एवं इकाई शीर्षक 1
श्रेय पृष्ठ 2
विषय सूची 3

खंड 2 : यांत्रिकी की बुनियादी अवधारणाएं 5

इकाई 5 न्यूटन के गति के नियम और बल की अवधारणा 7

5.1 परिचय 8
5.2 न्यूटन का गति का पहला नियम 9
5.2.1 जड़त्व की अवधारणा 11
5.2.2 बल 12
5.2.3 जड़त्वीय निर्देश तंत्र 14
5.3 न्यूटन का गति का दूसरा नियम 16
5.3.1 बलों के अध्यारोपण का नियम 18
5.3.2 द्रव्यमान 18
5.4 न्यूटन का गति का तीसरा नियम 22
5.5 सारांश 26
5.6 अंत में कुछ प्रश्न 27
5.7 हल और उत्तर 28

इकाई 6 न्यूटन के गति के नियमों को लागू करना 31

6.1 परिचय 32
6.2 हमारे चारों ओर मौजूद बल 32
6.2.1 अभिलंब बल 33
6.2.2 घर्षण बल 34
6.2.3 तनाव बल 36
6.2.4 कमानी बल 37
6.2.5 प्रकृति में मूलभूत बल 38
6.3 न्यूटन के गति के नियमों को लागू करना 39
6.3.1 बल-निर्देशक आरेख खींचना 41
6.3.2 साम्यावस्था में स्थित पिंड 42
6.3.3 पिंड जो साम्यावस्था में नहीं हैं 46
6.4 एकसमान वर्तुल गति 48
6.5 सारांश 56
6.6 अंत में कुछ प्रश्न 57
6.7 हल और उत्तर 58

इकाई 7 गुरुत्वाकर्षण 63

7.1 परिचय 64
7.2 गुरुत्वाकर्षण बल 65
7.2.1 अध्यारोपण का नियम 68
7.2.2 गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र 70
7.3 गुरुत्व बल 70
7.3.1 ऊंचाई, गहराई और अक्षांश के साथ g में परिवर्तन 71
7.3.2 गुरुत्व के अधीन ऊर्ध्वाधर वर्तुल गति 73

7.4 भार 74
7.4.1 भारहीनता 76
7.5 सारांश 79
7.6 अंत में कुछ प्रश्न 80
7.7 हल और उत्तर 81
इकाई 8 रैखिक संवेग और आवेग 85
8.1 परिचय 86
8.2 रैखिक संवेग 86
8.2.1 रैखिक संवेग संरक्षण 87
8.2.2 रैखिक संवेग और द्रव्यमान प्रवाह 89
8.2.3 रॉकेट की गति 90
8.3 आवेग 93
8.4 सारांश 97
8.5 अंत में कुछ प्रश्न 97
8.6 हल और उत्तर 98
इकाई 9 कार्य और गतिज ऊर्जा 101
9.1 परिचय 102
9.2 कार्य 103
9.2.1 कार्य-रहित बल 104
9.2.2 धनात्मक और ऋणात्मक कार्य 105
9.3 कार्य-ऊर्जा प्रमेय और गतिज ऊर्जा 108
9.4 परिवर्तनशील बल द्वारा किया गया कार्य 113
9.5 शक्ति 118
9.6 सारांश 120
9.7 अंत में कुछ प्रश्न 122
9.8 हल और उत्तर 123
इकाई 10 स्थितिज ऊर्जा और ऊर्जा का संरक्षण 127
10.1 परिचय 128
10.2 संरक्षी बल 129
10.3 स्थितिज ऊर्जा 131
10.3.1 स्थितिज ऊर्जा और स्थायित्व 136
10.4 यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण 137
10.5 ऊर्जा संरक्षण नियम 142
10.6 सारांश 148
10.7 अंत में कुछ प्रश्न 149
10.8 हल और उत्तर 151
भौतिक नियतांकों की तालिका 155
BPHCT-131 के खंडों और इकाइयों की सूची 156
पाठ्यक्रम : यांत्रिकी **(BPHCT-131)** 157
शब्दावली 158

खंड 2 : यांत्रिकी की बुनियादी अवधारणाएं

इस पाठ्यक्रम के खंड 1 में आपने सदिश बीजगणित और साधारण अवकल समीकरणों की वे अवधारणाएं सीखी हैं जिनका उपयोग आप इस पाठ्यक्रम में और भौतिकी के बाद में आने वाले पाठ्यक्रमों में करेंगे। इस खंड में आप सबसे पहले पिंडों की गति का अध्ययन करेंगे और **शुद्धगतिकी** (kinematics) और **गतिकी** (dynamics) की उन बुनियादी अवधारणाओं को दोहराएंगे जिन्हें आपने स्कूल के भौतिकी के पाठ्यक्रम में पढ़ा है। इनमें **न्यूटन के गति के नियम और बल, रैखिक संवेग, आवेग, कार्य और ऊर्जा** की अवधारणाएं शामिल हैं। ये अवधारणाएं हमारे आस-पास की असूक्ष्म वस्तुओं की गति और आकाशीय पिंडों की गति पर लागू होती हैं। उदाहरण के लिए, हम इन अवधारणाओं का उपयोग करके विभिन्न वस्तुओं जैसेकि बारिश की बूंदों, गिरती हुई गेंदों, पैराशूटों, उपग्रहों और ग्रहों आदि की गति को समझ सकते हैं। इन अवधारणाओं के विविध क्षेत्रों में अनेक (प्रत्यक्ष और अप्रत्यक्ष) अनुप्रयोग हैं, उदाहरण के लिए, यातायात (साइकिल, कार, बस, रेलगाड़ी, आदि की गति), स्वास्थ्य (टूटी हुई हड्डी का इलाज, इन्ट्रावेनस तरल देना, फेफड़ों से तरल निकालना, आदि), मनोरंजन पार्क (स्लाइड, झूला, मेरी-गो-राउंड), आदि में।

आपने इनमें से अधिकतर अवधारणाओं को स्कूल की भौतिकी में पढ़ा है। लेकिन इस खंड में दी गई कुछ अवधारणाओं को समझाने का तरीका आपके लिए नया हो सकता है। अतः, आप इन अवधारणाओं को ध्यान से पढ़ें। आपको इस खंड की हर इकाई में दिए गए सभी उदाहरणों, बोध प्रश्नों और अंत के प्रश्नों को खुद हल करने में पर्याप्त समय लगाना चाहिए। इस खंड में कुल 6 इकाइयां हैं।

इकाई 5 में आप **न्यूटन के गति के नियमों** को दोहराएंगे जिनकी मदद से हम पिंडों की गति की व्याख्या कर सकते हैं। आप **बल, द्रव्यमान** और **रैखिक संवेग** की अवधारणाओं को समझेंगे जो न्यूटन के गति के नियमों द्वारा एक दूसरे से संबंधित हैं। इस इकाई में आप जानेंगे कि न्यूटन के गति के नियमों द्वारा गति के कारणों और बल की अवधारणा के बारे में बनी समझ, अपने दैनिक अनुभवों से बनी हमारी सामान्य समझ से कितनी अलग है। आप इन अवधारणाओं को सही तरीके से लागू करना सीखेंगे। इस इकाई में हम **जड़त्वीय निर्देश तंत्र** की अवधारणा भी समझाएंगे। आप अपने चारों ओर रोज़ाना घटने वाली परिघटनाओं में मौजूद सरल निकायों पर इन अवधारणाओं के दिलचस्प अनुप्रयोग भी जानेंगे। उदाहरण के लिए, आप जानेंगे कि हम गाड़ियों में सीट बैल्ट का इस्तेमाल क्यों करते हैं, मेज़ पर रखी हल्की किताब के मुकाबले किताबों की एक विशाल अल्मारी को विरामावस्था से हिलाना क्यों मुश्किल होता है, टमाटर के सॉस की बोतल से सॉस को निकालने के लिए हम बोतल को झटका क्यों देते हैं, हम तेज़ हवाओं वाले मौसम में स्थायी रफ्तार से पाल वाली नाव कैसे चला पाते हैं, आदि।

इकाई 6 में हम न्यूटन के गति के नियमों को सरल रेखा और समतल में गतिमान पिंडों पर लागू करेंगे। आप अपने चारों ओर मौजूद भिन्न बलों जैसेकि अभिलंब बल, घर्षण बल, तनाव बल और कमानी बल के बारे में पढ़ेंगे। साथ ही, आप पिंड पर लगाए गए नेट बल की गणना करना सीखेंगे और भिन्न पिंडों की गति के लिए न्यूटन के द्वितीय नियम द्वारा दिए गए गति के समीकरण को हल करना भी सीखेंगे। आप **बलों की साम्यावस्था** की अवधारणा दोहराएंगे जिसके अनेक यांत्रिक निकायों में अनुप्रयोग हैं। तो इस इकाई में आप जानेंगे कि हम गीले फ़र्शों पर या बर्फ़ पर क्यों फिसल जाते हैं, एक झूला पुल की रस्सी क्षैतिज न होकर वक्राकार क्यों होती है, सड़कों के मोड़ों को क्षैतिज से ढलान पर क्यों बनाया जाता है, आदि।

इकाई 7 में आप **गुरुत्वाकर्षण नियम** के बारे में पढ़ेंगे और समझेंगे कि यह नियम विस्तारित पिंडों पर कैसे लागू किया जा सकता है। आप ऊर्ध्वाधर तल में एकसमान वर्तुल गति पर इसके अनुप्रयोग के बारे में भी पढ़ेंगे। साथ ही, आप पृथ्वी पर गुरुत्व बल और उन कारकों के बारे में सीखेंगे जिनके कारण पृथ्वी पर और उसके चारों ओर भिन्न बिंदुओं पर गुरुत्वीय त्वरण का मान बदलता है। आप **भारहीनता** की अवधारणा के बारे में भी पढ़ेंगे। इस इकाई में आप विविध अनुप्रयोगों के बारे में जानेंगे जैसेकि भूतुल्यकाली उपग्रहों

और पृथ्वी की सतह से उनकी ऊंचाइ ज्ञात करने के बारे में, क्रीड़ा स्थलों में ऊध्वाधर वृत्त में गतिमान विशाल झूलों की न्यूनतम चाल के बारे में ताकि उनमें बैठे लोग झूलों से गिरें नहीं। आप यह भी जानेंगे कि अंतरिक्ष यानों में अंतरिक्ष यात्री तैरते क्यों हैं, आदि। **इकाई 8** में हम **रैखिक संवेग** और **आवेग** की अवधारणाएं और **रैखिक संवेग संरक्षण नियम** दोहराएंगे। आप जानेंगे कि टकराने वाली गाड़ियों की चालों की गणना कैसे की जा सकती है, रॉकेट में अतिरिक्त चरण (stage) लगा कर उनकी चाल कई गुना कैसे बढ़ाई जा सकती है, जब आप सीमेंट के सख़्त फ़र्श पर गिरते हैं तो नरम गद्दे पर गिरने के मुकाबले आपको ज़्यादा चोट क्यों लगती है, आदि।

इकाइयों 9 और **10** में हम **कार्य** और **ऊर्जा** की अवधारणाएं दोहराएंगे। **इकाई 9** में हम **अचर बल द्वारा किए गए कार्य** और **गतिज ऊर्जा** की अवधारणाएं दोहराएंगे। साथ ही, हम **परिवर्तनशील बलों द्वारा किए गए कार्य** और **कार्य-ऊर्जा प्रमेय** (जो न्यूटन के द्वितीय गति के नियम का ही एक अन्य स्वरूप है) और **शक्ति** की अवधारणाओं की चर्चा भी करेंगे। आप जानेंगे कि गाड़ी चलाने के लिए गति सीमा क्यों होती है, सड़क पर चलने वाले हर वाहन चालक को अपने से ठीक आगे वाली गाड़ी से एक न्यूनतम दूरी क्यों रखनी चाहिए, वायु प्रतिरोध के विरुद्ध साइकिल की अचर चाल बनाए रखने के लिए कितनी शक्ति लगानी होती है, आदि। **इकाई 10** में हम **स्थितिज ऊर्जा** की अवधारणा समझाएंगे और इसके ज़रिये से **ऊर्जा संरक्षण नियम** तक पहुंचेंगे। ये अवधारणाएं महत्त्वपूर्ण हैं क्योंकि इनका उपयोग कर हम जटिल यांत्रिक परिघटनाओं को आसानी से समझ सकते हैं जिन पर न्यूटन के गति के नियम लागू करना कठिन होता है। उदाहरण के लिए, हम तरण ताल में प्रवेश करते समय तैराक की चाल, पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण से किसी पिंड का पलायन वेग, खुरदुरे फ़र्श पर किसी बक्स के फिसलने पर ऊष्मा के रूप में रूपांतरित ऊर्जा ज्ञात कर सकते हैं, आदि।

अगले खंड में, आप कोणीय/घूर्णी गति की शुद्धगतिकी और गतिकी और केंद्रीय बलों के अधीन गति के बारे में पढ़ेंगे। साथ ही, इस खंड में आपने जिन अवधारणाओं को पढ़ा है, उन्हें आप बहु-कण निकायों की गति पर लागू करेंगे।

हमें आशा है कि आपको इस खंड में समझाई गई यांत्रिकी की बुनियादी अवधारणाओं और हमारे चारों ओर की स्थितियों में इनके अनुप्रयोगों को पढ़ने में आनंद आयेगा। हमारी शुभकामनाएं आपके साथ हैं।

टमाटर की सॉस निकालने के लिए बोतल को क्यों हिलाना पड़ता है? उत्तर जानने के लिए, इस इकाई को पढ़ें!

इकाई 5

न्यूटन के गति के नियम और बल की अवधारणा

इकाई की रूपरेखा

5.1 परिचय
उद्देश्य

5.2 न्यूटन का गति का पहला नियम
जड़त्व की अवधारणा
बल
जड़त्वीय निर्देश तंत्र

5.3 न्यूटन का गति का दूसरा नियम
बलों के अध्यारोपण का नियम
द्रव्यमान

5.4 न्यूटन का गति का तीसरा नियम

5.5 सारांश

5.6 अंत में कुछ प्रश्न

5.7 हल और उत्तर

अध्ययन निर्देशिका

इस इकाई में आप **न्यूटन के गति के नियम**, और **बल** और **द्रव्यमान** की अवधारणाएं पढ़ेंगे। इन अवधारणाओं को समझने के लिए आपको **सदिश बीजगणित, और फलनों के अवकलन और समाकलन की अवधारणाएं अच्छी तरह आनी चाहिए जो आपने खंड 1 की इकाइयों 1 और 2 तथा स्कूली गणित में पढ़ी हैं**। इसलिए इस इकाई को पढ़ने से पहले आप इन अवधारणाओं को दोहरा लें। आपने स्कूल में न्यूटन के गति के नियम भी पढ़े हैं। इन्हें आप इस इकाई में दोहराएंगे। लेकिन इस इकाई में हम **न्यूटन के गति के नियमों** और **बल की अवधारणा** की **सही समझ** बनाने पर ध्यान देंगे। इस इकाई में आप जानेंगे कि **गति के कारणों और बल की अवधारणा के बारे में न्यूटन के गति के नियमों द्वारा बनी समझ, हमारी सामान्य समझ और दैनिक अनुभवों से एकदम अलग हट कर** है। फिर भी इन नियमों की विशेषता यह है कि हम अपने चारों ओर के **सभी पिंडों की गति** इनकी मदद से समझ सकते हैं। यह बात आप बेहतर समझ पायेंगे अगर आप इस इकाई में दिए गए सभी सवालों को खुद हल करें। इन्हें हल करने में 5 से 10 मिनट तक का समय लग सकता है। अगर आप पाते हैं कि इतने समय में आप इनके जवाब नहीं दे पा रहे या आपके जवाब सही नहीं हैं तो आप इन अवधारणाओं को दोबारा समझें और अपनी भ्रांतियों का निवारण करें। सिर्फ़ इसी तरह आप इस इकाई में दी गई अवधारणाओं की एक सही समझ बना पाएंगे।

"मुझे नहीं पता कि दुनिया मेरे बारे में क्या सोचती है; पर अपनी नज़रों में मैं सागर किनारे खेल रहे बच्चे जैसा ही हूँ जो कभी-कभी कोई सुंदर सीपी या बेहतर पत्थर खोज लेता है, जबकि उसके सामने सत्य का अपार महासागर लहरा रहा है जिसमें अभी बहुत कुछ खोजना बाकी है।"

आइज़क न्यूटन

5.1 परिचय

कणों की गति में परिवर्तन के कारणों के अध्ययन को गतिकी (dynamics) कहा जाता है।

स्कूल की भौतिकी में आपने **सरल रेखा** और **समतल में गतिमान कणों के लिए शुद्धगतिकी की समीकरणें पढ़ी हैं**। आपने **गति का वर्णन** करने के लिए ज़रूरी अवधारणाएं (जैसेकि स्थिति, विस्थापन, वेग और त्वरण) भी सीखी हैं। ये अवधारणाएं हमें बताती हैं कि किसी समय पर कोई पिंड कितनी तेज़ी से चल रहा है या वह दिए समयांतराल में कितना धीमा पड़ जाता है या तेज़ चलता है (शुद्धगतिकी)। पर आपको यह भी समझना है कि किसी कण की चाल तेज़ या कम **क्यों** होती है। **किसी कण की चाल या गति की दिशा में परिवर्तन किस कारण से होता है**? इस अध्ययन को हम **गतिकी** (dynamics) कहते हैं।

भौतिकी के इतिहास में कुछ महानतम व्यक्तियों ने इन सवालों के जवाब खोजे हैं : इनमें से एक थे गैलीलियो जिन्होंने इनके (आंशिक रूप से) जवाब खोजे और दूसरे थे न्यूटन जिन्होंने (मात्र 22 वर्ष की उम्र में) इन सवालों के संपूर्ण जवाब खोज लिए थे। न्यूटन ने गैलीलियो के विचारों को आगे विकसित करते हुए **न्यूटनी यांत्रिकी** प्रस्तुत की। इन दोनों वैज्ञानिकों के योगदान की सबसे महत्त्वपूर्ण विशेषता यह है कि वे अपने दैनिक अनुभवों पर आधारित समझ से परे, एकदम अलग हट कर उन अनुभवों के बारे में सोच पाए और एक नयी दृष्टि से उन पर विचार किया। यही बातें उनकी रचनात्मक कल्पना शक्ति और प्रतिभा की परिचायक हैं।

उदाहरण के लिए, हमें अपने अनुभव से यह दिखता है कि जब हम किसी पिंड को अपनी ओर खींचते या धक्का देते हैं तो उसका वेग बदल जाता है : आप किसी खिलौना गाड़ी को खींच कर या धक्का देकर विरामावस्था से चलाते हैं, किसी गेंद या शटलकॉक की चाल और दिशा उसे बल्ले या रैकेट से मार कर बदलते हैं। जब बस का ड्राइवर उस पर ब्रेक लगाता है तो बस धीमी पड़ जाती है। लेकिन बहुत से पिंडों की चाल या दिशा बिना किसी धक्के या ब्रेक के भी बदल जाती है। जैसे कि कंकरीट के फ़र्श पर लुढ़क रही गेंद कुछ देर बाद अपने-आप रुक जाती है; अगर आप साइकिल चलाना बंद कर देते हैं तो वह कुछ देर में अपने-आप रुक जाती है; मुक्त रूप से गिर रहे पिंडों की चाल बिना कोई धक्का दिए बढ़ जाती है, आदि। कभी-कभी आप कितना ही धक्का दें या खींचें तो भी पिंड की स्थिति में परिवर्तन नहीं कर सकते जैसे कि एक दीवार को आप कितनी ही ज़ोर से धक्का दें, उसे हिला नहीं सकते।

ये सभी हमारे रोज़ाना के अनुभव हैं। बचपन से ही हम चलते, दौड़ते और ऐसे बहुत से काम करते रहे हैं जिनमें गति शामिल होती है जैसे गेंद फेंकना, साइकिल चलाना, कुर्सी खिसकाना, आदि। इस प्रक्रिया में गति और उसके कारणों के बारे में हमारी एक सामान्य समझ बन जाती है। भौतिकी पढ़ते समय हमें इसी सामान्य समझ को बदलना होता है।

गैलीलियो और न्यूटन ने इन अनुभवों को एक नई दृष्टि से समझा और **ऐसे नियमों** का विकास किया जो कणों के वेग में **परिवर्तन** यानी उनके त्वरण को बाह्य कारणों से संबंधित करते हैं। ये नियम सभी वृहत् वस्तुओं पर यानी पृथ्वी पर स्थित वृहत् वस्तुओं से लेकर ग्रहों और सितारों जैसे आकाशीय पिंडों तक की गति पर लागू होते हैं।

पिंड की गतिकी को समझने के लिए हमें **बल** और **द्रव्यमान** की अवधारणाएं समझनी होंगी। ये अवधारणाएं न्यूटन के गति के नियमों द्वारा परिभाषित होती हैं। साथ ही, एक और भौतिक राशि, **रैखिक संवेग**, की अवधारणा भी इन नियमों द्वारा दी जाती है। इस

इकाई में हम **न्यूटन के गति के नियम** और **बल**, **द्रव्यमान** और **रैखिक संवेग** की अवधारणाएं दोहराएंगे। साथ ही, हम **जड़त्वीय निर्देश तंत्र** की अवधारणा भी समझाएंगे। आप सरल स्थितियों पर न्यूटन के गति के नियम लागू करना भी सीखेंगे। अगली इकाई में आप अपने चारों ओर मौजूद विभिन्न बलों की जानकारी हासिल करेंगे। आप बहुत सी स्थितियों पर, जिनमें ये बल लगते हैं, न्यूटन के गति के नियम लागू करना भी सीखेंगे।

याद रखें : इस इकाई को पढ़ते हुए आप हमेशा **ध्यान रखें** कि न्यूटनी यांत्रिकी की अवधारणाएं वास्तविक संसार में घट रही भौतिक घटनाओं का एक **निदर्श** (**मॉडल**) प्रस्तुत करती हैं। न्यूटनी संसार में, सभी वस्तुएं **बिंदु कणों** द्वारा निरूपित की जाती हैं। लेकिन वास्तविक संसार में बिंदु कण जैसा कुछ होता ही नहीं है। बिंदु कण सिर्फ़ एक **मॉडल** या अवधारणा है, जिसे न्यूटनी यांत्रिकी में गति की व्याख्या के लिए **ईजाद** किया गया है। इस मायने में बिंदु कणों वाला यह न्यूटनी संसार एक **आदर्श संसार** है जिसका **निर्माण वास्तविक भौतिक संसार के वर्णन के लिए** किया गया है। न्यूटनी यांत्रिकी को जिस रूप में हम आज पढ़ते हैं, उसे इस रूप में न्यूटन ने भी पेश नहीं किया था। अनेक भौतिक वैज्ञानिकों ने न्यूटन की अवधारणाओं को विकसित किया और इनका विस्तार किया।

साथ ही, ध्यान रहे कि **न्यूटन के गति के नियम संपूर्ण प्रकृति पर लागू नहीं होते**। न्यूटनी यांत्रिकी परमाणुओं, अणुओं और नाभिकों के संसार का वर्णन करने में असफल है (जिसका वर्णन **क्वांटम यांत्रिकी** द्वारा किया जाता है)। यह उन पिंडों की गति पर भी लागू नहीं होती जो प्रकाश की चाल के निकटवर्ती चालों से गतिमान होते हैं (जिनका वर्णन **विशिष्ट आपेक्षिकता सिद्धांत** द्वारा किया जाता है)।

ध्यान दें

अपने लिखित कार्य में आप सदिश राशि को ऊपर तीर लगा कर इस प्रकार लिखें : $\vec{r}$ । एकक सदिश को इस प्रकार लिखें : $\hat{r}$ ।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- न्यूटन के गति के नियमों के आधार पर बल और द्रव्यमान की अवधारणाएं समझा सकेंगे;
- शब्दों, चित्रों और समीकरणों द्वारा किसी दिए बल के अधीन एक कण की गति का वर्णन कर सकेंगे; और
- सरल स्थितियों पर न्यूटन के गति के नियम लागू कर सकेंगे।

5.2 न्यूटन का गति का पहला नियम

इस नियम की समझ बनाने के लिए, आप नीचे दी गई गतिविधिया करें और उनमें दिए गए सवालों पर विचार करें।

गतिविधि

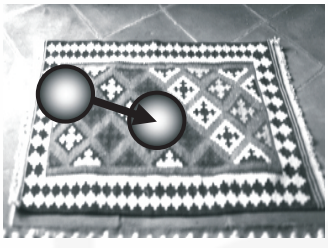
वस्तुओं की गति का क्या कारण है?

क) किसी वस्तु (गेंद, कंचा, डिब्बा, कार आदि) को फ़र्श पर धक्का दें और जब वह गतिमान हो तो उसे एक दूसरी दिशा में धक्का दें। वस्तु की गति में क्या परिवर्तन होता है?

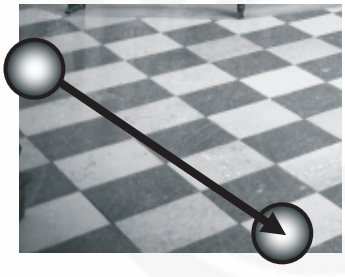
ख) किसी खुरदरी सतह पर जैसेकि दरी या कालीन पर एक गेंद या कंचे को धक्का दें। उसी को एक चिकनी सतह जैसेकि चिकने संगमरमर, टाइलों वाली सतह पर या फ़र्श पर रखे क्षैतिज शीशे पर धक्का दें। इन सभी स्थितियों में आपको पिंड की गति में क्या अंतर दिखाई देता है?

ग) एक पत्थर को डोरी से बांध कर उसे क्षैतिज वृत्त में तेज़ी से घुमाएं। किसी क्षण पर डोरी को छोड़ दें। उस क्षण के बाद पत्थर का पथ क्या हो जाता है? इस परिणाम को याद रखें क्योंकि अंत में दिए गए प्रश्न 3 का उत्तर देने के लिए आप इसका उपयोग करेंगे।

ऊपर दी गई गतिविधियों को करते समय आपने क्या पाया? क्या आपने यह निष्कर्ष निकाला कि किसी वस्तु को गति देने के लिए उसे 'धक्का देना' पड़ता है या 'खींचना' पड़ता है? यह समझ हमारे दैनिक अनुभवों से जुड़ी है और इसलिए हमें ठीक लगती है। उदाहरण के लिए, कोई भी गाड़ी तभी चलती है जब बैल या घोड़ा उसे खींचने लगता है; जब वह जानवर उसे खींचना बंद कर देता है तो गाड़ी रुक जाती है। इस तरह हमारी यह धारणा बनती है कि **गति के लिए बल ज़रूरी होता है**।



(क)



(ख)

चित्र 5.1: घर्षण का प्रभाव – क) एक खुरदरे फ़र्श की तुलना में ख) एक चिकने फ़र्श पर गेंद ज़्यादा दूरी तय करती है।

हमारे दैनिक अनुभवों से ठीक इसी तरह की सोच बनती है। गैलीलियो और न्यूटन से पहले अधिकतर वैज्ञानिक मानते थे कि *किसी भी वस्तु की नैसर्गिक प्रकृति विरामावस्था में बने रहने की होती है।* उसे गति देने के लिए उसे धक्का देना या खींचना होता है यानी गति के लिए एक बाह्य कारण (जिसे बल कहा जाता है) ज़रूरी होता है। कोई भी गतिमान वस्तु रुक जाती है जब उसे गतिमान बनाए रखने के लिए उस पर कोई बल नहीं लग रहा होता।

यह सोच तब बदली जब गैलीलियो ने नत समतलों पर वस्तुओं की गति से जुड़े अनेक **प्रयोग** किए। गैलीलियो ने अलग-अलग समतल लिए जिनमें से कुछ क्षैतिज थे और कुछ अलग अलग कोणों पर रखे गए नत समतल थे। इनमें से कुछ की सतह खुरदुरी थी और कुछ की चिकनी। गैलीलियो ने इन सभी तरह के समतलों पर वस्तुओं को अलग-अलग आरंभिक चालों से लुढ़काया। गैलीलियो और बाद को न्यूटन ने ऐसे दैनिक अनुभवों और इन प्रेक्षणों की व्याख्या के लिए एक अन्य बल (**घर्षण बल**) की अवधारणा दी।

ऊपर दी हुई गतिविधि (ख) में आपने यह भी देखा होगा कि जैसे-जैसे सतह चिकनी होती गई वैसे-वैसे गेंद या कंचे द्वारा चली गई दूरी भी बढ़ती गई। गैलीलियो ने कहा कि **पिंडों की चाल घर्षण बल के कारण कम होती है**। यदि हम घर्षण का प्रभाव कम कर पाते हैं तो पिंड की रफ़्तार उतनी जल्दी धीमी नहीं पड़ती और वह काफ़ी देर बाद रुकता है (चित्र 5.1)। अगर किसी तरह घर्षण बल शून्य हो जाए तो क्या होगा? **तब तो गेंद को हमेशा चलते रहना चाहिए**।

गैलीलियो ने, जिन्होंने सबसे पहले घर्षण की अवधारणा पेश की, इसी तर्क का सहारा लिया। उनका तर्क था कि यदि नत समतलों के उनके प्रयोगों में घर्षण शून्य हो जाए तो उन पर लुढ़कने वाली गेंद सदा ही एक ही वेग से चलती रहेगी। इन प्रयोगों और तर्कों का निष्कर्ष यह था : **एकसमान गति के लिए बल की आवश्यकता नहीं होती।**

अब आप पूछ सकते हैं : हम यह कैसे तय करें कि गति के लिए गैलीलियो की यह अवधारणा बेहतर है या पहले वाली अवधारणा? पहले के विचार (कि गति के लिए बल की आवश्यकता होती है) मानने वाले व्यक्ति अलग-अलग स्थितियों की अलग-अलग तरह से व्याख्या करेंगे। गैलीलियो और न्यूटन का यह विचार (कि **एकसमान गति के लिए बल की आवश्यकता नहीं होती**) बहुत सारे अनुभवों और प्रयोगों की एक साथ व्याख्या कर सकता है। वास्तव में, **प्रयोगों द्वारा ही हम बेहतर और कम बेहतर सिद्धांतों में फ़र्क कर सकते हैं**। गैलीलियो की प्रतिभा इस बात में थी कि उन्होंने एक ऐसी स्थिति की कल्पना की जिसमें कोई भी बल नहीं लग रहा या पारस्परिक क्रिया (interaction), खींचना, धक्का देना नहीं हो रहे और फिर देखा कि उस स्थिति में गतिमान वस्तुओं का क्या होता है। वे इस निष्कर्ष पर पहुंचे कि

''**कोई भी गतिमान वस्तु, अचर चाल से क्षैतिज रेखा में तब तक गति करती रहेगी जब तक उस पर कोई बाहरी रोक न लगाई जाए।**''

इस परिणाम को हम **जड़त्व का नियम** कहते हैं क्योंकि **जड़त्व का अर्थ है किसी वस्तु की, परिवर्तन का विरोध करने की प्रवृत्ति और जिस अवस्था में वह है उसी में बने रहने की प्रवृत्ति**। यदि इसे गति की अवधारणा पर लागू किया जाए तो **जड़त्व का अर्थ है किसी वस्तु की विरामावस्था में बने रहने की या एक ही चाल से एक ही दिशा में (यानी एक ही वेग से) गतिमान रहने की प्रवृत्ति**। न्यूटन की प्रतिभा इस बात में थी कि उन्होंने गैलीलियो के जड़त्व के विचार की शक्ति को पहचाना और उसे यांत्रिकी की अपनी अवधारणा में शामिल किया। आज हम इस विचार को **न्यूटन के गति के पहले नियम** के रूप में जानते हैं। यही नियम हमें बल की अवधारणा के वर्तमान स्वरूप से परिचित कराता है।

5.2.1 जड़त्व की अवधारणा

जड़त्व की अवधारणा को समझने के लिए आप एक आसान गतिविधि करें।

गतिविधि

जड़त्व के नियम पर गतिविधि

इसके लिए आपको एक खिलौना गाड़ी, एक छोटी गुड़िया जो उस गाड़ी में समा सके, एक ईंट या लकड़ी का टुकड़ा (या कोई भी वस्तु जो गाड़ी को तुरंत रोक सके) और टेप की ज़रूरत पड़ेगी। फर्श पर ईंट या लकड़ी का टुकड़ा रख दें। गाड़ी को उसकी ओर धक्का दें जिससे कि गाड़ी उस अवरोध पर तुरंत रुक जाये। अगर ऐसा न हो तो अवरोध की ऊंचाई बढ़ा दें। अब गाड़ी में गुड़िया रख कर उसे अवरोध की ओर धक्का दें। इस गतिविधि के आधार पर आगे दिए सवालों के जवाब दें।

जब गाड़ी लकड़ी के टुकड़े से टकरा कर अचानक रुकी तो आपने क्या देखा? क्या गुड़िया गाड़ी से बाहर गिर गई? आप गुड़िया को गाड़ी से बाहर गिरने से कैसे रोक सकते हैं? इसके लिए आप टेप से गुड़िया को गाड़ी से चिपका दें और एक बार फिर उसे गाड़ी समेत अवरोध की ओर धक्का दें। अब आप गाड़ी की लकड़ी के टुकड़े से टक्कर होने पर क्या पाते हैं? क्या गुड़िया अभी भी गाड़ी के बाहर गिर जाती है?

आपके विचार से इन गतिविधियों में क्या हो रहा है? पहली गतिविधि में गाड़ी के रुकने के बाद भी जड़त्व के कारण गुड़िया की **प्रवृत्ति** गतिमान रहने की थी। इसीलिए गुड़िया गाड़ी से बाहर गिर जाती है। गाड़ी में गुड़िया को टेप से चिपका कर हम उसका गिरना रोक सकते हैं। **इसी कारण से, गाड़ियों में सीट बैल्ट का इस्तेमाल किया जाता है** ताकि जब गाड़ी अचानक ब्रेक लगने के कारण रुके तो उसमें बैठे यात्रियों को चोट न लगे। इस गतिविधि द्वारा जड़त्व का अनुभव करने के बाद आप न्यूटन का गति का पहला नियम समझ सकते हैं।

ध्यान दें

आम तौर पर, हम बल, शक्ति, ज़ोर, दम, धक्का आदि शब्दों का एक ही अर्थ में प्रयोग करते हैं।

बॉक्सिंग के मैच में ऊपर जैसे किसी दृश्य को देखने पर कुछ लोग कहते हैं ''कितना **शक्तिशाली** घूंसा है'', कुछ और लोग कहते हैं ''कितना **ज़ोरदार** मुक्का है'' और कुछ और लोग कहते हैं ''इस घूंसे में तो बहुत बल था''। लेकिन **भौतिकी में बल की अवधारणा का उपयोग आपको बहुत सावधानी और परिशुद्धता से करना होगा।**

न्यूटन का गति का पहला नियम

एक ऐसा पिंड लें जिस पर कोई बल नहीं लग रहा। यदि वह विरामावस्था में है तो वह विरामावस्था में बना रहेगा। यदि पिंड एकसमान गति कर रहा है यानी वह अचर वेग से (समान चाल से एक ही दिशा में) एक सरल रेखा में गति कर रहा है तो वह सदैव उसी सरल रेखा में उसी समान अचर वेग से (समान चाल से एक ही दिशा में) गति करता रहेगा।

न्यूटन के गति के पहले नियम से हमें **मुक्त (free) पिंड/मुक्त कण** की परिभाषा मिलती है।

हमेशा याद रखें कि ऐसे पिंड (कण) को जिस पर कोई बल नहीं लग रहा होता है मुक्त पिंड (कण) कहा जाता है।

तो हम पाते हैं कि न्यूटन के गति के पहले नियम में **बल की अवधारणा उसकी अनुपस्थिति द्वारा परिभाषित होती है**। और इसी से हमें बल की परिभाषा मिलती है।

5.2.2 बल

भौतिकी में बल का क्या अर्थ है? न्यूटन के गति के पहले नियम से हम इस नतीजे पर पहुंच सकते हैं कि *जब किसी पिंड पर बल लगता है (किसी भी बाह्य कारक द्वारा) तो वह पिंड के वेग में परिवर्तन करता है।* इससे हमें बल की औपचारिक परिभाषा मिलती है।

बल

किसी पिंड पर (किसी कारक द्वारा) लगाया गया बल उसके वेग में परिवर्तन लाता है यानी वह पिंड में त्वरण उत्पन्न करता है।

हर बल का कोई न कोई कारक (agent) होता है। कारक पिंड पर संपर्क द्वारा बल आरोपित कर सकता है। कारक पिंड से दूर होते हुए भी उस पर बल लगा सकता है। पिंड पर लग रहा हर बल किसी कारक के कारण ही होता है। बिना किसी कारक के किसी पिंड पर स्वतंत्र रूप से बल नहीं लग सकता।

कारक की प्रकृति के अनुसार बलों को दो वर्गों में बांटा जा सकता है : **सम्पर्क बल** (contact forces, जिनमें कारक और पिंड सम्पर्क में रहते हैं) और **दीर्घ परासी** (long-range) या **लघु परासी** (short-range) **बल**। पिंड को धक्का देना या खींचना, घर्षण

बल, तनाव बल, सम्पर्क बलों के उदाहरण हैं और गुरुत्वाकर्षण बल, **दीर्घ परासी** बल का उदाहरण है। गुरुत्वाकर्षण बल जैसे **दीर्घ परासी** बल, इस ब्रह्माण्ड के हर पिंड द्वारा अन्य हरेक पिंड पर आरोपित होते हैं। **पिंड पर आरोपित होने के लिए इन बलों को किसी माध्यम की आवश्यकता नहीं होती।**

आप गुरुत्वाकर्षण बल के बारे में विस्तार से इकाई 7 में पढ़ेंगे।

अभी आपने जाना कि पिंड पर लगने वाला बल पिंड में त्वरण उत्पन्न करता है। चूंकि त्वरण एक सदिश राशि है, इसलिए बल को भी सदिश राशि होना चाहिए। वास्तव में, प्रयोगों में यह दिखाया जा चुका है कि बल एक सदिश राशि है। इसका अर्थ यह है जब एक पिंड पर दो या उससे अधिक बल लग रहे होते हैं तो हम उनका **परिणामी** या **नेट बल** सदिश योग के नियमों का उपयोग करके ज्ञात कर सकते हैं (हाशिए में दी गई टिप्पणी पढ़ें)। पिंड की गति पर इस **नेट बल** का प्रभाव, उस पर लग रहे बलों के संयुक्त प्रभाव के समकक्ष होता है। इस तरह, हम न्यूटन के गति के पहले नियम का संशोधन करके उसका निम्नलिखित कथन देते हैं।

आपने इकाई 1 और 2 में सदिश योग के नियम सीखे हैं और उन्हें कई सवालों में लागू किया है।

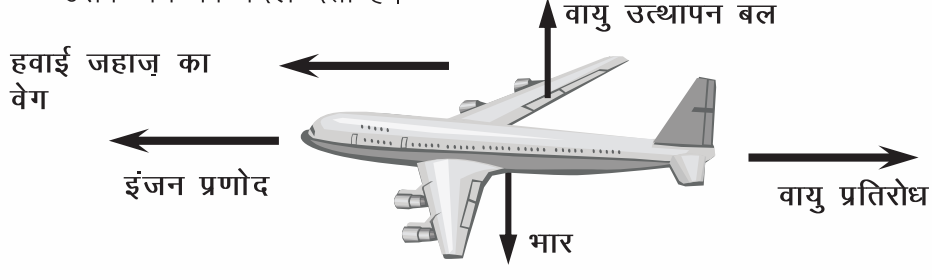
न्यूटन का गति का पहला नियम

यदि एक गतिमान पिंड पर कोई नेट बल नहीं लग रहा हो तो उसके वेग में परिवर्तन नहीं हो सकता। यदि वह पिंड विरामावस्था में है तो वह विरामावस्था में बना रहेगा। यदि वह गतिमान है तो वह अचर वेग से (एक ही चाल से एक ही दिशा में) चलता रहेगा।

किसी पिंड में त्वरण तभी होता है जब उस पर लग रहा नेट बल शून्य न हो।

उदाहरण *5.1* : न्यूटन का गति का पहला नियम

क) उड़ान के दौरान हवाई जहाज़ पर चार बल लगते हैं : वायु उत्थापन बल, जहाज़ का भार, इंजन का प्रणोद और वायु प्रतिरोध। मान लें कि एक हवाई जहाज़ अचर चाल से क्षैतिज दिशा में गतिमान है (चित्र 5.2) यानी उसका वेग अचर है। क्योंकि हवाई जहाज़ अचर वेग से गतिमान है, उस पर लग रहा नेट बल शून्य है। इसलिए इंजन का प्रणोद, वायु प्रतिरोध के बराबर और विपरीत है, और वायु उत्थापन बल उसके भार के बराबर और विपरीत है। अब मान लें कि पायलट इंजन का प्रणोद बढ़ा देता है और इंजन का प्रणोद और वायु प्रतिरोध बराबर नहीं रहते; हवाई जहाज़ में त्वरण पैदा होता है और क्षैतिज दिशा में उसका वेग बढ़ जाता है। इस तरह हवाई जहाज़ पर लग रहा नेट बाह्य बल उसके वेग को बदल देता है।



इंजन प्रणोद = वायु प्रतिरोध और वायु उत्थापन बल = भार
हवाई जहाज़ अचर वेग से उड़ता है।

चित्र 5.2: उदाहरण 5.1क के हवाई जहाज़ पर लग रहे बल।

ध्यान दें

न्यूटनी संसार में सभी पिंडों/वस्तुओं को **बिंदु कण** माना जाता है। लेकिन **याद रखें** वास्तविक संसार में बिंदु कणों का अस्तित्व नहीं होता। बिंदु कणों की अवधारणा न्यूटनी सिद्धांत द्वारा जनित अवधारणा मात्र है, वास्तविकता नहीं।

गुरुत्व बल = वायु प्रतिरोध
बूंद अचर वेग से गिरती है।

(क)

(ख)

चित्र 5.3: न्यूटन के गति के पहले नियम के कुछ अनुप्रयोग।

लेकिन चूंकि वायु प्रतिरोध, वेग के वर्ग के समानुपाती ($\propto v^2$) होता है, इसलिए उसका मान भी बढ़े हुए वेग के साथ-साथ बढ़ जाता है। जब वायु प्रतिरोध का बढ़ा हुआ नया मान इंजन प्रणोद के नए मान के बराबर हो जाता है तब फिर से हवाई जहाज़ का त्वरण शून्य हो जाता है। इसके बाद, हवाई जहाज़ एक नये अचर वेग से उड़ता है जो उसके प्रारंभिक वेग से अधिक होता है।

ख) जब बारिश की बूंदें धरती पर गिरती हैं तो उन पर गुरुत्व बल और वायु प्रतिरोध बल लगते हैं (चित्र 5.3क)। जब एक बूंद की चाल शून्य होती है तो उस पर वायु प्रतिरोध भी शून्य होता है (क्योंकि वह चाल पर निर्भर करता है)। जब बारिश की बूंद धरती पर मुक्त रूप से गिरती है तो गुरुत्वीय त्वरण के कारण उसकी चाल बढ़ जाती है। इसलिए उस पर वायु प्रतिरोध भी बढ़ जाता है और किसी क्षण पर वह गुरुत्व बल के बराबर हो जाता है। तब बूंद पर नेट बल शून्य होता है और वह अचर वेग से गिरती है। इस अचर वेग को **अंतिम वेग** (terminal velocity) कहा जाता है।

ग) हम हथौड़ी को उसके हत्थे को ज़मीन पर मार कर कस सकते हैं (चित्र 5.3ख)। जब हम हत्थे को ज़मीन पर मारते हैं तो वह गतिमान हो जाता है लेकिन जड़त्व के कारण हथौड़ी जहां थी वहीं बनी रहती है और इसी कारण वह हत्थे के छेद में कस जाती है।

बोध प्रश्न 1 – न्यूटन का गति का पहला नियम

क) टमाटर के सॉस की बोतल से सॉस को निकालने के लिए हम बोतल को उलटकर उसे नीचे की ओर ज़ोर से झटका देते है और फिर हाथ को रोक लेते हैं। समझाएं कि ऐसा क्यों किया जाता है।

ख) दो गाड़ियां एक सीधी सड़क पर क्रमशः 60 kmh^{-1} और 55 kmh^{-1} की अचर चालों से गतिमान हैं। किस गाड़ी पर नेट बल का मान अधिक है?

न्यूटन के गति के नियम सभी तरह के निर्देश तंत्रों में लागू नहीं होते। वे कुछ ख़ास किस्म के निर्देश तंत्रों में लागू होते हैं जिन्हें हम **जड़त्वीय निर्देश तंत्र** कहते हैं। आप जानना चाहेंगे : **जड़त्वीय निर्देश तंत्र क्या होता है**?

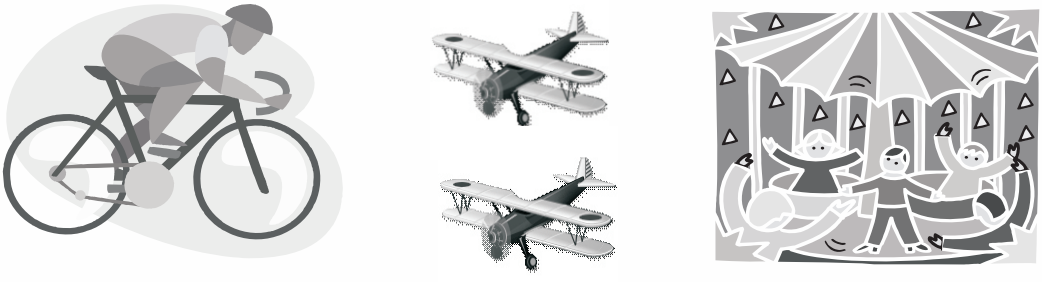
5.2.3 जड़त्वीय निर्देश तंत्र

जड़त्वीय निर्देश तंत्र की परिभाषा न्यूटन के गति के पहले नियम से मिलती है।

जड़त्वीय निर्देश तंत्र

जड़त्वीय निर्देश तंत्र वह निर्देश तंत्र होता है जिसमें न्यूटन का गति का पहला नियम (जड़त्व का नियम) लागू होता है। अतएव, कोई भी निर्देश तंत्र जो विरामावस्था में हो या अचर वेग से गतिमान हो, जड़त्वीय निर्देश तंत्र होता है। कोई भी अन्य निर्देश तंत्र जो एक जड़त्वीय निर्देश तंत्र के सापेक्ष विरामावस्था में हो या एकसमान स्थानांतरण-गति कर रहा हो (यानी ऐसी गति जिसमें दोनों तंत्रों के संगत निर्देशांक अक्ष सदा एक-दूसरे के समान्तर रहते हैं), जड़त्वीय निर्देश तंत्र होता है।

याद रखें : एक जड़त्वीय तंत्र के सापेक्ष त्वरित गति कर रहा निर्देश तंत्र जड़त्वीय नहीं होता। वह अजड़त्वीय तंत्र होता है। ध्यान रहे कि जड़त्वीय निर्देश तंत्र का त्वरण शून्य होता है। अतः, उन सभी पिंडों से जुड़े निर्देश तंत्र जो त्वरित गति कर रहे हों, अजड़त्वीय निर्देश तंत्र (non-inertial frames of reference) कहलाते हैं (देखें चित्र 5.4)।



(क) (ख) (ग)

चित्र 5.4 : क) साइकिल सवार से जुड़ा निर्देश तंत्र जड़त्वीय होता है यदि वह अचर वेग से चलती है; ख) इन वायुयानों से जुड़े निर्देश तंत्र जड़त्वीय होंगे यदि वे एक दूसरे के सापेक्ष और भूमि के सापेक्ष अचर वेग से उड़ रहे हों; ग) गतिमान मेरी-गो-राउंड से जुड़ा निर्देश तंत्र अजड़त्वीय है क्योंकि उसका परिमित अभिकेंद्र त्वरण होता है (स्कूल की भौतिकी से वर्तुल गति की चर्चा याद करें।)

जड़त्वीय निर्देश तंत्र की इस परिभाषा से, पृथ्वी से जुड़ा निर्देश तंत्र सही मायने में जड़त्वीय तंत्र नहीं है क्योंकि पृथ्वी के घूर्णन के कारण इसका एक अभिकेन्द्र त्वरण होता है। लेकिन, क्योंकि इस त्वरण का मान बहुत कम होता है ($0.034\ ms^{-2}$), इसलिए हम इसके प्रभाव को नगण्य मान सकते हैं।

यदि हम पृथ्वी के अपने अक्ष पर घूर्णन के प्रभाव को और सूर्य के चारों ओर उसकी गति के प्रभाव को नगण्य मान लें, तो हम पृथ्वी या भूमि को जड़त्वीय निर्देश तंत्र मान सकते हैं।

पृथ्वी/भूमि के सापेक्ष विरामावस्था में स्थित या अचर वेग से गतिमान किसी पिंड से जुड़ा निर्देश तंत्र, जड़त्वीय निर्देश तंत्र होता है। साथ ही, एक दूसरे के और पृथ्वी/भूमि के सापेक्ष अचर वेग से गतिमान सभी तंत्र जड़त्वीय तंत्र होते हैं।

जड़त्वीय निर्देश तंत्र की परिभाषा का इस्तेमाल करके, हम नीचे बताई हुई विधि द्वारा यह परख सकते हैं कि कोई तंत्र जड़त्वीय है या नहीं ।

जड़त्वीय निर्देश तंत्र की जांच

किसी क्षण पर पृथ्वी के सापेक्ष विरामावस्था में स्थित या अचर वेग से गतिमान एक पिंड लें। यदि वह पिंड बाद के सभी क्षणों पर सदैव पृथ्वी के सापेक्ष विरामावस्था में बना रहता है या अचर वेग से गतिमान रहता है, तब उस पिंड से जुड़ा निर्देश तंत्र एक जड़त्वीय निर्देश तंत्र होता है।

जड़त्वीय निर्देश तंत्र में मापन करने वाले प्रेक्षक को जड़त्वीय प्रेक्षक कहते हैं।

यदि आपको यह भाग समझ आ गया है तो आप जड़त्वीय और अजड़त्वीय निर्देश तंत्रों में अंतर कर सकेंगे। इसके लिए बोध प्रश्न 2 करें।

बोध प्रश्न 2 – जड़त्वीय और अजड़त्वीय तंत्र

कारण सहित समझाएं कि निम्नलिखित तंत्रों में से जड़त्वीय तंत्र कौन से हैं और अजड़त्वीय तंत्र कौन से हैं :

क) वृत्त में गतिमान गेंद से जुड़ा तंत्र,

ख) उत्तर दिशा में भूमि के सापेक्ष अचर चाल से सरल रेखा में गतिमान साइकिल सवार से जुड़ा तंत्र,

ग) सीधी सड़क पर अचर चाल से गतिमान बस से जुड़ा तंत्र,

घ) अचर चाल से मोड़ पर मुड़ते हुए साइकिल सवार से जुड़ा तंत्र,

च) अंतिम वेग से गिर रही बारिश की बूंद से जुड़ा तंत्र,

छ) अचर ऊंचाई पर दक्षिण दिशा में अचर चाल से उड़ रहे हवाई जहाज़ से जुड़ा तंत्र,

ज) पृथ्वी की परिक्रमा कर रहे भू-स्थावर उपग्रह से जुड़ा तंत्र, और

झ) पृथ्वी के सापेक्ष अचर वेग से गतिमान दो रेलगाड़ियों से जुड़े तंत्र।

अभी तक आपने जड़त्व, बल और जड़त्वीय निर्देश तंत्र के बारे में पढ़ा है। अब आप जानना चाहेंगे : **जैसे हम किसी पिंड की लंबाई या आयतन की कल्पना कर सकते हैं, ठीक वैसे ही क्या हम पिंड के जड़त्व की कल्पना उसके भौतिक गुण के रूप में कर सकते हैं**? इसका उत्तर है, नहीं। लेकिन पिंड के जड़त्व का संबंध उसके द्रव्यमान से होता है।

(क)

(ख)

चित्र 5.5: जड़त्व का संबंध पिंड के द्रव्यमान से होता है।

इस बात को समझने के लिए आप चित्र 5.5क में दिखाये गए एक मोटे आदमी और छोटे बच्चे को देखें। इन दोनों में से किसे उसकी विरामावस्था से हिलाने में हमें ज़्यादा मुश्किल होगी? आप तुरन्त कह सकते हैं कि मोटे आदमी को विरामावस्था से हिलाना ज़्यादा मुश्किल होगा। पर मान लें कि दोनों ही आदमी मोटे हों और उनके द्रव्यमानों में बहुत कम अंतर हो जैसा कि चित्र 5.5ख में दिखाया गया है। तब इन दोनों में से किसे हिलाने में ज़्यादा मुश्किल होगी? इस बात का ताल्लुक इस सवाल से है : **किसी पिंड के वेग में परिवर्तन लाने के लिए या उसे विरामावस्था से गति देने के लिए कितने बल की आवश्यकता होती है? यह बल किस पर निर्भर करता है**? न्यूटन का गति का दूसरा नियम हमें यही बताता है।

5.3 न्यूटन का गति का दूसरा नियम

यहां हम इस नियम का कथन न्यूटन के अपने शब्दों में दे रहे हैं और इसके बाद इसे समझाएंगे।

न्यूटन का गति का दूसरा नियम

किसी पिंड की गति में परिवर्तन, उस पर लग रहे बल के समानुपाती होता है। यह परिवर्तन उस सरल रेखा की दिशा में होता है जिसके अनुदिश बल लगता है।

"गति में परिवर्तन" से न्यूटन का क्या अभिप्राय था? इसके लिए उन्होंने एक नई राशि की अवधारणा दी जो पिंड के द्रव्यमान (m) और वेग ($\vec{\mathbf{v}}$) का गुणनफल है। इस गुणनफल को बाद में **रैखिक संवेग** (linear momentum) $\vec{\mathbf{p}}$ कहा जाने लगा :

$$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}} \qquad (5.1)$$

न्यूटन के अनुसार "गति में परिवर्तन" का अर्थ है, **समय के साथ संवेग में परिवर्तन की दर**। स्कूल के गणित से आप जानते हैं कि किसी फलन की समय के साथ परिवर्तन की दर, समय के सापेक्ष उसके अवकलज के बराबर होती है। इस तरह न्यूटन के गति के दूसरे नियम से हमें बल का निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होता है :

$$\vec{\mathbf{F}} \propto \frac{d}{dt}(m\vec{\mathbf{v}}) \qquad (5.2\text{क})$$

या

$$\vec{\mathbf{F}} = k\frac{d}{dt}(m\vec{\mathbf{v}}) \qquad (5.2\text{ख})$$

जहां $\vec{\mathbf{F}}$ आरोपित बल है और k एक आनुपातिकता अचर है।

हम पहले वे स्थितियां लेंगे जिनमें **पिंड का द्रव्यमान** (m) **अचर रहता है**। तब समीकरण 5.2ख में केवल $\vec{\mathbf{v}}$ समय के साथ बदलता है और हमें मिलता है :

$$\vec{\mathbf{F}} = km\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = km\vec{\mathbf{a}} \qquad \text{और} \qquad F = kma \qquad (5.3)$$

जहां $\vec{\mathbf{a}}$ पिंड का त्वरण है। इस तरह, अचर द्रव्यमान m वाले पिंड पर जब कोई **बाह्य बल** $\vec{\mathbf{F}}$ लगता है तो उसमें त्वरण $\vec{\mathbf{a}}$ उत्पन्न होता है जिसका व्यंजक समीकरण 5.3 द्वारा दिया जाता है।

परिभाषा से, इकाई बल वह बल होता है जो इकाई द्रव्यमान वाले पिंड में, इकाई त्वरण उत्पन्न करता है :

$F = 1$ इकाई, $m = 1$ इकाई और $a = 1$ इकाई के लिए समीकरण 5.3 से $k = 1$

अतः समीकरण 5.2ख और 5.3 का स्वरूप हो जाता है :

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = m\vec{\mathbf{a}} \quad \text{और} \quad F = ma \qquad \text{अचर द्रव्यमान के लिए} \qquad (5.4)$$

न्यूटन का दूसरा नियम

परिमाण 1 न्यूटन का बल, 1 kg द्रव्यमान के पिंड में $1\,\text{ms}^{-2}$ का त्वरण उत्पन्न करता है :

$$1\,\text{N} = (1\,\text{kg})(1\,\text{ms}^{-2}) = 1\,\text{kg.ms}^{-2}$$

बल के नियम की अवधारणा बल की अवधारणा में अनिवार्य रूप से निहित होती है। आप समीकरण $\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ को बल का नियम समझने की भूल न करें; यह केवल गति का समीकरण है। यहां $\vec{\mathbf{F}}$ वह बल है जो पिंड पर लग रहा है। इसका मान किसी न किसी बल नियम द्वारा दिया जाता है। मसलन, गुरुत्वाकर्षण के नियम द्वारा, हुक के नियम द्वारा या स्थिर वैद्युत बल के कूलॉम नियम द्वारा, आदि।

कभी न भूलें

ध्यान दें

समीकरणों 5.1 से 5.3 में पिंड पर लग रहा बल पिंड से **बाहर** होता है। इन सभी बलों को **बाह्य बल** कहा जाता है। इसके विपरीत पिंड पर **आंतरिक बल** भी लगते हैं जो पिंड का एक भाग उसके दूसरे भाग पर आरोपित करता है या कणों के निकाय में कोई कण दूसरे कणों पर आरोपित करता है। उदाहरण के लिए, चित्र 5.4क में हम यदि "लड़के और साइकिल" के निकाय को लें तो साइकिल पर लड़के द्वारा लगाया गया बल और लड़के पर साइकिल द्वारा लगाया गया बल इस निकाय के लिए आंतरिक बल हैं। लेकिन यदि हम सिर्फ़ लड़के की गति का अध्ययन करना चाहते हैं तो उस पर साइकिल द्वारा लगाया गया बल बाह्य बल है। **अतः उस निकाय को जिस पर न्यूटन के गति के नियम लागू करने हैं स्पष्ट रूप से निर्धारित करना महत्त्वपूर्ण होता है।**

5.3.1 बलों के अध्यारोपण का नियम

अब मान लें कि किसी पिंड पर **अनेक बाह्य बल** लग रहे हैं। तब इन बलों के प्रभाव के अधीन उसकी गति कैसी होती है? इस सवाल का जवाब हमें **बलों के अध्यारोपण के नियम** से मिलता है। आइए, इस नियम को समझें।

$\sum$ एक यूनानी भाषा का अक्षर है जिसे सिगमा कहते हैं। समीकरण 5.5 में $\sum_i$ सूचकांक i पर योग का प्रतीक है।

बलों के अध्यारोपण का नियम

यदि किसी पिंड पर एक ही समय पर **अनेक बाह्य** बल $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, आदि लग रहे हों, तो उसका त्वरण उस एकल बल $\vec{F}_{net}$ द्वारा उत्पन्न त्वरण के बराबर होता है, जो उन सभी बलों का सदिश योग होता है :

$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = \sum_i \vec{F}_i, \qquad i = 1,2,3,\ldots \qquad (5.5)$$

ध्यान दें

समीकरण 5.6 में $\vec{F}_{net}$ पिंड पर लग रहा **नेट बाह्य बल** है : यह **पिंड पर** लग रहे **सभी बाह्य बलों का** सदिश योग या **परिणामी बल** है।

अचर द्रव्यमान के लिए, समीकरण 5.5 हो जाता है :

$$\vec{F}_{net} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} \quad \text{और} \quad F_{net} = ma \quad \text{अचर द्रव्यमान के लिए} \qquad (5.6)$$

अतः, **पिंड पर लग रहा नेट बाह्य बल उसमें त्वरण उत्पन्न करता है जिसका मान अचर द्रव्यमान के लिए समीकरण 5.6 द्वारा दिया जाता है।**

न्यूटन का दूसरा नियम : घटक रूप

हम समीकरण 5.6 को द्विविम और त्रिविम निर्देशांकों में घटक रूप में इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$F_{net,x} = ma_x, \quad F_{net,y} = ma_y \quad \text{अचर द्रव्यमान के लिए} \qquad (5.7क)$$

$$F_{net,x} = ma_x, \quad F_{net,y} = ma_y \quad \text{और} \quad F_{net,z} = ma_z \quad \text{अचर द्रव्यमान के लिए} \qquad (5.7ख)$$

ध्यान दें

किसी पिंड का त्वरण उस पर लग रहे नेट बाह्य बल की दिशा में होता है। उसका मान नेट बाह्य बल को पिंड के द्रव्यमान से भाग देने पर मिलता है।

न्यूटन के गति के दूसरे नियम से हमें **बल की मात्रात्मक परिभाषा** मिलती है। आप देख सकते हैं कि यदि पिंड पर लग रहा नेट बाह्य बल शून्य हो तो उसका वेग अचर होता है :

$$\vec{F}_{net} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{0} \quad \text{यानी} \quad \vec{v} = \text{अचर} \qquad (5.8क)$$

यह नियम केवल जड़त्वीय निर्देश तंत्रों में लागू होता है। इसके अनुसार :

$$\vec{a} \propto \vec{F}_{net} \quad \text{और} \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}_{net}}{m} \qquad (5.8ख)$$

इस नियम से हमें **द्रव्यमान** की परिभाषा भी मिलती है।

5.3.2 द्रव्यमान

द्रव्यमान की परिभाषा जानने से पहले आप एक गतिविधि करें।

इस गतिविधि को करने के लिए आपको तीन खिलौना गाड़ियों या अलग-अलग द्रव्यमानों की तीन गेंदों, एक कमानी और एक चिकने चार्ट पेपर की ज़रूरत पड़ेगी। इस गतिविधि को करें और फिर इससे जुड़े सवालों के जवाब दें।

न्यूटन का गति का दूसरा नियम

गतिविधि

चार्ट पेपर को एक मेज़ या फ़र्श पर चिपका दें। उस पर स्थित किसी बिंदु पर कमानी को ऐसे पकड़ें कि उसका एक सिरा आपकी हथेली से लगा हुआ हो। इस बिंदु को P लिखें। इससे कुछ दूरी पर (जो कमानी की लंबाई से कम हो) एक और बिंदु Q लें ताकि PQ एक सरल रेखा हो। कमानी के दूसरे सिरे पर एक गाड़ी या गेंद रखें और अपनी दूसरी हथेली से उसे इस तरह धक्का दें कि कमानी दब जाए और उसका वह सिरा बिंदु Q पर आ जाए।

अब गाड़ी/गेंद से अपनी हथेली को हटाएं ताकि कमानी छूट जाए। तब गाड़ी/गेंद का क्या होता है? आप देखते हैं कि वह मेज़/फ़र्श पर चलने लगती है। गाड़ी/गेंद को छोड़ने का इस तरह अभ्यास करें कि वह एक सरल रेखा में चले। इसी गतिविधि को अन्य गाड़ियों/गेंदों को लेकर दोहरायें। आप क्या देखते हैं? इनमें से कौन-सी गाड़ी/गेंद ज़्यादा समय में तेज़ रफ़्तार पकड़ती है और कौन-सी कम समय में? आप अपने प्रेक्षणों की व्याख्या कैसे करेंगे?

इन सब स्थितियों में कौन-सी बात एक जैसी है? चूंकि, दूरी PQ एक ही है, इसलिए सभी पिंडों पर कमानी द्वारा लग रहा बल बराबर है। इन सब में अलग क्या है? वह है इन वस्तुओं का द्रव्यमान। अब आप इस सवाल का जवाब दें : यदि पिंड पर एक ही बल लग रहा हो तो उसके द्रव्यमान और त्वरण में क्या संबंध होता है?

यदि संभव हो तो आप इस गतिविधि को एक गाड़ी/गेंद लेकर लेकिन **अलग-अलग कमानी नियतांकों (spring constant) वाली कमानियां** लेकर दोहराएं। जिस कमानी का कमानी नियतांक अधिक होगा उसके द्वारा आरोपित बल भी ज़्यादा होगा। इस तरह इस गतिविधि में द्रव्यमान अचर है लेकिन बल अलग-अलग हैं। अब आप क्या देखते हैं? इस गाड़ी/गेंद पर लग रहे बल का उसके त्वरण से क्या संबंध है? आप अपने प्रेक्षणों की व्याख्या कैसे करेंगे?

हमारे दैनिक अनुभवों से और ऊपर दी गई गतिविधि करने पर आप जान गए हैं कि समान बल भिन्न द्रव्यमानों वाली वस्तुओं में भिन्न त्वरण उत्पन्न करता है। इस परिणाम को जड़त्वीय निर्देश तंत्रों में किये गए अनगिनत प्रयोगों में परखा जा चुका है। विचार यह है कि

- एक पिंड जिसका मानक द्रव्यमान 1 kg है और दूसरा जिसका द्रव्यमान अज्ञात है, पर बराबर का बल लगाया जाए।
- जड़त्वीय निर्देश तंत्र में इन दोनों पिंडों के त्वरण मापे जाएं।

मान लें कि मानक पिंड के द्रव्यमान और त्वरण क्रमशः m_s, a_s हैं और अज्ञात पिंड के द्रव्यमान और त्वरण क्रमशः m, a हैं। चूंकि मानक पिंड और अज्ञात पिंड पर बराबर का बल लग रहा है, अतः

$$F = m_s a_s = ma \qquad (5.9\text{क})$$

$$\therefore \frac{m}{m_s} = \frac{a_s}{a} \quad \text{और} \quad m = m_s\left(\frac{a_s}{a}\right) \qquad (5.9\text{ख})$$

1 kg

10 kg

2500 kg

10^5 kg

10^8 kg

चित्र 5.6: भिन्न पिंडों के द्रव्यमान।

उदाहरण के लिए, माना कि m_s = 1 kg और हम दोनों पिंडों पर 1.0 N का बल आरोपित करते हैं। मान लें कि द्रव्यमान m वाले पिंड का मापा गया त्वरण $0.2\ ms^{-2}$ है। समीकरण 5.4 से मानक द्रव्यमान का त्वरण $1.0\ ms^{-2}$ है। इस तरह

$$m = 1.0\ kg \left(\frac{1.0\,ms^{-2}}{0.2\ ms^{-2}} \right) = 5.0\ kg$$

जब हम पिंड पर एक दूसरा बल (माना कि 10 N) लगाते हैं तब क्या होता है? मानक द्रव्यमान का त्वरण $10.0\,ms^{-2}$ होता है। अज्ञात पिंड के त्वरण का मापा गया मान है $2.0\,ms^{-2}$ और उसके द्रव्यमान का मान होता है :

$$m = 1.0\ kg \left(\frac{10.0\,ms^{-2}}{2.0\ ms^{-2}} \right) = 5.0\ kg$$

यह परिणाम हमारे पहले के परिणाम के बराबर है। बहुत से प्रयोगों में इसी प्रकार के परिणाम मिले हैं। इससे हमें किसी पिंड का द्रव्यमान निर्धारित करने का एक विश्वसनीय तरीका मिलता है।

समीकरण 5.9ख द्वारा परिभाषित द्रव्यमान को **जड़त्वीय द्रव्यमान** कहते हैं। चित्र 5.6 में भिन्न पिंडों के द्रव्यमान दिखाये गए हैं।

आइए, अब हम द्रव्यमान की अवधारणा दोहराएं।

दोहराएं

पिंड का जड़त्वीय द्रव्यमान

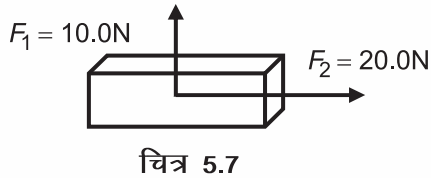
द्रव्यमान किसी भी पिंड का मूलभूत गुणधर्म होता है जो उस पर लग रहे बाह्य बल को उसके त्वरण से संबंधित करता है। समान नेट बाह्य बल के लिए कम द्रव्यमान वाले पिंड का (ज़्यादा द्रव्यमान वाले पिंड की तुलना में) त्वरण अधिक होता है।

समान नेट बाह्य बल $\vec{F}$ के लिए $m_1 < m_2 \Rightarrow \vec{a}_1 > \vec{a}_2$

आइए, अब हम न्यूटन के गति के नियमों को कुछ उदाहरणों पर लागू करें।

उदाहरण 5.2 : न्यूटन का गति का दूसरा नियम

चित्र 5.7 में दिखाए गए 5.0 kg द्रव्यमान वाले डिब्बे का त्वरण प्राप्त करें।



चित्र 5.7

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि परिणामी बल प्राप्त किया जाए और फिर समीकरण 5.7क को लागू किया जाए।

आइए, हम निर्देशांक तंत्र इस तरह चुनें कि x-अक्ष, $\vec{F}_2$ के अनुदिश हो और y-अक्ष, $\vec{F}_1$ के अनुदिश। दिए गए आंकड़ों से, नेट बल का मान है :

$$\vec{F} = F_2\,\hat{i} + F_1\,\hat{j} = (20.0\text{N})\,\hat{i} + (10.0\text{N})\,\hat{j} \quad \text{और}$$

$$\vec{a} = \frac{F_2}{m}\,\hat{i} + \frac{F_1}{m}\,\hat{j} = \frac{20.0\text{ N}}{5.0\text{ kg}}\,\hat{i} + \frac{10.0\text{ N}}{5.0\text{ kg}}\,\hat{j} = 4.0\text{ms}^{-2}\,\hat{i} + 2.0\text{ms}^{-2}\,\hat{j}$$

$\vec{a}$ का परिमाण है :

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$= \sqrt{(4)^2 + (2)^2}\ \text{ms}^{-2}$$

$$= 4.5\ \text{ms}^{-2}, \text{ और}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{4}\right) = 27^\circ$$

$\vec{a}$ और x-अक्ष के बीच का कोण है। **$\vec{a}$ नेट बल की दिशा में ही है।**

उदाहरण 5.3 : न्यूटन का गति का दूसरा नियम

एक हवाई जहाज़ का द्रव्यमान 45,000 kg है। वह 960.0 kmh^{-1} की अचर चाल से सरल रेखा में उड़ रहा है (चित्र 5.8)। हवाई जहाज़ का भार वायु उत्थापन बल के बराबर है। पायलट किसी क्षण पर इंजन का प्रणोद बढ़ा कर उसका मान 90,000 N कर देता है। मान लें कि उसके बाद 20.0 s के समयांतराल में वायु प्रतिरोध बल इंजन प्रणोद के बराबर हो जाता है। 20.0 s पर हवाई जहाज़ की बढ़ी हुई चाल क्या है? हवाई जहाज़ की चाल कितनी बढ़ जाती है?

चित्र 5.8: जब इंजन का प्रणोद = वायु प्रतिरोध, हवाई जहाज़ अचर वेग से उड़ता है।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि न्यूटन के गति के दूसरे नियम से त्वरण का मान प्राप्त किया जाए। फिर सरल रैखिक गति के लिए शुद्धगतिकी की समीकरणों का प्रयोग करके हवाई जहाज़ की बढ़ी हुई अचर चाल ज्ञात की जाए।

इंजन का प्रणोद बढ़ाने के बाद हवाई जहाज़ का त्वरण होता है :

$$a = \frac{F_{thrust}}{m} = \frac{90{,}000\text{N}}{45{,}000\text{kg}} = 2.0\ \text{ms}^{-2}$$

जब 20.0 s में इंजन प्रणोद और वायु प्रतिरोध बल बराबर हो जाते हैं तो न्यूटन के गति के पहले नियम के अनुसार हवाई जहाज़ अचर वेग से उड़ने लगता है। हवाई जहाज़ की नई अचर चाल का मान शुद्धगतिकी की इस समीकरण से मिलता है :

$$v = v_0 + at$$

$$v = \left(\frac{960.0}{3.6}\right)\text{ms}^{-1} + 2.0\ \text{ms}^{-2} \times 20.0\ \text{s} \approx 307\ \text{ms}^{-1} = 1105\ \text{kmh}^{-1}$$

हवाई जहाज़ की चाल में वृद्धि है $(1105 - 960.0)\ \text{kmh}^{-1} = 145\ \text{kmh}^{-1}$

बोध प्रश्न 3 – न्यूटन का गति का दूसरा नियम

क) जब एक बच्चा 20 g द्रव्यमान वाले कैरम बोर्ड के स्ट्राइकर को मारता है तो वह $2.0\ ms^{-1}$ की आरंभिक चाल से सरल रेखा में चलता है। स्ट्राइकर की गति की दिशा के विपरीत दिशा में उस पर $F = 0.04N$ का घर्षण बल लगता है। रुकने से पहले स्ट्राइकर कितनी दूरी तय करेगा?

ख) एक बड़े डिब्बे पर अचर क्षैतिज बल लगाया जाता है। इसके फलस्वरूप वह डिब्बा v_0 की अचर चाल से क्षैतिज फ़र्श पर गति करता है। आरोपित किये गए अचर बल का परिमाण

i. डिब्बे के भार के बराबर होता है।
ii. डिब्बे के भार से अधिक होता है।
iii. उस नेट बल के बराबर होता है जो डिब्बे की गति का प्रतिरोध करता है।
iv. उस नेट बल से अधिक होता है जो डिब्बे की गति का प्रतिरोध करता है।
v. डिब्बे के भार और उसकी गति का प्रतिरोध करने वाले नेट बल, दोनों ही से अधिक होता है।

ग) यदि भाग (ख) में डिब्बे को उसी क्षैतिज फ़र्श पर धक्का देने वाले अचर क्षैतिज बल को दो गुना कर दिया जाए तो डिब्बा

i. भाग (ख) की चाल v_0 से दो गुनी अचर चाल से चलता है।
ii. भाग (ख) की चाल v_0 से अधिक चाल से चलता है पर दोगुनी चाल से नहीं।
iii. कुछ समय के लिए अचर चाल से चलता है जो भाग (ख) की चाल v_0 से अधिक है और फिर उसकी चाल बढ़ जाती है।
iv. कुछ समय के लिए बढ़ती हुई चाल से चलता है और उसके बाद अचर चाल से चलता है। ।
v. लगातार बढ़ती हुई चाल से चलता है।

5.4 न्यूटन का गति का तीसरा नियम

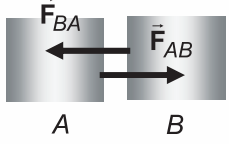
कल्पना करें कि आप सड़क पर तेज़ी से चल रहे हैं और आपके सामने से आता हुआ कोई व्यक्ति आप से टकरा जाता है। आपको इस धक्के का अहसास होता है। दूसरे व्यक्ति के बारे में क्या कहा जा सकता है? साफ है कि दूसरे व्यक्ति को भी धक्के का अहसास होता है। यानी जब वह व्यक्ति आप पर कुछ बल (धक्के द्वारा) लगा रहा होता है तो आप भी उस पर कुछ बल लगा रहे होते हैं। इसका अर्थ है कि इस स्थिति में सिर्फ़ एक बल नहीं लग रहा, बल्कि दो बलों का युग्म (pair) लग रहा है, हालांकि **दोनों बल अलग-अलग पिंडों पर लग रहे हैं**।

न्यूटन का गति का तीसरा नियम क्रिया-प्रतिक्रिया नियम भी कहलाता है क्योंकि इसका निम्नलिखित कथन भी दिया जाता है: **''प्रत्येक क्रिया की बराबर और विपरीत प्रतिक्रिया होती है।''**

इस बात को, कि **सभी बल, युग्मों** (pairs) **में आरोपित होते हैं**, समझने वाले पहले व्यक्ति न्यूटन थे। **प्रकृति में किसी भी बल का पूरी तरह स्वतंत्र और विलगित अस्तित्व नहीं होता।**

लेकिन बल-युग्म का प्रत्येक बल एक ही पिंड पर नहीं लगता। युग्म का प्रत्येक बल अलग पिंड पर लगता है।

यह बात और भी स्पष्ट हो जाती है जब हम पूछते हैं : **किसी पिंड पर बल कैसे लगाया जाता है?** अपने दैनिक अनुभवों से हम पाते हैं कि बल किसी न किसी **कारक** द्वारा लगाया जाता है। मसलन, आप किसी वस्तु को हटाने के लिए उसे धक्का देते हैं या खींचते हैं। तब आपका हाथ वह कारक है जो उस वस्तु पर बल लगा रहा है। हम कहते हैं कि **बल-युग्म, पिंडों के बीच पारस्परिक क्रिया** (interaction) से उत्पन्न होते हैं। यही बात न्यूटन के गति के तीसरे नियम में निहित है।



$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

चित्र 5.9 : न्यूटन का गति का तीसरा नियम– बल के अधोलिखित अक्षरों पर ध्यान दें। $\vec{F}_{AB}$, *A* पर *B* द्वारा लगाया गया बल है।

न्यूटन का गति का तीसरा नियम

जब दो पिंड *A* और *B* पारस्परिक क्रिया करते हैं, तो पिंड *B* पर पिंड *A* द्वारा लगाया गया बल, पिंड *A* पर पिंड *B* द्वारा लगाये गए बल के बराबर लेकिन विपरीत दिशा में होता है। यदि पिंड *B* पर पिंड *A* द्वारा लगाया गया बल $\vec{F}_{BA}$ हो और पिंड *A* पर पिंड *B* द्वारा लगाया गया बल $\vec{F}_{AB}$ हो (चित्र 5.9), तो

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB} \quad \text{और} \quad |\vec{F}_{BA}| = |\vec{F}_{AB}| \qquad (5.10)$$

बल–युग्म को **क्रिया–प्रतिक्रिया बल** भी कहते हैं। क्रिया–प्रतिक्रया बल, पिंडों के सम्पर्क के कारण लग सकते हैं या फिर दीर्घ परासी या लघु परासी बलों के कारण।

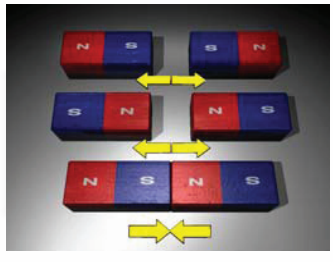
न्यूटन का गति का तीसरा नियम दो बलों के बारे में है, क्रिया और प्रतिक्रिया बल :

- **क्रिया-प्रतिक्रिया बल-युग्म कभी भी एक ही पिंड पर नहीं लगते। ये बल अलग-अलग पिंडों पर लगते हैं। इसलिए वे एक दूसरे को निरस्त (cancel) नहीं करते।**
- **चूंकि हरेक बल अलग पिंड पर लग रहा होता है तो यदि उन पिंडों के द्रव्यमान अलग-अलग हैं तो उनमें उत्पन्न त्वरण बराबर नहीं होता।**
- **बल–युग्म के दोनों बल एक ही तरह के होने चाहिए (गुरुत्वाकर्षण बल, स्थिर वैद्युत बल, घर्षण बल, अभिलंब बल, आदि)।**
- **दोनों ही बल एक ही क्षण पर बराबर और विपरीत होते हैं, कभी भी एक के बाद एक नहीं लगते। इसलिए यह महत्त्वपूर्ण नहीं है कि इनमें से किस बल को क्रिया बल कहा जाए और किसे प्रतिक्रिया बल।**

उदाहरण के लिए, यदि कोई व्यक्ति बल लगाकर एक बड़े स्थिर बक्से को धक्का देता है तो वह बक्सा भी उस व्यक्ति को उतने ही बल से धक्का देता है। उस बक्से के गतिमान होने या न होने का संबंध उस बल से बिल्कुल नहीं है **जो वह बक्सा उस व्यक्ति पर लगाता है**। बक्सा तभी गतिमान होता है जब उस पर एक **बाह्य नेट बल** आरोपित हो रहा हो।

याद रखें : समीकरण 5.10 द्वारा दिए गए क्रिया-प्रतिक्रिया बल-युग्म में प्रत्येक बल न्यूटन के पहले और दूसरे गति के नियमों का पालन करता है।

चित्र 5.10 में हमने कुछ क्रिया-प्रतिक्रिया बल-युग्म दिखाए हैं। आइए, हम चित्र 5.10 के **कॉलम 1 की पहली तस्वीर में** बल-युग्म को पहचानें। यह बल-युग्म है : पशु 1 **द्वारा** पशु 2 **पर** आरोपित बल $\vec{F}_{21}$ और पशु 2 **द्वारा** पशु 1 **पर** आरोपित बल $\vec{F}_{12}$ । आप चित्र 5.10 में दिए बाकी के बल-युग्मों को खुद पहचानना चाहेंगे।

सम्पर्क बलों के उदाहरण	दीर्घ परासी बलों के उदाहरण
(क)	(ग)
(ख)	 चुंबकीय बल (घ)

चित्र 5.10 : सम्पर्क बलों के लिए (कॉलम 1) और दीर्घ परासी बलों के लिए (कॉलम 2), क्रिया-प्रतिक्रिया बल-युग्म।

बोध प्रश्न 4 – न्यूटन का गति का तीसरा नियम

चित्र 5.10ख से घ में दिखाई गई प्रत्येक स्थिति के लिए बल-युग्मों की पहचान करें और उन्हें उचित प्रतीकों का प्रयोग करते हुए समीकरण 5.10 के रूप में लिखें।

आइए, अब हम न्यूटन के गति के तीसरे नियम के कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण *5.4* : न्यूटन का गति का तीसरा नियम

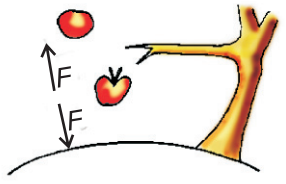
पृथ्वी एक सेब को परिमाण *F* के बल से अपनी ओर आकर्षित करती है (चित्र 5.11)। सेब पृथ्वी को अपनी ओर कितने परिमाण के बल से आकर्षित करता है? हमें सेब पृथ्वी की ओर गिरते हुए दिखाई देता है लेकिन पृथ्वी सेब की ओर गिरते हुए क्यों नहीं दिखाई देती?

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि न्यूटन के गति के तीसरे नियम को गति के दूसरे नियम के साथ-साथ लागू किया जाए।

सेब भी पृथ्वी को परिमाण F वाले बल से अपनी ओर आकर्षित करता है। सेब और पृथ्वी के त्वरण क्रमशः निम्नलिखित हैं :

$$a_{\text{सेब}} = \frac{F}{m_{\text{सेब}}} \quad \text{और} \quad a_{\text{पृथ्वी}} = \frac{F}{m_{\text{पृथ्वी}}}$$

चूंकि $m_{\text{सेब}} = 0.2\ \text{kg}$ और $m_{\text{पृथ्वी}} = 6 \times 10^{24}\ \text{kg}$, यानी $m_{\text{पृथ्वी}}$ का मान, $m_{\text{सेब}}$ के मान से बहुत अधिक है। अतः, पृथ्वी के त्वरण का मान सेब के त्वरण के मान से बहुत कम है (सेब के त्वरण के मान का लगभग 10^{-24} गुना)। इसीलिए हमें पृथ्वी सेब की ओर गिरते हुए नहीं दिखाई देती।



चित्र 5.11: उदाहरण 5.4 के लिए चित्र।

बोध प्रश्न 5 – न्यूटन का गति का तीसरा नियम

एक विशाल ट्रक की एक छोटी सी गाड़ी से सीधे टक्कर होती है। इस टक्कर के दौरान

i. ट्रक द्वारा गाड़ी पर लगाया गया बल, गाड़ी द्वारा ट्रक पर लगाए गए बल से अधिक होता है।

ii. गाड़ी द्वारा ट्रक पर लगाया गया बल, ट्रक द्वारा गाड़ी पर लगाए गए बल से अधिक होता है।

iii. न तो ट्रक और न ही गाड़ी, एक दूसरे पर बल लगाते हैं, गाड़ी इसलिए पिचक जाती है क्योंकि वह ट्रक के रास्ते में आ गई थी।

iv. ट्रक गाड़ी पर बल लगाता है लेकिन गाड़ी ट्रक पर बल नहीं लगाती।

v. ट्रक द्वारा गाड़ी पर लगाया गया बल, गाड़ी द्वारा ट्रक पर लगाए गए बल के बराबर होता है।

इस भाग के अंत में हम न्यूटन के सभी नियमों को एक-साथ लेकर उनमें दी गई **बल की अवधारणा** को दोहरा रहे हैं। इन नियमों के अनुसार :

1. कोई कण जिस पर नेट (परिणामी) बल शून्य होता है, या तो विरामावस्था में रहता है या एकसमान वेग से गति करता है। इस तरह के कण को **मुक्त कण** कहते हैं।
2. जब किसी कण पर लग रहा **नेट (परिणामी) बल** जो किसी बल नियम द्वारा दिया गया हो, **शून्य नहीं होता तो कण की गति त्वरित गति होती है** यानी उसके वेग में परिवर्तन होना आवश्यक है। **कण पर लग रहा बल उसके रैखिक संवेग में परिवर्तन की दर के बराबर होता है। रैखिक संवेग में परिवर्तन की दिशा आरोपित बल की दिशा के अनुदिश होती है।** यदि कण पर लग रहा **बल शून्य न हो** और फिर भी वह कण विरामावस्था में हो या एकसमान वेग से गतिमान हो तो इसका अर्थ है कि **कण पर कोई और बराबर लेकिन विपरीत बल भी लग रहा है जिससे कि उस पर लग रहा नेट (परिणामी) बल शून्य है।**
3. **सभी बलों का युग्मों में ही अस्तित्व होता है।** किसी भी बल का स्वतंत्र अस्तित्व नहीं होता यानी प्रकृति में कोई बल एकल या पृथक नहीं होता।

अब हम, इस इकाई में आपने जो कुछ पढ़ा है, उसका सार यहां देंगे।

5.5 सारांश

अवधारणा	विवरण
न्यूटन के गति के नियम	■ **पहला नियम :** कोई भी गतिमान पिंड विरामावस्था में बना रहता है या अचर वेग (एक ही चाल से एक ही दिशा में) से चलता रहता है जब तक कि उस पर किसी कारक द्वारा नेट बाह्य बल न लगाया जाए : $\vec{\mathbf{v}}_O$ = अचर जब तक कि O पर $\vec{\mathbf{F}}_{net} \neq \vec{\mathbf{0}}$ ■ **दूसरा नियम :** किसी पिंड पर किसी कारक द्वारा लग रहा नेट बाह्य बल उसके संवेग ($\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$) के समानुपाती होता है : $\vec{\mathbf{F}}_{net} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$ यह पिंड का **गति का समीकरण** है। अचर द्रव्यमान वाले पिंड के लिए : $\vec{\mathbf{F}}_{net} = m\mathbf{a}$ और $F_{net} = ma$ ■ **तीसरा नियम :** पारस्परिक क्रिया कर रहे दो पिंड, एक दूसरे पर बराबर परिमाण लेकिन विपरीत दिशा वाले बल लगाते हैं। यदि पिंड B पर पिंड A द्वारा लगाया गया बल $\vec{\mathbf{F}}_{BA}$ हो और पिंड A पर पिंड B द्वारा लगाया गया बल $\vec{\mathbf{F}}_{AB}$ हो, तो $\vec{\mathbf{F}}_{A \text{ पर } B \text{ द्वारा}} = -\vec{\mathbf{F}}_{B \text{ पर } A \text{ द्वारा}}$
जड़त्वीय निर्देश तंत्र	■ **जड़त्वीय निर्देश तंत्र** वह निर्देश तंत्र होता है जिसमें न्यूटन का गति का पहला नियम (जड़त्व का नियम) लागू होता है। अतएव, कोई भी निर्देश तंत्र जो विरामावस्था में हो या अचर वेग से गतिमान हो, जड़त्वीय निर्देश तंत्र होता है।
बल	■ **किसी पिंड पर (किसी कारक द्वारा) लगाया गया बल उसके वेग में परिवर्तन लाता है यानी वह पिंड में त्वरण उत्पन्न करता है। प्रत्येक बल का <u>कारक</u> होता है जो** सम्पर्क द्वारा या दीर्घ परासी या लघु परासी बल क्षेत्रों द्वारा **पिंड पर बल लगाता** है। **बल के नियम की अवधारणा बल की अवधारणा का अनिवार्य हिस्सा है।**
जड़त्वीय द्रव्यमान	■ **किसी भी पिंड का जड़त्वीय द्रव्यमान** उसका मूलभूत गुणधर्म होता है जो **उस पर लग रहे बाह्य बल का उसके त्वरण से संबंध देता है। समान नेट बाह्य बल के लिए कम द्रव्यमान वाले पिंड का, ज़्यादा द्रव्यमान वाले पिंड की तुलना में, त्वरण अधिक होता है।** जड़त्वीय द्रव्यमान किसी भी पिंड के जड़त्व का माप देता है।
बलों के अध्यारोपण का नियम	■ यदि एक ही समय पर पिंड पर अनेक बाह्य बल $\vec{\mathbf{F}}_1, \vec{\mathbf{F}}_2, \vec{\mathbf{F}}_3, \ldots$ लग रहे हों, तो उसका त्वरण उस एकल बल $\vec{\mathbf{F}}_{net}$ द्वारा उत्पन्न त्वरण के बराबर होता है, जो उन सभी बलों का सदिश योग होता है : $\vec{\mathbf{F}}_{net} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \vec{\mathbf{F}}_3 + \ldots = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i, \quad i = 1,2,3,\ldots$

5.6 अंत में कुछ प्रश्न

1. साइकिल की सवारी करते हुए एक बच्चा साइकिल के किसी चीज़ से अचानक टकराने पर आगे की ओर साइकिल से गिर जाता है। समझाएं कि ऐसा क्यों होता है।

2. कारण सहित बताएं कि निम्नलिखित में से प्रत्येक कथन सही है, ग़लत है या आंशिक रूप से सही है :

   i) यदि किसी पिंड पर कोई बल न लग रहा हो तो वह सदैव विरामावस्था में रहता है।

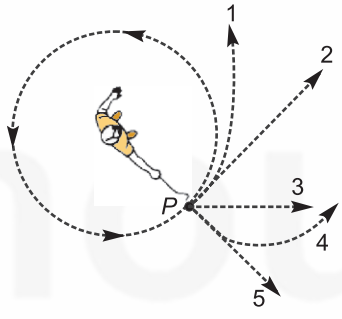
   ii) पिंड पर सदैव उससे सम्पर्क में स्थित कारक द्वारा लगाये गये धक्के द्वारा या उसके द्वारा खींचे जाने के कारण ही बाह्य बल लग सकता है।

   iii) अचर बल लगने पर पिंड का वेग अचर रहता है।

   iv) दीर्घ परासी बल के लिए एक माध्यम की आवश्यकता होती है जैसेकि पिंड और कारक को जोड़ने वाली रस्सी। इसलिए दीर्घ परासी बल निर्वात में स्थित किसी पिंड पर नहीं लग सकते।

   v) अंतरिक्ष में गतिमान एक अंतरिक्ष यान का इंजन किसी क्षण पर बंद हो जाता है। तब वह यान धीमा पड़ जाता है और रुक जाता है।

3. स्टील की एक गेंद को डोरी से बांध कर क्षैतिज तल में वृत्ताकार पथ पर घुमाया जाता है (चित्र 5.12)। बिंदु *P* पर गेंद के निकट से डोरी अचानक टूट जाती है। यदि आप इस घटना को ठीक ऊपर से देखें तो डोरी के टूटने के बाद चित्र में दिखाये गए 1 से 5 द्वारा अंकित पथों में से गेंद किस पथ पर चलेगी?



चित्र 5.12: अंत के प्रश्न 3 के लिए चित्र।

4. निम्नलिखित स्थितियों में से किस स्थिति में पिंड पर लग रहा नेट बल शून्य है?

   i. एक ट्रक सीधी रेखा में अचर चाल से चल रहा है;

   ii. एक गाड़ी वृत्ताकार पथ पर अचर चाल से चल रही है।

5. विरामावस्था में स्थित एक गाड़ी लें। आगे दिए हुए वाक्य को नीचे दिए हुए विकल्पों (क) और (ख) में से सही विकल्प लेकर पूरा करें : हम इस परिणाम पर कि गाड़ी पर नीचे की दिशा में पृथ्वी द्वारा लगाया गया गुरुत्वाकर्षण बल और गाड़ी पर पृथ्वी के कारण ऊपर की ओर लग रहा संपर्क बल बराबर और विपरीत हैं, पहुंचते हैं क्योंकि

   क) ये दोनों बल पारस्परिक क्रिया बल – युग्म हैं,

   ख) गाड़ी पर लग रहा नेट बल शून्य है।

6. एक पिंड पर दोनों स्थितियों में से किसमें नेट बल लग रहा होता है : (क) जब वह $2.0\,ms^{-2}$ के अचर त्वरण से गति करता है या (ख) $2.0\,ms^{-1}$ के अचर वेग से? अपने उत्तर को समझाएं।

7. न्यूटन का द्वितीय नियम हमें बताता है कि किसी भी पिंड पर जब एक नेट बल लगता है तो उसमें त्वरण उत्पन्न होता है। यदि एक ही समय पर पिंड पर दो या उससे अधिक बल लगते हैं तो क्या ज़रूरी है कि पिंड में त्वरण उत्पन्न हो? अपने उत्तर को समझाएं।

8. एक इमारत के ऊपर से एक पत्थर को नीचे फेंका जाता है। जब वह पत्थर गिर रहा होता है तो क्या उस पर लग रहा नेट बल शून्य होता है, यदि वायु प्रतिरोध नगण्य हो? अपने उत्तर की व्याख्या करें।

9. एक नाव पर वायु द्वारा परिमाण 900 N वाला बल लगता है जिसके कारण वह पूर्व दिशा में गतिमान होती है। उस पर पानी के बहाव के कारण पश्चिम दिशा में परिमाण 400 N वाला प्रतिरोध बल लगता है। यदि नाव का द्रव्यमान 500 kg हो तो उसका त्वरण क्या होगा?

10. 1500 kg द्रव्यमान की एक गाड़ी पश्चिम दिशा में 55.0 kmh^{-1} की चाल से गतिमान है। चालक द्वारा ब्रेक लगाए जाने पर वह 10.0 s की अवधि में रुक जाती है। न्यूटन के दूसरे नियम और शुद्धगतिकी की समीकरणों का प्रयोग करके गाड़ी पर लग रहे औसत बल की गणना करें।

5.7 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. क) जब टमाटर के सॉस की बोतल विरामावस्था में आती है तो जड़त्व के कारण बोतल का सॉस गतिमान रहता है और बोतल से बाहर निकल आता है।

   ख) किसी भी गाड़ी पर नेट बल नहीं लग रहा है क्योंकि वे अचर चालों से गतिमान हैं।

2. क) अजड़त्वीय, क्योंकि गेंद वृत्त में त्वरित गति कर रही है।

   ख) जड़त्वीय, क्योंकि साइकिल सवार भूमि के सापेक्ष अचर वेग से गतिमान है।

   ग) जड़त्वीय, क्योंकि बस भूमि के सापेक्ष अचर वेग से गतिमान है।

   घ) अजड़त्वीय, क्योंकि साइकिल सवार साइकिल को मोड़ते हुए त्वरित गति करता है।

   च) जड़त्वीय, चूंकि बारिश की बूंद अचर अंतिम वेग से गिरती है।

   छ) जड़त्वीय, चूंकि हवाई जहाज़ भूमि के सापेक्ष अचर वेग से गतिमान है।

   ज) अजड़त्वीय, चूंकि उपग्रह का परिमित अभिकेंद्र त्वरण है।

   झ) जड़त्वीय, चूंकि रेलगाड़ियां भूमि के सापेक्ष अचर वेग से गतिमान हैं।

3. क) मान लें कि *x*-अक्ष, स्ट्राइकर की गति की दिशा के अनुदिश है। उस पर बल है : $\vec{\mathbf{F}} = -0.04\,\mathrm{N}\,\hat{\mathbf{i}}$। स्ट्राइकर का त्वरण है :

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{m} = -\frac{0.04\ \mathrm{N}}{0.02\ \mathrm{kg}}\,\hat{\mathbf{i}} = -2.0\,\mathrm{ms}^{-2}\,\hat{\mathbf{i}}$$

विरामावस्था में आने से पहले उसके द्वारा तय की गई दूरी को प्राप्त करने के लिए हम शुद्धगतिकी की समीकरण का प्रयोग करते हैं :

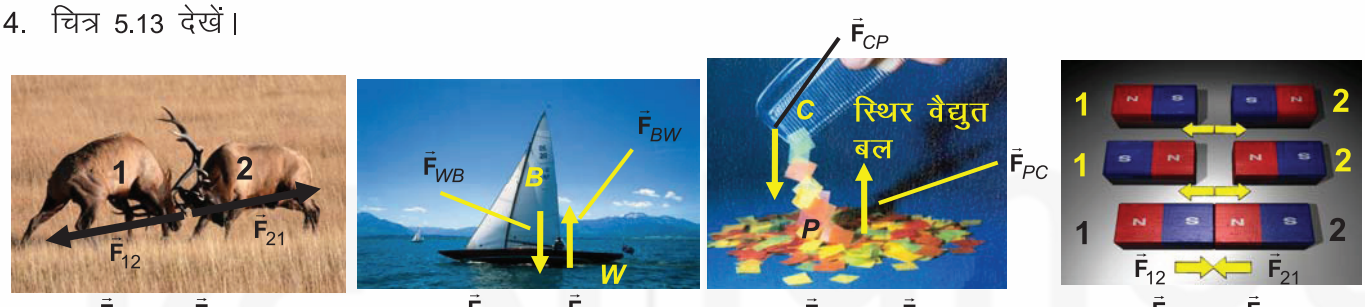
$v^2 - u^2 = 2as$ जहां $u = 2.0\ ms^{-1}, v = 0, a = -2.0\ ms^{-2}$

$$\therefore \quad s = \frac{(2.0\ ms^{-1})^2}{2 \times (2.0\ ms^{-2})} = 1.0 m$$

ख) (iii)। चूंकि डिब्बा अचर चाल से चलता रहा है, इसलिए उस पर लग रहा नेट बल शून्य है। डिब्बे पर लग रहे नेट बल का परिमाण, कुल नेट प्रतिरोध बल के बराबर है।

ग) (v)। चूंकि डिब्बे पर लग रहा अचर क्षैतिज बल दो गुना कर दिया जाता है इसलिए वह भाग (ख) के नेट प्रतिरोध बल से अधिक है। इसलिए उस पर नेट बल लग रहा है। इसलिए डिब्बे का त्वरण परिमित है और वह लगातार बढ़ती हुई चाल से चलता है।

4. चित्र 5.13 देखें।



$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (क) $\vec{F}_{WB} = -\vec{F}_{BW}$ (ख) $\vec{F}_{PC} = -\vec{F}_{CP}$ (ग) $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (घ)

चित्र 5.13: लेबलित क्रिया प्रतिक्रिया बल-युग्म क) और ख) सम्पर्क बलों के लिए; ग) और घ) दीर्घ परासी बलों के लिए।

5. (v) क्योंकि ये क्रिया-प्रतिक्रिया बल-युग्म हैं।

अंत में कुछ प्रश्न

1. साइकिल अचानक रुकने पर विरामावस्था में आती है लेकिन जड़त्व के कारण बच्चा आगे की ओर गतिमान रहता है और साइकिल से गिर जाता है।

2. i) आंशिक रूप से सही। यदि वह पिंड विरामावस्था में है तो वह विरामावस्था में बना रहेगा। यदि वह अचर वेग से गतिमान है तो वह उसी अचर वेग (एक ही चाल से एक ही दिशा में) से चलता रहेगा।

   ii) ग़लत। कारक पिंड के सम्पर्क में नहीं भी होता जैसे कि गुरुत्वाकर्षण बल **दीर्घ परासी** बल है।

   iii) ग़लत। अचर बल पिंड में अचर त्वरण उत्पन्न करता है।

   iv) ग़लत। दीर्घ परासी बलों को किसी माध्यम की आवश्यकता नहीं होती।

   v) ग़लत। चूंकि अंतरिक्ष यान पर लग रहा नेट बल शून्य हो जाता है, इसलिए वह अचर चाल से चलता रहता है क्योंकि अंतरिक्ष में घर्षण नगण्य होता है।

3. गेंद पथ 2 पर वृत्ताकार पथ की स्पर्श रेखा के अनुदिश चलेगी।
4. स्थिति (i) में पिंड पर लग रहा नेट बल शून्य है चूंकि ट्रक सीधी रेखा में अचर चाल से चल रहा है यानी उसका वेग अचर है।
5. (ख) चूंकि गाड़ी पर पृथ्वी द्वारा लगाया गया गुरुत्व बल, गाड़ी पर पृथ्वी द्वारा लगाए गए अभिलंब बल के बराबर और विपरीत है। अतः, गाड़ी पर लग रहा नेट बल शून्य है।
6. $2.0\,ms^{-2}$ के अचर त्वरण से गतिमान पिंड पर नेट बल लगता है।
7. यह ज़रूरी नहीं है कि पिंड में त्वरण उत्पन्न हो ही : पिंड में त्वरण उत्पन्न होगा जब उस पर एक नेट बल लगता है। यदि पिंड पर लग रहा नेट बाह्य बल शून्य होगा तो पिंड का त्वरण शून्य होगा।
8. पत्थर पर लग रहा नेट बल शून्य नहीं है क्योंकि उस पर गुरुत्व बल लग रहा है।
9. नाव पर पूर्व दिशा में नेट बल (900 – 400) N या 500 N है। नाव का त्वरण है

$$a = \frac{500\,N}{500\ kg} = 1 ms^{-2}$$ पूर्व दिशा में।

10. समीकरण $v = u - at$ का उपयोग करने पर जहां $v = 0$,
$u = 55.0\ kmh^{-1} = 15.3\ ms^{-2}$ और $t = 10.0\,s$, हमें मिलता है :

$$a = \frac{15.3\ ms^{-1}}{10.0\,s} = 1.53\ ms^{-2}$$

गाड़ी पर लग रहा औसत बल है :

$$F = 1500\ kg \times 1.53\,ms^{-2} = 2295 N = 2.30 \times 10^3\,N$$

उत्तर 3 सार्थक अंकों तक है।

झूला पुल की रस्सी क्षैतिज न होकर वक्राकार क्यों होती है? उत्तर जानने के लिए, इस इकाई को पढ़ें!

इकाई 6

न्यूटन के गति के नियमों को लागू करना

इकाई की रूपरेखा

6.1 परिचय
उद्देश्य
6.2 हमारे चारों ओर मौजूद बल
अभिलंब बल
घर्षण बल
तनाव बल
कमानी बल
प्रकृति में मूलभूत बल
6.3 न्यूटन के गति के नियमों को लागू करना
बल-निर्देशक आरेख खींचना
साम्यावस्था में स्थित पिंड
पिंड जो साम्यावस्था में नहीं हैं
6.4 एकसमान वर्तुल गति
6.5 सारांश
6.6 अंत में कुछ प्रश्न
6.7 हल और उत्तर

अध्ययन निर्देशिका

इस इकाई में, आप न्यूटन के गति के नियमों को अपने आसपास की विभिन्न स्थितियों पर लागू करना सीखेंगे जिनमें किसी पिंड पर बल आरोपित हो रहे हों। इस इकाई को अच्छी तरह से समझने के लिए **आपको इकाइयों 1 और 2 में समझाई गई सदिश बीजगणित, स्कूली गणित में पढ़ी हुई कलन की अवधारणाएं और इकाई 5 में समझाई गई अवधारणाएं अच्छी तरह आनी चाहिए**। इस इकाई को पढ़ने से पहले आप इन अवधारणाओं को दोहरा लें। इस इकाई के प्रश्नों को हल करने के लिए दी गई विधियों को आप बहुत ध्यान से समझें और लागू करें। आपको किसी पिंड की गति का विश्लेषण करने के लिए बल-निर्देशक आरेख खींचना भी सीखना है। इकाई में दिए गए सभी उदाहरणों और सवालों को स्वयं हल करने की कोशिश करें। ऐसा करने से आप न्यूटन के गति के नियमों को बिना कोई ग़लती किये लागू कर पायेंगे।

"कल्पना शक्ति, ज्ञान से अधिक महत्त्वपूर्ण है। क्योंकि ज्ञान, हम जो कुछ आज तक जान पाए और समझ पाए हैं, उसी तक सीमित है। लेकिन कल्पना की उड़ान में पूरा संसार शामिल है और साथ ही वह सभी कुछ शामिल है जिसे भविष्य में कभी भी जाना और समझा जाएगा।"

अल्बर्ट आइंस्टीन

6.1 परिचय

इकाई 5 में आपने न्यूटन के गति के नियम, बल और द्रव्यमान की अवधारणाएं पढ़ी हैं। आप जानते हैं कि समीकरण $\vec{F}_{net} = m\vec{a}$ में, $\vec{F}_{net}$ पिंड पर किसी कारक द्वारा लगाया गया बल है और यह किसी **बल नियम** द्वारा दिया जाता है। अब आप जानना चाहेंगे : **भिन्न प्रकार के वे कौन से बल** और **बल नियम हैं जिनके लिए न्यूटन के गति के नियमों को लागू किया जा सकता है**?

घर्षण बल, तनाव बल और कमानी बल से, जिनकी चर्चा हम इस इकाई में करेंगे, आप अच्छी तरह परिचित हैं। ये बल कणों के संपर्क के कारण उन पर आरोपित होते हैं और "**संपर्क**" बल भी कहलाते हैं। इकाई के भाग 6.2 में हम इन बलों का संक्षेप में वर्णन करेंगे। भाग 6.3 में आप विविध वस्तुओं की गति के लिए न्यूटन के द्वितीय नियम द्वारा दिए गए गति के समीकरण को हल करना सीखेंगे। हम सरल रेखा और समतल में गति की चर्चा करेंगे जिनके बारे में आपने स्कूल की भौतिकी में पढ़ा है। अंत में, भाग 6.4 में हम ये नियम एकसमान वर्तुल गति पर लागू करेंगे।

ध्यान दें

अपने लिखित कार्य में आप सदिश राशि को ऊपर तीर लगा कर इस प्रकार लिखें : $\vec{r}$ ।
एकक सदिश को इस प्रकार लिखें : $\hat{r}$ ।

अगली इकाई में आप गुरुत्वाकर्षण बल, जो ब्रह्मांड में मौजूद सभी स्थूल पिंडों पर आरोपित होता है और गुरुत्व बल, जो पृथ्वी पर मौजूद सभी स्थूल पिंडों पर आरोपित होता है, के बारे में पढ़ेंगे। साथ ही हम भार की अवधारणा भी समझाएंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- बलों का वर्गीकरण मूलभूत बलों और उन बलों में जो मूलभूत नहीं हैं, कर सकेंगे;
- किसी पिंड की गति के अध्ययन के लिए बल-निर्देशक आरेख खींच सकेंगे;
- न्यूटन के गति के नियमों को सरल समस्याओं पर लागू कर सकेंगे; और
- एकसमान वर्तुल गति से संबंधित सवालों को हल कर सकेंगे।

6.2 हमारे चारों ओर मौजूद बल

हम प्रकृति में मौजूद बलों को दो वर्गों में रखते हैं : **मूलभूत बल** और वे **बल जो मूलभूत नहीं हैं**। **मूलभूत बल**, जिनकी चर्चा हम भाग 6.2.5 में करेंगे, इस अर्थ में अद्वितीय हैं कि बाकी के सभी बलों को **जो मूलभूत नहीं हैं**, हम उनके द्वारा समझ सकते हैं। कणों की गति के वर्णन में आसानी के लिए, बलों का वर्गीकरण **सम्पर्क बलों** और **दीर्घ परासी बलों में** किया जाता है (देखें तालिका 6.1)।

विस्तारित पिंडों पर लगने वाले बलों के उदाहरण हैं : **गुरुत्वाकर्षण बल** (force of gravitation), **तरल दाब बल** (fluid pressure), **श्यानता बल** (viscous force), **घन दाब बल** (solid pressure) और **घर्षण बल** (friction), **स्थानीय संपर्क बल** (localized contact), **प्रतिबल** (stress) और **अपरूपण** (shear)।

तालिका 6.1 : हमारे चारों ओर मौजूद बल।

सम्पर्क बल	दीर्घ परासी बल
• *ठोस वस्तुओं से सम्पर्क* – डोरी, कमानी और दृढ़ पिंडों से अचल सम्पर्क – सर्पी (sliding) / सरकते हुए सम्पर्क, और – टक्कर द्वारा सम्पर्क। • *तरल पदार्थों से सम्पर्क* – उत्प्लावकता (buoyancy), और – कर्षण (drag)।	• गुरुत्वाकर्षण (न्यूटनी), • स्थिर वैद्युत (कूलॉम बल), और • चुम्बकीय (द्विध्रुव)।

प्रतिबल और अपरूपण जैसे विरूपण बलों की व्याख्या घन अवस्था भौतिकी में की जाती है।

इनमें से गुरुत्वाकर्षण बल की चर्चा हम इकाई 7 में करेंगे। अब हम अपने चारों ओर लग रहे कुछ संपर्क बलों की बात करेंगे जैसेकि **अभिलंब बल, घर्षण बल** (स्थैतिक और गतिक), **तनाव बल**, **पिंडों को खींचते हुए** या उन्हें **धक्का देते** हुए लगाए गए बल और **कमानी बल**।

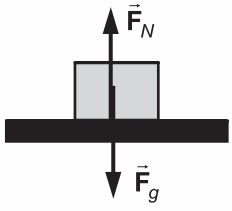
6.2.1 अभिलंब बल

अभिलंब बल की अवधारणा समझने के लिए, आप एक आसान गतिविधि करें। किसी गद्दे या नरम सतह (जैसे कि किसी नरम खिलौने) को अपनी हथेली से दबाएं। ऐसा करने पर क्या होता है? नरम सतह विरूपित हो जाती है और आपकी हथेली पर वापस बल लगाती है।

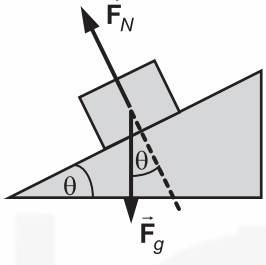
न्यूटन के गति के तीसरे नियम के अनुसार आपकी हथेली द्वारा सतह पर लगाया गया बल उस नरम सतह द्वारा आपकी हथेली पर लगाए गए बल के बराबर लेकिन विपरीत दिशा में होता है। आप इस बल को महसूस भी कर सकते हैं : इसके लिए मेज़ या दीवार जैसी किसी कड़ी सतह को अपनी उंगली से ज़ोर से दबाकर देखें। यदि आप बहुत ज़ोर से उसे दबाएंगे तो आपको अपनी उंगली में दर्द महसूस होगा। ऐसा इसलिए होता है क्योंकि मेज़ / दीवार आपकी उंगली पर बराबर और विपरीत दिशा में बल आरोपित करती है।

सतह द्वारा आरोपित किये जाने वाले बल को **अभिलंब बल** कहा जाता है। इसे यह नाम इसलिए दिया गया है क्योंकि यह **सतह के लंबवत्** लगता है। यदि आप सतह को किसी कोण पर दबाएं तो आप आरोपित बल को दो घटकों में वियोजित कर सकते हैं : एक सतह के **समांतर** और दूसरा सतह के **लंबवत्। संपर्क में स्थित किन्हीं दो सतहों के बीच लग रहे बल के लंबवत् घटक को हम अभिलंब बल** कहते हैं।

(क)



(ख)



(ग)

चित्र 6.1: अभिलंब बल के उदाहरण।

अभिलंब बल

जब कोई पिंड किसी अन्य पिंड पर बल आरोपित करता है जिसका एक घटक दूसरे पिंड की सतह के लंबवत् होता है, तो दूसरा पिंड (भले ही वह दृढ़ पिंड क्यों न हो) विरूपित हो जाता है। वह पहले पिंड पर बराबर और विपरीत अभिलंब बल (normal force) आरोपित करता है। अभिलंब बल संपर्क में स्थित सतहों के लंबवत् होता है।

चित्र 6.1 में हमने अभिलंब बल के तीन उदाहरण दिखाए हैं। चित्र 6.1क में टायर भूमि पर बल आरोपित करता है (गुरुत्व बल, $\vec{F}_g$) और भूमि टायर पर बराबर और विपरीत **अभिलंब बल** (माना कि, $\vec{F}_N$) आरोपित करती है। चित्र 6.1ख में क्षैतिज सतह पर रखा एक पिंड सतह पर गुरुत्व बल ($\vec{F}_g$) आरोपित करता है और सतह, पिंड पर बराबर और विपरीत अभिलंब बल ($\vec{F}_N$) आरोपित करती है। इन दोनों ही स्थितियों में,

$$F_N = F_g \tag{6.1}$$

चित्र 6.1ग में, पिंड को एक नत समतल पर रखा गया है और अभिलंब बल, गुरुत्व बल $\vec{F}_g$ के लंबवत् घटक के, यानी $F_g \cos\theta$ के बराबर है :

$$F_N = F_g \cos\theta \tag{6.2}$$

6.2.2 घर्षण बल

भाग 6.2.1 में आपने जाना कि जब कोई पिंड किसी सतह या किसी अन्य पिंड के संपर्क में होता है तो **अभिलंब बल**, पिंड पर संपर्क में आने वाली सतहों के **लंबवत्** आरोपित होता है। जब पिंड सतह पर गतिमान होता है या गतिमान होने का प्रयास करता है तो उस पिंड पर एक और बल आरोपित होता है जो **संपर्क में स्थित सतहों के समान्तर** होता है। यह बल **घर्षण बल** या केवल **घर्षण** कहलाता है (चित्र 6.2)।

गुरुत्व बल के बारे में आपने स्कूल की भौतिकी में पढ़ा है। यह बल पृथ्वी द्वारा उस पर मौजूद हरेक पिंड पर आरोपित होता है।

घर्षण

जब कोई पिंड किसी अन्य पिंड की सतह पर गति करता है या गति करने का प्रयास करता है तो उस पिंड पर **घर्षण बल (force of friction)** आरोपित होता है। **इस बल की दिशा संपर्क में स्थित सतहों की दिशा के अनुदिश होती है और उस दिशा के विपरीत होती है जिसमें वह पिंड गति करता है या गति का प्रयास करता है।**

घर्षण बल संपर्क में आने वाली सतहों के पदार्थों के बीच लग रहे अंतरा-परमाणुक और अंतरा-अणुक बलों के कारण लगता है।

घर्षण बल हमारे चारों ओर मौजूद है (चित्र 6.2)। ज़्यादातर स्थितियों में हमें घर्षण बल कम करना होता है वरना यह गतिमान पिंडों की गति को कम करके उन्हें रोक सकता है। वास्तव में, हमारे चारों ओर घर्षण को कम करने के लिए काफ़ी प्रयास किया जाता है। मसलन, गाड़ी के इंजन में पिस्टन और इंजन की दीवारों के बीच इंजन में तेल इसलिए रखा जाता है कि उनके बीच में घर्षण बल कम हो जाए और उनमें टूट-फूट कम हो। इसी तरह से कई मशीनों के अवयवों के बीच में ग्रीज़ लगाई जाती है ताकि उनके बीच की रगड़ कम हो जाए, घर्षण कम हो और वे जल्दी न घिसें।

लेकिन हमारे चारों ओर ऐसी भी स्थितियां होती हैं जिनमें घर्षण परम आवश्यक होता है। उदाहरण के लिए, यदि हमारे पैरों और भूमि के बीच में घर्षण बल न लगता तो हम कभी चल ही नहीं पाते। इसीलिए हम गीले फ़र्शों पर या बर्फ़ पर फिसल जाते हैं क्योंकि तब हमारे पैरों और उन सतहों के बीच घर्षण कम होता है। इसी तरह बारिश में गाड़ियों के फिसलकर पलटने की संभावना बढ़ जाती है क्योंकि टायर की सतह और सड़क के बीच में बह रहा पानी उनके बीच के घर्षण को कम करता है (चित्र 6.2ग)। इसी वजह से टायरों में खांचे इस तरह डिज़ाइन किए जाते हैं ताकि सड़क और टायर के बीच घर्षण बढ़ जाए। जब टायर गीली सड़क पर चलता है तो इन खांचों के बीच से होकर पानी टायर से बाहर निकल जाता है। इसके फलस्वरूप टायर और सड़क के बीच में घर्षण बना रहता है और गाड़ी के फिसलने का खतरा कम हो जाता है।

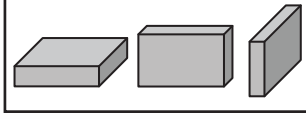
(क) (ख) (ग)

चित्र 6.2: **घर्षण हमारे चारों ओर मौजूद है – क) यह हमें चलने में मदद करता है और अगर घर्षण न हो तो हम फिसल जाते हैं; ख) तैरते वक्त हम घर्षण के विरुद्ध गति करते हैं; ग) घर्षण गीली सड़क पर गाड़ी चलाने में सहायक होता है। जब टायर गीली सड़क पर चलता है तो टायर के खांचों से पानी बाहर की ओर बह जाता है। इसके फलस्वरूप, टायर के जो हिस्से सड़क के संपर्क में होते हैं वहां पानी नहीं होता और टायर और सड़क के बीच में घर्षण बढ़ जाता है।**

घर्षण बल दो प्रकार के होते हैं : **स्थैतिक घर्षण बल** और **गतिक घर्षण बल**। **स्थैतिक घर्षण बल एक-दूसरे के सापेक्ष विरामावस्था में स्थित दो सतहों के बीच में लगता है**। उदाहरण के लिए, मान लें कि आप एक बहुत भारी बक्से को धक्का देते हैं और वह अपनी जगह से नहीं हिलता। इसका अर्थ है कि बक्से पर बराबर और विपरीत दिशा में कोई बल लग रहा है। यही बल, **स्थैतिक घर्षण बल** है। अब आप मान लें कि आप बक्से को पूरी ताकत से धक्का देते है और तब भी बक्सा अपनी जगह से नहीं हिलता। इसका अर्थ है कि स्थैतिक घर्षण का परिमाण भी बढ़ गया है। अगर आप बक्से को और अधिक बल लगाकर धक्का देंगे तो एक ऐसी स्थिति आएगी जब बक्सा गति करना शुरू करेगा। तब उस पर **अधिकतम स्थैतिक घर्षण बल** लग रहा होता है।

ध्यान दें

स्थैतिक घर्षण बल का अधिकतम मान एक ही रहेगा चाहे पिंड की कोई भी सतह दूसरी सतह के संपर्क में हो :



स्थैतिक घर्षण बल का परिमाण शून्य से लेकर एक अधिकतम मान तक हो सकता है। उसका मान पिंड पर लग रहे बल के मान पर निर्भर करता है। स्थैतिक घर्षण बल (force of static friction) **का अधिकतम मान उस बल के न्यूनतम मान के बराबर होता है जो पिंड को गति देने के लिए आवश्यक होता है :**

$$F_s^{max} = \mu_s F_N \qquad (6.3)$$

अधिकतम स्थैतिक घर्षण बल

ध्यान दें

स्थैतिक और गतिक घर्षण गुणांक, बलों के अनुपात होते हैं। इसीलिए वे विमाहीन होते हैं और इनकी कोई इकाई नहीं होती। इनके मान संपर्क में आने वाली सतहों के पदार्थों पर निर्भर करते हैं जैसे कि कंकरीट पर लकड़ी या कंकरीट पर रबड़ आदि।

जहां μ_s **स्थैतिक घर्षण गुणांक** (coefficient of static friction) कहलाता है। F_N अभिलंब बल का परिमाण है जो समीकरण 6.1 या समीकरण 6.2 द्वारा दिया जाता है।

जब दोनों सतहें एक दूसरे पर फिसलने लगती हैं तो उनके बीच गतिक घर्षण बल (force of kinetic friction) **लगता है**। यह बल उन दोनों सतहों की आपेक्षिक सर्पी (sliding) गति का विरोध करता है।

फ़र्श पर किसी पिंड को धक्का देते हुए आपने महसूस किया होगा कि उन्हें गतिमान रखने के लिए आपको कम बल लगाना होता है।

इसलिए हम यह कह सकते हैं कि गतिक घर्षण बल का परिमाण स्थैतिक घर्षण बल के परिमाण से कम होता है।

अधिकतम गतिक घर्षण बल

इसका मान होता है :

$$F_k = \mu_k F_N \qquad (6.4)$$

जहां μ_k **गतिक घर्षण गुणांक** कहलाता है और F_N अभिलंब बल का परिमाण है।

जब कोई पिंड किसी अन्य पिंड के संपर्क में हो, तो आप सदैव ध्यान रखें कि उनके बीच

- **संपर्क में स्थित सतहों के लंबवत्, अभिलंब बल लग रहे होते हैं, और**
- **संपर्क में स्थित सतहों के समांतर, घर्षण बल लग रहे होते हैं।**

6.2.3 तनाव बल

अक्सर पिंडों को खींचने के लिए उनसे रस्सी, डोरी या केबल जोड़ कर उन पर बल आरोपित किया जाता है (चित्र 6.3)। जिस बल से वह रस्सी, डोरी या केबल उस पिंड को खींचता है, उसे हम **तनाव बल** (tension force) या केवल **तनाव** (tension) भी कहते हैं।

चित्र 6.3: तनाव बल। इस स्थिति में, कुत्ता बच्चे को खींच रहा है!

तनाव

तनाव बल रस्सी, डोरी या केबल द्वारा किसी पिंड को खींचे जाने पर उस पर आरोपित होता है। **इसकी दिशा डोरी के अनुदिश और पिंड से परे होती है।** इसे तनाव बल इसलिए कहते हैं क्योंकि डोरी को कसकर खींचा जाता है और वह तनी हुई होती है। **डोरी में तनाव, पिंड पर लग रहे तनाव बल के परिमाण के बराबर होता है।** यदि डोरी तनी हुई हो तब वह शून्य नहीं होता। यदि डोरी ढीली हो तो तनाव बल शून्य होता है।

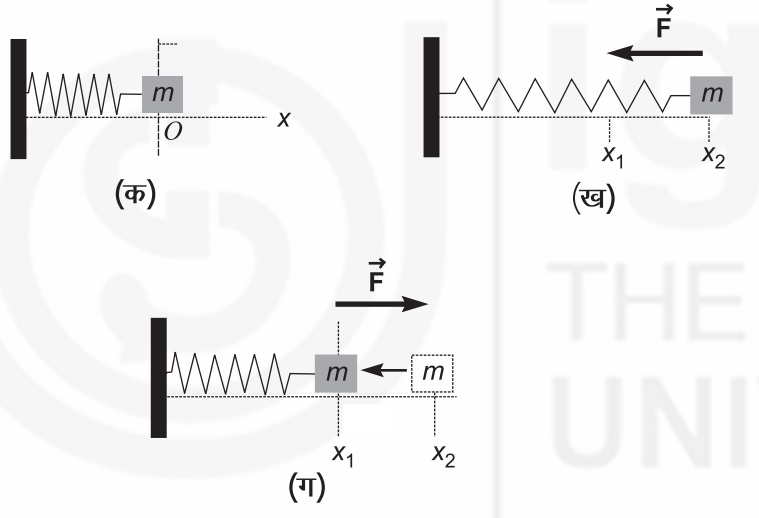
एक डोरी या रस्सी को हम **द्रव्यमानहीन** कहते हैं जब हम उसके द्रव्यमान को नगण्य मान सकते हैं। ऐसी स्थितियों में **डोरी को त्वरण देने के लिए नेट बल की आवश्यकता नहीं होती।** तब **द्रव्यमानहीन डोरी के एक सिरे पर आरोपित बल (बिना कम हुए) डोरी के दूसरे सिरे पर स्थित पिंड पर आरोपित होता है।** लेकिन यदि डोरी का कुछ द्रव्यमान होता है तो तनाव बल का कुछ भाग उसे त्वरित

करने में लगता है। इसलिए ऐसी डोरी द्वारा पिंड पर आरोपित बल का मान तनाव बल के मान से कम होगा।

6.2.4 कमानी बल

हमारे चारों ओर कमानियां कई चीज़ों में इस्तेमाल होती हैं, जैसेकि तरह-तरह के खिलौनों में, गाड़ियों में, कमानी तुला में। स्कूल की भौतिकी में आपने पढ़ा है कि जब भी किसी कमानी को उससे जुड़े किसी पिंड द्वारा दबाया या खींचा जाता है, तब कमानी उस पर बल आरोपित करती है। इसे **कमानी बल** कहते हैं। कमानी बल, पिंड को उसकी साम्यावस्था की स्थिति में या विरामावस्था की स्थिति में वापस ले जाने की कोशिश करता है। इसीलिए इसे **प्रत्यानयन बल** (restoring force) भी कहते हैं। अधिकतर कमानियों के लिए यह बल, उस दूरी के समानुपाती होती है जिससे कमानी को खींचा या दबाया जाता है।

चित्र 6.4 में दिए हुए कमानी-द्रव्यमान तंत्र को देखें। कमानी का एक सिरा अचल दीवार से जुड़ा है और स्थायी है। दूसरे सिरे पर एक ब्लॉक है जो क्षैतिज सतह पर गति कर सकता है। कमानी द्वारा ब्लॉक पर **कमानी बल** आरोपित होता है। अगर हम ब्लॉक को दायीं ओर खींच कर कमानी को खींचते हैं तो कमानी बल $\vec{\mathbf{F}}$ ब्लॉक पर बायीं ओर आरोपित होता है (चित्र 6.4ख)। अगर हम ब्लॉक को बायीं ओर धक्का देकर दबाते हैं तो कमानी बल ब्लॉक पर दायीं ओर आरोपित होता है।



चित्र 6.4: कमानी-द्रव्यमान निकाय पर लग रहा कमानी बल – क) x-अक्ष का मूल बिंदु वह बिंदु है जिस पर ब्लॉक कमानी से जुड़ा है; ख) ब्लॉक को $x = x_1$ से $x = x_2$ तक खींचा जाता है; ग) ब्लॉक को $x = x_2$ से $x = x_1$ तक दबाया जाता है।

प्रयोगों में पाया गया कि कमानी बल का परिमाण, उस दूरी के समानुपाती होता है जिससे कमानी खींची या दबाई जाती है। अतः, यदि एक आदर्श कमानी का विस्थापन $\vec{\mathbf{x}}$ हो तो कमानी बल होता है :

$$\vec{\mathbf{F}} = -k\vec{\mathbf{x}} \qquad (6.5\text{क})$$

यहां ऋणात्मक चिन्ह बताता है कि कमानी बल कमानी के मुक्त सिरे के विस्थापन के विपरीत दिशा में है। इसे आदर्श एकविम कमानी के लिए हुक का नियम भी कहते हैं। चित्र 6.4क में दिए गए अक्ष के चुनाव के लिए हम लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{F}} = -kx\hat{\mathbf{i}} \quad \text{या} \quad F = -kx \qquad (6.5\text{ख})$$

हुक का नियम तभी तक वैध होता है जब तक कमानी का पदार्थ प्रत्यास्थता की सीमा में रहता है। जब तक कमानी प्रत्यास्थता की सीमा में रहती है, हम लिख सकते हैं :

$$F = -kx$$

अचर k को **कमानी नियतांक** (**spring constant**) या **बल नियतांक** (**force constant**) कहते हैं। यह हमेशा धनात्मक होता है और कमानी के कड़ेपन का अंदाज़ा देता है : k का मान जितना अधिक होगा, कमानी उतनी ही कड़ी होगी और उतना ही अधिक कमानी बल आरोपित करेगी। आइए, कमानी बल की अवधारणा को दोहराएं।

दोहराएं

कमानी बल

जब कमानी से जुड़े किसी पिंड द्वारा उसे खींचा या दबाया जाता है, तो कमानी द्वारा पिंड पर बल आरोपित होता है। इसे **कमानी बल** कहते हैं। कमानी बल, पिंड को उसकी साम्यावस्था या विरामावस्था की स्थिति में वापस ले जाने की कोशिश करता है। कमानी बल का परिमाण, उस दूरी के समानुपाती होता है जिससे कमानी खींची या दबाई जाती है। अतः, यदि एक आदर्श कमानी का विस्थापन $\vec{\mathbf{x}}$ हो तो कमानी बल का मान होता है :

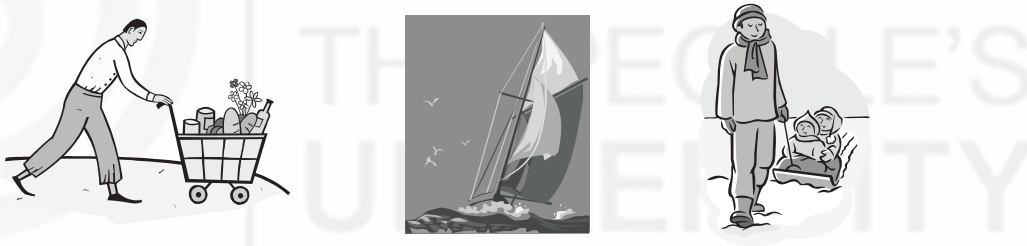
$$\vec{\mathbf{F}} = -k\vec{\mathbf{x}} \qquad (6.5\text{क})$$

अचर k को **कमानी नियतांक** या **बल नियतांक** कहते हैं।

इस भाग में अंत में, हम मूलभूत बलों के बारे में बताएंगे। लेकिन उससे पहले, आप एक बोध प्रश्न करें।

बोध प्रश्न 1 – हमारे चारों ओर मौजूद बल

चित्र 6.5 में दिखाए गए पिंडों जैसे गाड़ी, नाव और स्लेड पर लग रहे बलों को उनके चित्रों पर दिखाएं।



चित्र 6.5

6.2.5 प्रकृति में मूलभूत बल

हमें प्रकृति में तीन प्रकार के मूलभूत बल होने की जानकारी है :

- **गुरुत्वाकर्षण बल,**
- **इलैक्ट्रो-क्षीण बल** (जिसमें विद्युत्-चुम्बकीय बल और क्षीण नाभिकीय बल शामिल हैं), और
- **प्रबल बल**।

वास्तव में, प्रकृति में जो बल संपर्क के कारण नहीं लगते उन्हें अब हम दूरी पर लग रहे बल (action at a distance) नहीं कहते। ऐसे सभी बल (जिनके कारक पिंड के संपर्क में नहीं होते), **बल क्षेत्र** (**force field**) कहलाते हैं। बल क्षेत्र की संकल्पना के बारे में आप उच्चतर भौतिकी के पाठ्यक्रमों में पढ़ेंगे। इस पाठ्यक्रम में हम मुख्यतः

गुरुत्वाकर्षण बल का अध्ययन करेंगे। गुरुत्वाकर्षण बल, गुरुत्व बल और भार के बारे में आप इकाई 7 में विस्तार से पढ़ेंगे। तालिका 6.2 में हम इन बलों के कुछ गुणधर्म प्रस्तुत कर रहे हैं।

तालिका 6.2 : तीन मूलभूत बलों के कुछ गुणधर्म।

बल	आपेक्षिक परिमाण	परास	महत्त्व
गुरुत्वाकर्षण	10^{-39}	अनंत	ब्रह्माण्ड में मौजूद सभी स्थूल पिंडों पर आरोपित होता है।
इलैक्ट्रो-क्षीण : विद्युत्-चुम्बकीय	10^{-2}	अनंत	दैनिक जीवन की कई परिघटनाओं में लग रहे बलों जैसे घर्षण, तनाव, अभिलंब बल आदि को नियंत्रित करता है।
क्षीण नाभिकीय	10^{-5}	10^{-15} cm	नाभिकीय रूपांतरणों, बीटा क्षय आदि में आरोपित होता है।
प्रबल नाभिकीय	1	10^{-13} cm	न्यूक्लिऑनों को बांध कर रखता है।

याद रखें : न्यूटन के गति के नियम यांत्रिकी के मूलभूत नियम हैं जिन्हें किसी भी स्थूल कण की गति पर लागू किया जा सकता है। ये नियम कण की गति और उस पर लग रहे बलों के बीच संबंध स्थापित करते हैं। गति के समीकरण ($\vec{F}_{net} = m\vec{a}$) में नेट बल घर्षण, तनाव, कमानी बल आदि में से कोई भी बल हो सकता है जिनके बारे में आपने इस भाग में पढ़ा है। अब हम इन बलों के उदाहरण लेंगे और समझाएंगे कि न्यूटन के गति के नियमों को कैसे लागू किया जाता है।

स्थूल शब्द का अर्थ है 'केवल आंख से दिखाई देने वाला'। लेकिन भले ही हमें स्थैतिक आवेश आंख से दिखाई नहीं देते, हम न्यूटन के नियमों का प्रयोग उनका पथ निर्धारित करने के लिए कर सकते हैं जैसे कि कैथोड किरण ऑसिलोस्कोप में इलेक्ट्रॉन का पथ निर्धारित करने के लिए।

6.3 न्यूटन के गति के नियमों को लागू करना

सबसे पहले हम न्यूटन के गति के नियमों को लागू करने की विधि समझाएंगे। आप गति की प्रत्येक समस्या पर न्यूटन के नियम लागू करने के लिए नीचे दी गई विधि को सिलसिलेवार तरीके से लागू करें।

न्यूटन के गति के नियमों को लागू करने की विधि

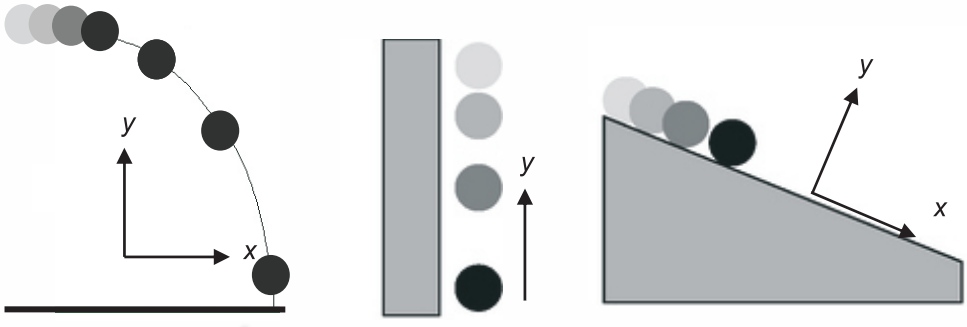
प्रत्येक स्थिति के लिए :

1. **सभी पिंडों** और उन पर लग रहे **बलों की पहचान करें** चाहे वे संपर्क के कारण लग रहे हों या दीर्घ परासी बल हों। यदि संभव हो तो उस स्थिति के लिए सभी मुख्य लक्षणों को दिखाते हुए एक सरल आरेख खींचें।

2. जिस पिंड या जिन पिंडों पर आपको न्यूटन के गति के नियम लागू करने हैं उसके/उनके लिए **बल-निर्देशक आरेख** (free-body diagram) खींचें।

3. उपयुक्त **जड़त्वीय निर्देश तंत्र का चुनाव करें** और उस स्थिति पर लागू हो रहे गति के नियम लिखें।

4. बल-निर्देशक आरेख पर निर्देशांक अक्ष खींचें। यदि त्वरण की दिशा मालूम हो तो *x*-अक्ष को उसी दिशा में लें। आप हर सवाल में अलग निर्देश तंत्र (निर्देशांक अक्ष) चुन सकते हैं (देखें चित्र 6.6)। लेकिन **वे सभी तंत्र जड़त्वीय तंत्र होने चाहिए**।



चित्र 6.6 : दी गई स्थिति के अनुसार निर्देशांक अक्षों को अलग-अलग तरह से चुना जा सकता है।

5. प्रत्येक पिंड के लिए न्यूटन के गति के दूसरे नियम को उसके **घटकों के रूप में** लिखें और अज्ञात राशियों के लिए हल करें।

6. अपने परिणामों का विवेचन करें और देखें कि वे सही हैं कि नहीं। आप अपने परिणामों की जांच उन्हें विशेष स्थितियों के लिए परिकलित करके भी कर सकते हैं जिनके लिए आपको पहले से ही जवाब मालूम हों।

न्यूटन के गति के नियमों को लागू करने के लिए ऊपर दी गई विधि को इस्तेमाल करने से पहले आपको निम्नलिखित बातें **अच्छी तरह समझ लेनी चाहिए** :

- न्यूटनी यांत्रिकी का जो स्वरूप हम आज जानते हैं उसे उस रूप में न्यूटन ने भी पेश नहीं किया था। इसकी शुरुआत गैलीलियो ने की थी और फिर इसके सुधार और विस्तार में बहुत से वैज्ञानिकों का योगदान रहा है। न्यूटनी यांत्रिकी न्यूटनी संसार पर लागू होती है जिसका **निर्माण** वास्तविक भौतिक संसार का वर्णन करने के लिए किया गया है। वास्तविक संसार और न्यूटनी संसार एक-दूसरे से बिल्कुल भिन्न हैं।

- न्यूटनी संसार में **सभी पिंडों को बिंदु कण** माना जाता है (हाशिए पर दी गई टिप्पणी पढ़ें)। इन कणों की गति का विश्लेषण **जड़त्वीय निर्देश तंत्रों** में किया जाता है। इकाई 5 में दी गई वेग, त्वरण, बल की अवधारणाएं, बल नियम और इस इकाई में दी गई अवधारणाएं इस संसार में स्थित कणों पर लागू होती हैं। न्यूटन के नियम सभी **जड़त्वीय प्रेक्षकों** (यानी वे प्रेक्षक जो एक-दूसरे के सापेक्ष विरामावस्था में हैं या अचर वेग से गतिमान हैं) के लिए मान्य होते हैं।

ध्यान दें

न्यूटनी संसार बिंदु कणों से बना होता है। इस संसार में विस्तारित पिंडों को कणों द्वारा निरूपित किया जाता है लेकिन याद रखें कि वास्तविक भौतिक संसार में बिंदु कणों का अस्तित्व नहीं होता। **बिंदु कण मात्र एक अवधारणा** है जो न्यूटनी यांत्रिकी में दी जाती है। पिंडों पर न्यूटनी यांत्रिकी को लागू करने में हम उसके कणों पर लग रहे बलों को लेते हैं। फिर पिंड पर लग रहे बल को उसके कणों पर लग रहे बलों के योग के रूप में व्यक्त करते हैं। **न्यूटन के गति के दूसरे नियम को सीधे तौर पर विस्तारित पिंड पर लागू नहीं किया जा सकता जब तक कि हम उसे कण के रूप में निरूपित न करें।**

- न्यूटनी यांत्रिकी का इस्तेमाल भौतिक संसार में घट रही परिघटनाओं को **मॉडल** (निदर्शित) करने के लिए किया जाता है और इनकी मदद से भिन्न बलों के अधीन कणों की गति का समझा जाता है।

इस समझ के साथ आप न्यूटन के गति के नियमों को विभिन्न स्थितियों पर लागू कर सकते हैं। न्यूटन के गति के नियम लागू करने से पहले आपको किसी भी स्थिति के लिए **बल-निर्देशक आरेख** खींचना सीखना होगा।

6.3.1 बल-निर्देशक आरेख खींचना

बल-निर्देशक आरेख खींचने की विधि इस प्रकार है :

बल-निर्देशक आरेख खींचना

प्रत्येक समस्या के लिए :

1. जिस पिंड पर आप न्यूटन के गति के नियम लागू करना चाहते हैं उसे अलग कर लें। आरेख में उसे बिंदु कण के रूप में दर्शाएं।
2. उस पिंड पर लग रहे **सभी** बलों की पहचान करें।
3. पिंड **पर** लग रहे हर बल के लिए बल सदिश खींचें : बिंदु कण पर सदिश की पूंछ को रखें या पिंड के उस बिंदु पर सदिश की पूंछ रखें जिस पर बल लग रहा है। सदिश की दिशा बल की दिशा में होनी चाहिये। कोशिश करें कि तीर की लंबाई बल के परिमाण के समानुपाती हो। प्रत्येक बल सदिश को एक प्रतीक द्वारा निरूपित करें।
4. पिंड पर लग रहे सभी संपर्क या दीर्घ परासी बलों को उपयुक्त तीरों द्वारा दिखाएं।

बल-निर्देशक आरेख खींचते हुए पिंड पर लग रहे सभी बलों को शामिल करें। निकाय में मौजूद किसी आंतरिक बल को शामिल नहीं करें। उस पिंड द्वारा किसी अन्य पिंड पर लगाए गए बल को भी नहीं शामिल करें।

बल-निर्देशक आरेख किसी कण पर लग रहे बलों को पहचानने का एक बहुत कारगर तरीका है। इन आरेखों को **बल-आरेख** भी कहा जाता है। आइए, अब हम देखें कि बल-निर्देशक आरेख किस तरह खींचे जाते हैं।

उदाहरण *6.1* : बल-निर्देशक आरेख खींचना

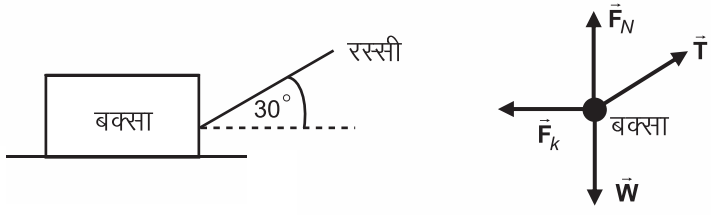
एक बक्से को एक रस्सी द्वारा खुरदुरे फ़र्श पर खींचा जाता है। रस्सी क्षैतिज से 30^o का कोण बनाती है (चित्र 6.7क)। बक्से के लिए बल-निर्देशक आरेख खींचें। बक्से और फ़र्श के बीच गतिक घर्षण गुणांक μ_k है।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि बक्से को कण मानकर उस **पर** लग रहे सभी बलों को पहचाना जाए और फिर बल-निर्देशक आरेख खींचा जाए।

बक्से पर लग रहे बल हैं :

– रस्सी में तनाव ($\vec{\mathbf{T}}$)
– बक्से का भार ($\vec{\mathbf{W}} = m\vec{\mathbf{g}}$)
– अभिलंब बल $\vec{\mathbf{F}}_N$ और
– बक्से तथा फ़र्श के बीच लग रहा गतिक घर्षण बल ($\vec{\mathbf{F}}_k$)। यह बक्से की गति की विपरीत दिशा में लगता है।

मान लें कि बक्से का द्रव्यमान m है। स्कूल की भौतिकी से आप जानते हैं कि $\vec{\mathbf{g}}$ गुरुत्वीय त्वरण है जिसकी दिशा ऊर्ध्वाधर के अनुदिश नीचे की ओर है।



(क) (ख)

चित्र 6.7: क) खुरदुरे फ़र्श पर रस्सी द्वारा खींचा जा रहा बक्सा; ख) बक्से का बल-निर्देशक आरेख।

चित्र 6.7ख में हमने बक्से का बल-निर्देशक आरेख दिखाया है। **ध्यान दें** कि बीच में स्थित छोटा वृत्त बक्से को बिंदु कण के रूप में निरूपित करता है। यह भी **ध्यान दें** कि हमने बक्से **पर** लग रहे **सभी** बलों को सदिश के रूप में खींचा है।

अब आप कुछ पिंडों के लिए बल-निर्देशक आरेख खींचें।

बोध प्रश्न 2 – बल-निर्देशक आरेख खींचना

बोध प्रश्न 1 में चित्र 6.5 में दिखाई गई गाड़ी, नाव और स्लेड के लिये बल-निर्देशक आरेख खींचें।

आइए, अब हम कुछ निकायों पर, जिनमें दो बुनियादी स्थितियों के लिए भिन्न प्रकार के सम्पर्क बल लग रहे हों, न्यूटन के गति के नियम लागू करें : एक वह जिनमें पिंड (जिस पर बल लग रहे हैं) **साम्यावस्था में है** और दूसरी वह जिनमें पिंड (जिस पर बल लग रहे हैं) **साम्यावस्था में नहीं है**।

6.3.2 साम्यावस्था में स्थित पिंड

सबसे पहले हम साम्यावस्था में स्थित पिंड की परिभाषा देंगे और फिर कुछ विरामावस्था में स्थित और कुछ गतिमान पिंडों के उदाहरण लेंगे जो साम्यावस्था में हैं।

साम्यावस्था में स्थित पिंड

कोई पिंड जिस पर कई बल आरोपित हो रहे हों, **साम्यावस्था में होता है जब उस पर लग रहे बलों का सदिश योग यानी उस पर लग रहा नेट बल शून्य होता है यानी पिंड का त्वरण शून्य होता है।**

उदाहरण 6.2 : सिर पर भार संतुलित करना

हम अपने चारों ओर कई लोगों को सिर पर बोझा ढोते हुए देख सकते हैं। मसलन, गांव में महिलाएं मटकों में पानी भर के उन्हें सिर पर रखकर चलती हैं, रेलवे स्टेशन पर कुली सामान को ढोते हैं, निर्माण कार्य में लगे मजदूर सिर पर रेत, सीमेंट या ईंटें ढोते हैं, आदि। अब एक ऐसी स्थिति की कल्पना करें कि जिसमें एक मज़दूर ने अपने सिर पर द्रव्यमान 15 kg का बोझा ढोया हुआ है। यह सीमेंट और तसले का संयुक्त द्रव्यमान है (चित्र 6.8क)। हमारे कंधों से ऊपर का पूरा भार मुख्य रूप से हमारी रीढ़ की हड्डी की सातवीं कशेरूक वहन करती है। मान लें कि महिला की गर्दन और सिर का भार 50 N है (चित्र 6.8ख)। कशेरूक द्वारा महिला के सिर और गर्दन द्वारा लगाया गया अभिलंब बल क्या है

क) जब उसके सिर पर बोझ नहीं होता, और

ख) जब उसके सिर पर बोझ रखा होता है? $g = 10 ms^{-2}$ लें।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि महिला मज़दूर स्थिर **खड़ी है** और इसलिए उसकी गर्दन और सिर विरामावस्था में हैं। अतः, उन पर लग रहा नेट बल शून्य है।

चित्र 6.8ख और ग में हम समस्या में दिये गए बल दिखा रहे हैं। आइए, दोनों स्थितियों के लिए **महिला की गर्दन और सिर पर लग रहे बलों की पहचान** करें :

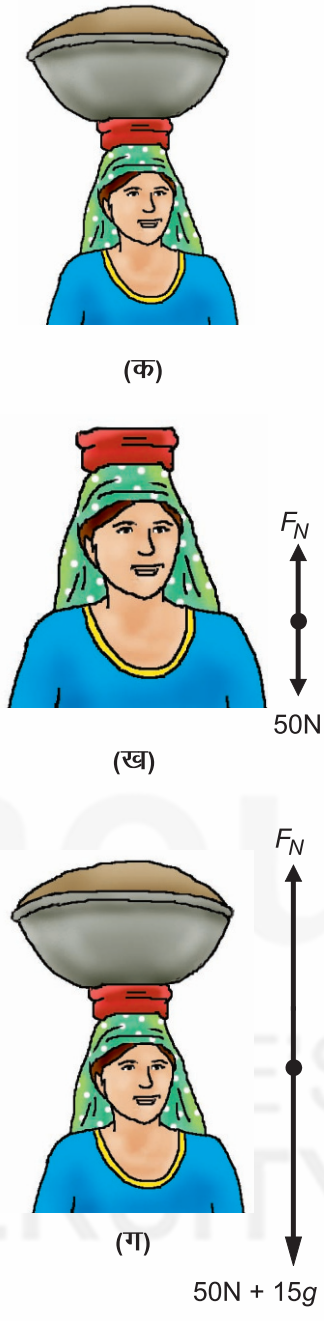
क) नीचे की ओर लग रहा गर्दन और सिर का भार 50 N और ऊपर की ओर लग रहा अभिलंब बल;

ख) तसले और सीमेंट का नीचे की दिशा में भार जिसका मान $15g$ है और (सिर और गर्दन) का भार 50 N जिसकी दिशा नीचे की ओर है, और ऊपर की ओर लग रहा अभिलंब बल।

चित्र 6.8ख और ग में महिला की गर्दन और सिर पर लग रहे सभी बलों के लिए बल-निर्देशक आरेख भी दिखाए गए हैं। चूंकि महिला की गर्दन और सिर पर लग रहा नेट बल शून्य है, इसलिए प्रत्येक स्थिति में अभिलंब बल नेट भार के बराबर और विपरीत है। अतः,

क) $F_N = 50N$ और

ख) $F_N = (50N + 15gN) = (50N + 150N) = 200N$



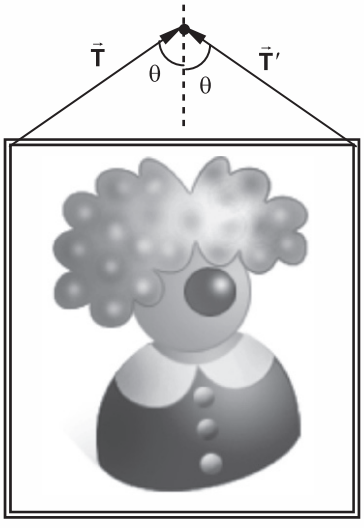
चित्र 6.8 : साम्यावस्था में स्थित पिंड।

आइए, अब हम साम्यावस्था में स्थित पिंड का एक और उदाहरण लें।

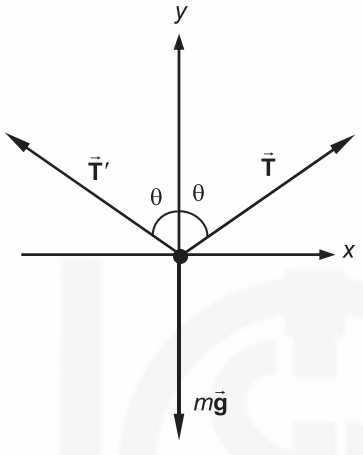
उदाहरण 6.3 : साम्यावस्था में तस्वीर

द्रव्यमान m वाली एक तस्वीर को दीवार पर एक द्रव्यमानहीन डोरी से लटकाया जाता है (चित्र 6.9क)। डोरी के दोनों भागों और ऊर्ध्वाधर के बीच का कोण θ है। m और θ के पदों में डोरी के दोनों भागों में तनाव की गणना करें।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि तस्वीर विरामावस्था में है। अतः, उस पर लग रहा नेट बल शून्य है।



(क)



(ख)

चित्र 6.9 : क) साम्यावस्था में तस्वीर; ख) तस्वीर का बल-निर्देशक आरेख।

चित्र 6.9ख में इस स्थिति के लिए बल-निर्देशक आरेख दिखाया गया है। चूंकि डोरी द्रव्यमानहीन है, इसलिए उसका तनाव पूरा का पूरा तस्वीर पर आरोपित होता है। आइए, हम **तस्वीर पर लग रहे बलों को पहचानें**। ये हैं नीचे की ओर लग रहा तस्वीर का भार $m\vec{g}$ और डोरी के दोनों भागों में तनाव : $\vec{T}$ और $\vec{T}'$।

अब हम उचित प्रतीकों के साथ बल-निर्देशक आरेख खींचते हैं और निर्देशांक अक्षों x और y का चुनाव चित्र 6.9ख के अनुसार करते हैं। चूंकि तस्वीर पर नेट बल शून्य है, इसलिए उसके x और y-घटक भी शून्य होंगे। इस तरह, तस्वीर पर लग रहे सभी बलों के x-घटकों का योग शून्य होगा और उन बलों के y-घटकों का योग भी शून्य होगा :

$$F_{net,x} = \sum F_x = 0 \quad \text{और} \quad F_{net,y} = \sum F_y = 0$$

चूंकि $m\vec{g}$ की दिशा ऋणात्मक y-अक्ष के अनुदिश ऊर्ध्वाधरतः नीचे की ओर है, अतः, x और y-अक्षों के अनुदिश $\vec{T}$ और $\vec{T}'$ को वियोजित करने पर हमें मिलता है :

$$T\cos(90^\circ - \theta) + T'\cos(90^\circ + \theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad T = T' \text{ और}$$

$$T\sin(90^\circ - \theta) + T'\sin(90^\circ + \theta) - mg = 0$$

या $$T\cos\theta + T'\cos\theta - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mg}{2\cos\theta} \quad (\because T = T')$$

यह परिणाम हमें बताता है कि यदि θ का मान बढ़ाया जाता है तो $\cos\theta$ घट जाता है और तनाव बढ़ जाता है। इसके कारण डोरी टूट सकती है।

उदाहरण 6.3 से हम यह भी समझ सकते हैं कि एक झूला पुल की रस्सी क्षैतिज न होकर इतनी वक्राकार क्यों होती है। ऐसा इसलिए किया जाता है ताकि रस्सी और ऊर्ध्वाधर के बीच के कोण θ का मान कम से कम हो (चित्र 6.10)।

चित्र 6.10 : झूला पुल।

सदैव याद रखें :

कोई भी पिंड गति करते हुए भी साम्यावस्था में हो सकता है बशर्ते उसका वेग अचर हो यानी वह अचर चाल से सरल रेखा में गतिमान हो।

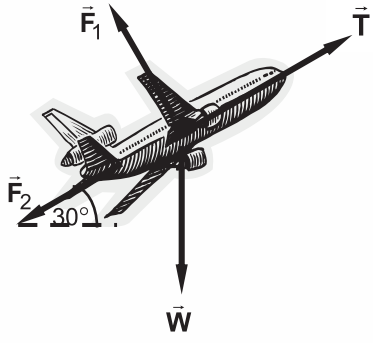
आइए, अब हम गतिमान पिंडों की साम्यावस्था का उदाहरण लें।

उदाहरण 6.4 : अचर वेग पर साम्यावस्था

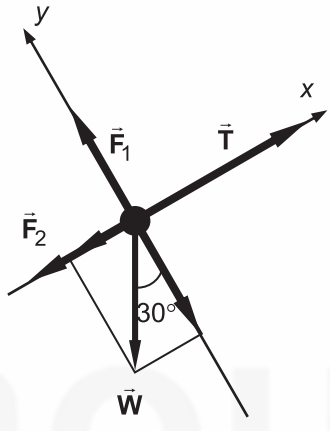
एक हवाई जहाज़ क्षैतिज से 30° के कोण पर सरल रेखा में अचर चाल से उड़ रहा है (चित्र 6.11)। हवाई जहाज़ का भार $\vec{W}$ = 80,000 N है और उड़ान की दिशा में इंजन का प्रणोद $\vec{T}$ = 100,000 N है। हवाई जहाज़ पर लग रहे दो अतिरिक्त बल हैं :

- हवाई जहाज़ के पंखों के लम्बवत् लग रहा वायु उत्थापन बल $\vec{F}_1$ और,
- गति की दिशा की विपरीत दिशा में वायु प्रतिरोध बल $\vec{F}_2$ ।

$\vec{F}_1$ और $\vec{F}_2$ के मान प्राप्त करें।



(क)



(ख)

चित्र 6.11 : गतिमान पिंडों की साम्यावस्था।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि हवाई जहाज़ अचर वेग से गतिमान है। अतः, उस पर लग रहा नेट बल शून्य है।

चित्र 6.11क में हवाई जहाज़ पर लग रहे बल देखें। आइए, अब हम निर्देशांक अक्षों समेत हवाई जहाज़ के लिये बल-निर्देशक आरेख खींचें (चित्र 6.11ख)। मान लें कि *x*-अक्ष गति की दिशा में है। चूंकि हवाई जहाज़ पर लग रहा नेट बल शून्य है, अतः, हम बलों के *x* और *y* घटकों के योग को शून्य के बराबर रख सकते हैं :

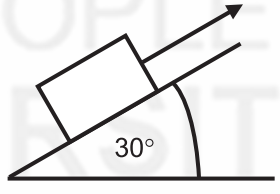
$$\sum F_x = -W\sin 30^\circ + T - F_2 = 0 \quad \text{और} \quad \sum F_y = -W\cos 30^\circ + F_1 = 0$$

अतः, $F_2 = T - W\sin 30^\circ = 100{,}000\,\text{N} - 80{,}000\,\text{N}.(\frac{1}{2}) = 60{,}000\,\text{N}$

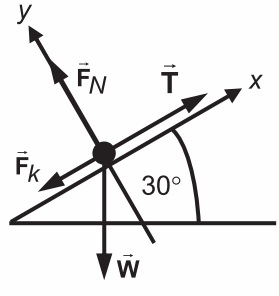
और $F_1 = W\cos 30^\circ = 80{,}000\,\text{N}.(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 69{,}282\,\text{N}$

उदाहरण 6.5 : घर्षण, तनाव और साम्यावस्था

द्रव्यमान 20 kg वाले एक बक्से को एक खुरदुरे नत समतल पर रस्सी से खींचा जाता है। नत समतल और क्षैतिज के बीच का कोण 30° है (चित्र 6.12क)। यदि रस्सी में तनाव 200 N हो और बक्से का वेग अचर हो तो बक्से और नत समतल की सतह के बीच गतिक घर्षण गुणांक की गणना करें। मान लें कि रस्सी द्रव्यमानहीन है। $g = 10\,\text{ms}^{-2}$ लें ।



(क)



(ख)

चित्र 6.12 : नत समतल पर गति।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि बक्से का वेग अचर है। अतः, उस पर लग रहा नेट बल शून्य है।

चित्र 6.12ख में बक्से के लिए निर्देशांक अक्षों समेत बल-निर्देशक आरेख दिखाया गया है। आइए, हम *x*-अक्ष को गति की दिशा में लें। चूंकि बक्से पर लग रहा नेट बल शून्य है, अतः, हम बलों के *x* घटकों के योग और *y* घटकों के योग को शून्य के बराबर रख सकते हैं।

$$\sum F_x = T + (-F_k - W_x) = 0 \quad \text{(i)}$$

और $$\sum F_y = F_N - W_y = 0 \quad \text{(ii)}$$

जहां $$F_k = \mu_k F_N,\ W_x = mg\sin 30^\circ \text{ और } W_y = mg\cos 30^\circ \quad \text{(iii)}$$

अब हम समीकरणों (i) और (ii) को हल करके गतिक घर्षण गुणांक μ_k की गणना करेंगे। इसके लिए हम समीकरण (ii) से F_N का मान समीकरण (iii) में रखेंगे जिससे हमें मिलता है :

$$F_k = \mu_k F_N = \mu_k W_y = \mu_k mg\cos 30^\circ \quad \text{(iv)}$$

फिर समीकरण (iv) से F_k का मान समीकरण (i) में रखने पर हमें मिलता है :

$$T - \mu_k mg\cos 30^\circ - mg\sin 30^\circ = 0 \quad \text{(v)}$$

समीकरण (v) से

$$\mu_k = \frac{T - mg\sin 30^\circ}{mg\cos 30^\circ} = \frac{200 - 20\times 10\times \frac{1}{2}}{20\times 10\times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.58$$

इस विधि को लागू करने के लिए अब आप एक बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 3 – न्यूटन के गति के नियमों को लागू करना

क) द्रव्यमान 45.0 kg की एक मेज़ फ़र्श पर विरामावस्था में रखी है। द्रव्यमान 30.0 kg की एक बच्ची मेज़ पर खड़ी होती है ताकि वह अलमारी के ऊपर पहुंच सके। (i) फ़र्श द्वारा मेज़ पर लगाए गए अभिलंब बल और (ii) मेज़ द्वारा बच्ची पर लगाए गए अभिलंब बल के परिमाणों की गणना करें। $g = 9.80\,\text{ms}^{-2}$ लें।

चित्र 6.13

ख) एक बच्ची ढलान θ वाली एक बर्फीली पहाड़ी पर अचर वेग से नीचे की ओर फिसल रही है (चित्र 6.13)। गतिक घर्षण गुणांक की गणना करें जबकि दिया है कि बच्ची और स्लेड का कुल द्रव्यमान m है।

आइए, अब हम उन पिंडों की गति समझें जिनका त्वरण होता है यानी उन पर लग रहा नेट बल शून्य नहीं है और वे साम्यावस्था में नहीं है।

6.3.3 पिंड जो साम्यावस्था में नहीं हैं

साम्यावस्था में पिंड की परिभाषा से यह स्पष्ट है कि **यदि किसी पिंड पर लग रहा नेट बल शून्य नहीं होता यानी वह त्वरित गति कर रहा होता है, तो वह साम्यावस्था में नहीं होता।**

आइए, इस बात को हम एक सरल उदाहरण की मदद से समझें।

उदाहरण 6.6 : गुरुत्व के अधीन त्वरित गति

द्रव्यमान M का एक क्रेट एक खुरदुरे नत तल पर नीचे फिसलता है। नत तल और क्षैतिज के बीच का कोण θ है (चित्र 6.14क)। क्रेट का त्वरण प्राप्त करें।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि क्रेट **पर** लग रहे सभी बलों को पहचाना जाए और फिर न्यूटन के गति के दूसरे नियम को लागू किया जाए।

चित्र 6.14ख में क्रेट पर लग रहे सभी बलों को दिखाया गया है। ये हैं : **गुरुत्व बल** (या क्रेट का भार, $\vec{W}$), **अभिलंब बल** $\vec{F}_N$ और **गतिक घर्षण बल** $\vec{F}_k$ (क्योंकि नत समतल की सतह खुरदुरी है और क्रेट गतिमान है)। आइए, हम क्रेट के लिए बल-निर्देशक आरेख और निर्देशांक अक्ष खींचें। हम धनात्मक x-अक्ष को गति की दिशा की विपरीत दिशा में चुनते हैं (चित्र 6.14ख)।

आइए, अब हम बलों को x और y-अक्षों के अनुदिश वियोजित करें और न्यूटन के गति के दूसरे नियम को लागू करें। चूंकि क्रेट y-अक्ष के अनुदिश गतिमान नहीं है, अतः, उस दिशा में नेट बल शून्य होगा। चूंकि क्रेट की गति की दिशा धनात्मक x-अक्ष की विपरीत दिशा में है, अतः, धनात्मक x-दिशा में नेट बल है $(-Ma)$। अतः,

$$\sum F_x = -Ma = F_k - Mg\sin\theta \qquad \text{(i)}$$

और

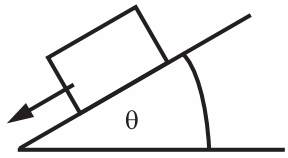
$$\sum F_y = F_N - Mg\cos\theta = 0 \qquad \text{(ii)}$$

समीकरण (ii) से $F_N = Mg\cos\theta$

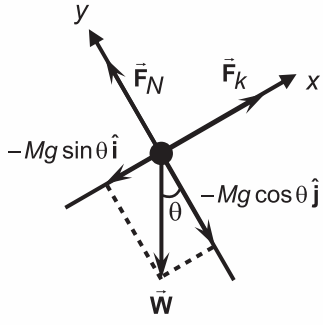
$\therefore$ $F_k = \mu_k F_N = \mu_k Mg\cos\theta$

समीकरण (i) से $-Ma = \mu_k Mg\cos\theta - Mg\sin\theta$

$\therefore$ $a = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$



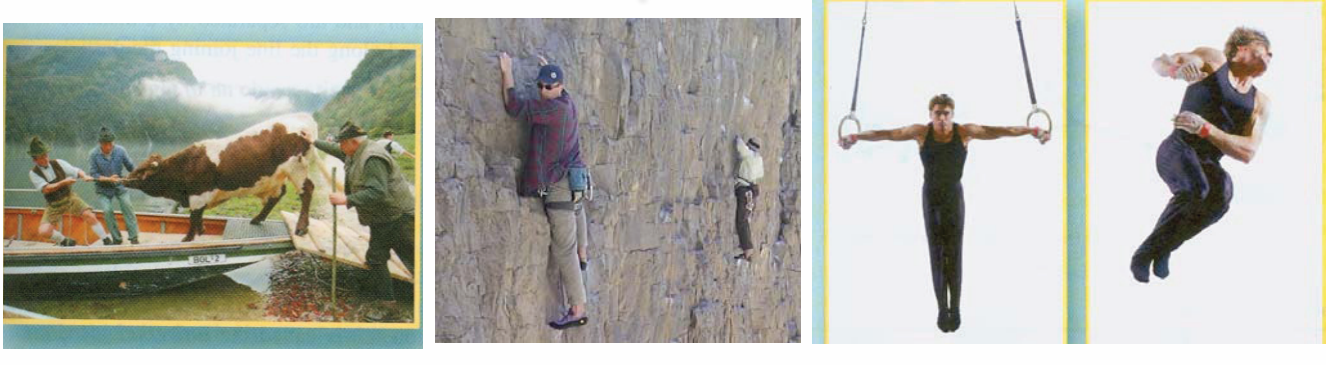
(क)



(ख)

चित्र 6.14 : क) खुरदुरे नत तल पर नीचे फिसलता क्रेट; ख) क्रेट के लिए बल-निर्देशक आरेख।

चित्र 6.15 में हमने अभी तक वर्णित स्थितियों जैसी कुछ और स्थितियां दिखाई हैं।



चित्र 6.15 : कुछ और स्थितियां जिन पर न्यूटन के गति के नियम लागू होते हैं।

आइए, आपने अभी तक जो पढ़ा है, उसे दोहराएं। आपने चार बाह्य सम्पर्क बलों के बारे में पढ़ा है। आपने कमानी बल के अलावा बाह्य सम्पर्क बलों के अधीन साम्यावस्था में स्थित पिंडों की और पिंडों की त्वरित गति पर सवालों को हल करना सीखा है। कमानी बल के बारे में आप खंड 4 में पढ़ेंगे।

दोहराएं

बाह्य सम्पर्क बल	न्यूटन के गति के नियम
1. अभिलंब बल	$\sum \vec{F} = m\vec{a}$
2. घर्षण	पिंडों की साम्यावस्था : $\vec{a} = \vec{0}\ ms^{-2}$
3. तनाव	पिंडों की त्वरित गति : $\vec{a} \neq \vec{0}\ ms^{-2}$
4. कमानी बल	

बोध प्रश्न 4 – न्यूटन के गति के नियमों को लागू करना

द्रव्यमान 15 kg वाले एक बक्से को फ़र्श पर द्रव्यमानहीन रस्सी से 80 N के बल से क्षैतिज से 60° के कोण पर खींचा जाता है। यदि फ़र्श और बक्से के बीच गतिक घर्षण गुणांक $\mu_k = 0.20$ हो तो बक्से के त्वरण की गणना करें। $g = 10 ms^{-2}$ लें ।

अभी तक आपने सरल रेखा में गतिमान पिंडों पर न्यूटन के गति के नियमों को लागू करना सीखा है। लेकिन आपने स्कूल की भौतिकी में प्रक्षेप्य गति के बारे में पढ़ा है। प्रक्षेप्य वह कण होता है जिसे किसी आरंभिक वेग से फेंका या छोड़ा जाता है और फिर वह गुरुत्व के अधीन गिरता है। उसका पथ परवलय के आकार का होता है। यह समतल में वक्राकार पथ में गति का उदाहरण है। भौतिकी में समतल में गति का एक अन्य महत्त्वपूर्ण उदाहरण है – **वर्तुल गति**। अगले भाग में आप **एकसमान वर्तुल गति** के बारे में पढ़ेंगे और न्यूटन के गति के नियमों को **वर्तुल पथ पर एकसमान गति** कर रहे कणों पर लागू करना सीखेंगे।

6.4 एकसमान वर्तुल गति

हमारे चारों ओर वृत्ताकार पथ पर गति के बहुत से उदाहरण मौजूद हैं। आप इसे अनुभव करने के लिए नीचे दी हुई गतिविधि करें।

गतिविधि

एक पत्थर को डोरी में बांध कर उसे क्षैतिज वृत्त में घुमाएं। पत्थर की गति का वर्णन आप किस तरह करेंगे? क्या इसकी गति त्वरित गति है?

किसी सड़क में मोड़ पर चलते हुए वाहनों को देखें या पार्क में जाकर मेरी-गो-राउंड पर खेलते हुए बच्चों को देखें। यह गति किस प्रकार की है?

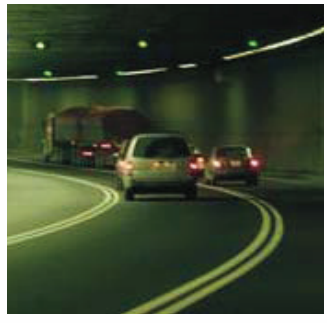
पृथ्वी के चारों ओर गति करते हुए चंद्रमा का पथ क्या होता है? सूर्य के चारों ओर चक्कर लगाते हुए पृथ्वी और अन्य ग्रहों का पथ क्या होता है?

एक पंखे की पंखुड़ी के कोने पर रंगीन चमकीला तीर चिपका दें। जब आप पंखे को चलाते हैं तो उस तीर का पथ कैसा होता है?

दरवाज़े को खोलें या बंद करें और उसके हैंडल का पथ देखें। इस पथ का आकार क्या है?

इस गतिविधि को करते हुए क्या आपने ध्यान दिया कि ये सभी पिंड या तो वृत्त में गति कर रहे हैं या वृत्त की चाप में? ऐसी गति के अन्य उदाहरण हैं : पृथ्वी के चारों ओर

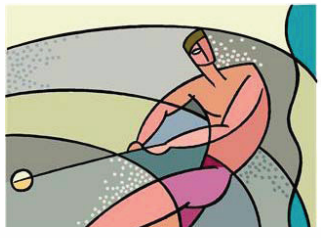
वृत्ताकार कक्षाओं में चल रहे कृत्रिम उपग्रह, विद्युत्-चुम्बक के केंद्र के निकट चल रहे इलेक्ट्रॉन, आदि। गोला फेंक की किसी भी प्रतियोगिता में खिलाड़ी गोले को वृत्त में कई बार घुमाता है, ताकि गोले की चाल बढ़ जाए। ये सभी वर्तुल गति के उदाहरण हैं जो कि हमेशा ही समतल में होती है (चित्र 6.16)। इस भाग में हम **एकसमान** वर्तुल गति की चर्चा करेंगे। आइए, सबसे पहले हम इसकी परिभाषा दें।



एकसमान वर्तुल गति

किसी कण की गति **एकसमान वर्तुल गति** कहलाती है यदि वह एक वृत्त में या वृत्तीय चाप में **अचर** (एकसमान) **चाल** से गति करता है।

आइए, अब हम एकसमान वर्तुल गति कर रहे कणों के वेग और त्वरण ज्ञात करें।

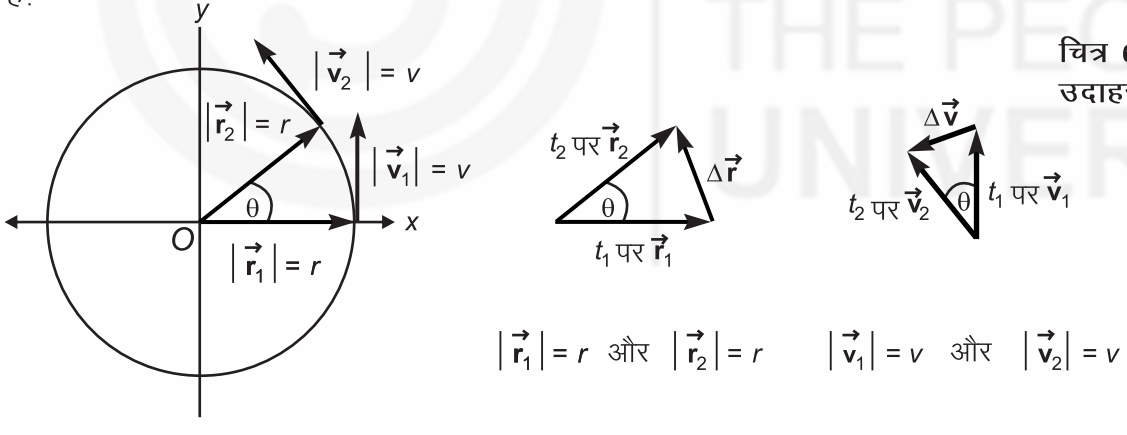


मान लें कि एक पिंड एक वृत्त में एकसमान चाल से गतिमान है (चित्र 6.17)। ध्यान दें कि भले ही इसकी चाल अचर है, इसके **वेग की दिशा** लगातार बदल रही है। इसका अर्थ यह है कि इसका **वेग लगातार बदल रहा है** और इस पिंड का **त्वरण शून्य नहीं है**। अब हम एकसमान वर्तुल गति कर रहे इस पिंड को कण द्वारा निदर्शित करेंगे और इसके त्वरण का मान ज्ञात करेंगे।

ध्यान दें कि कण वृत्त में गतिमान है। अतः, इसकी गति का वर्णन करने के लिए हम द्विविम कार्तीय निर्देशांक तंत्र का प्रयोग करेंगे।

चित्र 6.16 : वर्तुल गति के उदाहरण।

माना कि वृत्त का केंद्र निर्देशांक तंत्र के मूल बिंदु O पर है। चित्र 6.17क में हमने O के सापेक्ष दो अलग क्षणों पर कण के स्थिति और वेग सदिश दिखाए हैं। ध्यान दें कि सभी क्षणों पर स्थिति सदिशों के परिमाण समान होंगे और वृत्त की त्रिज्या r के बराबर हैं। क्या आपने ध्यान दिया कि कण के स्थिति सदिश की दिशा समय के साथ बदल रही है?



चित्र 6.17 : क) एकसमान वर्तुल गति कर रहे कण के स्थिति सदिश का परिमाण अचर होता है और वह वृत्त की त्रिज्या के बराबर होता है। किसी भी बिंदु पर कण का वेग सदिश उस बिंदु पर वृत्त की स्पर्श रेखा के अनुदिश होता है और यह सदैव स्थिति सदिश के लंबवत् होता है; ख) किन्हीं दो क्षणों पर कण के स्थिति सदिश; ग) उन दो क्षणों पर कण के वेग सदिश। ध्यान दें कि कण के वेग का परिमाण (यानी कण की चाल) अचर है।

मान लें कि किसी क्षण t पर पिंड का स्थिति सदिश $\vec{r}$ है (चित्र 6.18क)। घटकों के पदों में इसका मान है

$$\vec{r} = r(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}) \qquad (6.6\text{क})$$

जहां θ वह कोण है जिससे कण समय t में वृत्त में गति करता है। यह क्षण t पर कण के स्थिति सदिश और धनात्मक x-अक्ष के बीच का कोण भी है।

इकाई 1 में सीखी हुई एकक सदिश की परिभाषा से आप जानते हैं कि

$$\vec{\mathbf{r}} = r\hat{\mathbf{r}} \qquad (6{\cdot}6\text{ख})$$

जहां एकक सदिश $\hat{\mathbf{r}}$ का मान है :

$$\hat{\mathbf{r}} = (\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}) \qquad (6.6\text{ग})$$

परिभाषा से, कण का कोणीय वेग होता है :

$$\omega = \frac{\theta}{t} \qquad (6.6\text{घ})$$

इस तरह, हम लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{r}} = r(\cos\omega t\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\omega t\,\hat{\mathbf{j}}) \qquad (6.6\text{च})$$

इकाई 2 के उदाहरण 2.4 से याद करें कि कण का वेग होता है :

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \qquad (6.7\text{क})$$

या
$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}r(\cos\omega t\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\omega t\,\hat{\mathbf{j}}) = \omega r(-\sin\omega t\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\omega t\,\hat{\mathbf{j}}) \qquad (6.7\text{ख})$$

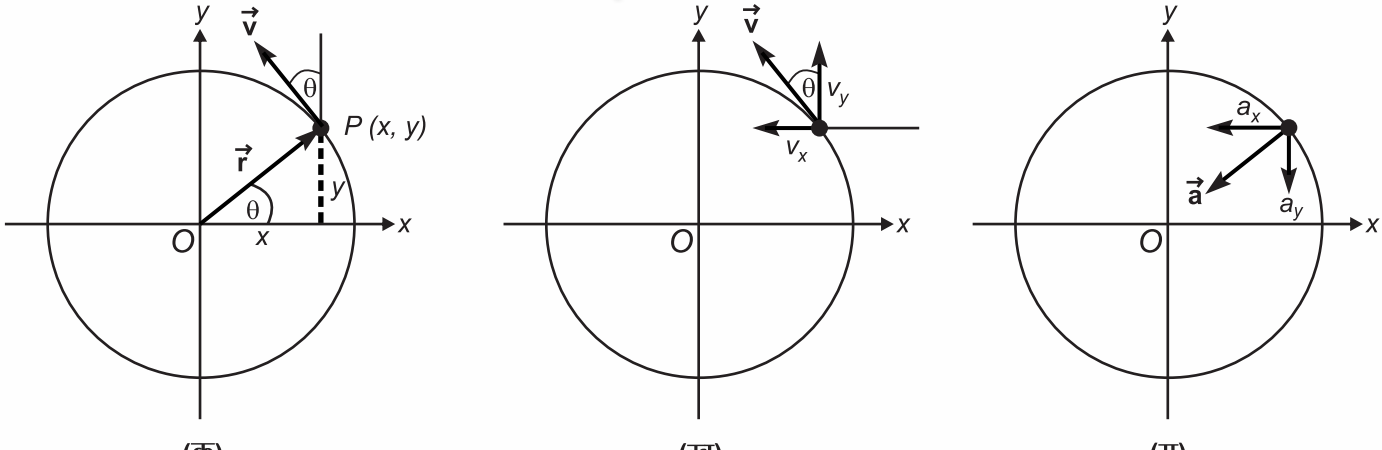
और उसका परिमाण होता है :

$$|\vec{\mathbf{v}}| = v = \omega r \qquad (6.7\text{ग})$$

इकाई 2 के भाग 2.4.2 से याद करें कि **वृत्त के किसी भी बिंदु पर कण के वेग की दिशा उस बिंदु पर वृत्त की स्पर्श रेखा के अनुदिश होती है** (चित्र 6.18ख)। आप यह भी जानते हैं कि वृत्त के किसी भी बिंदु पर वृत्त की स्पर्श रेखा स्थिति सदिश के लंबवत् होती है। अतः, **वृत्त के किसी भी बिंदु पर कण का वेग सदिश उस बिंदु पर कण के स्थिति सदिश के लंबवत् होता है** (चित्र 6.18क)। वर्तुल गति के लिए आप परख सकते हैं कि (हाशिए पर दी गई टिप्पणी पढ़ें)

$$\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0 \qquad (6.8)$$

$\vec{\mathbf{r}}.\vec{\mathbf{v}} =$
$[r(\cos\omega t\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\omega t\,\hat{\mathbf{j}}).$
$\omega r(-\sin\omega t\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\omega t\,\hat{\mathbf{j}})]$
$= \omega r^2(-\sin\omega t\cos\omega t$
$+\sin\omega t\cos\omega t) = 0$



(क) (ख) (ग)

चित्र 6.18 : क) वामावर्त दिशा में एकसमान वर्तुल गति कर रहे एक कण के, जिसके क्षण t पर निर्देशांक (x, y) हैं, स्थिति और वेग सदिश; ख) क्षण t पर कण के वेग सदिश के x और y घटक; ग) क्षण t पर कण का त्वरण सदिश और उसके x और y घटक।

एकसमान वर्तुल गति कर रहे कण का **त्वरण** होता है :

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\omega r\,(-\sin\omega t\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\omega t\,\hat{\mathbf{j}})\right] = -\omega^2 r\,(\cos\omega t\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\omega t\,\hat{\mathbf{j}}) \qquad (6.9\text{क})$$

या $$\vec{\mathbf{a}} = -\omega^2 r\,\hat{\mathbf{r}} \qquad (6.9\text{ख})$$

अभिकेंद्र त्वरण

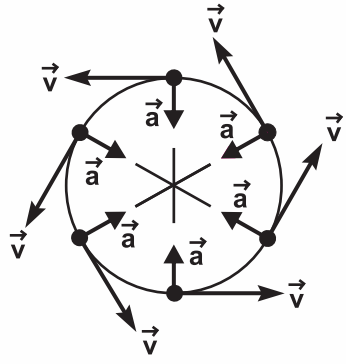
चूंकि $v = \omega r$ इसलिए समीकरण 6.7ग से

$$\vec{\mathbf{a}} = -\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}} \qquad (6.9\text{ग})$$

अभिकेंद्र त्वरण

$\vec{\mathbf{a}}$ का परिमाण है $a = \frac{v^2}{r}$ (6.9घ)

जब हम त्वरण $\vec{\mathbf{a}}$ को समीकरणों 6.9ख या ग के रूप में लिखते हैं, तो सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ की दिशा तुंरत स्पष्ट हो जाती है : यह सदिश $\hat{\mathbf{r}}$ की दिशा के विपरीत होती है जैसाकि समीकरणों 6.9ख या ग के ऋणात्मक चिन्ह से पता चलता है। इस तरह, **एकसमान वर्तुल गति में त्वरण सदिश की दिशा कण के स्थिति सदिश की दिशा के विपरीत होती है और वृत्त के केंद्र की ओर होती है** (चित्र 6.18ग)। इसी कारण से हम इसे **अभिकेंद्र त्वरण** कहते हैं।

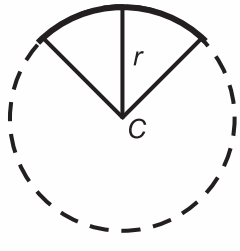


चित्र 6.19 : एकसमान वर्तुल गति में वेग और त्वरण सदिश।

अब चित्र 6.19 ध्यान से देखें। ध्यान दें कि एकसमान वर्तुल गति के लिए सदिश $\vec{\mathbf{a}}$, सदिश $\vec{\mathbf{v}}$ के लंबवत् होता है। यह भी ध्यान दें कि **जब कण वृत्त में गति करता है तो $\vec{\mathbf{r}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ और $\vec{\mathbf{a}}$ की दिशाएं लगातार बदलती हैं**। वर्तुल गति के लिए लागू होने वाली विस्थापन, वेग और त्वरण की समीकरणें (6.6क से 6.9घ) **उन सभी कणों की गति के लिए भी लागू होती है जो किसी वृत्तीय चाप या वक्र पथ पर एकसमान गति करते हैं**। जब कोई कण किसी वृत्त की चाप पर या वक्र पथ पर चलता है तो r उस वृत्त की त्रिज्या होती है जो उस चाप या वक्र पथ से होकर जाता है। इसे हम चाप या वक्र पथ की **वक्रता त्रिज्या** कहते हैं (हाशिए पर दी गई टिप्पणी पढ़ें)। आप यह भी जानते हैं कि किसी कण का त्वरण परिमित होने का अर्थ है कि उस पर एक **नेट बल** लग रहा है। इस बल को हम **अभिकेंद्र बल** कहते हैं। इसकी परिभाषा निम्नवत् है।

ध्यान दें

किसी वृत्त की चाप या वक्र पथ की **वक्रता त्रिज्या** (r) उस वृत्त की त्रिज्या होती है जो उस चाप या वक्र पथ से होकर जाता है। इस वृत्त के केंद्र (C) को **वक्रता केंद्र** कहते हैं।



अभिकेन्द्र बल

द्रव्यमान m के एक कण को त्रिज्या r के वृत्ताकार पथ में अचर चाल v और अभिकेंद्र त्वरण (v^2/r) से गतिमान बनाए रखने के लिए आवश्यक नेट बल अभिकेंद्र बल कहलाता है। इसका **परिमाण** होता है :

$$F_c = \frac{mv^2}{r} \qquad (6.10\text{क})$$

अभिकेंद्र बल की **दिशा सदैव वृत्त के केंद्र की ओर होती है**। जब कण वृत्त में गति करता है तो इसकी दिशा लगातार बदलती है। एकक सदिश संकेतन पद्धति में, सदिश $\vec{\mathbf{F}}_c$ होता है :

$$\vec{\mathbf{F}}_c = -\frac{mv^2}{r}\hat{\mathbf{r}} = -m\omega^2 r\,\hat{\mathbf{r}} \qquad (6.10\text{ख})$$

अभिकेंद्र बल

आइए, अब हम एकसमान वर्तुल गति, अभिकेंद्र त्वरण और अभिकेंद्र बल की अवधारणाओं को दोहराएं।

दोहराएं

एकसमान वर्तुल गति, अभिकेंद्र त्वरण और अभिकेंद्र बल

किसी कण, जो एक वृत्त में या वृत्तीय चाप में **अचर** (एकसमान) **चाल** से गति करता है, की गति **एकसमान वर्तुल गति** कहलाती है।

कण का त्वरण **अभिकेंद्र त्वरण** होता है और इसका मान होता है :

$$\vec{\mathbf{a}} = -\omega^2 r\,\hat{\mathbf{r}} = -\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}}$$

अभिकेंद्र त्वरण के **परिमाण** और **दिशा** निम्नवत् होते हैं :

परिमाण : $a = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$

दिशा : अभिकेंद्र त्वरण सदिश की दिशा सदैव वृत्त के केंद्र या गति के वक्र पथ के वक्रता केंद्र की ओर होती है। जब कण गति करता है तो इसकी दिशा लगातार बदलती है।

(द्रव्यमान m के) एक कण की, त्रिज्या r के वृत्ताकार पथ में **अभिकेंद्र त्वरण** (v^2/r) से **एकसमान वर्तुल गति** बनाए रखने के लिए आवश्यक नेट बल को **अभिकेंद्र बल** कहा जाता है और इसका मान होता है :

$$\vec{\mathbf{F}}_c = -\frac{mv^2}{r}\hat{\mathbf{r}} = -m\omega^2 r\,\hat{\mathbf{r}}$$

अभिकेंद्र बल के **परिमाण** और **दिशा** निम्नवत् होते हैं :

परिमाण : $F_c = m\omega^2 r = \frac{mv^2}{r}$

दिशा : अभिकेंद्र बल की दिशा अभिकेंद्र त्वरण के अनुदिश होती है और सदैव वृत्त के केंद्र या गति के वक्र पथ के वक्रता केंद्र की ओर होती है।

एकसमान वर्तुल गति का वर्णन करने के लिए एक और महत्त्वपूर्ण राशि का उपयोग किया जाता है। यह है **गति का आवर्तकाल। कण द्वारा वृत्त में एक पूरा चक्कर लगाने में लिया गया समय उसका आवर्त काल T कहलाता है**। चूंकि एक पूरे चक्कर में कण द्वारा चली गई दूरी, वृत्त की परिधि ($2\pi r$) के बराबर होती है, इसलिए हम लिख सकते हैं :

आवर्त काल

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad \text{या} \quad T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (6.11)$$

आपको अभिकेंद्र बल की अवधारणा को ध्यान से पढ़ना चाहिए। इसके अनुसार **कण को एकसमान वर्तुल गति में बनाए रखने के लिए एक नेट बल की आवश्यकता**

होती है और इस बल को अभिकेंद्र बल **कहा जाता है। अभिकेंद्र बल के बारे में ये बातें हमेशा याद रखें** :

- **अभिकेंद्र बल प्रकृति में उपस्थित नया या अलग बल नहीं है।**
- **शब्द "अभिकेंद्र" एक विशेषण है जो किसी भी ऐसे बल का वर्णन करता है जिसकी दिशा गति के पथ के वक्रता केंद्र की ओर होती है।**
- **यह कोई अलग बल नहीं है जिसे किसी कण का बल-निर्देशक आरेख बनाते हुए अलग बल के रूप में दिखाना है।**
- **जैसाकि हमने इकाई 5 के भाग 5.3 में गति के समीकरण $\vec{F} = m\vec{a}$ के लिए समझाया है, समीकरण 6.10क और ख वर्तुल गति के लिए मात्र गति के समीकरण हैं।**
- **बल $\vec{F}$ की तरह, अभिकेंद्र बल $\vec{F}_c$ भी कण पर लग रहे नेट बल के संगत बल नियम द्वारा दिया जाता है।**
- **समीकरणों 6.10क और ख को किसी भी समस्या में लागू होने वाले बल नियम सहित इस्तेमाल करना होता है।**

वह नेट बल जो कण को एकसमान वर्तुल गति में बनाए रखता है, अनेक प्रकार के बलों में से कोई भी बल हो सकता है, जैसेकि :

- डोरी में तनाव, जैसेकि क्षैतिज वृत्त में गतिमान गेंद से जुड़ी डोरी में,
- दो सतहों के बीच घर्षण बल, जैसेकि सड़क पर मोड़ पर मुड़ रही कार के टायरों और सड़क के बीच लग रहा घर्षण बल,
- अभिलंब बल का कोई घटक जैसेकि उदाहरण 6.9 में मोड़ों पर गाड़ियों की गति के लिए वर्णित है,
- गुरुत्वाकर्षण बल जैसे कि पृथ्वी और सूर्य के बीच का बल जो पृथ्वी को लगभग वृत्ताकार कक्षा में बनाए रखता है।

गुरुत्वाकर्षण बल या तनाव बल या अभिलंब बल के त्रिज्य घटक जैसे बल **कण को वर्तुल पथ पर गतिमान रखने के लिए आवश्यक होते हैं**। ये बल **केंद्र-अपेक्षी** (centre-seeking) बल होते हैं और **इनकी दिशा वृत्त के केंद्र की ओर होती है**।

ऐसे किसी बल के आरोपित हुए बिना वर्तुल गति नहीं हो सकती।

आइए, अब हम न्यूटन के गति के नियमों को वर्तुल पथ पर एकसमान गति कर रहे कणों पर लागू करने के उदाहरण लें।

चित्र 6.20 : एकसमान वर्तुल गति में गतिमान मोटरसाइकिल सवार पर लग रहा बल।

उदाहरण 6.7 : एकसमान वर्तुल गति

सर्कस में एक मोटरसाइकिल सवार एक 10.0 m चौड़े स्टील के गोले में 64.0 kmh^{-1} की अचर चाल से मोटरसाइकिल चलाता है (चित्र 6.20)। अगर मोटरसाइकिल सवार का द्रव्यमान 50.0 kg हो तो उस पर कितना बल लग रहा है?

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि क्योंकि मोटरसाइकिल सवार 5.0 m त्रिज्या के वर्तुल पथ पर गतिमान है, तो उसका अभिकेंद्र त्वरण और फिर अभिकेंद्र बल ज्ञात किया जाए।

मोटरसाइकिल सवार का अभिकेंद्र त्वरण और उस पर लग रहा अभिकेंद्र बल हैं :

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(17.8\,ms^{-1})^2}{5.0\,m} = 63.4\ ms^{-2}$$

$$F = ma = 50.0\,kg \times 63.4\ ms^{-2} = 3.17 \times 10^3\ N$$

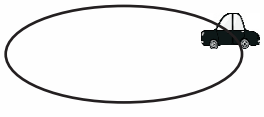
अभिकेंद्र त्वरण की दिशा में यानी गोले के केंद्र की ओर।

उदाहरण 6.8 : समतल में एकसमान वर्तुल गति

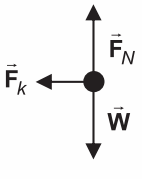
द्रव्यमान 900 kg की एक कार वर्तुल पथ पर 10.0 ms^{-1} की अधिकतम चाल से मुड़ सकती है (चित्र 6.21क)। कार जिस वृत्त में मुड़ती है, उसकी त्रिज्या 30.0 m है। कार पर लग रहा घर्षण बल और कार और सड़क के बीच घर्षण गुणांक प्राप्त करें। $g = 10.0\,ms^{-1}$ लें।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि कार पर लग रहा नेट बल, जो उसे वृत्त में बनाए रखने के लिए आवश्यक अभिकेंद्र बल प्रदान करता है, ज्ञात किया जाए।

कार पर लग रहे बल हैं : नीचे की दिशा में कार का भार ($\vec{W} = m\vec{g}$), ऊपर की दिशा में अभिलंब बल $\vec{F}_N$ और वृत्त के केंद्र की ओर घर्षण बल। बल-निर्देशक आरेख चित्र 6.21ख में दिखाया गया है। चूंकि अभिलंब बल और कार का भार एक दूसरे के बराबर और विपरीत हैं, अतः, केवल घर्षण बल कार को वृत्त में बनाए रखने के लिए आवश्यक अभिकेंद्र बल प्रदान करता है। अतः, घर्षण बल अभिकेंद्र बल के बराबर होगा।



(क)



(ख)

चित्र 6.21 : क) वर्तुल पथ पर गतिमान कार; ख) कार का बल-निर्देशक आरेख।

समीकरण 6.10क से $F_k = \frac{mv^2}{r}$ (i)

समीकरण (i) में $v = 10.0\,ms^{-1}$, $m = 900\,kg$, $r = 30.0\,m$ रखने पर हमें मिलता है :

$$F_k = \frac{900\,kg \times (10.0\,ms^{-1})^2}{30.0} = 3000\,N$$

समीकरण 6.3 से $F_k = \mu_k mg \quad \Rightarrow \quad \mu_k = F_k / mg$ (ii)

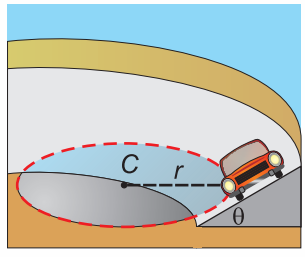
समीकरण (ii) में $F_k = 3000\,N$ और $m = 900\,kg$ रखने पर हमें मिलता है :

$$\mu_k = 0.33$$

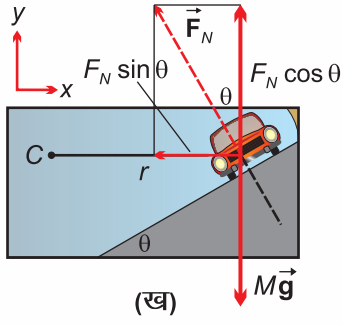
अब हम वास्तविक जीवन में एकसमान वर्तुल गति का एक महत्त्वपूर्ण अनुप्रयोग लेंगे।

उदाहरण 6.9 : सड़क में मोड़ का डिज़ाइन

आम तौर पर सड़कों के मोड़ों को क्षैतिज से ढलान पर बनाया जाता है। मोड़ और क्षैतिज के बीच कोण को **ढलान कोण** (banking angle) कहा जाता है (चित्र 6.22क)। ऐसा इसलिए किया जाता है कि मोड़ों पर **केवल घर्षण के कारण** वाहन का सड़क (विशेषकर बरसात या बर्फ़ पड़ने के कारण फिसलन वाली सड़क) पर बने रहना संभव नहीं होता। मान लें कि द्रव्यमान M वाले एक वाहन को अचर चाल v से सड़क के मोड़ पर मुड़ना है। सड़क पर मोड़ की वक्रता त्रिज्या r है। सड़क का ढलान कोण क्या होना चाहिए ताकि मोड़ पर मुड़ते हुए, सड़क पर बने रहने के लिए वाहन को घर्षण की आवश्यकता न पड़े?



(क)



(ख)

चित्र 6.22 : क) सड़कों का ढलान; ख) बल-निर्देशक आरेख।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि जब वाहन सड़क में मोड़ पर चलता है तब उसका अभिकेन्द्र त्वरण $\left(=\frac{v^2}{r}\right)$ होता है।

सड़क पर ढलान इस तरह रखी जाती है कि वाहन पर अभिलंब बल के एक घटक की दिशा मोड़ के वक्रता केंद्र की ओर हो। अब हम वाहन पर लग रहे सभी बल पहचानेंगे और फिर उस पर न्यूटन के गति के नियम लागू करेंगे। वाहन पर लग रहे बल हैं : **गुरुत्व** (या उसका **भार**), और सम्पर्क बल : **अभिलंब बल** और **गतिक घर्षण बल जो इस स्थिति में शून्य होना चाहिए**। आइए, अब हम निर्देशांक अक्षों समेत वाहन का बल-निर्देशक आरेख खींचें। हम धनात्मक x-अक्ष को क्षैतिज के अनुदिश लेते हैं (चित्र 6.22ख)। आप बल-निर्देशक आरेख से देख सकते हैं कि अभिलंब बल और ऊर्ध्वाधर के बीच का कोण θ है। अभिलंब बल के x-घटक की दिशा वक्रता केंद्र की ओर है और यह अभिकेंद्र बल के बराबर है। आइए, अब हम बलों को x और y-अक्षों के अनुदिश वियोजित करें और उन पर न्यूटन का दूसरा नियम लागू करें। चूंकि वाहन y-अक्ष के अनुदिश गतिमान नहीं है, इसलिए उस दिशा में नेट बल शून्य है। धनात्मक x-दिशा में अभिकेंद्र बल को $F_N \sin\theta$ के बराबर रखने पर हमें मिलता है :

$$M\frac{v^2}{r} = F_N \sin\theta \quad \text{और} \quad \sum F_y = F_N \cos\theta - Mg = 0$$

अतः, $$F_N \cos\theta = Mg$$

पहले समीकरण को दूसरे समीकरण से भाग देने पर हमें मिलता है :

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} \qquad \text{या} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{rg}\right)$$

इस तरह, यदि आप $15\,\text{ms}^{-1}$ की चाल पर 100 m की वक्रता त्रिज्या वाले मोड़ पर वाहन चलाना चाहें तो सड़क का ढलान कोण होना चाहिए :

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{(15\,\text{ms}^{-1})^2}{(100\,\text{m})(9.8\,\text{ms}^{-2})}\right) = 12.9^\circ \approx 13^\circ$$

बोध प्रश्न 5 – एकसमान वर्तुल गति

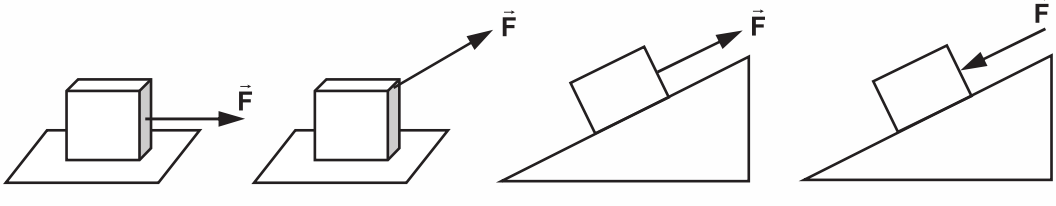
एक लड़ाकू विमान की पायलट अपने विमान को 2520 kmh^{-1} की चाल से एक वृत्ताकार चाप में, जिसकी वक्रता त्रिज्या 6000 m है, उड़ाती है। यदि उसका द्रव्यमान 60 kg हो तो उसके द्वारा अनुभव किया गया त्वरण क्या है?

आइए, अब हम इस इकाई का सार यहां दें।

6.5 सारांश

अवधारणा	विवरण
हमारे चारों ओर के सम्पर्क बल	■ **सम्पर्क बल :** **अभिलंब बल:** **दिशा** – संपर्क में स्थित सतहों के **लंबवत्** और विरूपण बल के बराबर और विपरीत। **परिमाण** – यदि सतहें संपर्क में हों तब शून्य नहीं होता वरना शून्य होता है। **घर्षण बल:** **दिशा** – संपर्क में स्थित सतहों के **अनुदिश** और पिंड की गति की दिशा के विपरीत। **परिमाण** – यदि सतहें संपर्क में हों तब शून्य नहीं होता, वरना शून्य होता है। $F_s^{max} = \mu_s F_N$ **स्थैतिक घर्षण** बल के लिए $F_k = \mu_k F_N$ **गतिक घर्षण** बल के लिए **तनाव बल:** **दिशा** – डोरी के अनुदिश और पिंड से परे। **परिमाण** – डोरी में तनाव के बराबर। यदि डोरी तनी हुई हो तब वह शून्य नहीं होता। यदि डोरी ढीली हो तो तनाव बल शून्य होता है। **कमानी बल :** **दिशा** – साम्यावस्था से कमानी के विस्थापन की दिशा के विपरीत। हुक के नियम से : $F = -kx$
साम्यावस्था में पिंड	■ **कोई पिंड साम्यावस्था में होता है जब उस पर लग रहा नेट बल शून्य होता है**। अतः, पिंड का **त्वरण भी शून्य** होता है और वह **विरामावस्था में** होता है या **अचर वेग** से चलता है। समतल में गति के लिए : $F_{net,x} = \sum F_x = 0$ और $F_{net,y} = \sum F_y = 0$ समष्टि में गति के लिए : $F_{net,x} = \sum F_x = 0$, $F_{net,y} = \sum F_y = 0$ और $F_{net,z} = \sum F_z = 0$

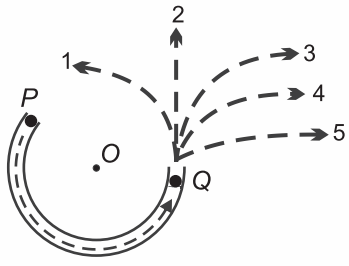
■ हमने न्यूटन के गति के नियमों को विभिन्न स्थितियों पर लागू किया है। इनमें से कुछ चित्र 6.23 में दिखाई गई हैं :



चित्र 6.23 : न्यूटन के गति के नियमों के कुछ अनुप्रयोग।

6.6 अंत में कुछ प्रश्न

1. आगे दिए गए कथन और चित्र 6.24 का उपयोग करके भाग (क) और (ख) के उत्तर दें। चित्र 6.24 में केंद्र *O* वाले वृत्त की चाप के आकार की एक घर्षणहीन नली दिखाई गई है। यह नली एक घर्षणहीन मेज़ की क्षैतिज सतह पर जुड़ी हुई है। मान लें कि आप मेज़ के ऊपर से इस नली को देख रहे हैं। वायु द्वारा आरोपित बल को नगण्य मानें। बिंदु *P* पर एक गेंद को नली में उच्च चाल से छोड़ा जाता है और वह बिंदु *Q* पर नली से निकलती है। नीचे दिए हुए चार अलग-अलग बल लें :



चित्र 6.24

A. नीचे की ओर लग रहा गुरुत्व बल।
B. नली द्वारा *Q* से *O* की ओर आरोपित बल।
C. गति की दिशा में बल।
D. *O* से *Q* की ओर लग रहा बल।

क) ऊपर दिए गए बलों में से कौन-सा/कौन-से बल गेंद पर लग रहा/लग रहे हैं जब वह नली में स्थिति *Q* पर है?

i. केवल A
ii. A और B
iii. A और C
iv. A, B और C
v. A, C और D

ख) गेंद चित्र 6.24 में दिखाए गए पथों 1 से 5 में से किस पथ का अनुसरण करेगी जब वह नली से बिंदु *Q* पर निकलती है और मेज़ की घर्षणहीन सतह पर गतिमान होती है?

2. चित्र 6.25 में एक बच्चे को झूलते हुए दिखाया गया है जो बिंदु *P* से अधिक ऊंचाई से झूलना शुरू करता है। नीचे दिए हुए चार अलग-अलग बलों को लें :

चित्र 6.25

A. नीचे की ओर लग रहा गुरुत्व बल।
B. रस्सी द्वारा *P* से *O* की ओर आरोपित बल।
C. बच्चे की गति की दिशा में बल।
D. *O* से *P* की ओर लग रहा बल।

ऊपर दिए गए बलों में से कौन-सा/कौन-से बल बच्चे पर लग रहा/लग रहे हैं जब वह स्थिति *P* पर है?

1. केवल A
2. A और B
3. A और C
4. A, B और C
5. A, C और D

3. एक किताब एक मेज़ पर विरामावस्था पर रखी है। किताब और मेज़ पर लग रहे सभी बलों की पहचान करें। दोनों पिंडों के लिए बल-निर्देशक आरेख खींचें।

4. एक लैम्प को दो केबलों से लटकाया गया है। एक केबल में तनाव बल 12.6 N है और उसके और छत के बीच का कोण 15° है। यदि दूसरे केबल और छत के बीच का कोण 65° हो तो उस केबल में तनाव बल क्या होगा?

5. एक नत समतल पर द्रव्यमान 0.70 kg का एक बक्सा रखा है। यदि समतल द्वारा बक्से पर लगाया गया अभिलंब बल 5.4 N हो तो वह नत समतल क्षैतिज भूमि से किस कोण पर रखा गया है?

6. द्रव्यमान 8.00×10^6 kg की एक रेलगाड़ी 80.0 kmh^{-1} की अचर चाल से सरल रेखा में गतिमान है। उस पर ब्रेक द्वारा 25.0 s के लिए 2.40×10^6 N का नेट बल लगाया जाता है जिसकी दिशा उसकी गति की दिशा के विपरीत होती है। रेलगाड़ी की नई चाल क्या है? इस समयांतराल में रेलगाड़ी कितनी दूरी तय करती है?

7. एक खुरदुरे फ़र्श पर एक बक्से को गति प्रदान करने के लिए उस पर कम से कम 64.4 N बल से धक्का देना होता है। यदि बक्से और फ़र्श के बीच स्थैतिक घर्षण गुणांक 0.350 हो तो बक्से के द्रव्यमान की गणना करें। $g = 9.80\ ms^{-2}$ लें।

8. द्रव्यमान 2.00×10^8 kg का एक जहाज़ अचर वेग से गतिमान है। उसके इंजन का प्रणोद 5.00×10^5 N है। (i) पानी के कारण जहाज़ पर ऊपर की ओर लग रहे उत्प्लावन बल और (ii) पानी द्वारा जहाज़ पर आरोपित प्रतिरोध बल की गणना करें। $g = 9.80\ ms^{-2}$ लें।

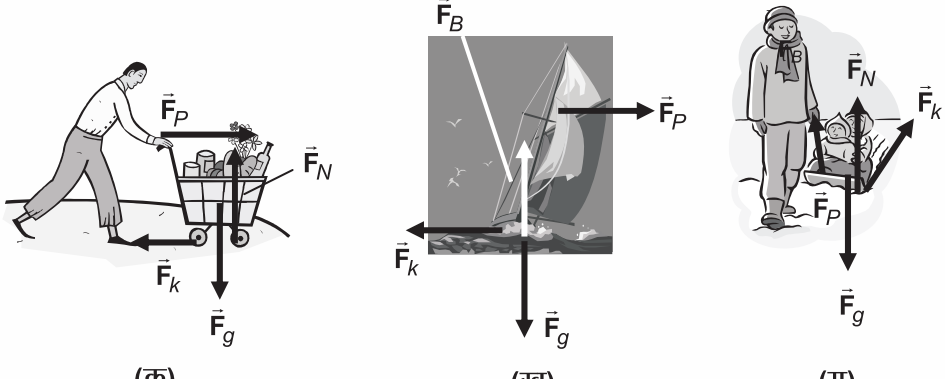
9. द्रव्यमान 0.20 kg के एक पत्थर को डोरी में बांध कर उसे घर्षणहीन सतह पर क्षैतिज वृत्त में घुमाया जाता है। यदि पत्थर की चाल 8.0 ms^{-1} है और वृत्त की त्रिज्या 2.0 m है, तो डोरी में तनाव की गणना करें।

10. एक सड़क पर 20.0 ms^{-1} की चाल से चलने वाली गाड़ियों के लिए वृत्ताकार मोड़ डिज़ाइन किया जाता है। मोड़ की वक्रता त्रिज्या 120 m है। मोड़ पर गाड़ियां सड़क से उतर न जायें, इसके लिए उनके टायरों और सड़क के बीच गतिक घर्षण गुणांक का न्यूनतम मान क्या होना चाहिए? $g = 10.0\ ms^{-2}$ लें।

6.7 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. चित्र 6.26 देखें।



(क) (ख) (ग)

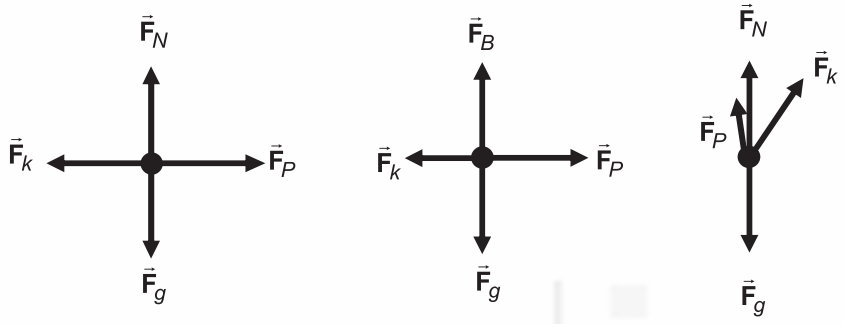
चित्र 6.26

क) $\vec{F}_g = m\vec{g}$ गाड़ी का भार है, $\vec{F}_N$ अभिलंब बल है, $\vec{F}_k$ गतिक घर्षण बल है और $\vec{F}_P$ वह बल है जिससे व्यक्ति गाड़ी को धक्का दे रहा है।

ख) $\vec{F}_g = m\vec{g}$ नाव का भार है, $\vec{F}_B$ पानी द्वारा आरोपित ऊपर की ओर उत्प्लावन बल है, $\vec{F}_k$ पानी द्वारा आरोपित प्रतिरोध बल है और $\vec{F}_P$ वह बल है जो वायु नाव की पाल पर आरोपित करती है।

ग) $\vec{F}_g = m\vec{g}$ स्लेड का भार है, $\vec{F}_N$ अभिलंब बल है, $\vec{F}_k$ गतिक घर्षण बल है और $\vec{F}_P$ वह बल है जिससे स्लेड को खींचा जा रहा है।

2. प्रत्येक स्थिति के लिए बल-निर्देशक आरेख चित्र 6.27 में दिखाए गए हैं। ध्यान दें कि प्रत्येक पिंड को कण के रूप में दिखाया गया है।



चित्र 6.27

3. क) (i) मेज़ पर फ़र्श द्वारा आरोपित अभिलंब बल मेज़ और बच्ची के भार के योग के बराबर है। इसका परिमाण है :

$$F_N = 75.0\,\text{kg} \times 9.8\,\text{ms}^{-2} = 735\,\text{N}$$

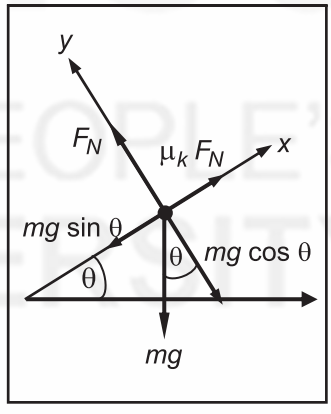
(ii) मेज़ द्वारा बच्ची पर आरोपित अभिलंब बल का परिमाण है :

$$F'_N = 30.0\,\text{kg} \times 9.8\,\text{ms}^{-2} = 294\,\text{N}$$

ख) चूंकि बच्ची का वेग अचर है, अतः उस पर लग रहा नेट बल शून्य होगा। बल-निर्देशक आरेख (चित्र 6.28) से हम लिख सकते हैं :

$$mg\cos\theta = F_N \qquad \text{(i)}$$

और $$mg\sin\theta = \mu_k F_N \qquad \text{(ii)}$$

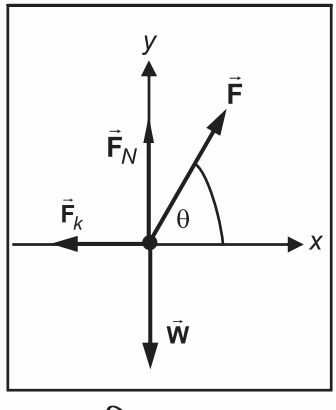


चित्र 6.28

समीकरण (ii) को समीकरण (i) से भाग देने पर हमें गतिक घर्षण गुणांक मिलता है :

$$\mu_k = \tan\theta$$

4. बल-निर्देशक आरेख और निर्देशांक अक्ष चित्र 6.29 में दिखाए गए हैं। $\vec{F}$ बक्से पर लग रहा नेट बल है जिसका परिमाण 80 N है, $\vec{F}_N$ अभिलंब बल है, $\vec{W} = m\vec{g}$ बक्से का भार है और $\vec{F}_k = \mu_k\vec{F}_N$ गतिक घर्षण बल है। बक्सा x-अक्ष के अनुदिश त्वरण a_x से गतिमान है। बलों को x-अक्ष के अनुदिश वियोजित करने पर हमें मिलता है :



चित्र 6.29

$$F\cos 60° - \mu_k F_N = F_{net,x} = ma_x$$

या $a_x = (F\cos 60° - \mu_k F_N)/m$ (i)

y-अक्ष के अनुदिश बलों को वियोजित करने पर हमें मिलता है :

$$F\sin 60° + F_N - W = F_{net,y} = 0$$

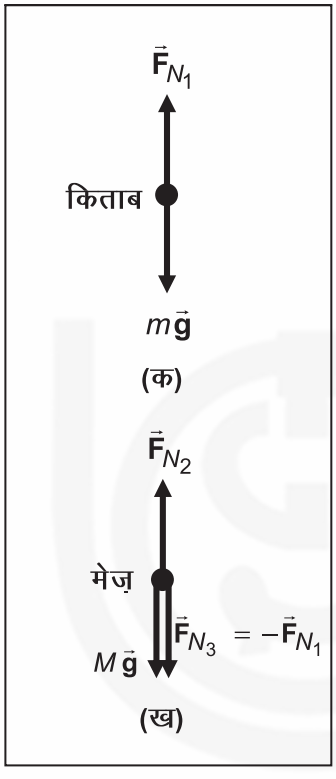
या $F_N = W - F\sin 60°$ (ii)

समीकरण (ii) में $W = mg = 150\,\text{N}$, $F = 80\,\text{N}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ रखने पर हमें मिलता है :

$$F_N = \left(150 - \frac{80\sqrt{3}}{2}\right)\text{N} = 81\,\text{N} \quad \text{(iii)}$$

समीकरण (iii) से F_N का मान और $\mu_k = 0.20$ समीकरण (i) में रखने पर हमें मिलता है :

$$a_x = \frac{80\,\text{N}\times\cos 60° - 0.20\times 81\text{N}}{15\,\text{kg}} = 1.6\ \text{ms}^{-2}$$



चित्र 6.30

5. पायलट पर लग रहा अभिकेन्द्र बल है :

$$F_C = \frac{mv^2}{r} = 60\ \text{kg}\times\frac{(700\ \text{ms}^{-1})^2}{6000\,\text{m}} = 4900\,\text{N} = 4.9\times 10^3\,\text{N}$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. क) ii।

   ख) पथ 2 जो बिंदु Q पर नली की स्पर्शज्या के अनुदिश है क्योंकि अब गेंद पर लग रहा नेट बल शून्य है।

2. ii) बच्चे पर दोनों ही बल, गुरुत्व बल और रस्सी द्वारा आरोपित बल लगते हैं।

3. चूंकि किताब और मेज़ दोनों विरामावस्था में हैं, इसलिए किताब पर लग रहे बल हैं :

   $m\vec{g}$ = किताब का भार, और

   $\vec{F}_{N_1}$ = किताब पर मेज़ द्वारा आरोपित अभिलंब बल

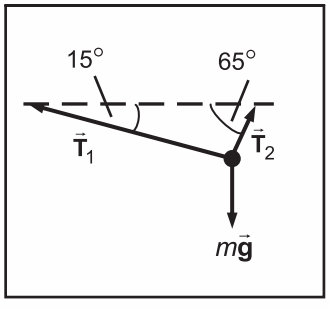
   मेज़ पर लग रहे बल हैं :

   $M\vec{g}$ = मेज़ का भार,

   $\vec{F}_{N_2}$ = मेज़ पर भूमि द्वारा आरोपित अभिलंब बल, और

   $\vec{F}_{N_3} = -\vec{F}_{N_1}$ = मेज़ पर किताब द्वारा आरोपित अभिलंब बल।

   दोनों पिंडों के लिए बल-निर्देशक आरेख चित्र 6.30 में दिखाये गए हैं।



चित्र 6.31

4. चित्र 6.31 देखें। चूंकि लैम्प विरामावस्था में है इसलिए,

$$T_2 \sin 65^\circ + T_1 \sin 15^\circ = mg$$

और $$T_1 \cos 15^\circ = T_2 \cos 65^\circ$$

$$\therefore \quad T_2 = (12.6\,\text{N}) \times \frac{\cos 15^\circ}{\cos 65^\circ} = 28.8\,\text{N}$$

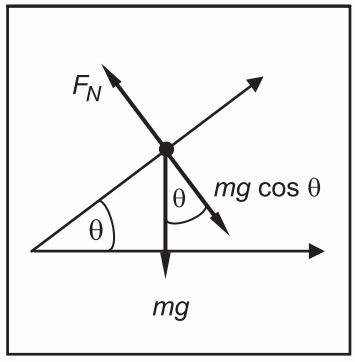
5. चित्र 6.32 देखें। चूंकि बक्सा नत समतल पर विरामावस्था में है, इसलिए

$$mg \cos\theta = F_N$$

जहां F_N अभिलंब बल है। इसलिए,

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{F_N}{mg}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{5.4\ \text{N}}{0.70\,\text{kg} \times 9.8\ \text{ms}^{-2}}\right) = \cos^{-1}(0.79) = 38^\circ$$



चित्र 6.32

6. मान लें कि रेलगाड़ी धनात्मक x-दिशा में गतिमान है। ब्रेक लगाने के बाद रेलगाड़ी का त्वरण (a_x) है :

$$a_x = -\frac{2.40 \times 10^6\,\text{N}}{8.00 \times 10^6\,\text{kg}} = -0.300\ \text{ms}^{-2}$$

ब्रेक लगाने से पहले रेलगाड़ी की चाल u है :

$$u = 80.0\ \text{kmh}^{-1} = 22.2\ \text{ms}^{-1}$$

25.0 s बाद रेलगाड़ी की चाल और उसके द्वारा तय की गई दूरी शुद्धगतिकी की समीकरणों से प्राप्त होती है। $t = 25.0\,\text{s}$ के बाद रेलगाड़ी की चाल v है :

$$v = 22.2\ \text{ms}^{-1} - 0.300\ \text{ms}^{-2} \times 25.0\,\text{s} = 14.7\ \text{ms}^{-1}$$

इस समयांतराल में रेलगाड़ी द्वारा तय की गई दूरी है :

$$s = 22.2\ \text{ms}^{-1} \times 25.0\,\text{s} - \frac{1}{2} \times 0.300\ \text{ms}^{-2} \times (25.0\,\text{s})^2 = 461\text{m}$$

7. बक्सा तब गतिमान होगा जब उसे धकेलने वाला बल उसकी गति का विरोध करने वाले स्थैतिक घर्षण बल से अधिक होगा। अतः,

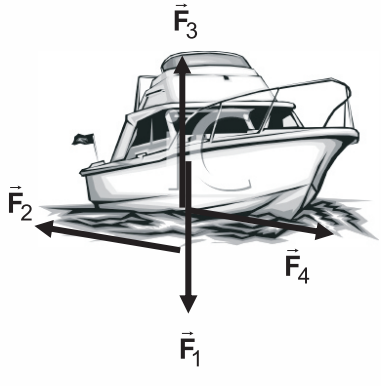
$$F_s^{\max} = 64.4\,\text{N} \quad \Rightarrow \quad \mu_s\, mg = 64.4\,\text{N}$$

जहां m बक्से का द्रव्यमान है और $\mu_s = 0.35$ । अतः,

$$m = \frac{64.4\,\text{N}}{0.350 \times (9.80\ \text{ms}^{-2})} = 18.8\,\text{kg}$$

8. चूंकि जहाज़ अचर वेग से गतिमान है, अतः, उस पर लग रहा नेट बल शून्य है। जहाज़ पर लग रहे बल हैं (चित्र 6.33) :

1) $\vec{F}_1$ = जहाज़ का भार,
2) $\vec{F}_2$ = पानी द्वारा जहाज़ पर आरोपित प्रतिरोध बल,
3) $\vec{F}_3$ = ऊपर की ओर लग रहा उत्प्लावन बल, और
4) $\vec{F}_4$ = इंजन का प्रणोद



चित्र 6.33

चित्र 6.34 में बल-निर्देशक आरेख दिखाया गया है। चूंकि नेट बल शून्य है, अतः,

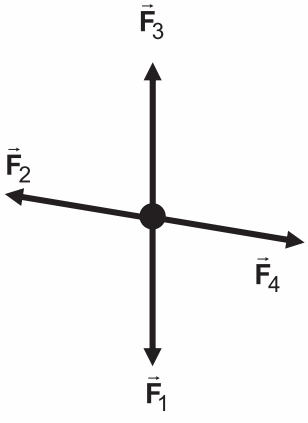
$$\vec{F}_1 = \vec{F}_3 \quad \text{और} \quad \vec{F}_2 = \vec{F}_4$$

i) पानी द्वारा ऊपर की ओर आरोपित उत्प्लावन बल जहाज़ के भार के बराबर है :

$$\therefore \quad \vec{F}_3 = (2.00 \times 10^8 \text{ kg}) \times 9.80 \text{ ms}^{-2} = 19.6 \times 10^8 \text{ N}$$

ii) पानी द्वारा जहाज़ पर आरोपित प्रतिरोध बल इंजन के प्रणोद के बराबर है :

$$\therefore \quad \vec{F}_4 = 5.00 \times 10^5 \text{ N}$$



चित्र 6.34

9. डोरी में तनाव $\vec{T}$ पत्थर को एकसमान वर्तुल गति में बनाए रखने के लिए अभिकेंद्र बल प्रदान करता है। अतः, समीकरण 6.10क में $m = 0.20\,\text{kg}$, $v = 8.0\ \text{ms}^{-1}$ और $r = 2.0\ \text{m}$ रखने पर हम लिख सकते हैं :

$$T = \frac{mv^2}{r} = \frac{0.20\,\text{kg} \times (8.0\,\text{ms}^{-1})^2}{2.0\,\text{m}} = 6.4\,\text{N}$$

10. गाड़ियां सड़क से नहीं उतरेंगी, यदि घर्षण बल उन्हें वर्तुल गति में बनाए रखने के लिए अभिकेंद्र बल प्रदान करता है। अतः, समीकरणों 6.4 और 6.10क से हम लिख सकते हैं

$$\frac{mv^2}{r} = \mu_k mg \quad \Rightarrow \quad \mu_k = \frac{v^2}{gr}$$

$v = 20.0\,\text{ms}^{-1}$, $r = 120\,\text{m}$ और $g = 10.0\ \text{ms}^{-2}$ रखने पर हमें मिलता है :

$$\mu_k = \frac{(20.0\,\text{ms}^{-1})^2}{(120\,\text{m}) \times (10\,\text{ms}^{-2})} = 0.33$$

अंतरिक्ष स्टेशन में अंतरिक्ष यात्री भारहीन क्यों महसूस करते हैं? इस प्रश्न का उत्तर आपको इस इकाई में मिलेगा !

इकाई 7

गुरुत्वाकर्षण

इकाई की रूपरेखा

7.1 परिचय
उद्देश्य
7.2 गुरुत्वाकर्षण बल
अध्यारोपण का नियम
गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र
7.3 गुरुत्व बल
ऊंचाई, गहराई और अक्षांश के साथ g में परिवर्तन
गुरुत्व के अधीन ऊर्ध्वाधर वर्तुल गति
7.4 भार
भारहीनता
7.5 सारांश
7.6 अंत में कुछ प्रश्न
7.7 हल और उत्तर

अध्ययन निर्देशिका

इकाई 6 में, आपने न्यूटन के गति के नियमों को अपने आसपास की विभिन्न स्थितियों पर लागू करना सीखा है जिनमें कणों पर संपर्क बल आरोपित होते हैं। इस इकाई में, आप **दीर्घ परासी** गुरुत्वाकर्षण बल और उसके अनुप्रयोगों के बारे में पढ़ेंगे। आप गुरुत्व बल और भार के बारे में भी पढ़ेंगे और उन स्थितियों पर न्यूटन के गति के नियमों को लागू करना सीखेंगे जिनमें किसी पिंड पर ये बल आरोपित हो रहे हों।

इस इकाई को अच्छी तरह से समझने के लिए **आपको इकाइयों 1 और 2 में समझाई गई सदिश बीजगणित, और इकाई 5 और इकाई 6 में समझाई गई अवधारणाएं अच्छी तरह आनी चाहिए**। इस इकाई को पढ़ने से पहले आप इन अवधारणाओं को दोहरा लें। इस इकाई के प्रश्नों को हल करने के लिए आपको इकाई 6 में समझाई गई विधियां **अच्छी तरह आनी चाहिए**। इकाई में दिए गए सभी उदाहरणों और सवालों को स्वयं हल करने की कोशिश करें। ऐसा करने से आप इस इकाई में दी गई अवधारणाएं अच्छी तरह समझ सकेंगे।

"जब आप कोई खोज खुद करते हैं, तो आप उसे कभी नहीं भूलते, भले ही आप पृथ्वी के वह आखिरी प्राणी हों जिसे वह बात समझ आई हो।"

कार्ल सगान

7.1 परिचय

पिंडों की गति को समझने के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय का भी प्रयोग होता है जो आप इकाई 9 में पढ़ेंगे।

इकाई 6 में आपने **विभिन्न प्रकार के संपर्क बलों और बल नियमों के बारे में पढ़ा है जिन पर न्यूटन के गति के नियमों को लागू किया जा सकता है**। आपने इन नियमों को उन कणों की गति पर लागू करना सीखा है जिन पर ये संपर्क बल आरोपित होते हैं। इस इकाई में आप **गुरुत्वाकर्षण बल** के बारे में पढ़ेंगे जो एक दीर्घ परासी बल है। आपने अपनी स्कूल की भौतिकी में पढ़ा है कि गुरुत्वाकर्षण बल **सार्वत्रिक** बल है। यह बल ब्रह्मांड में मौजूद सभी स्थूल पिंड युग्मों के बीच आरोपित होता है। यही बल चंद्रमा को, पृथ्वी के चारों ओर उसकी कक्षा में बनाए रखता है। यही बल सूर्य और ग्रहों और अन्य आकाशीय पिंडों के बीच आरोपित होता है और हमें विविध खगोलीय घटनाओं को समझने में मदद करता है।

अतः, इस इकाई के भाग 7.2 में आप गुरुत्वाकर्षण बल नियम के बारे में पढ़ेंगे और समझेंगे कि इसे विस्तारित पिंडों पर कैसे लागू किया जा सकता है। हम अध्यारोपण का नियम भी समझाएंगे जिसकी मदद से हम यह बता सकते हैं कि अनेक कणों के कारण किसी कण पर लग रहे गुरुत्वाकर्षण बल का मान क्या होता है। हम गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र की अवधारणा भी समझाएंगे।

ध्यान दें

अपने लिखित कार्य में आप सदिश राशि को ऊपर तीर लगा कर इस प्रकार लिखें : $\vec{r}$ । एकक सदिश को इस प्रकार लिखें : $\hat{r}$ ।

गुरुत्व बल पृथ्वी पर मौजूद पिंडों की गति को समझने के लिए उपयोगी होता है जैसेकि प्रक्षेप्य गति और पिंडों का भार आदि। भाग 7.3 में आप पृथ्वी पर गुरुत्व बल और उन कारकों के बारे में सीखेंगे जिनके कारण पृथ्वी पर और उसके चारों ओर भिन्न बिंदुओं पर गुरुत्वीय त्वरण का मान बदलता है। इकाई 6 में आपने क्षैतिज तल में एकसमान वर्तुल गति के बारे में पढ़ा है। भाग 7.3 में आप ऊर्ध्वाधर तल में एकसमान वर्तुल गति के बारे में पढ़ेंगे जिसमें गुरुत्व बल, अभिकेंद्र बल प्रदान करता है। आप ऊर्ध्वाधर वर्तुल गति के कुछ अनुप्रयोगों के बारे में भी पढ़ेंगे। लिफ़्ट में चलते हुए आप भारी या हल्का महसूस करते हैं। भाग 7.4 में भार और भारहीनता की अवधारणाएं पढ़ कर आप समझेंगे कि ऐसा क्यों होता है ।

अगली इकाई में हम रैखिक संवेग और आवेग की अवधारणाओं की चर्चा करेंगे। साथ ही हम रैखिक संवेग संरक्षण के नियम के बारे में भी बतायेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- गुरुत्वाकर्षण बल के अधीन गतिमान पिंडों पर न्यूटन के गति के नियमों को लागू कर सकेंगे;
- अध्यारोपण के नियम का उपयोग करके किसी कण पर लग रहे नेट गुरुत्वाकर्षण बल का मान प्राप्त कर सकेंगे;
- गुरुत्व बल के अधीन गतिमान पिंडों की गति से संबंधित सवालों को हल कर सकेंगे; और
- भार और भारहीनता की अवधारणाएं समझा सकेंगे और इन अवधारणाओं से संबंधित सवालों को हल कर सकेंगे।

7.2 गुरुत्वाकर्षण बल

अपनी स्कूल की भौतिकी में आपने गुरुत्वाकर्षण बल के बारे में पढ़ा है। आप जानते हैं कि गुरुत्वाकर्षण बल ब्रह्मांड में मौजूद सभी स्थूल पिंडों के बीच आरोपित होता है भले ही उनके बीच कितनी भी दूरी हो। हम कहते हैं कि गुरुत्वाकर्षण बल सार्वत्रिक है। आइए, हम इस बल के अपने रोज़ाना के अनुभवों पर चर्चा करें। आप जानते हैं कि पृथ्वी पर मौजूद स्थूल पिंड पृथ्वी की ओर $g = 9.8\ \text{ms}^{-2}$ के त्वरण से गिरते हैं। क्या आप यह नहीं जानना चाहेंगे : **गुरुत्वीय त्वरण का मान $g = 9.8\ \text{ms}^{-2}$ क्यों होता है**? न्यूटन के गति के दूसरे नियम से आप जानते हैं कि पृथ्वी की ओर $g = 9.8\ \text{ms}^{-2}$ के त्वरण से गिर रहे पिंड पर कोई बल लग रहा होगा। वह बल क्या है? उसका बल नियम क्या है? न्यूटन वे पहले व्यक्ति थे जिन्होंने **सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण का नियम** दिया और उसके संगत बल का व्यंजक दिया। न्यूटन के तीनों गति के नियमों के साथ-साथ इस नियम की मदद से हम प्रकृति में मौजूद सभी स्थूल पिंडों की गति की व्याख्या कर सकते हैं। तो आइए, हम न्यूटन का सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियम समझें और गुरुत्वाकर्षण बल का व्यंजक लिखें।

न्यूटन का सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियम

ब्रह्माण्ड में मौजूद प्रत्येक कण हर दूसरे कण पर एक आकर्षण बल आरोपित करता है। दो कण लें जिनके द्रव्यमान क्रमशः m_1 और m_2 हैं और जिनके बीच की दूरी r है (चित्र 7.1)। **कण m_1 द्वारा कण m_2 पर आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल, उन दोनों को जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश लगता है और इसकी दिशा m_2 से m_1 की ओर होती है**। इसका व्यंजक होता है :

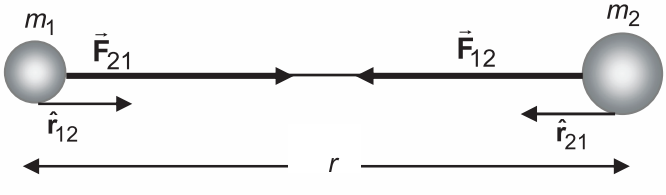
$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_{12}|^2}\hat{r}_{12} \qquad (7.1\text{क})$$

जहां $\hat{r}_{12}$ कणों को जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश एकक सदिश है और उसकी दिशा m_1 से m_2 की ओर है। ध्यान दें कि $|\hat{r}_{12}| = r$ है। समीकरण 7.1क में ऋणात्मक चिन्ह बताता है कि m_2 पर m_1 द्वारा लग रहा बल आकर्षण बल है। इसकी दिशा $\hat{r}_{12}$ के विपरीत है। G एक नियतांक है जिसे **सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक** कहते हैं। प्रयोगों द्वारा इसका निम्नलिखित मान निर्धारित किया गया है :

$$G = 6.673 \times 10^{-11}\ \text{N.m}^2\,.\,\text{kg}^{-2}$$

इसी तरह, हम m_1 पर m_2 द्वारा आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल का व्यंजक लिख सकते हैं :

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_{21}|^2}\hat{r}_{21} \qquad (7.1\text{ख})$$



चित्र 7.1 : दो कणों के बीच गुरुत्वाकर्षण बल।

ध्यान दें

वे बल जो कणों को जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश लगते हैं या किसी कण और किसी मूल बिंदु (जो समष्टि में नियत रहता है) को जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश लगते हैं, **केन्द्रीय बल** कहलाते हैं। इनका व्यंजक होता है :

$$\vec{F} = F\hat{r}$$

जहां F बल का परिमाण है और $\hat{r}$ रेखा के अनुदिश एकक सदिश है। आप इसके बारे में इकाई 13 में पढ़ेंगे।

गुरुत्वाकर्षण बल

ध्यान दें

हम जिस संकेत प्रणाली का यहां प्रयोग कर रहे हैं उसमें :

$\vec{F}_{21}$: 1 पर 2 द्वारा आरोपित बल

और

$\vec{F}_{12}$: 2 पर 1 द्वारा आरोपित बल

चित्र 7.1 में ध्यान दें कि $|\vec{r}_{21}| = r$ और $\hat{r}_{21}$ कणों को जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश एकक सदिश है और इसकी दिशा m_2 से m_1 की ओर है। साथ ही ध्यान दें कि $\hat{r}_{21} = -\hat{r}_{12}$ और इसलिए

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \qquad (7.1\text{ग})$$

ध्यान दें कि समीकरण 7.1क, ख और ग बिंदु द्रव्यमानों पर लागू होते हैं। समीकरणों 7.1क और ख में आने वाले द्रव्यमान को **गुरुत्वीय द्रव्यमान** कहा जाता है। **यह पदार्थ का गुणधर्म होता है जिसके कारण पिंड एक-दूसरे पर गुरुत्वाकर्षण बल आरोपित करते हैं**। अब आप दो पिंडों के बीच लग रहे गुरुत्वाकर्षण बल की गणना करें।

बोध प्रश्न 1 – गुरुत्वाकर्षण बल

दो पिंडों, जिनमें से प्रत्येक का द्रव्यमान 50 kg है, के बीच लग रहे गुरुत्वाकर्षण बल की गणना करें जबकि उनके बीच की दूरी 1.5 m हो।

ध्यान दें

न्यूटनी यांत्रिकी में किसी पिंड के जड़त्वीय और गुरुत्वीय द्रव्यमान एक ही होते हैं।

अब हम एकसमान वर्तुल गति की गतिकी में गुरुत्वाकर्षण बल के एक बहुत महत्त्वपूर्ण अनुप्रयोग का उदाहरण लेंगे। यह है उपग्रह प्रौद्योगिकी में। इस प्रौद्योगिकी का प्रभाव हम अपने चारों ओर देखते हैं – टीवी और दूरसंचार में, इन्टरनेट और पृथ्वी के नक्शे बनाने में (Google Earth द्वारा या ISRO द्वारा चलाए जा रहे भुवन नामक खोज इंजन द्वारा)। इनमें से अनेक उपग्रह (मसलन दूरसंचार में प्रयुक्त उपग्रह) **भूतुल्यकाली** (geosynchronous) होते हैं।

एक भूतुल्यकाली उपग्रह को पृथ्वी की एक बार परिक्रमा करने में उतना ही समय लगता है जितना कि पृथ्वी को अपने अक्ष पर एक बार घूमने में। इसका अर्थ यह है कि उपग्रह की कोणीय चाल अपने ठीक नीचे पृथ्वी पर स्थित एक बिंदु की कोणीय चाल के बराबर होती है। अतः, पृथ्वी पर उस बिंदु पर खड़े प्रेक्षक को वह उपग्रह आकाश में स्थिर दिखाई देता है। चूंकि ऐसा उपग्रह पृथ्वी पर खड़े प्रेक्षक के सापेक्ष स्थिर रहता है, अतः, इसे एक **भूतुल्यकाली उपग्रह** कहा जाता है। ऐसे उपग्रह दूरसंचार के लिए उपयोगी होते हैं क्योंकि वे एक ही क्षेत्र को निरन्तर यह सुविधा दे सकते हैं। चित्र 7.2 में पृथ्वी की परिक्रमा कर रहा भूतुल्यकाली उपग्रह दिखाया गया है। गुरुत्वाकर्षण बल, भूतुल्यकाली उपग्रह को उसकी वृत्तीय कक्षा में बनाए रखने के लिए आवश्यक अभिकेंद्र बल प्रदान करता है। आइए, हम इस अवधारणा का उपयोग करके पृथ्वी की सतह से भूतुल्यकाली उपग्रह की ऊंचाई प्राप्त करें।

चित्र 7.2 : पृथ्वी की परिक्रमा कर रहा भूतुल्यकाली उपग्रह।

उदाहरण 7.1 : भूतुल्यकाली उपग्रह

पृथ्वी की सतह से एक भूतुल्यकाली उपग्रह की ऊँचाई क्या होती है?

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि उपग्रह और पृथ्वी के बीच का गुरुत्वाकर्षण बल (जिसकी दिशा पृथ्वी के केंद्र की ओर है) उपग्रह को उसकी वृत्तीय कक्षा में बनाए रखने के लिए आवश्यक अभिकेंद्र त्वरण प्रदान करता है। अतः, हम समीकरण 6.10क और ख लागू करेंगे और पृथ्वी द्वारा उपग्रह पर आरोपित बल को अभिकेंद्र बल के बराबर रखेंगे।

माना कि उपग्रह और पृथ्वी के द्रव्यमान क्रमशः m और M_e हैं। तब यदि उपग्रह त्रिज्या r वाले वृत्त में पृथ्वी की परिक्रमा कर रहा हो तो समीकरणों 7.1क, 6.10क और ख से :

$$\frac{GmM_e}{r^2} = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r \qquad \text{(i)}$$

या $$r = \left(\frac{GM_e}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{GM_eT^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \left(\because \omega = \frac{2\pi}{T}\right) \qquad \text{(ii)}$$

समीकरण (ii) में $T = 24 \text{ hours} = (24 \times 60 \times 60)\text{ s} = 86400\text{s}$, $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\text{Nm}^2\,\text{kg}^{-2}$ और $M_e = 5.97 \times 10^{24}\,\text{kg}$ रखने पर हमें मिलता है : $r = 4.22 \times 10^7\,\text{m}$

चूंकि पृथ्वी की त्रिज्या $R_e = 6.37 \times 10^6\,\text{m}$ है, पृथ्वी की सतह से उपग्रह की ऊंचाई है : $h = (42.2 - 6.37) \times 10^6\,\text{m} = 3.58 \times 10^7\,\text{m} = 35{,}800\,\text{km}$

उदाहरण 7.1 के समीकरण (i) से अपनी कक्षा में उपग्रह की चाल, जिसे **कक्षीय चाल** कहते हैं, का व्यंजक है :

$$v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}} \qquad (7.2)$$

समीकरण 7.2 हमें बताता है कि

- r के दिए मान के लिए, उपग्रह की कक्षीय चाल उसके द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करती यानी किसी दी हुई कक्षा के लिए, **अधिक द्रव्यमान वाले उपग्रह की कक्षीय चाल कम द्रव्यमान वाले उपग्रह की कक्षीय चाल के बराबर होती है।**
- उपग्रह कक्षा की त्रिज्या r जितनी कम होती है, यानी उपग्रह पृथ्वी के जितना निकट होता है, उतनी ही उसकी कक्षीय चाल अधिक होती है।

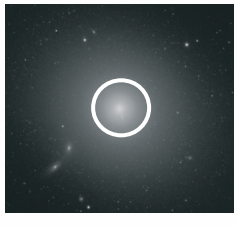
समीकरण 7.2 उन सभी उपग्रहों (कृत्रिम उपग्रहों और चांद जैसे प्राकृतिक उपग्रहों) पर लागू होता है जो पृथ्वी की परिक्रमा करते हैं। यह द्रव्यमान M वाले अन्य किसी भी पिंड की परिक्रमा कर रहे पिंड पर भी लागू होता है, मसलन बृहस्पति के उपग्रहों पर या अन्य ग्रहों के उपग्रहों पर या तारों की परिक्रमा कर रहे ग्रहों पर। इस स्थिति में समीकरण 7.2 में M_e के स्थान पर M रखना होगा।

बोध प्रश्न 2 – उपग्रह

यदि हमें ब्रह्मांड के किसी पिंड की परिक्रमा कर रहे उपग्रह की चाल ज्ञात हो तो हम समीकरण 7.2 से उस पिंड का द्रव्यमान ज्ञात कर सकते हैं। एक मंदाकिनी के केंद्र से $7.50 \times 10^{17}\,\text{m}$ की दूरी पर स्थित पिंड $5.70 \times 10^5\,\text{ms}^{-1}$ की चाल से उसकी परिक्रमा करता है। मंदाकिनी के केंद्र पर स्थित पिंड का द्रव्यमान ज्ञात करें (देखें चित्र 7.3)।

भूमंडलीय स्थिति निर्धारण प्रणाली

भूमंडलीय स्थिति निर्धारण प्रणाली (जीपीएस) उपग्रहों, एवं पृथ्वी पर स्थित स्टेशनों में मौजूद कम्प्यूटरों और अभिग्राहियों का निकाय होता है जिसकी मदद से हम पृथ्वी पर स्थिति किसी भी अभिग्राही के अक्षांश और रेखांश मालूम कर सकते हैं। अभिग्राही के अक्षांश और रेखांश मालूम करने के लिए, हम विभिन्न उपग्रहों से भेजे जा रहे संकेतों के अभिग्राही तक पहुंचने में लिए गए समय के अंतराल की गणना करते हैं।



चित्र 7.3: माना जाता है कि इस मंदाकिनी के केंद्र में ब्लैक होल स्थित है जिसे सफेद वृत्त से दिखाया गया है।

न्यूटन का गुरुत्वाकर्षण का नियम दो बिंदु कणों की पारस्परिक क्रिया का वर्णन करता है। **याद रखें : उन पिंडों को जिनके आमाप** (size) **उनके बीच की दूरी की तुलना में अत्यल्प होते हैं कण माना जा सकता है**। अब हम अनेक कणों का निकाय लेते हैं जैसेकि सौर मंडल। हम सूर्य और सौर मंडल के अन्य पिंडों द्वारा किसी ग्रह (माना कि पृथ्वी) पर लगाए जा रहे गुरुत्वाकर्षण बल की गणना कैसे करेंगे?

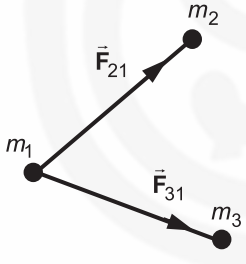
इसके लिए हम **अध्यारोपण के नियम** का उपयोग कर सकते हैं जो गुरुत्वाकर्षण बल पर लागू होता है। आइए, इस नियम को समझें जिसका उपयोग कर हम कणों के एक निकाय में प्रत्येक कण पर निकाय के बाकी कणों द्वारा आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल परिकलित कर सकते हैं।

7.2.1 अध्यारोपण का नियम

इकाई 5 के भाग 5.3.1 से अध्यारोपण का नियम याद करें। इसके अनुसार, कणों के एक निकाय में किसी एक कण पर लग रहा बल बाकी के सभी कणों द्वारा उस पर आरोपित बलों का परिणामी (सदिश योग) होता है।

इस नियम को गुरुत्वाकर्षण बल के लिए समझने के लिए हम तीन कणों का निकाय लेते हैं जिनके द्रव्यमान क्रमशः m_1, m_2 और m_3 हैं (चित्र 7.4 देखें)। इनमें से किसी एक कण, माना कि द्रव्यमान m_1 वाले कण पर लग रहा गुरुत्वाकर्षण बल क्या है? यदि निकाय में केवल द्रव्यमान m_1 और m_2 वाले कण होते तो m_2 द्वारा m_1 पर लग रहा बल होता :

$$\vec{\mathbf{F}}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{21}^2}\hat{\mathbf{r}}_{21} \qquad (7.3\text{क})$$



चित्र 7.4: अध्यारोपण का नियम।

इसी तरह, यदि निकाय में केवल द्रव्यमान m_1 और m_3 वाले कण होते तो m_3 द्वारा m_1 पर लग रहा बल होता

$$\vec{\mathbf{F}}_{31} = -G\frac{m_1 m_3}{r_{31}^2}\hat{\mathbf{r}}_{31} \qquad (7.3\text{ख})$$

अब द्रव्यमान m_1 वाले कण पर द्रव्यमान m_2 और m_3 वाले कणों द्वारा लग रहा बल क्या है? अध्यारोपण के नियम के अनुसार, चित्र 7.4 के तीन-कण निकाय में, m_1 पर लग रहा कुल बल $\vec{\mathbf{F}}_1$, बलों $\vec{\mathbf{F}}_{21}$ और $\vec{\mathbf{F}}_{31}$ का सदिश योग है यानी

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = \vec{\mathbf{F}}_{21} + \vec{\mathbf{F}}_{31} \qquad (7.4\text{क})$$

या
$$\vec{\mathbf{F}}_1 = -G\frac{m_1 m_2}{r_{21}^2}\hat{\mathbf{r}}_{21} - G\frac{m_1 m_3}{r_{31}^2}\hat{\mathbf{r}}_{31} \qquad (7.4\text{ख})$$

द्रव्यमान $m_1, m_{2,}..., m_N$ वाले N कणों के निकाय में, द्रव्यमान m_1 वाले कण 1 पर निकाय के बाकी कणों द्वारा आरोपित बल है :

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = -G\sum_{i=2}^{N}\frac{m_1 m_i}{r_{i1}^2}\hat{\mathbf{r}}_{i1} \qquad (7.4\text{ग})$$

अध्यारोपण का नियम

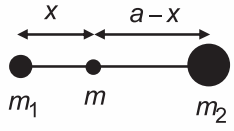
दोहराएं

अध्यारोपण के नियम के अनुसार N कणों के निकाय में, किसी एक कण पर लग रहा परिणामी गुरुत्वाकर्षण बल, उस पर निकाय के अन्य सभी कणों द्वारा आरोपित गुरुत्वाकर्षण बलों का सदिश योग होता है जिसका मान समीकरण 7.4ग द्वारा दिया जाता है।

अब आप अध्यारोपण के नियम को लागू करने के लिए एक उदाहरण समझें।

उदाहरण 7.2 : अध्यारोपण का नियम

दो स्थिर कणों को, जिनके द्रव्यमान m_1 और m_2 हैं, जोड़ने वाली रेखा पर उन कणों के बीच उस बिंदु की स्थिति निर्धारित करें जिस पर स्थित द्रव्यमान m वाले कण पर इन दोनों का परिणामी गुरुत्वाकर्षण बल शून्य है। सिद्ध करें कि इस बिंदु की स्थिति का मान द्रव्यमान m पर निर्भर नहीं करता।



चित्र 7.5 : अध्यारोपण का नियम लागू करना।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि अध्यारोपण के नियम का उपयोग कर द्रव्यमान m के कण पर बाकी दोनों कणों द्वारा आरोपित नेट गुरुत्वाकर्षण बल प्राप्त किया जाए और उसे शून्य सदिश के बराबर रखा जाए।

चित्र 7.5 देखें। मान लें कि द्रव्यमान m_1 और m_2 वाले कणों के बीच की दूरी a है। मान लें कि द्रव्यमान m_1 वाले कण से द्रव्यमान m वाले कण की दूरी x है जिस पर द्रव्यमान m_1 वाले कण और द्रव्यमान m_2 वाले कण के कारण द्रव्यमान m वाले कण पर परिणामी गुरुत्वाकर्षण बल शून्य है। अब अध्यारोपण के नियम से, द्रव्यमान m वाले कण पर द्रव्यमान m_1 और m_2 वाले कणों द्वारा आरोपित नेट बल है :

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m}{x^2}\hat{x} - \frac{Gm_2m}{(a-x^2)}(-\hat{x}) \qquad \text{(i)}$$

समीकरण (i) में $\vec{F} = \vec{0}$ रखने पर हमें मिलता है : $\frac{Gm_1m}{x^2} = \frac{Gm_2m}{(a-x)^2}$ (ii)

समीकरण (ii) को हल करने पर (हाशिए पर दी गई टिप्पणी पढ़ें) हमें मिलता है :

$$x = \frac{a}{1+b} \quad \text{जहां } b = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

हाशिए पर दी गई टिप्पणी में ध्यान दें कि x का मान m पर निर्भर नहीं करता। यह भी ध्यान दें कि द्रव्यमान m वाले कण की स्थिति बाकी दोनों कणों के द्रव्यमानों के अनुपात पर ज़रूर निर्भर करती है।

हम समीकरण (ii) को द्विघात समीकरण की तरह हल कर सकते हैं : आप देख सकते हैं कि द्विघात समीकरण (ii)

$m_1(a-x)^2 = m_2x^2$

यानी

$(m_1-m_2)x^2 - 2am_1x + a^2m_1 = 0$

के मूल हैं

$\frac{a}{1+b}$ और $\frac{a}{1-b}$ जिनमें

से केवल $\frac{a}{1+b}$ संभव है।

ऐसा इसलिए है क्योंकि x धनात्मक है और a से कम है।

ये दोनों ही बातें हल $\frac{a}{1-b}$ के लिए संभव नहीं हैं क्योंकि $m_2 < m_1$ के लिए $x > a$, जो दी गई स्थिति के लिए संभव नहीं है और $m_2 > m_1$ के लिए $x < 0$ जो दी गई स्थिति के लिए संभव नहीं है।

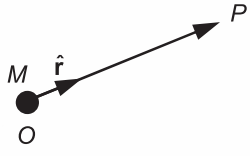
बोध प्रश्न 3 – अध्यारोपण का नियम

द्रव्यमान $2m$ और $4m$ वाले दो कणों के बीच की दूरी $2r$ है। इन कणों को जोड़ने वाली रेखा के मध्यबिंदु पर द्रव्यमान m का एक कण रखा है। द्रव्यमान m वाले कण पर नेट गुरुत्वाकर्षण बल प्राप्त करें। रेखा के किस बिंदु पर द्रव्यमान m वाले कण को रखा जाना चाहिए ताकि उस पर लग रहा नेट गुरुत्वाकर्षण बल शून्य हो जाए?

वास्तव में, प्रकृति में जो बल संपर्क के कारण नहीं लगते उन्हें अब हम दूरी पर लग रहे बल नहीं कहते। ऐसे सभी बल (जिनके कारक पिंड के संपर्क में नहीं होते) **बल क्षेत्र** (force field) कहलाते हैं। बल क्षेत्र की संकल्पना इस पाठ्यक्रम के दायरे से बाहर है। इस तरह, गुरुत्वाकर्षण बल को हम गुरुत्वाकर्षण बल क्षेत्र कहते हैं। अब हम गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र की अवधारणा पर जो आपके लिए नयी हो सकती है, संक्षेप में विचार करेंगे।

7.2.2 गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र

एक-दूसरे से दूरी r पर रखे दो कण लें जिनके द्रव्यमान क्रमशः m_1 और m_2 हैं। जैसाकि आप जानते हैं प्रत्येक कण पर दूसरे कण के कारण गुरुत्वाकर्षण बल लगता है जो उनके बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है। दूरी r का मान कितना ही अधिक क्यों न हो, कणों पर गुरुत्वाकर्षण बल लगता ही है। हम कहते हैं कि द्रव्यमान m_1 के कण के चारों ओर कण का **गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र** (gravitational field) मौजूद होता है। द्रव्यमान m_1 के कण के गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र में मौजूद किसी भी अन्य कण पर गुरुत्वाकर्षण बल लगता है जिसका मान समीकरण 7.1क द्वारा दिया जाता है। गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र की प्रबलता की माप उसकी **तीव्रता** द्वारा दी जाती है।



चित्र 7.6: बिंदु O पर रखे द्रव्यमान M वाले कण के कारण बिंदु P पर गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र की तीव्रता।

परिभाषा से, द्रव्यमान M वाले एक कण की उससे दूरी r पर **गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र की तीव्रता** उस बिंदु पर रखे **एकक द्रव्यमान पर लग रहे गुरुत्वाकर्षण बल** के बराबर होती है। गणितीय रूप में, बिंदु O पर रखे द्रव्यमान M के एक कण की बिंदु P पर गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र की तीव्रता (चित्र 7.6 देखें) होती है :

$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (7.5\text{क})$$

जहां $\hat{\mathbf{r}}$, OP के अनुदिश एकक सदिश है और $OP = r$ । बिंदु P पर रखे द्रव्यमान m वाले कण पर बिंदु O पर रखे द्रव्यमान M वाले कण के कारण लग रहा गुरुत्वाकर्षण बल $\vec{\mathbf{F}}$ होता है :

$$\vec{\mathbf{F}} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (7.5\text{ख})$$

समीकरण 7.5ख से हम समीकरण 7.5क को इस तरह लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{E}} \qquad (7.5\text{ग})$$

7.3 गुरुत्व बल

अपनी स्कूल की भौतिकी में आपने गुरुत्व बल के बारे में पढ़ा है। आप जानते हैं कि **पृथ्वी और उस पर या उसके पास मौजूद किसी पिंड के बीच लग रहे गुरुत्वाकर्षण बल को गुरुत्व बल कहते हैं**। आइए, हम यहां उस पर विस्तार से चर्चा करें और समझें कि **पृथ्वी पर गुरुत्वीय त्वरण का मान $g = 9.8\ \text{ms}^{-2}$ क्यों होता है**। चूंकि g गुरुत्वीय त्वरण है, अतः, न्यूटन के दूसरे नियम से, पृथ्वी द्वारा अपनी सतह पर मौजूद द्रव्यमान m वाले किसी पिंड पर आरोपित गुरुत्वीय बल है :

$$F = mg \qquad (7.6\text{क})$$

इसकी दिशा पृथ्वी के केंद्र की ओर होती है।

अब यदि पृथ्वी के द्रव्यमान और त्रिज्या क्रमशः M_e और R_e हों, तो इस पिंड पर पृथ्वी द्वारा आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल का मान क्या है? इसका परिमाण है :

$$F = G\frac{mM_e}{R_e^2} \qquad (7.6ख)$$

और इसकी दिशा भी पृथ्वी के केंद्र की ओर होती है। इसका मान समीकरण 7.6क द्वारा दिये गए F के बराबर होना चाहिए। इसलिए हम लिख सकते हैं :

$$F = G\frac{mM_e}{R_e^2} = mg \qquad (7.6ग)$$

या
$$g = \frac{GM_e}{R_e^2} \qquad (7.6घ)$$

समीकरण 7.6घ पृथ्वी की सतह पर g का मान देता है। यदि हम G, R_e और M_e के मान समीकरण 7.6घ में रखते हैं तो g का मान $9.81\,ms^{-2}$ होता है। लेकिन g का यह मान भूमध्य रेखा पर होता है। जब हम पृथ्वी की सतह से दूर जाते हैं या पृथ्वी के भीतर किसी गहराई तक जाते हैं तो g का मान बदल जाता है। क्योंकि पृथ्वी पूरी तरह से गोलाकार नहीं है इसलिए g का मान पिंड के अक्षांश के साथ भी बदलता है। आइए, देखें कि g का मान ऊंचाई, गहराई और अक्षांश के साथ किस तरह बदलता है।

7.3.1 ऊंचाई, गहराई और अक्षांश के साथ g में परिवर्तन

चित्र 7.7 देखें। हम द्रव्यमान m वाले एक कण की क्रमशः बिंदुओं A और B पर स्थितियां लेते हैं, जहां

$SA = h = A$ की ऊंचाई और

$SB = d =$ वह गहराई जिस पर बिंदु B स्थित है

यहां S पृथ्वी की सतह पर एक बिंदु है और $OS = R_e =$ पृथ्वी की त्रिज्या

मान लें कि बिंदुओं A और S पर स्थित द्रव्यमान m के कण पर लग रहे बल क्रमशः $\vec{F}_A$ और $\vec{F}_S$ हैं। तब समीकरण 7.6ख से, इनके परिमाण हैं :

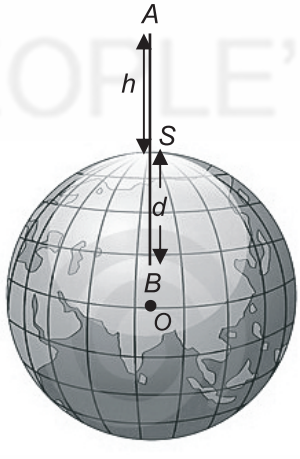
$$F_S = \frac{GM_em}{R_e^2}, \qquad (7.7क)$$

और
$$F_A = \frac{GM_em}{(R_e + h)^2} \qquad (7.7ख)$$

जहां M_e पृथ्वी का द्रव्यमान है। मान लें कि पृथ्वी की सतह और बिंदु A पर गुरुत्वीय त्वरण के मान क्रमशः g_S और g_A हैं। तब

$$g_S = \frac{F_S}{m} = \frac{GM_e}{R_e^2} = g_0 \qquad (7.8क)$$

और
$$g_A = \frac{F_A}{m} = \frac{GM_e}{(R_e + h)^2} \qquad (7.8ख)$$



चित्र 7.7: पृथ्वी की सतह के सापेक्ष भिन्न बिंदुओं पर गुरुत्वीय त्वरण।

समीकरणों 7.8क और ख से हम पाते हैं कि

ऊंचाई h पर g

$$g_A = \frac{g_0 R_e^2}{(R_e + h)^2} \qquad (7.9क)$$

हम समीकरण 7.9क का द्विपद प्रसार इस तरह से करते हैं :

$$g_A = g_0 \frac{R_e^2}{R_e^2\left(1 + \frac{h}{R_e}\right)^2} = g_0\left(1 + \frac{h}{R_e}\right)^{-2}$$

या $$g_A = g_0\left(1 - \frac{2h}{R_e}\right) \qquad h << R_e \text{ के लिए} \qquad (7.9ख)$$

समीकरण 7.9क से हमें पृथ्वी की सतह से ऊंचाई h पर g का मान मिलता है। समीकरण 7.9ख पृथ्वी की त्रिज्या से अत्यधिक कम मान वाली ऊंचाइयों पर लागू होता है। चूंकि पृथ्वी एक ठोस पिंड है और अपनी धुरी पर घूर्णन भी करती है, इसलिए गुरुत्वीय त्वरण का मान पृथ्वी के अंदर गहराई के साथ भी बदलता है। यहां पर हम पृथ्वी की सतह से पृथ्वी के अंदर गहराई d पर स्थित एक बिंदु B पर g के मान के और अक्षांश λ पर $g(\lambda)$ के मान के सूत्र दे रहे हैं :

गहराई d पर g

$$g_B = \frac{g_0}{R_e}(R_e - d), \qquad (7.10)$$

अक्षांश λ पर g

और $$g(\lambda) = g_0 + \omega^2 R_e \sin^2\lambda, \qquad (7.11)$$

जहां $g(\lambda)$ = पृथ्वी की सतह पर अक्षांश λ वाले स्थान पर g का मान

g_0 = भूमध्य रेखा पर g का मान = $9.81\ \text{ms}^{-2}$

ω = पृथ्वी के घूर्णन की कोणीय चाल।

आइए, पृथ्वी के भीतर किसी बिंदु पर g का मान परिकलित करें।

उदाहरण 7.3 : गहराई के साथ g में परिवर्तन

पृथ्वी की सतह पर g के मान के सापेक्ष पृथ्वी के अंदर 30 km लंबी सुरंग के अंतिम छोर पर g के मान में प्रतिशत कमी प्राप्त करें। मान लें कि पृथ्वी की त्रिज्या 6400 km है।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि समीकरण 7.10 का उपयोग करके 30 km की गहराई पर g का मान परिकलित किया जाए।

समीकरण 7.10 में $R_e = 6400$ km और $d = 30$ km रखने पर हमें मिलता है :

$$g = \frac{g_0}{R_e}(R_e - 30\,\text{km}) = g_0\left[1 - \frac{30}{6400}\right] \qquad \text{(i)}$$

पृथ्वी की सतह पर g के मान से प्रतिशत कमी है :

$$\Delta g = \left(\frac{g_0 - g}{g_0}\right)\times 100 = \left(1 - \frac{g}{g_0}\right)\times 100 \qquad \text{(ii)}$$

समीकरण (i) से $\frac{g}{g_0}$ का मान समीकरण (ii) में रखने पर हमें मिलता है :

$$\Delta g = \left[1 - \left(1 - \frac{30}{6400}\right)\right]\times 100 = 0.47\%$$

बोध प्रश्न 4 – गुरुत्वीय त्वरण

बृहस्पति ग्रह पर किसी पिंड के गुरुत्वीय त्वरण का मान प्राप्त करें। दिया है कि बृहस्पति का द्रव्यमान 1.90×10^{27} kg है और त्रिज्या 7.14×10^{7} m है।

7.3.2 गुरुत्व के अधीन ऊर्ध्वाधर वर्तुल गति

इकाई 6 के भाग 6.4 में आपने क्षैतिज तल में एकसमान वर्तुल गति के बारे में पढ़ा है। आपने कई उदाहरण पढ़े हैं जिनमें किसी पिंड की एकसमान वर्तुल गति बनाये रखने के लिए आवश्यक बल डोरी के तनाव या घर्षण द्वारा दिया जाता है। उन सभी स्थितियों में गुरुत्व बल की कोई भूमिका नहीं थी क्योंकि वह अभिलंब बल या उसके किसी घटक से संतुलित हो रहा था। अब आप ऊर्ध्वाधर तल में एकसमान वर्तुल गति के बारे में पढ़ेंगे जिसमें गुरुत्व बल की महत्त्वपूर्ण भूमिका होती है।

आपने ऊर्ध्वाधर तल में वर्तुल गति मेलों में देखी होगी जहां विशाल झूलों में बड़े ऊर्ध्वाधर वृत्तों में लोगों को घुमाया जाता है। पानी की रहट, क्रीड़ा स्थलों में झूलों की सवारी, सर्कसों में मोटरसाइकिल पर मौत के कुएं के करतब इस तरह के अन्य उदाहरण हैं (चित्र 7.8) ।

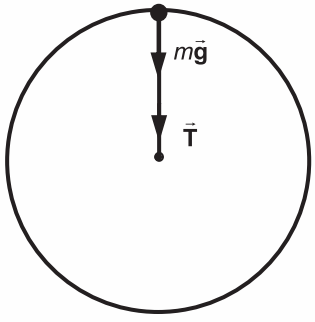
(क) (ख) (ग)

चित्र 7.8 : ऊर्ध्वाधर वर्तुल गति के कुछ उदाहरण – क) दिल्ली के कालिंदी कुंज में विशाल झूला "Delhi eye"; ख) रोलर कोस्टर में ऊर्ध्वाधर वृत्ताकार लूप; ग) खेतों में पानी देने के लिए प्रयुक्त रहट। चित्रों का स्रोत : upload. Wikimedia.org

आइए, हम उदाहरणों की मदद से ऊर्ध्वाधर वर्तुल गति की गतिकी समझें जिसमें हमें गुरुत्व बल को भी शामिल करना होगा।

उदाहरण 7.4 : ऊर्ध्वाधर वर्तुल गति

द्रव्यमान 2.0 kg वाली पानी की बाल्टी को एक द्रव्यमानहीन रस्सी से बांधकर त्रिज्या 1.0 m वाले ऊर्ध्वाधर वृत्त में घुमाया जाता है। वृत्ताकार पथ के उच्चतम बिंदु पर बाल्टी की चाल 4.0 ms^{-1} है। जब बाल्टी पथ के उच्चतम बिंदु पर होती है, तो रस्सी में तनाव ज्ञात करें। $g = 10\,ms^{-2}$ लें।



चित्र 7.9: ऊर्ध्वाधर वृत्त में गतिमान पानी की बाल्टी के लिए बल-निर्देशक आरेख।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि वृत्त के उच्चतम बिंदु पर बाल्टी पर लग रहे सभी बलों को पहचाना जाए और उस पर लग रहे नेट बल को अभिकेंद्र बल के बराबर रखा जाए।

वृत्त के उच्चतम बिंदु पर बाल्टी पर लग रहे बल हैं : बाल्टी पर लग रहा गुरुत्व बल $m\vec{g}$ और रस्सी में तनाव $\vec{T}$। दोनों बल ऊर्ध्वाधरतः नीचे की ओर लगते हैं जैसाकि बल-निर्देशक आरेख (चित्र 7.9) में दिखाया गया है। नीचे की दिशा में नेट बल है :

$$\vec{F}_{net} = m\vec{g} + \vec{T} \quad \text{(i)}$$

जैसाकि आपने इकाई 6 के भाग 6.4 में पढ़ा है, यह बल वर्तुल गति के लिए आवश्यक अभिकेंद्र बल $\vec{F}_c$ के बराबर है। अतः, हम लिख सकते हैं

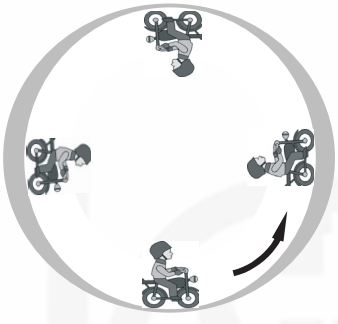
$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_c \quad \text{(ii)}$$

चूंकि सभी बल ऊर्ध्वाधरतः नीचे की ओर हैं, अतः,

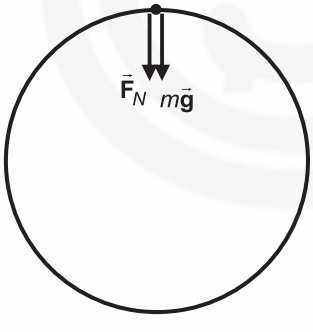
$$\frac{mv^2}{r} = mg + T \quad \text{(iii)}$$

अतः, रस्सी में तनाव है :

$$T = \frac{mv^2}{r} - mg = \frac{(2.0\,\text{kg}) \times (4.0\,\text{ms}^{-1})^2}{1.0\,\text{m}} - 2.0\,\text{kg} \times 10\,\text{ms}^{-2} = 12\,\text{N}$$



(क)



(ख)

चित्र 7.10: क) ऊर्ध्वाधर वृत्त में मोटरसाइकिल सवार; ख) बल-निर्देशक आरेख।

उदाहरण 7.5 : ऊर्ध्वाधर वर्तुल गति

मोटरसाइकिल सवार एक करतब करते हैं जिसमें वे अपनी मोटरसाइकिलें एक ऊर्ध्वाधर वृत्ताकार पथ में चलाते हैं (देखें चित्र 7.10क)। मान लें कि उनकी गति एकसमान वर्तुल गति है। त्रिज्या r वाले ऊर्ध्वाधर वृत्त के ऊपरी बिंदु पर पहुंचकर मोटरसाइकिल नीचे न गिरे, इसके लिए उसकी न्यूनतम चाल क्या होनी चाहिए?

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि वृत्त के ऊपरी बिंदु पर मोटरसाइकिल पर लग रहे सभी बलों को पहचाना जाए और उस पर लग रहे नेट बल को उसे वृत्ताकार पथ में बनाए रखने के लिए आवश्यक अभिकेंद्र बल के बराबर रखा जाए।

वृत्त के उच्चतम बिंदु पर अभिकेंद्र बल के लिए आवश्यक नेट बल, त्रिज्य दिशा में वृत्त के केंद्र की ओर लग रहे सभी बल घटकों का योग है (चित्र 7.10ख)। हम मोटरसाइकिल इंजन का प्रणोद और ब्रेक बल नहीं लेते क्योंकि वे त्रिज्य दिशा में नहीं लगते। इस तरह प्रत्येक बिंदु पर दो बल लगते हैं (देखें चित्र 7.10ख) : सवार समेत मोटरसाइकिल पर **गुरुत्व बल** ($m\vec{g}$) और मोटरसाइकिल पर **अभिलंब बल** $\vec{F}_N$। इस तरह गति का समीकरण है : $m\vec{g} + \vec{F}_N = \vec{F}_c$ जहां $\vec{F}_c$ अभिकेंद्र बल है। चूंकि उच्चतम बिंदु पर सभी बलों की दिशा ऊर्ध्वाधरतः नीचे की ओर है, अतः, हमें मिलता है :

$$mg + F_N = \frac{mv^2}{r}$$

न्यूनतम चाल तब होगी जब $F_N = 0$। अतः, $v_{min} = \sqrt{gr}$

अतः, यदि ऊर्ध्वाधर वृत्त की त्रिज्या 6.0 m है, तो मोटरसाइकिल की न्यूनतम चाल होगी $v_{min} = \sqrt{9.8\,\text{ms}^{-2} \times 6.0\,\text{m}} = 7.7\,\text{ms}^{-1} = 28\,\text{kmh}^{-1}$

बोध प्रश्न 5 – ऊर्ध्वाधर वर्तुल गति

मान लें कि उदाहरण 7.4 में वृत्ताकार पथ के सबसे निचले बिंदु पर बाल्टी की चाल $4.0\,ms^{-1}$ है। बाल्टी की इस स्थिति के लिए रस्सी में तनाव की गणना करें।

गुरुत्व बल से जुड़ी एक और अवधारणा **भार** की है, जिसे अब हम संक्षेप में समझायेंगे।

7.4 भार

आइए, पहले हम भार की औपचारिक परिभाषा दें।

भार

पृथ्वी की सतह पर या उसके ऊपर कुछ ऊंचाई पर उसके केंद्र से दूरी r पर स्थित द्रव्यमान m के पिंड का भार पृथ्वी द्वारा उस पर लगाए गए गुरुत्वाकर्षण बल के बराबर होता है। इसकी दिशा पृथ्वी के केंद्र की ओर होती है :

$$\vec{\mathbf{W}} = -\frac{GM_e m}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (7.12क)$$

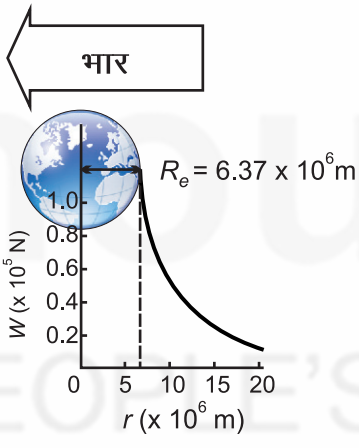
जहां $\hat{\mathbf{r}}$ पृथ्वी के केंद्र से परे पिंड की ओर एकक सदिश है। भार का परिमाण है :

$$W = \frac{GM_e m}{r^2} = mg \qquad (7.12ख)$$

भार की इकाई न्यूटन (N) है ।

द्रव्यमान M_b वाले किसी अंतरिक्षीय पिंड की सतह पर या उससे कुछ ऊंचाई पर उसके केंद्र से दूरी r पर स्थित द्रव्यमान m वाले पिंड का **भार** उस पर अंतरिक्षीय पिंड द्वारा लगाए गए गुरुत्वाकर्षण बल के बराबर होता है। इसकी दिशा उस अंतरिक्षीय पिंड के केंद्र की ओर होती है और उसका परिमाण होता है :

$$F = G\frac{mM_b}{r^2} \qquad (7.12ग)$$



चित्र 7.11: किसी पिंड का भार पृथ्वी के केंद्र से उसकी दूरी बढ़ने के साथ-साथ घटता है।

समीकरणों 7.12क और ख से, आप देख सकते हैं कि पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण बल के कारण किसी पिंड का भार पृथ्वी के केंद्र से उसकी दूरी बढ़ने के साथ-साथ घटता है। जब कोई अंतरिक्ष यान पृथ्वी से दूर जाता है तो उसका भार घटता है। अतः, **हमेशा याद रखें** कि **किसी पिंड का द्रव्यमान और उसका भार एक ही राशि नहीं हैं।**

द्रव्यमान और **भार** एक ही राशि **नहीं** हैं। **किसी पिंड का भार उस पर लग रहे गुरुत्वाकर्षण बल के बराबर होता है और उसकी स्थिति के अनुसार बदलता है। द्रव्यमान पिंड का मूलभूत गुणधर्म है जो उसकी स्थिति के साथ बदलता नहीं।**

ध्यान दें

भार की एक परिभाषा यह भी है : भार उस संपर्क बल के बराबर होता है जो किसी पिंड पर उसके अवलंब द्वारा आरोपित किया जाता है।

भार की अवधारणा पर इस चर्चा का अंत हम एक उदाहरण से करेंगे।

उदाहरण 7.6 : भार

द्रव्यमान 4.8×10^{24} kg के एक ग्रह की सतह पर एक पिंड का भार 60 N है। यदि पिंड का द्रव्यमान 30 kg हो तो ग्रह की त्रिज्या ज्ञात करें।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि ग्रह पर पिंड के भार के लिए समीकरण 7.12ग का उपयोग किया जाए।

तब ग्रह की त्रिज्या है : $r = \left[\frac{GmM_b}{F}\right]^{1/2}$ (i)

समीकरण (i) में $F = 60$ N, $M_b = 4.8 \times 10^{24}$ kg और $m = 30$ kg रखने पर हमें मिलता है :

$$r = \left[\frac{(6.67 \times 10^{-11}\,\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}) \times (30\,\text{kg}) \times 4.8 \times 10^{24}\,\text{kg}}{(60\,\text{N})}\right]^{1/2}$$

$$\therefore \quad r = 1.3 \times 10^7\,\text{m}$$

अब आप भार की अवधारणा की अपनी समझ की जांच करें। इसके लिए बोध प्रश्न 6 करें।

बोध प्रश्न 6 – भार

एक अंतरिक्ष यान चन्द्रमा से ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर उड़ान भरता है। चन्द्रमा पर मुक्त रूप से गिर रही वस्तुओं का त्वरण 1.60 ms^{-2} होता है। यदि पृथ्वी पर अंतरिक्ष यात्री का भार 500 N हो तो चन्द्रमा पर उसका भार क्या होगा? जब अंतरिक्ष यान उड़ान भरता है तब उसका ऊपर की ओर त्वरण 0.900 ms^{-2} है। अंतरिक्ष यान द्वारा यात्री पर आरोपित बल का परिमाण क्या होगा? पृथ्वी पर $g = 10.0\,\text{ms}^{-2}$ लें।

अब हम भारहीनता की परिघटना पर चर्चा करेंगे।

7.4.1 भारहीनता

आपने अंतरिक्ष यानों में तैरते हुए अंतरिक्ष यात्रियों की तस्वीरें देखी होंगी। पृथ्वी की परिक्रमा कर रहे अंतरिक्ष यात्रियों को भारहीनता का अनुभव होता है। आपने स्वयं भी लिफ़्ट में, जब वह नीचे की ओर त्वरित गति से चलना शुरू करती है, हल्के होने का अनुभव किया होगा। या फिर अगर आप किसी बड़े जायन्ट व्हील या रोलर कोस्टर पर बैठे हों तब वृत्ताकार पथ में नीचे की ओर आते हुए आपने भारहीनता का अनुभव किया होगा। भारहीनता का यह अनुभव क्यों होता है? इसे समझने के लिए आइए, पहले यह समझें कि हमें भार का **अनुभव** कैसे होता है।

मान लें कि आप एक कुर्सी पर विरामावस्था में बैठे हैं। आप पर दो बल लग रहे हैं – इनमें से एक है पृथ्वी के कारण गुरुत्व बल जो नीचे की दिशा में पृथ्वी के केन्द्र की ओर लग रहा है और दूसरा है आप पर कुर्सी द्वारा आरोपित अभिलंब बल। जैसाकि

आप इकाई 6 से जानते हैं, अभिलंब बल एक **संपर्क बल** होता है। ध्यान दें कि आप पर लग रहा गुरुत्व बल संपर्क बल **नहीं** है। यह बल आप पर तब भी लगता है जब आप पृथ्वी से संपर्क में नहीं होते। (आप कभी भी इस बल को अपने शरीर पर लगता हुआ महसूस नहीं कर सकते क्योंकि यह एक संपर्क बल **नहीं** है।) जब आप कुर्सी पर बैठते हैं तो आप जिस बल को महसूस करते हैं वह कुर्सी द्वारा आप पर लगाया गया अभिलंब बल है। **यही वह बल है जिसके कारण आपको भार का अहसास होता है**। जब आप विरामावस्था में होते हैं तब ऊपर की दिशा में लग रहा अभिलंब बल आपके भार के बराबर होता है और यह आप पर लग रहे गुरुत्व बल या आपके भार का माप देता है।

संपर्क बल तभी लगते हैं जब कोई दो पिंड एक दूसरे को वास्तव में छू रहे होते हैं – इस स्थिति में वे पिंड हैं कुर्सी और आप। संपर्क के कारण लग रहे बलों को महसूस किया जा सकता है। उदाहरण के लिए जब आपको कोई धक्का देता है तो आपको महसूस होता है कि आप पर बल लग रहा है (जो कि एक संपर्क बल है)।

इसका अर्थ यह है कि यदि आप पर ऊपर की दिशा में लग रहा अभिलंब बल शून्य होता तो आपको भार का अहसास नहीं होता।

इस तरह, **किसी पिंड को भारहीनता का अहसास तब होता है जब उस पर लग रहा नेट संपर्क बल शून्य हो। यह अहसास उन स्थितियों में होता है जब पिंड मुक्त रूप से गिर रहे होते हैं**। मुक्त रूप से गिर रहे पिंडों में लगने वाला बल केवल गुरुत्व बल होता है और उन पर नेट संपर्क बल शून्य होता है। इसलिए अगर आप मुक्त रूप से गिर रहे होंगे तो आपको भार का अहसास नहीं होगा। लेकिन आपका द्रव्यमान वही बना रहेगा जो हमेशा से है।

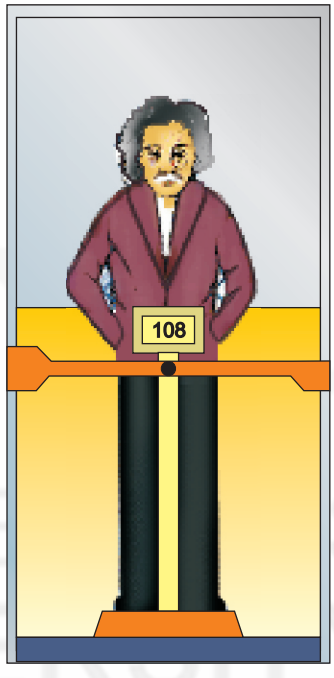
नीचे दिए गए उदाहरण में हम न्यूटन के नियमों का उपयोग करके एक त्वरित लिफ़्ट में गतिमान व्यक्ति के आभासी भार का परिकलन करेंगे। जब आप इस उदाहरण को पढ़ेंगे तो आप समझ पाएंगे कि मुक्त रूप से गिरने की अवस्था में क्या होता है।

उदाहरण 7.7 : आभासी भार

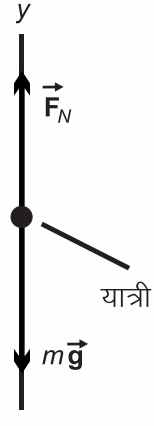
आम तौर, पर हम अपना भार नापने के लिए कमानीदार तुला का इस्तेमाल करते हैं। आइए, देखें कि यह तुला त्वरित होने पर भार का क्या माप देती है। आप कभी-न-कभी किसी लिफ़्ट में ज़रूर चले होंगे। जब लिफ़्ट ऊपर की ओर त्वरित गति से चलना शुरू ही करती है तब आपको कैसा महसूस होता है? आप भारी महसूस करते हैं। जब लिफ़्ट त्वरित गति से नीचे आना शुरू करती है तब आपको कैसा महसूस होता है? आप हल्का महसूस करते हैं। इन दोनों अनुभवों की व्याख्या हम कैसे कर सकते हैं?

इसका उत्तर जानने के लिए चित्र 7.12क देखें जिसमें लिफ़्ट में रखी एक कमानीदार तुला पर एक व्यक्ति खड़ा है। मान लें कि लिफ़्ट के बाहर खड़े एक जड़त्वीय प्रेक्षक के सापेक्ष वह आरंभ में विरामावस्था में है। वह जड़त्वीय प्रेक्षक लिफ़्ट में खड़े व्यक्ति के भार का क्या मान मापेगा? आप समीकरण 7.6क से जानते हैं कि भार का मान $F = mg$ है, जहां m उस व्यक्ति का द्रव्यमान है। यह उस व्यक्ति का ''**वास्तविक'' भार** है।

अब मान लें कि लिफ़्ट (और उसके साथ वह तुला और व्यक्ति) उस जड़त्वीय प्रेक्षक के सापेक्ष **त्वरण $\vec{a}$** से **ऊपर की ओर** गतिमान होती है। चित्र 7.12ख में उस व्यक्ति का बल-निर्देशक आरेख दिखाया गया है। y-अक्ष के चुनाव पर ध्यान दें। व्यक्ति पर दो बल लग रहे हैं : उसका ''वास्तविक'' भार mg और तुला द्वारा उस पर आरोपित अभिलंब बल।



(क)



(ख)

चित्र 7.12: किसी व्यक्ति का आभासी और ''वास्तविक'' भार।

व्यक्ति पर न्यूटन का दूसरा नियम लागू करने पर हमें मिलता है :

$$\sum F_y = + F_N - mg = + ma \quad \text{(i)}$$

जहां a लिफ्ट, तुला और व्यक्ति का त्वरण है। अतः,

$$F_N = mg + ma \quad \text{(ii)}$$

यहां F_N तुला **द्वारा** व्यक्ति **पर** आरोपित अभिलंब बल है। लेकिन न्यूटन के तीसरे नियमानुसार इस बल का परिमाण व्यक्ति द्वारा तुला पर आरोपित अधोमुखी बल के बराबर भी है। यह व्यक्ति का **आभासी भार** है जो ऊपर की ओर त्वरित हो रही लिफ़्ट में तुला द्वारा मापा गया है। यह वास्तविक भार से **अधिक** है। इसी कारण से जब लिफ़्ट ऊपर की ओर त्वरित होती है तब आपको लगता है कि आपका भार बढ़ गया है।

यदि लिफ़्ट का त्वरण शून्य हो तो **आभासी भार** वास्तविक भार के बराबर होता है। अतः, यदि लिफ़्ट विरामावस्था में है या अचर वेग से गतिमान होती है तो वह तुला व्यक्ति का वास्तविक भार मापती है।

यदि लिफ़्ट **नीचे की ओर** त्वरित होती है तो त्वरण $\vec{a}$ की दिशा विपरीत होती है और हमें मिलता है :

$$\sum F_y = + F_N - mg = - ma \quad \text{(iii)}$$

अतः, $$F_N = mg - ma \quad \text{(iv)}$$

इस प्रकार, नीचे की ओर त्वरित हो रही लिफ़्ट में **आभासी भार वास्तविक भार से कम होता है** और जब लिफ़्ट नीचे की ओर त्वरित होती है तब आप हल्का महसूस करते हैं।

अब अगर लिफ़्ट मुक्त रूप से गिरे यानी उसका त्वरण, गुरुत्वीय त्वरण g के बराबर हो तो क्या होगा? तब समीकरण (iv) में $a = g$ होगा जिससे

$$F_N = 0 \quad \text{(v)}$$

अतः, आपका आभासी भार शून्य होगा और मुक्त रूप से गिर रही लिफ़्ट में आप **भारहीन** महसूस करेंगे।

इस उदाहरण से हम समझ सकते हैं कि अंतरिक्ष यानों में अंतरिक्ष यात्रियों को भारहीनता क्यों महसूस होती है – इसका कारण वही है जिस कारण से मुक्त रूप से गिर रही लिफ़्ट में किसी व्यक्ति को भारहीनता महसूस होती है। ध्यान दें कि अंतरिक्ष यात्री और अंतरिक्ष यान दोनों ही पृथ्वी के चारों ओर एकसमान वर्तुल गति कर रहे हैं। इनकी वर्तुल गति के लिए आवश्यक अभिकेंद्र बल गुरुत्व बल द्वारा प्रदान किया जाता है और उसकी दिशा पृथ्वी के केंद्र की ओर होती है। इस तरह अंतरिक्ष यात्री और उनके आस-पास के पिंडों पर (जैसेकि अंतरिक्ष यान पर) केवल गुरुत्व बल लग रहा है। अतः, उनका त्वरण गुरुत्वीय त्वरण के बराबर है यानी ये मुक्त रूप से गिर रहे पिंड हैं। अतः, जैसाकि आपने उदाहरण 7.7 में पढ़ा है, उनका आभासी भार शून्य होता है और उन्हें भारहीनता का अहसास होता है।

इस इकाई में हमने दीर्घ परासी गुरुत्वाकर्षण बल की चर्चा की है जो इस ब्रह्मांड में मौजूद प्रत्येक स्थूल पिंड द्वारा प्रत्येक दूसरे पिंड पर लगाया जाता है। आपने गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र की अवधारणा सीखी है। आपने गुरुत्व बल और ऊंचाई, गहराई और अक्षांश के साथ गुरुत्वीय त्वरण में परिवर्तन के बारे में जाना है। हमने भार और भारहीनता की अवधारणाओं की चर्चा की है। हमें आशा है कि आपने जायंट व्हीलों की ऊर्ध्वाधर गति और उपग्रहों, अंतरिक्ष यानों की गति में इनके अनुप्रयोगों को रुचिकर पाया होगा।

आइए, इस इकाई में आपने जो भी पढ़ा है, अब हम उसका सार दें।

7.5 सारांश

अवधारणा	विवरण

गुरुत्वाकर्षण बल

■ **गुरुत्वाकर्षण बल** एक **दीर्घ परासी** आकर्षण बल है जो ब्रह्मांड में मौजूद प्रत्येक स्थूल पिंड द्वारा प्रत्येक अन्य स्थूल पिंड पर आरोपित किया जाता है। द्रव्यमान m_1 वाले कण **द्वारा** दूरी r पर स्थित द्रव्यमान m_2 वाले कण **पर** आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल उन दोनों को जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश लगता है और इसकी दिशा m_2 **से** m_1 **की ओर** होती है। इसका व्यंजक होता है :

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{\mathbf{r}}_{12}|^2} \hat{\mathbf{r}}_{12}$$

जहां G सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक है, $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ कणों को जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश एकक सदिश है और उसकी दिशा m_1 से m_2 की ओर है। इसका परिमाण होता है :

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{जहां} \quad |\vec{\mathbf{r}}_{12}| = r$$

अध्यारोपण का नियम

■ अध्यारोपण के नियमानुसार, N कणों के एक निकाय में किसी एक कण पर लग रहा गुरुत्वाकर्षण बल निकाय के बाकी सभी कणों द्वारा उस पर आरोपित बलों का परिणामी (सदिश योग) होता है। द्रव्यमान $m_1, m_2, ..., m_N$ वाले N कणों के निकाय में, द्रव्यमान m_1 वाले कण पर निकाय के बाकी कणों द्वारा आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल होता है :

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = -G \sum_{i=2}^{N} \frac{m_1 m_i}{r_{i1}^2} \hat{\mathbf{r}}_{i1}$$

गुरुत्व बल

■ पृथ्वी और उस पर या उसके निकट स्थित किसी पिंड के बीच लग रहे गुरुत्वाकर्षण बल को हम **गुरुत्व बल** कहते हैं। इसका मान होता है :

$$\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}},$$

जहां g गुरुत्वीय त्वरण है। इसकी दिशा पृथ्वी के केंद्र की ओर है। g के मान हैं :

$$g_0 = \frac{GM_e}{R_e^2}, \qquad \text{पृथ्वी की सतह पर भूमध्य रेखा पर,}$$

$$g_A = \frac{g_0 R_e^2}{(R_e + h)^2},$$ पृथ्वी की सतह से ऊंचाई h पर,

$$g_B = \frac{g_0}{R_e}(R_e - d),$$ पृथ्वी की सतह से गहराई d पर, और

$$g(\lambda) = g_0 + \omega^2 R_e \sin^2\lambda,$$ अक्षांश λ पर।

भार

■ पृथ्वी की सतह पर या उसके ऊपर कुछ ऊंचाई पर उसके केंद्र से दूरी r पर स्थित द्रव्यमान m के पिंड का **भार** पृथ्वी द्वारा उस पर लगाए गए गुरुत्वाकर्षण बल के बराबर होता है। इसकी दिशा पृथ्वी के केंद्र की ओर होती है और इसका परिमाण होता है :

$$W = \frac{GM_e m}{r^2} = mg$$

मुक्त रूप से गिर रहे पिंड को **भारहीनता** का अनुभव होता है।

7.6 अंत में कुछ प्रश्न

1. पृथ्वी की सतह से ऊंचाई 6.4×10^6 m पर, 70 kg द्रव्यमान वाले पिंड पर पृथ्वी द्वारा लगाए गए गुरुत्वाकर्षण बल की गणना करें। पृथ्वी का द्रव्यमान $M_e = 6.0 \times 10^{24}$ kg और त्रिज्या $R_e = 6.4 \times 10^6$ m लें।
2. एक ग्रह के केंद्र से दूरी 3.0×10^8 m पर एक छोटा उपग्रह ग्रह के चारों ओर वृत्ताकार कक्षा में परिक्रमा कर रहा है। उपग्रह की कक्षीय चाल 200 ms^{-1} है। ग्रह का द्रव्यमान क्या है?
3. तीन पिंडों A (m_A = 10 kg), B (m_B = 10 kg) और C (m_C = 15 kg) को एक सीधी रेखा में एक-दूसरे से 1.0 m की दूरी पर रखा जाता है। पिंड B पर पिंडों A और C द्वारा आरोपित नेट गुरुत्वाकर्षण बल की गणना करें।
4. पृथ्वी का द्रव्यमान चन्द्रमा के द्रव्यमान का 80 गुना है। पृथ्वी की त्रिज्या और चन्द्रमा की त्रिज्या के अनुपात की गणना करें यदि चन्द्रमा की सतह पर गुरुत्वीय त्वरण का मान 1.67 ms^{-2} हो। g = 9.80 ms^{-2} लें।
5. पृथ्वी के गुरुत्वीय त्वरण का मान 2.5×10^3 km की ऊंचाई पर और 3.0 km की गहराई पर परिकलित करें। g_0 = 9.80 ms^{-2} लें।
6. द्रव्यमान 0.50 kg वाला एक पत्थर त्रिज्या 1.0 m वाले एक ऊर्ध्वाधर वृत्त में गतिमान है। पत्थर की चाल अचर है और उसका मान 6.0 ms^{-1} है। वृत्त के सबसे निचले बिंदु पर और उच्चतम बिंदु पर डोरी में तनाव की गणना करें। g = 10 ms^{-2} लें।
7. द्रव्यमान 20.0 kg वाला एक पिंड 200 km की ऊंचाई पर मंगल ग्रह की परिक्रमा कर रहा है। उस पिंड का भार क्या है यदि मंगल की त्रिज्या 3430 km और उसका द्रव्यमान 6.34×10^{23} kg है?

8. एक पार्क में ऊर्ध्वाधर वृत्ताकार झूले की त्रिज्या 35.0 m है। मान लें कि आप झूले के उच्चतम बिंदु पर बैठे हैं। उस बिंदु पर झूले की चाल क्या होनी चाहिए जिसके कारण आप अपनी सीट से क्षण भर के लिए उठ जाएं और भारहीनता अनुभव करें। $g = 10.0\ ms^{-2}$ लें।

9. भारहीनता की स्थिति को प्रयोगशाला में उत्पन्न किया जा सकता है यदि हम एक हवाई जहाज़ को ऐसे वक्राकार पथ में उड़ाएं जिसके लिए अभिकेंद्र त्वरण ठीक गुरुत्वीय त्वरण के बराबर हो। ऐसा हवाई जहाज़ अंतरिक्ष यात्रियों के प्रशिक्षण में इस्तेमाल किया जाता है। यदि वक्र की वक्रता त्रिज्या 1000 m हो तो उसके उच्चतम बिंदु पर भारहीनता का अनुभव करने के लिए आवश्यक चाल क्या होगी?

10. द्रव्यमान 40 kg वाली एक बच्ची लिफ़्ट में खड़ी है। $g = 10.0\ ms^{-2}$ लें और बच्ची पर लिफ़्ट के फ़र्श द्वारा लगाया गया बल प्राप्त करें जब
    क) लिफ़्ट का ऊपर की ओर त्वरण $2.0\,ms^{-2}$ हो,
    ख) लिफ़्ट ऊपर की ओर अचर चाल से चल रही हो, और
    ग) लिफ़्ट का नीचे की ओर त्वरण $2.0\,ms^{-2}$ हो।

7.7 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. समीकरण 7.1क में $m_1 = m_2 = 50\,kg$ और $r = 1.5\,m$ रखने पर हमें गुरुत्वाकर्षण बल का परिमाण मिलता है :

$$F = \frac{(6.67\times10^{-11}\,Nm^2kg^{-2})\times(50\,kg)\times(50\,kg)}{(1.5\,m)^2} = 7.4\times10^{-8}\,N$$

गुरुत्वाकर्षण बल की दिशा कणों को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश है जैसाकि चित्र 7.1 में दिखाया गया है।

2. हम समीकरण 7.2 में $v = 5.70\times10^5\ ms^{-2}$ और $R = 7.50\times10^{17}\,m$ रखते हैं। तब

$$M = \frac{v^2r}{G} = \frac{(5.70\times10^5\,ms^{-1})^2\times(7.50\times10^{17}\,m)}{(6.67\times10^{-11}\,Nm^2\,kg^{-2})} = 3.65\times10^{39}\,kg$$

3. चूंकि द्रव्यमान m वाला कण द्रव्यमान $2m$ और $4m$ वाले दो कणों को जोड़ने वाली रेखा के मध्यबिंदु पर रखा है, अतः, द्रव्यमान m वाले कण पर द्रव्यमान $4m$ वाले कण द्वारा आरोपित बल है : $\vec{F}_1 = G\frac{4m^2}{r^2}\hat{r}$ जहां $\hat{r}$, $\vec{F}_1$ के अनुदिश एकक सदिश है। द्रव्यमान m वाले कण पर द्रव्यमान $2m$ वाले कण द्वारा आरोपित बल है :

$$\vec{F}_2 = -G\frac{2m^2}{r^2}\hat{r}$$

द्रव्यमान m वाले कण पर नेट गुरुत्वाकर्षण बल है : $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = G\frac{2m^2}{r^2}\hat{r}$

इसकी दिशा द्रव्यमान $4m$ वाले कण की ओर है। माना कि द्रव्यमान m वाले कण

हम बोध प्रश्न 3 को उदाहरण 7.2 के समीकरण (ii) में $m_1 = 4m$, $m_2 = 2m$ और $a = 2r$ रख कर भी हल कर सकते हैं। तब

$$x = \frac{2r}{\sqrt{\frac{2m}{4m}} + 1} = \frac{2\sqrt{2}r}{\sqrt{2}+1} = 1.17r$$

की द्रव्यमान $4m$ वाले कण से दूरी x है। तब द्रव्यमान m वाले कण की द्रव्यमान $2m$ वाले कण से दूरी $(2r - x)$ है। द्रव्यमान m वाले कण पर लग रहे नेट गुरुत्वाकर्षण बल के शून्य होने के लिए $\left|\vec{F}_1'\right| = \left|\vec{F}_2'\right|$, होना चाहिए जहां $\left|\vec{F}_1'\right| = \frac{4Gm^2}{x^2}$ और

$$\left|\vec{F}_2'\right| = \frac{2Gm^2}{(2r-x)^2} \quad \therefore \quad \frac{4Gm^2}{x^2} = \frac{2Gm^2}{(2r-x)^2} \quad \Rightarrow \quad 2(2r-x)^2 = x^2$$

x के लिए हल करने पर हमें x के दो मान मिलते हैं :

$$x_1 = \frac{2\sqrt{2}\,r}{(\sqrt{2}-1)} = 6.83r \text{ और } x_2 = \frac{2\sqrt{2}\,r}{(\sqrt{2}+1)} = 1.17r$$

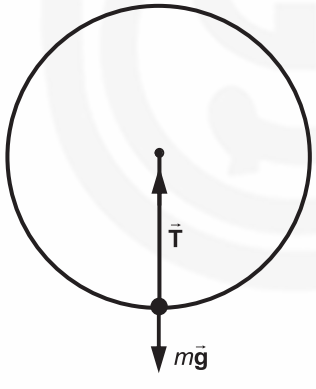
इनमें से दूसरा मान ही स्वीकार किया जा सकता है क्योंकि द्रव्यमान m वाला कण x के उसी मान के लिए द्रव्यमान $2m$ और $4m$ वाले दो कणों को जोड़ने वाली रेखा के बीच हो सकता है। अतः, द्रव्यमान m वाले कण को द्रव्यमान $4m$ वाले कण से दूरी $1.17r$ पर रखा जाना चाहिए ताकि उस पर लग रहा नेट गुरुत्वाकर्षण बल शून्य हो। हाशिए पर दी गई टिप्पणी भी पढ़ें।

4. बृहस्पति ग्रह पर गुरुत्वीय त्वरण g_J का मान समीकरण 7.6घ में M_e और R_e की जगह क्रमशः बृहस्पति के द्रव्यमान और त्रिज्या के मान रखने पर मिलता है :

$$g_J = \frac{(6.67\times10^{-11}\,\text{Nm}^2\,\text{kg}^{-2})\times(1.90\times10^{27}\,\text{kg})}{(7.14\times10^{7}\,\text{m})^2} = 24.9\ \text{ms}^{-2}$$

5. चित्र 7.13 देखें। वृत्त के सबसे निचले बिंदु पर रस्सी में तनाव $\vec{T}$ और गुरुत्व बल एक-दूसरे से विपरीत दिशा में लगते हैं। अतः, $\sum F_y = T - mg$। एकसमान वर्तुल गति के लिए : $F_C = \sum F_y = T - mg$ या $\frac{mv^2}{r} = T - mg$

$$\therefore\ T = \frac{mv^2}{r} + mg = \frac{2.0\,\text{kg}\times(4.0\,\text{ms}^{-1})^2}{1.0\,\text{m}} + 2.0\,\text{kg}\times10\,\text{ms}^{-2} = 52\text{N}$$



चित्र 7.13: बोध प्रश्न 5 के लिए बल-निर्देशक आरेख।

6. अंतरिक्ष यात्री का द्रव्यमान $= \frac{500\,\text{N}}{10.0\,\text{ms}^{-2}} = 50.0\ \text{kg}$

चन्द्रमा पर अंतरिक्ष यात्री का भार $= 50.0\ \text{kg}\times1.60\,\text{ms}^{-2} = 80.0\ \text{N}$

अंतरिक्ष यान द्वारा यात्री पर आरोपित बल का परिमाण है :

$80.0\ \text{N} + (50.0\ \text{kg}\times0.900\ \text{ms}^{-2}) = 125\ \text{N}$

अंत में कुछ प्रश्न

1. समीकरण 7.1क का उपयोग करके हम गुरुत्वाकर्षण बल का परिमाण लिख सकते हैं :

$$F = G\frac{mM_e}{(R_e+r)^2} \text{ जहां } r = 6.4\times10^6\,\text{m} \text{ । } R_e = 6.4\times10^6\,\text{m},$$

$M_e = 6.0\times10^{24}\,\text{kg}$ और $m = 70\,\text{kg}$ रखने पर हमें मिलता है :

$$F = \frac{(6.67\times10^{-11}\text{Nm}^2\text{kg}^{-2})\times(70\,\text{kg})\times(6.0\times10^{24}\text{kg})}{(6.4\times10^6\text{m}+6.4\times10^6\text{m})^2} = 1.7\times10^2\,\text{N}$$

2. वर्तुल गति के लिए आवश्यक अभिकेंद्र बल उपग्रह पर आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा प्रदान किया जाता है। अतः, $\frac{mv^2}{r} = G\frac{mM_P}{r^2}$ जहां M_P ग्रह का द्रव्यमान है, $r = 3.0\times10^8$ m और $v = 200\,\text{ms}^{-1}$ है। अतः,

$$M_P = \frac{rv^2}{G} = \frac{(3.0\times10^8\,\text{m})\times(200\,\text{ms}^{-1})^2}{6.67\times10^{-11}\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}} = 1.8\times10^{23}\,\text{kg}$$

3. माना कि पिंड B निर्देशांक तंत्र के मूल बिंदु पर स्थित है। माना कि B पर A और C द्वारा आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल क्रमशः $\vec{\mathbf{F}}_1$ और $\vec{\mathbf{F}}_2$ हैं। समीकरणों 7.4क और ख से B पर परिणामी गुरुत्वाकर्षण बल है : $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 = -G\frac{m_Am_B}{r_{AB}^2}\hat{\mathbf{i}} + G\frac{m_Bm_C}{r_{BC}^2}$

जहां $m_A = A$ का द्रव्यमान $= 10\,\text{kg}$, $m_B = B$ का द्रव्यमान $= 10\,\text{kg}$ और $m_C = C$ का द्रव्यमान $= 15\,\text{kg}$ और $r_{AB} = r_{BC} = 1.0\,\text{m}$ है। अतः,

$$\vec{\mathbf{F}} = 6.67\times10^{-11}\,\text{Nm}^2\,\text{kg}^{-2}\times\left[-\frac{10\,\text{kg}\times10\,\text{kg}}{(1.0\,\text{m})^2}+\frac{10\,\text{kg}\times15\,\text{kg}}{(1.0\,\text{m})^2}\right]\hat{\mathbf{i}}$$

$$= 3.3\times10^{-9}\,\text{N}\,\hat{\mathbf{i}}$$

4. पृथ्वी पर गुरुत्वीय त्वरण g के मान के लिए हम समीकरण 7.6घ का उपयोग करते हैं। चन्द्रमा पर गुरुत्वीय त्वरण (g_m) के मान के लिए हम समीकरण 7.6घ में M_e की जगह M_m (चन्द्रमा का द्रव्यमान) और R_e की जगह R_m (चन्द्रमा की त्रिज्या) रखते हैं। दिया है कि $M_e = 80M_m$। माना कि α पृथ्वी की त्रिज्या और चन्द्रमा की त्रिज्या का अनुपात है। अतः,

$$g_m = G\frac{M_m}{R_m^2} = G\frac{M_e/80}{\frac{R_e^2}{\alpha^2}} = \frac{\alpha^2}{80}\left[\frac{GM_e}{R_e^2}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad 1.67\,\text{ms}^{-2} = \frac{\alpha^2}{80}.g = \frac{\alpha^2}{80}(9.80\,\text{ms}^{-2})$$

$$\therefore \qquad \alpha = \sqrt{\frac{80\times1.67}{9.80}} = \sqrt{13.63} \approx 3.69$$

5. हम पृथ्वी के गुरुत्वीय त्वरण का मान 2.5×10^3 km की ऊंचाई पर (g_1) परिकलित करने के लिए समीकरण 7.9क का उपयोग करते हैं। ध्यान दें कि हम समीकरण 7.9ख के स्थान पर समीकरण 7.9क का उपयोग करते हैं क्योंकि h (2500 km) का मान पृथ्वी की त्रिज्या R_e (6371 km) के मान के तुलनीय है। अतः,

$$g_1 = g_0\left(1+\frac{2500}{6371}\right)^{-2}\text{ms}^{-2} = 5.07\,\text{ms}^{-2}$$

हम पृथ्वी के गुरुत्वीय त्वरण का मान 3.0 km की गहराई (g_2) पर परिकलित करने के लिए समीकरण 7.10 का उपयोग करते हैं :

$$g_2 = 9.80\,\text{ms}^{-2}\times\left(1-\frac{3.0}{6371.0}\right) = 9.795\,\text{ms}^{-2} \approx 9.8\,\text{ms}^{-2},$$

2 सार्थक अंकों तक।

6. उदाहरण 7.4 की तरह हम वृत्त के उच्चतम बिंदु पर तनाव का मान लिख सकते हैं : $T = \frac{mv^2}{r} - mg = \frac{0.50\,\text{kg} \times (6.0\,\text{ms}^{-1})^2}{(1.0\,\text{m})} - 0.50\,\text{kg} \times 10\,\text{ms}^{-2} = 13\,\text{N}$

वृत्त के सबसे निचले बिंदु पर तनाव का मान हम बोध प्रश्न 5 की तरह लिखते हैं : $T = \frac{mv^2}{r} + mg = 18\,\text{N} + 5\,\text{N} = 23\,\text{N}$

7. हम समीकरण 7.12ग में M_b के स्थान पर मंगल ग्रह का द्रव्यमान लिखते हैं और $r = (3430 + 200)\,\text{km}$ लिखते हैं। तब पिंड का भार है :

$$F = \frac{(6.67 \times 10^{-11}\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}) \times (20.0\,\text{kg}) \times (6.34 \times 10^{23}\text{kg})}{(3.63 \times 10^6\text{m})^2} = 64.2\,\text{N}$$

8. झूले के उच्चतम बिंदु पर भारहीनता अनुभव करने के लिए $\vec{\mathbf{F}}_N = \vec{\mathbf{0}}$ होना चाहिए (चित्र 7.10 देखें)। अतः, $\frac{mv^2}{r} = F_N + mg$ और

$$F_N = 0 \quad \text{के लिए} \quad \frac{mv^2}{r} = mg$$

$$\therefore \quad v^2 = gr \;\Rightarrow\; v = \sqrt{gr} \quad \text{या} \quad v = \sqrt{(10.0\,\text{ms}^{-2}) \times 35.0\,\text{m}} = 18.7\,\text{ms}^{-1}$$

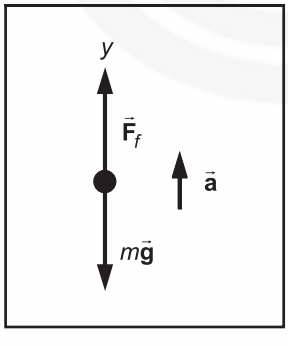
9. इस स्थिति में जब अंतरिक्ष यात्री भारहीनता का अनुभव करते हैं, तब अभिकेंद्र बल, गुरुत्व बल द्वारा प्रदान किया जाता है यानी $F_N = 0$ होता है। अतः,

$$\frac{mv^2}{r} = mg \;\Rightarrow\; v = \sqrt{gR} = \sqrt{(10\,\text{ms}^{-2}) \times 1000\,\text{m}} = 100\,\text{ms}^{-1}$$

10. इस समस्या के लिए बल-निर्देशक आरेख चित्र 7.14 में दिखाया गया है। ध्यान दें कि बच्ची पर लग रहे बल हैं :

$\vec{\mathbf{F}}_g$ = पृथ्वी द्वारा बच्ची पर आरोपित गुरुत्व बल $= m\vec{\mathbf{g}}$

$\vec{\mathbf{F}}_f$ = बच्ची पर लिफ़्ट के फ़र्श द्वारा आरोपित बल



चित्र 7.14: अंत के प्रश्न 10 के लिए आरेख।

चूंकि गति केवल y दिशा में है, अतः, न्यूटन के गति के दूसरे नियम से इस समस्या के लिए गति का समीकरण है :

$$\vec{\mathbf{F}}_{net} = m\vec{\mathbf{a}} \quad \text{या} \quad F_{net,y} = ma_y$$

प्रत्येक स्थिति के लिए हल है :

क) जब $a_y > 0$, $\sum F_y = F_f - mg = ma_y \Rightarrow F_f = m(g + a_y)\,\text{N}$ या $F_f = 40(10 + 2) = 480\,\text{N}$

ख) जब $a_y = 0$ (यानी साम्यावस्था की स्थिति),

$$\sum F_y = F_f - mg = 0 \Rightarrow F_f = mg\,\text{N} \text{ या } F_f = 40(10) = 400\,\text{N}$$

ग) जब $a_y < 0$, $\sum F_y = F_f - mg = -ma_y \Rightarrow F_f = m(g - a_y)\,\text{N}$ या $F_f = 40(10 - 2) = 320\,\text{N}$

रॉकेट में अनेक चरण लगा कर उसकी चाल कैसे बढ़ाई जा सकती है? इस प्रश्न का उत्तर आपको इस इकाई में मिलेगा !

इकाई 8

रैखिक संवेग और आवेग

इकाई की रूपरेखा

8.1 परिचय
उद्देश्य
8.2 रैखिक संवेग
रैखिक संवेग संरक्षण
रैखिक संवेग और द्रव्यमान प्रवाह
रॉकेट की गति
8.3 आवेग
8.4 सारांश
8.5 अंत में कुछ प्रश्न
8.6 हल और उत्तर

अध्ययन निर्देशिका

इस इकाई में, आप **द्वि-कण निकाय के लिए रैखिक संवेग संरक्षण नियम** पढ़ेंगे और **आवेग** की अवधारणा समझेंगे। इन अवधारणाओं को अच्छी तरह समझने के लिए आपको **सदिश बीजगणित और समाकलन की अच्छी जानकारी होनी चाहिए**। अतः, आप इस इकाई को पढ़ने से पहले इन अवधारणाओं को दोहरा लें। इस इकाई में दी गई अवधारणाएं को अच्छी तरह समझने के लिए आप इसमें दिए गए सभी उदाहरणों और सवालों को स्वयं हल करने की कोशिश करें।

अपने लिखित कार्य में आप सदिश राशि को ऊपर तीर लगा कर इस प्रकार लिखें : $\vec{r}$। एकक सदिश को इस प्रकार लिखें : $\hat{r}$।

"भौतिकशास्त्री का पूरा का पूरा सरोकार उन बातों से होता है जिनमें गति और विराम का सिद्धांत निहित हो।"

अरस्तू

8.1 परिचय

इकाइयों 5, 6 और 7 में, आपने न्यूटन के गति के नियम पढ़े हैं और उन्हें कुछ सरल स्थितियों पर लागू किया है। आपने तरह-तरह के पिंडों की गति का अध्ययन किया है। न्यूटन के गति के दूसरे नियम को सिखाने के लिए हमने **रैखिक संवेग** की परिभाषा दी थी और अचर द्रव्यमान वाले पिंडों के लिए गति का समीकरण ($\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$) प्राप्त किया था। इस इकाई में हम इस अवधारणा की विस्तार से चर्चा करेंगे। अधिक महत्त्व की बात यह है कि भाग 8.2.1 में हम दो कणों के निकाय के लिए **रैखिक संवेग संरक्षण नियम** समझाएंगे। यह **प्रकृति का एक मूलभूत नियम** है, जिससे हम जटिल निकायों में कणों की गति के विस्तृत विवरण जाने बिना उनके वेग प्राप्त कर सकते हैं। हम रैखिक संवेग की अवधारणा का प्रयोग करके उन निकायों की गति का भी अध्ययन करेंगे जिनका द्रव्यमान समय के साथ बदलता है, जैसेकि रॉकेट की गति।

अभी तक हमने उन बलों की चर्चा की है जो समय पर निर्भर नहीं करते। प्रकृति में ऐसी कई स्थितियां होती हैं जिनमें किसी पिंड पर लग रहे बल समय के साथ बदलते हैं। उदाहरण के लिए, जब एक गेंद बल्ले या टेनिस के रैकेट से टकराती है तो उस पर लग रहा बल बहुत कम समय के लिए लगता है (संपर्क का समय बहुत कम होता है) लेकिन इसका परिमाण बहुत अधिक होता है। भाग 8.3 में हम समय पर निर्भर बलों के अधीन पिंड की गति के लिए **आवेग** की अवधारणा समझाएंगे। ऐसे पिंडों की गति से संबंधित सवालों को हल करने के लिए उपयोगी **आवेग-संवेग प्रमेय** की चर्चा भी हम इस भाग में करेंगे। अगली इकाई में हम कार्य और गतिज ऊर्जा की अवधारणाएं समझाएंगे जिन्हें न्यूटनी यांत्रिकी का परिष्कार करते हुए पेश किया गया।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- ❖ किसी कण का रैखिक संवेग और आवेग निर्धारित कर सकेंगे;
- ❖ सरल द्वि-कण निकायों पर रैखिक संवेग संरक्षण नियम लागू कर सकेंगे;
- ❖ अचर और परिवर्तनशील द्रव्यमान वाले द्वि-कण निकायों के रैखिक संवेग की गणना कर सकेंगे; और
- ❖ सरल स्थितियों पर आवेग-संवेग प्रमेय लागू कर सकेंगे।

8.2 रैखिक संवेग

इकाई 5 के भाग 5.3 में आपने सीखा है कि किसी पिंड का रैखिक संवेग उसके द्रव्यमान m और वेग $\vec{\mathbf{v}}$ के गुणनफल के बराबर होता है। आपने यह भी सीखा है कि पिंड पर लग रहा **नेट बाह्य बल समय के साथ** उसके **रैखिक संवेग की परिवर्तन दर** के बराबर होता है :

$$\vec{\mathbf{F}}_{net} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} \qquad \text{जहां} \quad \vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}} \qquad (8.1\text{क})$$

यह समीकरण हमें बताता है कि **जब किसी पिंड पर नेट बाह्य बल लगता है तो उसका रैखिक संवेग बदल जाता है**। इसका अर्थ यह भी है कि **किसी पिंड का रैखिक संवेग उस पर नेट बाह्य बल आरोपित करके ही बदला जा सकता है**। यदि निकाय पर लग रहा नेट बाह्य बल शून्य हो तो **उसका रैखिक संवेग $\vec{p}$ अचर रहता है**। यह वास्तव में प्रकृति का एक मूलभूत नियम है और हमें गति से संबंधित समस्याओं को हल करने के लिए एक बहुत शक्तिशाली पद्धति प्रदान करता है। तो आइए, अब हम दो कणों के निकाय के लिए **रैखिक संवेग संरक्षण नियम** को समझें।

8.2.1 रैखिक संवेग संरक्षण

यदि किसी कण पर या कणों के निकाय पर लग रहा नेट बाह्य बल शून्य हो, तो समीकरण 8.1क से हमें मिलता है :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \text{अचर} \qquad (8.1\text{ख})$$

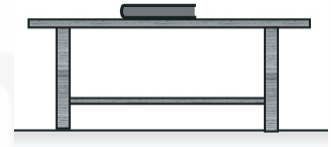
रैखिक संवेग संरक्षण

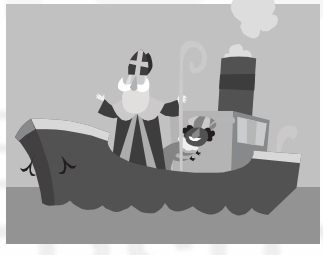
इसका अर्थ यह है कि जिस पिंड पर नेट बाह्य बल शून्य हो, उसका रैखिक संवेग नहीं बदलता। इस परिणाम को **रैखिक संवेग संरक्षण नियम** कहते हैं। यह नियम एक से अधिक कण/पिंड वाले निकायों की गति के अध्ययन के लिए बहुत उपयोगी होता है।

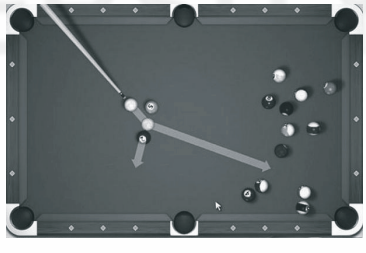
आइए, अब हम उन दो कण वाले (द्वि-कण) निकायों की गति समझें जिन पर लग रहा नेट बाह्य बल शून्य है। ऐसे निकायों को हम **विलगित** (isolated) **निकाय** कहते हैं। इनके कुछ उदाहरण हमने चित्र 8.1 में दिखाए हैं : मेज़ पर विरामावस्था में रखी किताब, स्थिर पानी में नाव पर खड़ा एक यात्री, अचर वेग से गतिमान एक बिलियर्ड्स की गेंद। इन सभी निकायों में नेट बाह्य बल शून्य है क्योंकि या तो ये विरामावस्था में हैं या अचर वेग से गतिमान हैं। साथ ही, ये सभी निकाय **बंद** (closed) **निकाय** हैं यानी इनमें से न तो कोई कण बाहर जाता है और न ही कोई कण निकाय के अंदर आता है। दो कणों के ऐसे किसी निकाय का कुल रैखिक संवेग $\vec{p}$ होता है :

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \qquad (8.1\text{ग})$$

जहां $\vec{p}_1$ और $\vec{p}_2$ क्रमशः कण 1 और कण 2 के रैखिक संवेग हैं। तब हम रैखिक संवेग संरक्षण नियम का कथन इस प्रकार दे सकते हैं :







चित्र 8.1: विलगित निकायों के कुछ उदाहरण।

रैखिक संवेग संरक्षण नियम

यदि कणों के एक विलगित और बंद निकाय पर लग रहा **नेट बाह्य बल शून्य** हो तो उस **निकाय का कुल रैखिक संवेग बदल नहीं सकता**। इस स्थिति में हम कहते हैं कि **निकाय का कुल रैखिक संवेग संरक्षित है** :

$$\vec{p} = \text{अचर} \qquad \text{(बंद और विलगित निकाय के लिए)} \qquad (8.2\text{क})$$

हम यह भी कहते हैं कि कणों के एक **बंद और विलगित निकाय** के लिए

$$\begin{pmatrix}\text{किसी प्रारंभिक क्षण } t_i \\ \text{पर कुल रैखिक संवेग}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{किसी अंतिम क्षण } t_f \\ \text{पर कुल रैखिक संवेग}\end{pmatrix}$$

इस परिणाम को हम इस तरह भी लिखते हैं : $\vec{p}_i = \vec{p}_f$ (8.2ख)

यह नियम कई कणों के निकाय पर लागू होता है। पर आप इसके बारे में खंड 3 में पढ़ेंगे। यहां हम दो कणों के निकाय ही लेंगे और इस नियम को सरल स्थितियों पर लागू करेंगे।

उदाहरण *8.1* : रैखिक संवेग संरक्षण

एक फिसलन भरी सीधी सड़क पर लाल बत्ती पर एक कार (1) खड़ी है। दूसरी ओर से अचर वेग से आ रही एक और कार (2) का ड्राइवर उस पर समय से ब्रेक नहीं लगा पाता और वह कार 1 से टकरा जाता है (चित्र 8.2 देखें)। यदि खड़ी हुई कार 1 से टकराते समय कार 2 की चाल अचर है और उसका मान $2.0\ ms^{-1}$ है तो वे दोनों कारें इकट्ठी किस चाल से आगे चलेंगी? दिया है कि कार 1 और उसके चालक का कुल द्रव्यमान 1000 kg है और कार 2 और उसमें बैठे सभी व्यक्तियों का द्रव्यमान 1500 kg है।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि जब दोनों कारें एक-दूसरे से टकराती हैं, तब उन कारों के निकाय पर कोई नेट बाह्य बल नहीं लग रहा क्योंकि कार 2 की चाल अचर है और वह सरल रेखा में चल रही है और कार 1 विरामावस्था में है। अतः, हम दोनों कारों के निकाय को बंद, विलगित निकाय मान सकते हैं और उस पर रैखिक संवेग संरक्षण नियम लागू कर सकते हैं।

चित्र 8.2

हम समीकरण 8.2ख का उपयोग कर निकाय का आरंभिक संवेग लिखते हैं :

$$\vec{p}_i = (m_{\text{कार}\,1}\vec{v}_{\text{कार}\,1} + m_{\text{कार}\,2}\vec{v}_{\text{कार}\,2}) = \vec{0} + (1500\ \text{kg} \times 2.0\ \text{ms}^{-1})\hat{i}$$

$$= 3.0 \times 10^3\ \text{kg.ms}^{-1}\,\hat{i}$$

जहां हमने कार 2 की गति की दिशा धनात्मक *x*-अक्ष के अनुदिश ली है (चित्र 8.2 देखें)। टकराने के बाद वे दोनों कारें एक ही दिशा में गतिमान होती हैं। मान लें कि उनका वेग $\vec{v}$ है। तब हमें मिलता है :

$$\vec{p}_f = (m_{\text{कार}\ 2} + m_{\text{कार}\ 1})\vec{v} = \vec{p}_i$$

$$\text{या}\quad \vec{p}_f = (2.5 \times 10^3\ \text{kg})\vec{v} = 3.0 \times 10^3\ \text{kg.ms}^{-1}\,\hat{i}$$

$$\therefore\quad \vec{v} = 1.2\ \text{ms}^{-1}\,\hat{i}$$

अब आप इस नियम को सरल निकाय पर लागू करें। इसके लिए बोध प्रश्न 1 करें।

बोध प्रश्न 1 – रैखिक संवेग संरक्षण

दो बिल्कुल एक-सी गाड़ियों की चालें समान हैं; उनमें से एक पूर्व दिशा में और दूसरी पश्चिम दिशा में गतिमान होती है। क्या इन दोनों गाड़ियों के रैखिक संवेग बराबर हैं? दोनों गाड़ियों के निकाय का रैखिक संवेग क्या है? अपने उत्तर की व्याख्या करें।

इस भाग में, अभी तक आपने जाना है कि जब कणों के निकाय पर लग रहा नेट बाह्य बल शून्य होता है, तो हम उसकी गति पर रैखिक संवेग संरक्षण नियम लागू कर सकते हैं। इसका फ़ायदा यह है कि हमें निकाय के हर कण पर लग रहे बलों की जानकारी होना ज़रूरी नहीं होता। खंड 3 में आप इस नियम के अन्य उदाहरण पढ़ेंगे।

अभी तक हमने ऐसे सरल निकायों के उदाहरण लिए हैं जिनका द्रव्यमान समय के साथ अचर रहता है। हमारे चारों ओर ऐसे कई निकाय हैं जिनमें द्रव्यमान का प्रवाह होता है और जिनका द्रव्यमान समय के साथ बदलता है। ऐसे निकायों के कुछ उदाहरण हैं रॉकेट की गति, बोतल से निकलता सॉस, नली से निकलता पानी, रेल के डिब्बों में गिरता कोयला (चित्र 8.3)।

चित्र 8.3 : समय के साथ बदल रहे द्रव्यमान वाले निकाय।

ऐसे निकायों की गति के अध्ययन के लिए हम $\Delta\vec{\mathbf{p}}$ निर्धारित करते हैं और फिर $\left(\vec{\mathbf{F}}_{net} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{p}}}{\Delta t}\right)$ से नेट बल प्राप्त करते हैं।

8.2.2 रैखिक संवेग और द्रव्यमान प्रवाह

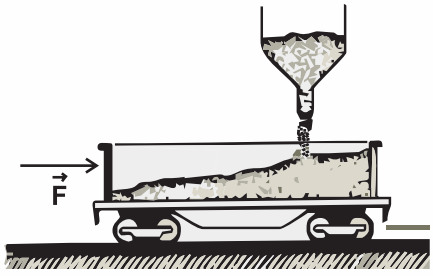
रैखिक संवेग की अवधारणा ऐसे निकायों की गति के अध्ययन के लिए बहुत उपयोगी होती है जिनमें समय के साथ द्रव्यमान का प्रवाह होता है। ऐसे निकायों के लिए, हम न्यूटन का गति का दूसरा नियम इस तरह लिखते हैं :

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \frac{d(m\vec{\mathbf{v}})}{dt} = m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} + \vec{\mathbf{v}}\frac{dm}{dt} \qquad (8.3)$$

अब हम रॉकेट की गति के लिए समीकरण 8.3 को हल करेंगे। यह द्रव्यमान प्रवाह और रैखिक संवेग का अत्यंत महत्त्वपूर्ण उदाहरण है। पर इससे पहले आप समीकरण 8.3 पर आधारित एक बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 2 – परिवर्तनशील द्रव्यमान वाला निकाय

कन्वेयर बेल्ट पर $50\,kgs^{-1}$ की अचर दर से रेत गिरती है (चित्र 8.4)। बेल्ट का $2.0\,ms^{-1}$ का अचर वेग बनाए रखने के लिए आवश्यक बल की गणना करें।



चित्र 8.4: कन्वेयर बेल्ट पर गिर रही रेत।

8.2.3 रॉकेट की गति

अंतर्निहित सिद्धांत : एक रॉकेट में उच्च तापमान और उच्च दाब पर अति उच्च वेग से एक निकास नली से गैस की धारा उत्सर्जित की जाती है (चित्र 8.5)। रॉकेट बढ़े हुए वेग से उत्सर्जित गैस की विपरीत दिशा में गतिमान होता है।

चित्र 8.5: PSLV रॉकेट जिसने 22 अक्टूबर, 2008 को चंद्रयान 1 को अंतरिक्ष में पहुंचाया।

अब हम इस सवाल का जवाब पाने के लिए समीकरण 8.3 को हल करते हैं : **द्रव्यमान M वाले रॉकेट का वेग क्या होगा जो समयांतराल Δt में द्रव्यमान ΔM की गैस उत्सर्जित करता है**?

आइए, पहले हम परिवर्तनशील द्रव्यमान वाले निकाय के लिए न्यूटन के गति के दूसरे नियम (समीकरण 8.3) को केवल रॉकेट पर लागू करें। इसलिए हम केवल रॉकेट की गति का विश्लेषण करेंगे और उत्सर्जित गैस की गति की चिन्ता नहीं करेंगे। अतः, निकाय की परिसीमा चित्र 8.6क में दिखाए गए बिंदुदार वक्र द्वारा दी जाती है।

हम **रॉकेट की गति का प्रेक्षण पृथ्वी से जुड़े जड़त्वीय तंत्र** से करते हैं।

माना कि किसी क्षण t पर रॉकेट का द्रव्यमान M है और समयांतराल Δt में रॉकेट द्वारा उत्सर्जित गैस का द्रव्यमान ΔM है। इस समयांतराल में रॉकेट का द्रव्यमान ΔM से घट जाता है और क्षण $(t + \Delta t)$ पर इसका मान $(M - \Delta M)$ है।

मान लें कि द्रव्यमान ΔM वाली उत्सर्जित गैस का वेग $\vec{\mathbf{u}}$ है और समयांतराल Δt के अंत में जड़त्वीय तंत्र के सापेक्ष रॉकेट का वेग $(\vec{\mathbf{v}} + \Delta\vec{\mathbf{v}})$ है (देखें चित्र 8.6ख)।

न्यूटन के गति के दूसरे नियम से $\vec{\mathbf{F}}_{net} = \dfrac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$

अब $\vec{\mathbf{p}}_i = M\vec{\mathbf{v}}$ और $\vec{\mathbf{p}}_f = (M - \Delta M)(\vec{\mathbf{v}} + \Delta\vec{\mathbf{v}}) + (\Delta M)\vec{\mathbf{u}}$

रॉकेट के रैखिक संवेग में परिवर्तन है :

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\mathbf{p}}_i = \left[(M - \Delta M)(\vec{\mathbf{v}} + \Delta\vec{\mathbf{v}}) + (\Delta M)\vec{\mathbf{u}}\right] - M\vec{\mathbf{v}}$$

या

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = M\vec{\mathbf{v}} + M\Delta\vec{\mathbf{v}} - \Delta M\vec{\mathbf{v}} - \Delta M\Delta\vec{\mathbf{v}} + (\Delta M)\vec{\mathbf{u}} - M\vec{\mathbf{v}}$$

$$= M\Delta\vec{\mathbf{v}} + \Delta M(\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}} - \Delta\vec{\mathbf{v}})$$

ध्यान दें कि $\left[\vec{\mathbf{u}} - (\vec{\mathbf{v}} + \Delta\vec{\mathbf{v}})\right]$ **रॉकेट के सापेक्ष गैस की धारा का वेग है**। इसे हम $\vec{\mathbf{v}}_{rel}$ लिखते हैं जिससे कि

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = M\Delta\vec{\mathbf{v}} + \Delta M\vec{\mathbf{v}}_{rel} \qquad (8.4\text{क})$$

अब हम समीकरण 8.4क को Δt से भाग देते हैं और सीमा $\Delta t \to 0$ लेकर $\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$ का मान प्राप्त करते हैं। इस प्रक्रिया में हम मान लेते हैं कि $\vec{\mathbf{v}}_{rel}$ अचर है। अतः,

$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta M}{\Delta t}\right)\vec{\mathbf{v}}_{rel} + M\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t}\right)$$

चूंकि M समय के साथ घटता है इसलिए $\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta M}{\Delta t}\right) = -\frac{dM}{dt}$ और

$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = -\frac{dM}{dt}\vec{\mathbf{v}}_{rel} + M\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \qquad (8.4\text{ख})$$

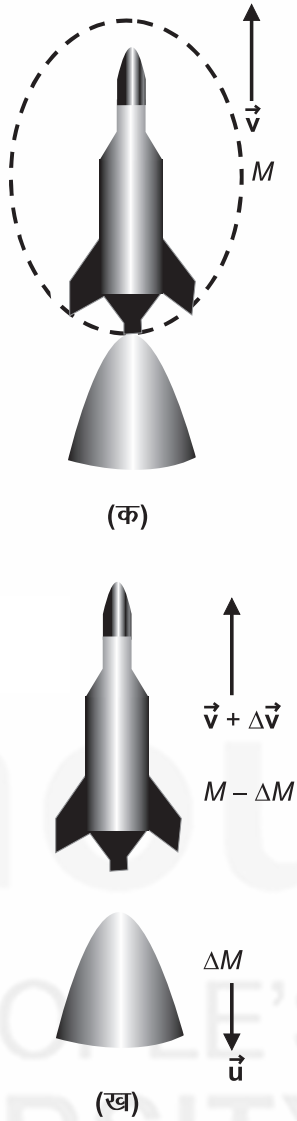
समीकरण 8.4ख को न्यूटन के गति के दूसरे नियम में रखने पर हमें मिलता है :

$$\vec{\mathbf{F}}_{net} = M\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} - \frac{dM}{dt}\vec{\mathbf{v}}_{rel} \qquad (8.4\text{ग})$$

अब हम दो स्थितियां लेंगे :

स्थिति 1 : जब रॉकेट पृथ्वी के गुरुत्व के अधीन गति करता है, और

स्थिति 2 : जब रॉकेट अंतरिक्ष में मुक्त रूप से गति करता है यानी उस पर लग रहा नेट बाह्य बल शून्य होता है।



चित्र 8.6: रॉकेट की गति का विश्लेषण।

स्थिति 1: पृथ्वी के गुरुत्व के अधीन रॉकेट की गति

जब रॉकेट पृथ्वी के गुरुत्व के अधीन गति करता है, तब $\vec{\mathbf{F}}_{net} = -M\vec{\mathbf{g}}$ और

$$-M\vec{\mathbf{g}} = M\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} - \frac{dM}{dt}\vec{\mathbf{v}}_{rel}$$

$$\therefore \quad -\vec{\mathbf{g}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} - \frac{1}{M}\frac{dM}{dt}\vec{\mathbf{v}}_{rel}$$

रॉकेट का वेग प्राप्त करने के लिए हम इस समीकरण का समाकलन करते हैं। मान लें कि क्षण $t = 0$ पर रॉकेट का द्रव्यमान M_0 है और उसका वेग $\vec{\mathbf{v}}_0$ है। तब

$$\int_0^t \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}\,dt = \vec{\mathbf{v}}_{rel}\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M} - \vec{\mathbf{g}}t$$

$$\therefore \quad \vec{\mathbf{v}}(t)\Big|_{\mathbf{v}_0}^{\mathbf{v}_t} = \vec{\mathbf{v}}_{rel}\ln M\Big|_{M_0}^{M} - \vec{\mathbf{g}}t$$

ध्यान दें

ध्यान दें कि चर M पर समाकल के समीकरण में हमने समाकलन सीमाएं बदल दी हैं।

जहां $\vec{\mathbf{v}}_t$ क्षण t पर रॉकेट का वेग है और हमने परिणाम $\left(\frac{dM}{dt}\right) dt = dM$ का उपयोग किया है। इस तरह किसी क्षण t पर रॉकेट का वेग होता है :

गुरुत्व के अधीन रॉकेट की गति

$$\vec{\mathbf{v}}_t - \vec{\mathbf{v}}_0 = \vec{\mathbf{v}}_{rel} \ln \frac{M}{M_0} - \vec{\mathbf{g}}t \qquad (8.5क)$$

इस समीकरण में प्रतीक "ln" प्राकृतिक लघुगणक का द्योतक है।

स्थिति 2: मुक्त आकाश में रॉकेट जब उस पर नेट बाह्य बल शून्य हो

मुक्त आकाश में, जब निकाय पर लग रहा नेट बाह्य बल शून्य हो तब रॉकेट की गति का समीकरण हो जाता है :

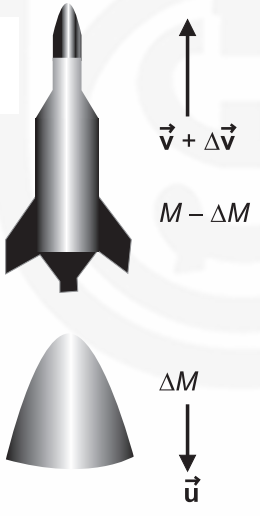
मुक्त आकाश में रॉकेट की गति

$$\vec{\mathbf{v}}_t - \vec{\mathbf{v}}_0 = \vec{\mathbf{v}}_{rel} \ln \frac{M}{M_0} \qquad (8.5ख)$$

आइए, इन परिणामों में हम कुछ आंकिक मान रख कर देखें कि हमें क्या मिलता है। उदाहरण 8.2 पढ़ें।

उदाहरण 8.2 : रॉकेट की गति

जब एक द्वि-चरण रॉकेट को मुक्त आकाश में किसी क्षण पर छोड़ा जाता है, तब उसका प्रारंभिक द्रव्यमान 1000 kg है। जब रॉकेट के पहले चरण में 800 kg द्रव्यमान का ईंधन जल जाता है, तब रॉकेट $1500\,ms^{-1}$ के आपेक्षिक वेग से गैस की धारा उत्सर्जित करता है। रॉकेट के पहले चरण के गिरने के बाद रॉकेट का वेग क्या है? फिर रॉकेट के दूसरे चरण में 180 kg द्रव्यमान का ईंधन जल जाता है, और रॉकेट $1500\,ms^{-1}$ के उसी आपेक्षिक वेग से गैस की धारा उत्सर्जित करता है। रॉकेट के दूसरे चरण के गिरने के बाद रॉकेट का वेग क्या है?



चित्र 8.7: रॉकेट की गति का विश्लेषण।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि चूंकि दोनों स्थितियों में रॉकेट मुक्त आकाश में गतिमान है, अतः, समीकरण 8.5ख को लागू किया जाए।

आइए, हम चित्र 8.7 में दिखाए गये निर्देशांक तंत्र को चुनें जिससे कि वेग $\vec{\mathbf{v}}_t$ की दिशा धनात्मक y-अक्ष के अनुदिश हो। तब वेग $\vec{\mathbf{v}}_{rel}$ धनात्मक y-अक्ष की विपरीत दिशा में होगा। तब $\vec{\mathbf{v}}_0 = \vec{\mathbf{0}}$ रखने पर हमें मिलता है :

$$v_t = -v_{rel} \ln \frac{M}{M_0} = -(1500\ ms^{-1}) \ln \left(\frac{200}{1000}\right)$$

$$= -(1500\ ms^{-1})(\ln 2 - \ln 10) = -(1500\ ms^{-1}) \times (-1.6) = 2400\ ms^{-1}$$

जब द्रव्यमान 180 kg का ईंधन जल जाता है, तब $M_0 = 200\,kg$, $M = 20\,kg$ और $v_0 = 2400\ ms^{-1}$। इस तरह,

$$v_t = v_0 - v_{rel} \ln \frac{M}{M_0} = 2400\ ms^{-1} - (1500\ ms^{-1}) \ln \left(\frac{20}{200}\right)$$

$$= 2400\ ms^{-1} - (1500\ ms^{-1}) \times (-2.3) = 5850\ ms^{-1}$$

इस तरह, रॉकेट में कई चरण (stages) लगाए जा सकते हैं जो ईंधन के साथ-साथ गिर जाते हैं और रॉकेट की चाल कई गुना बढ़ाई जा सकती है।

ध्यान दें कि जब हम रॉकेट की गति पर आंकिक सवालों में समीकरणों 8.5क और ख को लागू करते हैं तो हम समीकरण में केवल $\frac{dM}{dt}$ का परिमाण रखते हैं क्योंकि हमने समीकरण की व्युत्पत्ति में समय t के साथ द्रव्यमान M के घटने को पहले ही शामिल कर लिया है।

अभी तक, आपने जिन बलों के बारे में पढ़ा है वे समय के साथ नहीं बदलते। लेकिन हमारे चारों ओर बहुत सी स्थितियां ऐसी होती हैं जिनमें लगाया गया बल समय के साथ बदलता है। उदाहरण के लिए, जब क्रिकेट की गेंद को बल्ले द्वारा मारा जाता है या टेनिस की गेंद को रैकेट से मारा जाता है या कोई बच्चा सीमेंट के फ़र्श पर गिरता है, तब टक्कर के ठीक पहले और टक्कर के ठीक बाद बल का मान शून्य होता है। लेकिन टक्कर के दौरान संक्षिप्त समयांतराल के लिए आरोपित बल का मान बहुत अधिक होता है। ऐसी स्थितियों में गति का विश्लेषण करने के लिए **आवेग** (impulse) की अवधारणा का इस्तेमाल किया जाता है। लेकिन आवेग के बारे में पढ़ने से पहले आप रॉकेट की गति पर आधारित एक बोध प्रश्न हल करें।

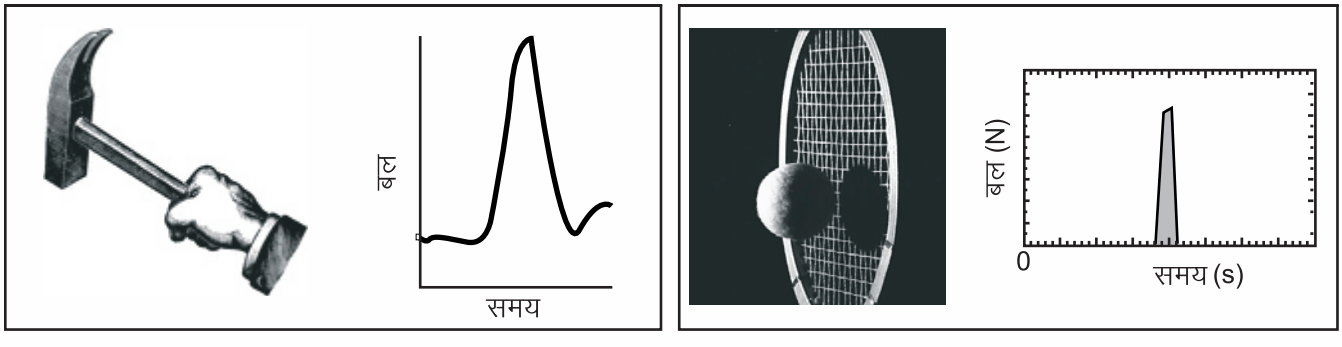
बोध प्रश्न 3 – रॉकेट की गति

आरंभिक द्रव्यमान 1000 kg वाले एक रॉकेट को मुक्त आकाश में विरामावस्था से 100 kg के एक उपग्रह को अंतरिक्ष में पहुंचाने के लिए छोड़ा जाता है। यदि 900 kg ईंधन खत्म होने पर रॉकेट के सापेक्ष उत्सर्जित गैस धारा की चाल 1000 ms^{-1} हो तो रॉकेट का वेग क्या होगा?

8.3 आवेग

चित्र 8.8 में, हमने कुछ ऐसी स्थितियां दिखाई हैं जिनमें किसी पिंड पर संक्षिप्त समयांतराल के लिए विशाल बल लगता है और वह बल समय के साथ बदलता है। चित्र में समय के साथ किसी प्रारूपी स्थिति के लिए बल में परिवर्तन भी दिखाया गया है। यदि पिंड पर लग रहा नेट बल $\vec{F}_{net}(t)$ हो तो टक्कर के संक्षिप्त समयांतराल में उसका रैखिक संवेग होता है :

$$d\vec{p} = \vec{F}_{net}(t)\, dt \qquad (8.6)$$



चित्र 8.8 : वे स्थितियां जिनमें समय के साथ बदलता हुआ बल एक छोटे समयांतराल के दौरान लगता है।

मान लें कि क्षणों t_1 और t_2 के बीच पिंड पर बल लगता है। मान लें कि

$\vec{p}_1$ = क्षण $t = t_1$ पर यानी बल के लगने के ठीक पहले के क्षण पर, पिंड का रैखिक संवेग

$\vec{p}_2$ = क्षण $t = t_2$ पर यानी बल के लगने के ठीक बाद के क्षण पर, पिंड का रैखिक संवेग

चूंकि बल उस समयांतराल में समय के साथ लगातार बदलता है, इसलिए हमें उस समयांतराल में रैखिक संवेग में परिवर्तन ज्ञात करने के लिए उसे t_1 से t_2 तक समाकलित करना होगा। इस तरह,

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{net}(t)\, dt \qquad (8.7क)$$

समीकरण 8.7क में दाईं ओर का व्यंजक पिंड पर लगाए गये बल के परिमाण और अवधि दोनों का ही मान देता है। इसे हम **आवेग** कहते हैं और इसका प्रतीक $\vec{J}$ होता है। ध्यान दें कि यह एक सदिश राशि है और इसकी विमा रैखिक संवेग की विमा के बराबर है। इस तरह, परिभाषा से,

आवेग

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{net}(t)\, dt \qquad (8.7ख)$$

इस व्यंजक की समीकरण 8.7क से तुलना करने पर हम लिख सकते हैं :

आवेग

$$\vec{J} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p} \qquad (8.8)$$

समीकरण 8.8 के परिणाम को **आवेग-संवेग प्रमेय** कहा जाता है। आवेग-संवेग प्रमेय हमें बताता है कि एक ऐसे पिंड द्वारा अनुभव किया गया आवेग जिस पर संक्षिप्त समयांतराल के लिए समय के साथ बदलने वाला बल लगाया जाता है, उस समयांतराल में उसके रैखिक संवेग में परिवर्तन के बराबर होता है। आइए, अब हम इन परिणामों को एक-साथ रख कर दोहराएं।

दोहराएं

आवेग और आवेग-संवेग प्रमेय

जब समय के साथ बदलने वाला एक नेट बाह्य बल संक्षिप्त समयांतराल के लिए किसी पिंड पर लगता है तो परिभाषा से, इस बल के कारण इस समयांतराल में पिंड द्वारा अनुभव किया गया **आवेग** होता है :

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{net}(t)\, dt \qquad (8.7ख)$$

इस व्यंजक की समीकरण 8.7क से तुलना करने पर हम लिख सकते हैं :

$$\vec{J} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p} \qquad (8.8)$$

समीकरण 8.8 के परिणाम को **आवेग-संवेग प्रमेय** कहा जाता है : यह हमें बताता है कि **एक ऐसे पिंड द्वारा अनुभव किया गया आवेग जिस पर संक्षिप्त समयांतराल के लिए समय के साथ बदलने वाला बल लगाया जाता है, उस समयांतराल में उसके रैखिक संवेग में परिवर्तन के बराबर होता है।**

ध्यान दें

आवेग-संवेग प्रमेय कोई **नया नियम नहीं है**। यह न्यूटन के गति के दूसरे नियम का ही एक और स्वरूप है।

टक्कर के दौरान पिंड द्वारा अनुभव किये गए आवेग का पता लगाने के लिए, यह जानना ज़रूरी है कि बल समय के साथ कैसे बदलता है। लेकिन बहुत-सी स्थितियों में हमें समय के साथ बल के परिवर्तन की जानकारी नहीं होती। पर हमें **औसत बल के परिमाण** और उस **समयांतराल** की जानकारी होती है **जिसमें वह लगता** है। अब परिभाषा से समयांतराल Δt में लगने वाला औसत बल होता है :

$$\vec{F}_{av} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{net}(t)\, dt, \qquad (8.9)$$

औसत बल

जहां $\Delta t = t_2 - t_1$। समीकरण 8.9 और 8.7ख की तुलना करने पर हम लिख सकते हैं:

$$\vec{J} = \vec{F}_{av}\, \Delta t \qquad (8.10)$$

औसत बल और आवेग

समीकरणों 8.8 और 8.10 में दिये गए परिणाम बहुत उपयोगी हैं क्योंकि रैखिक संवेग में परिवर्तन और औसत बल का मापन करना काफ़ी आसान होता है। आइए, अब हम इन परिणामों के कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 8.3 : आवेग

जब आप सीमेंट के फ़र्श पर गिरते हैं तो नरम गद्दे पर गिरने के मुकाबले आपको ज़्यादा चोट क्यों लगती है?

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि समीकरण 8.10 से दोनों ही स्थितियों में आप पर लग रहा औसत बल परिकलित किया जाए।

दोनों ही स्थितियों में आप अंत में विरामावस्था में होते हैं और यह माना जा सकता है कि फ़र्श या गद्दे से टकराने के क्षण पर आपके वेग बराबर हैं। अतः आपके **रैखिक संवेग में परिवर्तन** (यानी **फ़र्श या गद्दे के कारण आपके द्वारा अनुभव किया गया आवेग**) दोनों ही स्थितियों में समान हैं।

लेकिन दोनों स्थितियों में विरामावस्था में आने में लगा समय भिन्न है : **क्योंकि गद्दा नरम होता है इसलिए गद्दे पर विरामावस्था में आने में आपको सीमेंट के फ़र्श के मुकाबले ज़्यादा समय लगता है।**

ध्यान दें कि दोनों ही स्थितियों में $\vec{J}$ समान है और $\vec{F}_{av} = \dfrac{\vec{J}}{\Delta t}$

चूंकि **गद्दे के लिए टक्कर की अवधि फ़र्श के मुकाबले अधिक है, अतः,**

$(\Delta t)_{\text{गद्दा}} >> (\Delta t)_{\text{फ़र्श}}$ यानी $(\vec{F}_{av})_{\text{गद्दा}} << (\vec{F}_{av})_{\text{फ़र्श}}$

इसलिए आपके द्वारा गद्दे पर लगाया गया औसत बल आपके द्वारा फ़र्श पर लगाए गए बल से **कम** होगा। अतएव **फ़र्श द्वारा आप पर लगाया गया समान और विपरीत प्रतिक्रिया बल**, गद्दे द्वारा आप पर लगाए गए बल की तुलना में कहीं अधिक होगा। इसी कारण, आप जब सीमेंट के फ़र्श पर गिरते हैं तो आपको गद्दे पर गिरने के मुकाबले अधिक चोट लगती है।

उदाहरण *8.4* : आवेग-संवेग प्रमेय

द्रव्यमान 0.25 kg की एक गेद जो $20.0\,ms^{-1}$ की चाल से बल्ले से टकराती है, टक्कर के बाद उसी चाल से विपरीत दिशा में गतिमान होती है। बल्ले से संपर्क के दौरान गेंद द्वारा अनुभव किया गया आवेग क्या है? यदि संपर्क की अवधि 1 ms हो तो गेंद पर कितना औसत बल लगता है?

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि समीकरणों 8.8 और 8.10 का इस्तेमाल किया जाए और यह ध्यान रखा जाए कि संवेग एक सदिश राशि है यानी उसकी दिशा में परिवर्तन का ध्यान रखा जाए।

मान लें कि बल्ले से टकराने के बाद गेंद धनात्मक *x*-दिशा में चलती है यानी प्रारंभ में गेंद ऋणात्मक *x*-दिशा में गतिमान है। अतः, समीकरण 8.8 से गेंद द्वारा अनुभव किया गया आवेग है :

$$J_x = p_{2x} - p_{1x} = mv_{2x} - m(-v_{1x})$$

$$= 0.25\,kg\,(20.0\,ms^{-1} + 20.0\,ms^{-1}) = 10\ kgms^{-1}$$

आवेग की दिशा धनात्मक *x*-अक्ष के अनुदिश है यानी उस दिशा में है जिसमें बल्ला गेंद को मारता है। समयांतराल 1 ms ($= 10^{-3}$ s) में उस दिशा में गेंद पर लग रहा औसत बल है :

$$F_{av} = \frac{J_x}{\Delta t} = \frac{10\ kgms^{-1}}{10^{-3}\,s} = 10^4\ N$$

ध्यान दें कि यह गेंद पर **औसत नेट बल** है। अधिकतम नेट बल औसत बल से अधिक होगा।

अब आप एक बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 4 – रैखिक संवेग और आवेग

एक औसत बल का परिमाण किसी दूसरे औसत बल का दोगुना है। दोनों बल समान आवेग उत्पन्न करते हैं। दोनों में से अधिक मान वाला औसत बल 2.0 ms के समयांतराल के लिए लगता है। दोनों में से कम मान वाला औसत बल कितने समय के लिए लगता है?

इस इकाई में हमने रैखिक संवेग और आवेग की अवधारणाओं की चर्चा की है। आपने जाना कि हम कैसे इन अवधारणाओं का उपयोग करके न्यूटन के गति के नियम लागू किए बिना कणों की गति का अध्ययन कर सकते हैं। आपने **रैखिक संवेग संरक्षण नियम** और **आवेग-संवेग प्रमेय** और उनके सरल अनुप्रयोगों का अध्ययन भी किया है। आपने बहुत कम समय के लिए लग रहे समय पर निर्भर बलों के बारे में जाना है। आपने सीखा है कि यदि हमें आवेग का मान पता हो तो औसत बल कैसे ज्ञात किया जा सकता है।

अब हम इस इकाई का सारांश देंगे।

8.4 सारांश

अवधारणा	विवरण
रैखिक संवेग संरक्षण नियम	■ **एक विलगित और बंद निकाय का कुल रैखिक संवेग संरक्षित रहता है यदि उस पर लग रहा नेट बाह्य बल शून्य हो :** $\vec{\mathbf{p}}$ = अचर बंद, विलगित निकाय के लिए
आवेग	■ जब समय के साथ बदलने वाला एक नेट बाह्य बल संक्षिप्त समयांतराल के लिए किसी पिंड पर लगता है तो इस बल के कारण इस समयांतराल में पिंड द्वारा अनुभव किया गया **आवेग** होता है : $\vec{\mathbf{J}} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathbf{F}}_{net}(t)\, dt$ इसका औसत बल से संबंध होता है : $\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{F}}_{av}\, \Delta t$ जहां $\vec{\mathbf{F}}_{av} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathbf{F}}_{net}(t)\, dt$
आवेग-संवेग प्रमेय	■ **आवेग-संवेग प्रमेय** के अनुसार एक ऐसे पिंड द्वारा अनुभव किया गया आवेग जिस पर संक्षिप्त समयांतराल के लिए समय के साथ बदलने वाला बल लगाया जाता है, उस समयांतराल में उसके रैखिक संवेग में परिवर्तन के बराबर होता है : $\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{p}}_2 - \vec{\mathbf{p}}_1 = \Delta\vec{\mathbf{p}}$

8.5 अंत में कुछ प्रश्न

1. 32.0 kg द्रव्यमान का एक बच्चा 4.0 ms^{-1} की चाल से दौड़ता हुआ विरामावस्था में स्थित स्केट बोर्ड पर कूदता है। यदि स्केट बोर्ड का द्रव्यमान 8.0 kg हो तो बच्चे और स्केट बोर्ड की चाल है :

   क) 16.0 ms^{-1}

   ख) 5.0 ms^{-1}

   ग) 8.1 ms^{-1}

   घ) 3.2 ms^{-1}

2. परिमाण 200 N वाले बल को कितनी देर के लिए लगाया जाना चाहिए ताकि वह रैखिक संवेग में 500 kg ms^{-1} का परिवर्तन कर सके?

   क) 0.4 s

   ख) 2.5 s

   ग) 10.0 s

   घ) 5.0 s

3. गेंद को पकड़ते समय क्रिकेट का खिलाड़ी गेंद के टकराने के पहले अपने हाथ को आगे बढ़ाता है। गेंद से टक्कर के बाद वह गेंद की गति की दिशा में अपने हाथ को पीछे की ओर ले जाता है। वह ऐसा इसलिए करता है क्योंकि

   क) हाथ पर आरोपित बल घट जाता है।
   ख) आपेक्षिक वेग घट जाता है।
   ग) टक्कर का समयांतराल बढ़ जाता है।
   घ) टक्कर का समयांतराल घट जाता है।

4. पहाड़ी से बराबर चाल से नीचे आ रहे एक ट्रक और कार पर बल लगाकर उन्हें एक ही समयांतराल में रोका जाता है। कार को रोकने के लिए लगाए गए बल की तुलना में ट्रक को रोकने के लिए लगाया गया बल

   क) अधिक होगा।
   ख) कम होगा।
   ग) बराबर होगा।

5. द्रव्यमान 1500 kg की एक कार पश्चिम दिशा में 55 kmh^{-1} की चाल से गतिमान है। जब ड्राइवर उस पर ब्रेक लगाता है तो कार 10 s में रुक जाती है। आवेग-संवेग प्रमेय का उपयोग करके कार पर लगाए गये औसत बल की गणना करें।

6. आवेग की अवधारणा का प्रयोग करके समझाएं कि सर्कस में जब ट्रैपीज़ पर सर्कस के कलाकार करतब दिखाते हैं तो उनके नीचे सुरक्षा के लिए जाल क्यों बिछाया जाता है।

7. 5.0×10^3 ms^{-1} की चाल से गतिमान द्रव्यमान 6000 kg द्रव्यमान वाला एक रॉकेट अपने सापेक्ष 2.0×10^3 ms^{-1} की चाल से गतिमान 1000 kg द्रव्यमान की गैस धारा उत्सर्जित करता है। रॉकेट का अंतिम वेग क्या है?

8. एक फिल्म में सुपरमैन को बिना किसी सहारे के हवा में लटका हुआ दिखाया जाता है जब खलनायक उसकी ओर बढ़ रहा है। अगले दृश्य में दिखाया जाता है कि वह खलनायक को पकड़कर उसे दूर फेंक देता है पर खुद उसी स्थिति पर स्थिर रहता है। समझाएं कि इस दृश्य में क्या ग़लत है।

9. द्रव्यमान 50 g की एक गेंद का आवेग परिकलित करें जब वह एक दीवार पर परिमाण 5.0 ms^{-1} के वेग से सीधे टकराती है और उसी वेग से वापिस लौट आती है।

10. विरामावस्था में खड़ी एक कार और उसमें बैठी महिला की चाल बढ़ कर 5.0 ms^{-1} हो जाती है जब कार में पीछे से टक्कर लगती है। दिया है कि महिला का द्रव्यमान 60 kg है। मान लें कि टक्कर में लगा समय 0.50 s है। तब क) महिला के आवेग और ख) महिला द्वारा अपनी कार की सीट पर आरोपित औसत बल की गणना करें।

8.6 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. रैखिक संवेग एक सदिश राशि है। वह गाड़ियों के **वेग** पर निर्भर करती है, केवल चाल पर नहीं। चूंकि गाड़ियों के वेग एक दूसरे के विपरीत दिशा में है, अतः, **उनके**

रैखिक संवेग बराबर नहीं होंगे। लेकिन क्योंकि गाड़ियां बिल्कुल एक-जैसी हैं, अतः, उनके द्रव्यमान समान हैं। चूंकि गाड़ियों के वेग समान परिमाण के और एक दूसरे के विपरीत दिशा में है, अतः, निकाय का कुल रैखिक संवेग शून्य होगा।

2. हम समीकरण 8.3 का उपयोग करते हैं। कन्वेयर बैल्ट का वेग अचर है। अतः, $\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \vec{\mathbf{0}}$ । मान लें कि $\vec{\mathbf{v}} = 2.0\ \text{ms}^{-1}\ \hat{\mathbf{i}}$, जहां $\hat{\mathbf{i}}$ कन्वेयर बैल्ट की गति की दिशा में है। दिया है कि $\frac{dm}{dt} = 50.0\,\text{kgs}^{-1}$ । तब समीकरण 8.3 से :

$$\vec{\mathbf{F}} = 50.0\,\text{kgs}^{-1} \times 2.0\ \text{ms}^{-1}\ \hat{\mathbf{i}} = 1.0 \times 10^2\,\text{N}\ \hat{\mathbf{i}}$$

3. हम समीकरण 8.5ख में $M_0 = 1000$ kg, $M = 100$ kg, $v_0 = 0$ और $v_{rel} = 1000\ \text{ms}^{-1}$ रखते हैं। अतः, रॉकेट का अंतिम वेग है :

$$v_t = -1000\,\text{ms}^{-1} \times \ln\frac{100}{1000} = 2.30 \times 10^3\ \text{ms}^{-1}$$

उपरोक्त समीकरण में ऋणात्मक चिन्ह इसलिए आता है क्योंकि अंतिम वेग की दिशा उत्सर्जित गैस की दिशा के वेग की दिशा के विपरीत है।

4. हम समीकरण 8.10 का इस्तेमाल करते हैं। यदि कम परिमाण वाले औसत बल का मान F_{AV} है तो अधिक परिमाण वाला औसत बल $2F_{AV}$ होगा। इन दोनों बलों का आवेग समान है। अतः, $F_{AV} \times \Delta t = 2F_{AV} \times (2.0 \times 10^{-3}\ \text{s})$ जहां Δt वह समय है जिसके दौरान कम परिमाण वाला औसत बल लगता है।
तब : $\Delta t = 4.0 \times 10^{-3}\ \text{s} = 4.0\ \text{ms}$

अंत में कुछ प्रश्न

1. सही विकल्प (घ) है। हम समीकरण 8.2ख का इस्तेमाल करते हैं। निकाय का आरंभिक रैखिक संवेग है :

$$p_i = 32.0\,\text{kg} \times 4.0\,\text{ms}^{-1} = 128.0\ \text{kgms}^{-1}$$

अंतिम रैखिक संवेग है : $p_f = (32.0\,\text{kg} + 8.0\,\text{kg}) \times v$

जहां v बच्चे और स्केट बोर्ड की चाल है। रैखिक संवेग संरक्षण नियम से : $v = \frac{128.0\,\text{kgms}^{-1}}{40.0\,\text{kg}} = 3.2\,\text{ms}^{-1}$

2. सही विकल्प (ख) है। हम समीकरणों 8.8 और 8.10 का प्रयोग करते हैं और $F_{av} = 200\,\text{N}$ और $p_2 - p_1 = 500\ \text{kgms}^{-1}$ लेते हैं। अतः,

$$\Delta t = \frac{500\ \text{kgms}^{-1}}{200\,\text{N}} = 2.5\,\text{s}$$

3. सही विकल्प (ग) है। टक्कर का समयांतराल बढ़ जाता है और इसके कारण खिलाड़ी के हाथ पर लग रहे औसत बल का मान घट जाता है।

4. सही विकल्प (क) है। ट्रक के रैखिक संवेग में परिवर्तन का मान अधिक होगा क्योंकि इसका द्रव्यमान अधिक है। अतः, ट्रक को रोकने के लिए ज़रूरी बल अधिक होगा (समीकरणें 8.8 और 8.10)।

5. मान लें कि गाड़ी ऋणात्मक x-दिशा में गतिमान है। समीकरण 8.10 से औसत बल का मान है : $\vec{F}_{AV} = \dfrac{\vec{J}}{\Delta t}$

गाड़ी का आरंभिक वेग है : $\vec{v} = -55\,\text{kmh}^{-1}\,\hat{i} = -15.3\,\text{ms}^{-1}\,\hat{i}$

आवेग का मान है : $\vec{J} = \vec{0} - [1500\,\text{kg} \times (-15.3\,\text{ms}^{-1}\hat{i})] = 2.3 \times 10^4\ \text{kgms}^{-1}\,\hat{i}$

औसत बल है : $\vec{F}_{av} = \dfrac{2.3 \times 10^4\ \text{kgms}^{-1}}{10\,\text{s}}\,\hat{i} = 2.3 \times 10^3\,\text{N}\,\hat{i}$

6. उदाहरण 8.3 देखें। सर्कस के कलाकारों के नीचे सुरक्षा जाल होने से उनकी टक्कर का समयांतराल बढ़ जाता है और कलाकार द्वारा जाल पर लगाया गया औसत बल कम हो जाता है। अतः, कलाकार पर जाल के कारण लग रहा प्रतिक्रिया बल भी कम होता है। यदि सुरक्षा जाल नहीं लगाया जाए तो ये कलाकार सीमेंट के फ़र्श पर गिरेंगे। तब उन्हें चोट लगेगी क्योंकि इस स्थिति में टक्कर का समयांतराल बहुत कम हो जाएगा।

7. हम समीकरण 8.5ख में $v_0 = 5.0 \times 10^3\,\text{ms}^{-1}$, $M_0 = 6000$ kg, $M = (6000\ \text{kg} - 1000\ \text{kg}) = 5000$ kg, $v_{rel} = 2.0 \times 10^3\,\text{ms}^{-1}$ रखते हैं। अतः, रॉकेट का अंतिम वेग है :

$$v_t = 5.0 \times 10^3\,\text{ms}^{-1} - 2.0 \times 10^3\,\text{ms}^{-1} \ln\left(\frac{5000}{6000}\right)$$

$$= 5.0 \times 10^3\,\text{ms}^{-1} - 2.0 \times 10^3\,\text{ms}^{-1}(-0.18) = 5.4 \times 10^3\,\text{ms}^{-1}$$

8. यह दृश्य रैखिक संवेग संरक्षण नियम से मेल नहीं खाता। चूंकि निकाय पर कोई बाह्य बल नहीं लग रहा इसलिए खलनायक को धक्का देने के बाद सुपरमैन को उसकी विपरीत दिशा में जाना चाहिए ताकि निकाय का रैखिक संवेग संरक्षित रहे।

9. मान लें कि गेंद धनात्मक x-अक्ष के अनुदिश गतिमान है। जब वह दीवार से टकराती है तो उसका संवेग होता है :

$$\vec{p}_1 = (50 \times 10^{-3}\,\text{kg}) \times 5.0\,\text{ms}^{-1}\,\hat{i} = 0.25\,\text{kgms}^{-1}\,\hat{i}$$

टक्कर के बाद लौटने पर गेंद का संवेग होता है :

$$\vec{p}_2 = -(50 \times 10^{-3}\,\text{kg}) \times 5.0\,\text{ms}^{-1}\,\hat{i} = -0.25\,\text{kgms}^{-1}\,\hat{i}$$

अतः आवेग है :

$$\vec{J} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = -0.25\,\text{kgms}^{-1}\,\hat{i} - 0.25\,\text{kgms}^{-1}\,\hat{i} = -0.50\,\text{kgms}^{-1}\,\hat{i}$$

10. हम समीकरण 8.8 का प्रयोग करते हैं और उसमें आरंभिक संवेग का मान शून्य रखते हैं क्योंकि कार विरामावस्था से चलती है। अंतिम संवेग है : $\vec{p}_2 = 60\,\text{kg} \times 5.0\,\text{ms}^{-1}\,\hat{i} = 300\,\text{kgms}^{-1}\,\hat{i}$ जहां $\hat{i}$ कार की गति की दिशा में एकक सदिश है। क) आवेग का मान है : $\vec{J} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = 3.0 \times 10^2\,\text{kgms}^{-1}\,\hat{i}$

ख) औसत बल $\vec{F}_{av}$ का मान प्राप्त करने के लिए हम समीकरण 8.10 में

$\vec{J} = 3.0 \times 10^2\,\text{kgms}^{-1}\,\hat{i}$ और $\Delta t = 0.50$ s रखते हैं। अतः,

$$\vec{F}_{av} = \frac{3.0 \times 10^2\,\text{kgms}^{-1}}{0.50\,\text{s}}\,\hat{i} = 6.0 \times 10^2\,\text{N}\,\hat{i}$$

बर्फीली पहाड़ी पर लगातार बदल रही ढलान वाले रास्ते पर स्कीइंग कर रहे लोगों की चाल कैसे मालूम की जा सकती है? इस प्रश्न का उत्तर आपको इस इकाई में मिलेगा !

इकाई 9

कार्य और गतिज ऊर्जा

इकाई की रूपरेखा

9.1 परिचय
उद्देश्य
9.2 कार्य
कार्य-रहित बल
धनात्मक और ऋणात्मक कार्य
9.3 कार्य-ऊर्जा प्रमेय और गतिज ऊर्जा
9.4 परिवर्तनशील बल द्वारा किया गया कार्य
9.5 शक्ति
9.6 सारांश
9.7 अंत में कुछ प्रश्न
9.8 हल और उत्तर

अध्ययन निर्देशिका

इस इकाई में, आप यांत्रिकी की कुछ और मूलभूत अवधारणाओं के बारे में पढ़ेंगे जैसेकि **कार्य, गतिज ऊर्जा** और **कार्य-ऊर्जा प्रमेय**। इन अवधारणाओं की मदद से हम गति के समीकरण को हल किए बिना भी गति का विश्लेषण कर सकते हैं। आपने इनमें से कुछ अवधारणाएं स्कूल की भौतिकी में पढ़ी हैं। इस इकाई में हम **कार्य** की परिभाषा देने के लिए **सदिशों के अदिश गुणनफल** की अवधारणा का इस्तेमाल करेंगे जिन्हें आपने खंड 1 की इकाइयों 1 और 2 में पढ़ा है। इस इकाई में हम **समाकलन** का भी प्रयोग करेंगे जिसे आपने स्कूली गणित में पढ़ा है विशेषकर यह अवधारणा कि एकल चर के फलन का समाकल वक्र के नीचे के क्षेत्रफल के बराबर होता है।

इस इकाई को **पढ़ने से पहले सदिशों और सदिश घटकों की अवधारणाओं को अवश्य दोहरा लें।** भाग 9.3 में दी गई कार्य-ऊर्जा प्रमेय आपके लिए बिल्कुल नई हो सकती है। भाग 9.4 में हमने **परिवर्तनशील** बल द्वारा किये गए कार्य की समीकरणें व्युत्पन्न की हैं। आपको इन भागों को समझने में ज़्यादा समय लग सकता है। अंततः हमारा सुझाव है कि आप सभी उदाहरण, बोध प्रश्न और अंत में दिये गए प्रश्न खुद हल करें ताकि आप इस इकाई में दी गई अवधारणाओं को अच्छी तरह समझ सकें।

"ऊर्जा निरन्तर आनंद का स्रोत है।"

विलियम ब्लेक

चित्र 9.1: पहाड़ी रास्ते पर चल रही बस पर लग रहा बल समय के साथ बदल रहा है। क्या हम न्यूटन के गति के नियम लागू किए बिना बस के वेग और स्थिति की गणना कर सकते हैं?

9.1 परिचय

इकाई 5 में आपने न्यूटन के गति के नियमों के बारे में पढ़ा है। इकाई 6 में आपने सीखा है कि जब किसी पिंड पर लग रहा नेट बल ज्ञात हो तो न्यूटन के नियमों को लागू करके किसी क्षण पर पिंड का वेग और त्वरण कैसे प्राप्त किया जाता है। लेकिन कई स्थितियों में न्यूटन के गति के नियम लागू करके पिंड के स्थिति और वेग की गणना करना आसान नहीं होता। उदाहरण के लिए, पहाड़ी रास्ते पर (जिसकी ढलान लगातार बदल रही हो) चल रही बस की गति लें (चित्र 9.1)। मान लें कि आपको किसी क्षण पर न्यूटन के गति के नियम लागू करके बस की चाल प्राप्त करनी है। तब आपको प्रत्येक क्षण पर बस पर लग रहा बल ज्ञात करना होगा। चूंकि सड़क की ढलान समय के साथ लगातार बदल रही है, बस पर लग रहा बल (जिसका मान $mg \sin\theta$ है) भी लगातार बदलता है। यानी बस का त्वरण भी लगातार बदलता है। जब तक हमें यह न मालूम हो कि कोण θ और इसलिए बस पर लग रहा बल समय के साथ किस प्रकार बदलता है तब तक हम उस पर न्यूटन के गति के नियम लागू नहीं कर सकते। यानी हम किसी क्षण पर उसके वेग और स्थिति का पता नहीं लगा सकते। और अगर हमें बल के समय के साथ परिवर्तन की जानकारी हो भी तो भी इस समस्या को हल करना कठिन होता है।

ऐसी स्थितियों में हम जानना चाहते हैं : **क्या इस बस की गति जैसी समस्याओं में गति का विश्लेषण करने का कोई आसान तरीका भी होता है? हम न्यूटन के गति के नियम लागू किए बिना किसी कण के वेग और स्थिति में हो रहे परिवर्तनों की गणना कैसे कर सकते हैं?** इसका उत्तर यह है कि हम **कार्य-ऊर्जा प्रमेय** को लागू करके इस तरह की गणनाएं कर सकते हैं। इस प्रमेय के बारे में आप इस इकाई के भाग 9.3 और 9.4 में पढ़ेंगे। लेकिन इन भागों को पढ़ने से पहले आपको इनसे संबद्ध कुछ अवधारणाओं को सीखना पड़ेगा जिन्हें हम भाग 9.2 और 9.4 में समझाएंगे। ये अवधारणाएं हैं : **अचर बल द्वारा किया गया कार्य** (भाग 9.2), **गतिज ऊर्जा** (भाग 9.3) और **परिवर्तनशील बलों द्वारा किया गया कार्य** (भाग 9.4)। हम **शक्ति** की अवधारणा भी इस इकाई के भाग 9.5 में समझाएंगे। इकाई 8 में आपने रैखिक संवेग संरक्षण नियम सीखा है जो प्रकृति का एक मूलभूत नियम है। अगली इकाई में हम ऊर्जा की अवधारणा पर आगे चर्चा करेंगे और प्रकृति का एक और मूलभूत नियम, **ऊर्जा संरक्षण नियम**, समझाएंगे। हम उससे संबंधित अवधारणाओं जैसेकि **संरक्षी बल, स्थितिज ऊर्जा** और **यांत्रिक ऊर्जा के संरक्षण** की भी चर्चा करेंगे।

ध्यान दें

इस इकाई में हम जिन अवधारणाओं की चर्चा कर रहे हैं वे उन पिंडों पर लागू होती हैं जिन्हें हम **बिंदु कण** मान सकते हैं।

लेकिन **ऊर्जा संरक्षण नियम सार्वत्रिक नियम** है जो **बिंदु कणों** और **पिंडों** दोनों पर लागू होता है। हालांकि जब हम इसे कणों के निकायों और पिंडों पर लागू करते हैं तो हमें कुछ और जानकारी भी चाहिए होती है जैसाकि आप अगले खंड में पढ़ेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- अचर और परिवर्तनशील बलों द्वारा किए गए कार्य की परिभाषा दे सकेंगे और उसकी गणना कर सकेंगे;
- कण की गतिज ऊर्जा की गणना कर सकेंगे;
- अचर और परिवर्तनशील बलों के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय लागू कर सकेंगे; और
- यांत्रिक निकायों में शक्ति की गणना कर सकेंगे।

9.2 कार्य

आपने अपने स्कूल के भौतिकी के पाठ्यक्रमों में कार्य की अवधारणा के बारे में पढ़ा है। इसलिए आपको यह अवधारणा भली-भांति मालूम होनी चाहिए। उदाहरण के लिए, मान लें कि एक बक्से पर लग रहे **नेट बल $\vec{F}$** के कारण उसमें विस्थापन **$\vec{d}$** होता है (चित्र 9.2)। बक्से पर बल द्वारा किया गया कार्य क्या है? अपने स्कूल के भौतिकी पाठ्यक्रम से आप इसका उत्तर याद करें : पिंड पर लग रहे **नेट अचर बल $\vec{F}$** के कारण यदि बल की दिशा में उसके विस्थापन का परिमाण d हो तो बल द्वारा पिंड पर किया गया कार्य होता है :

$$W = F\,d \qquad (9.1)$$

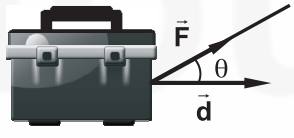
ध्यान दें कि समीकरण 9.1 में, F और d क्रमशः बल और विस्थापन के परिमाण हैं। इस तरह, जब तक बक्से द्वारा चली गई दूरी नहीं बदलती और विस्थापन बल की दिशा में होता है, तब तक **बक्से पर किया गया कार्य वही रहता है। यही सच है चाहे** चित्र 9.2 का **बक्सा उत्तर से दक्षिण की ओर चले या पूर्व से पश्चिम की ओर या किसी और दिशा में सरल रैखिक गति करे। किया गया कार्य अदिश राशि है** क्योंकि वह दिशा पर निर्भर नहीं करती। **किए गए कार्य की SI इकाई जूल** (J) है। यह अंग्रेज़ भौतिकीविद् जेम्स जूल (1818 – 1889) के नाम पर रखी गई है।

चित्र 9.2: बक्से पर लग रहे बल $\vec{F}$ द्वारा किया गया कार्य क्या है? दिया है कि बल की दिशा में बक्से का विस्थापन $\vec{d}$ है।

चित्र 9.3: किसी पिंड पर किया गया कार्य शून्य होता है यदि उसका विस्थापन शून्य हो।

समीकरण 9.1 से आप देख सकते हैं कि यदि **पिंड का विस्थापन शून्य** हो तो **उस पर किया गया कार्य भी शून्य होता है** भले ही पिंड पर कितना भी बल लग रहा हो। अतः, जब आप किसी भारी अलमारी को हिलाने के लिए बहुत अधिक बल लगाते हैं पर उसे विस्थापित नहीं कर पाते तो इस परिभाषा के अनुसार आप कोई कार्य नहीं कर रहे होते (चित्र 9.3)।

अब आइए, हम ऐसी स्थिति का उदाहरण लें जिसमें अचर बल और विस्थापन एक ही दिशा में नहीं हैं। चित्र 9.4 में बक्से पर लग रहे बल और बक्से के विस्थापन के बीच का कोण θ है। ऐसी स्थितियों में कार्य की परिभाषा में **विस्थापन के अनुदिश बल का घटक** लिया जाता है। चित्र 9.4 से आप देख सकते हैं कि इसका मान $F\cos\theta$ है। ध्यान दें कि अभी तक की स्थितियों में बल अचर है। अतः, हम **अचर बल द्वारा किए गए कार्य** की निम्नलिखित परिभाषा दे सकते हैं :



चित्र 9.4: पिंड पर किया गया कार्य, जब बल और विस्थापन के बीच का कोण परिमित हो।

अचर बल द्वारा किया गया कार्य

परिभाषा से **यदि किसी पिंड पर लग रहे अचर बल $\vec{F}$ के कारण उसका विस्थापन $\vec{d}$ होता है तो उस पर किया गया कार्य होता है**

$$W = F\,d \qquad \text{जब } \vec{F},\ \vec{d} \text{ के अनुदिश हो} \qquad (9.2\text{क})$$

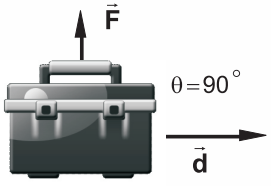
$$W = (F\cos\theta)\,d \qquad \text{जब } \vec{F} \text{ और } \vec{d} \text{ के बीच का कोण } \theta \text{ हो} \qquad (9.2\text{ख})$$

इकाई 1 से अदिश गुणनफल की परिभाषा से, हम किए गए कार्य को बल और विस्थापन के अदिश गुणनफल के रूप में लिख सकते हैं :

$$W = \vec{F}.\vec{d} \qquad (9.3)$$

ध्यान दें

ध्यान दें कि समीकरणों 9.2क और ख में F **नेट बल** का परिमाण है। अतः, यदि पिंड पर अनेक बल लग रहे हों तो किया गया कार्य परिणामी बल के कारण होता है। चूंकि कार्य एक अदिश राशि है, इसे हम प्रत्येक बल द्वारा किये गए कार्य का बीजगणितीय योग लेकर प्राप्त कर सकते हैं। हमें हर बल के लिए कोण θ का ध्यान रखना पड़ेगा।



चित्र 9.5: जब बल पिंड के विस्थापन के लंबवत् होता है तब उस पर बल द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है।

जब बल और विस्थापन **एक ही दिशा** में होते हैं तो $\vec{F}$ और $\vec{d}$ के बीच का कोण शून्य ($\theta = 0°$) होता है। तब किया गया कार्य अधिकतम होता है (चित्र 9.2)। जब $\vec{F}$ और $\vec{d}$ एक ही दिशा में नहीं होते और उनके बीच का कोण बढ़ता है तब उसी बल और विस्थापन के लिए किया गया कार्य घटता है (चित्र 9.4)। जब बल $\vec{F}$ विस्थापन $\vec{d}$ के लंबवत् होता है तब किया गया कार्य शून्य होता है (चित्र 9.5)। साथ ही, ध्यान रखें कि **किया गया कार्य अदिश राशि है और वह प्रेक्षक के निर्देश तंत्र पर निर्भर नहीं करता।**

आइए, अब हम अचर बल द्वारा किए गए कार्य की गणना का उदाहरण लें।

उदाहरण *9.1* : अचर बल द्वारा किया गया कार्य

मान लें कि चित्र 9.4 में बक्से को 20N परिमाण वाले बल से एक डोरी द्वारा खींचा जा रहा है जिसका क्षैतिज दिशा से कोण $\theta = 45°$ है। यदि बक्से का विस्थापन क्षैतिज दिशा में 10m हो तो उस पर किया गया कार्य परिकलित करें।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि विस्थापन के **अनुदिश** बल के घटक द्वारा किया गया कार्य परिकलित किया जाए क्योंकि बल और विस्थापन के बीच का कोण 45° है। अतः, हम समीकरण 9.2ख का प्रयोग करते हैं।

बल द्वारा किया गया कार्य है :

$$W = (F\cos\theta) \times d = 20\,\text{N} \times \cos 45° \times 10\,\text{m} = 1.4 \times 10^2\,\text{J}$$

भौतिकी में कार्य तभी किया जाता है जब एक परिमित बल के आरोपित होने से पिंड का परिमित विस्थापन होता है और विस्थापन की दिशा में बल का एक परिमित घटक होता है।

अब आप एक बोध प्रश्न करें।

चित्र 9.6: गुरुत्व बल के अधीन गिर रहा पैराशूटधारी।

बोध प्रश्न 1 – किया गया कार्य

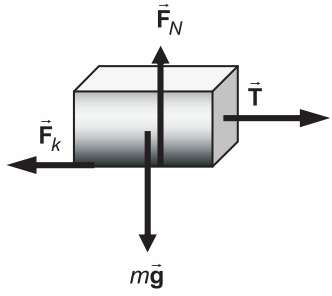
द्रव्यमान 60 kg का एक पैराशूटधारी एक हवाई जहाज़ से ऊर्ध्वाधरतः नीचे की ओर गिरता है और 500 m की दूरी तय करता है (चित्र 9.6)। उसके गिरने के दौरान उस पर गुरुत्व बल द्वारा किया गया कार्य क्या है? $g = 10\ \text{ms}^{-2}$ लें।

आपने देखा कि विस्थापन की दिशा के लंबवत् दिशा में लग रहे बल द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है। इससे हमें कार्य-रहित बल की अवधारणा मिलती है।

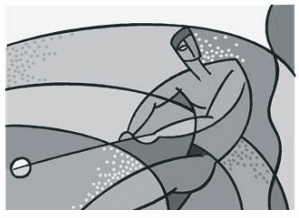
9.2.1 कार्य-रहित बल

समीकरण 9.2ख से आप देख सकते हैं कि बल का वह घटक ही पिंड पर कार्य करता है जो विस्थापन की दिशा के **अनुदिश** होता है। **विस्थापन की दिशा के लंबवत् बल का घटक पिंड पर कोई कार्य नहीं करता।** और यदि बल ही पिंड के विस्थापन की लंबवत् दिशा में (यानी 90° के कोण पर) लग रहा हो तो भी वह पिंड पर कोई कार्य नहीं करता। ऐसे बल को **कार्य-रहित बल** कहते हैं।

चित्र 9.7 में हमने कार्य-रहित बल के कुछ उदाहरण दिखाए हैं। चित्र 9.7क में, एक बक्से को रस्सी द्वारा फ़र्श पर क्षैतिजतः खींचा जा रहा है। बक्से पर गुरुत्व बल ($= m\vec{g}$) और अभिलंब बल ($\vec{F}_N$) द्वारा किया गया कार्य शून्य है क्योंकि बक्से का विस्थापन इन दोनों बलों के लंबवत् है। बक्से पर रस्सी द्वारा लगाया गया तनाव बल ($\vec{T}$) और बक्से की गति की विपरीत दिशा में लग रहा घर्षण बल ($\vec{F}_k$) ही उस पर कार्य करते हैं। जब रस्सी से बंधी कोई गेंद एकसमान वर्तुल गति करती है (चित्र 9.7ख), तब रस्सी में तनाव द्वारा गेंद पर किया गया कार्य शून्य होता है क्योंकि **बल का गति की दिशा में कोई घटक नहीं होता।**



(क)



(ख)

चित्र 9.7: कार्य-रहित बल के उदाहरण : क) $\vec{F}_N$ और $m\vec{g}$ कार्य-रहित बल हैं क्योंकि वे पिंडों के विस्थापन की दिशा के लंबवत् हैं; ख) रस्सी में तनाव द्वारा गेंद पर किया गया कार्य गेंद की एकसमान वर्तुल गति के लिए शून्य होता है क्योंकि गेंद की सब स्थितियों के लिए उसका विस्थापन तनाव बल के लंबवत् होता है।

अब आप बोध प्रश्न 2 हल करके अपनी समझ को परखें।

बोध प्रश्न 2 – किया गया कार्य

कारण देते हुए बताएं कि निम्न स्थितियों में कार्य किया जा रहा है कि नहीं :

क) एक बस सड़क पर अचर वेग से गतिमान है।

ख) एक विद्यार्थी एक जगह से दूसरी जगह तक किताबें ले जा रहा है। क्या किताबों पर विद्यार्थी द्वारा कार्य किया जा रहा है?

ग) एक बक्से को फ़र्श पर परिमित त्वरण से खींचा जाता है। क्या बक्से पर कार्य किया जा रहा है? क्या फ़र्श पर कार्य किया जा रहा है?

घ) एक बच्ची एक भारी अलमारी को धक्का देती है पर उसे 1 cm भी नहीं हिला पाती। क्या अलमारी पर कार्य किया जा रहा है?

च) एक डैस्क को 100 N के बल से एक रस्सी द्वारा 1.0 m की दूरी तक विस्थापित किया जाता है। यदि बल और विस्थापन के बीच के कोण क्रमशः 0°, 90° और 60° हों तो डैस्क पर किया गया कार्य क्या होगा?

बोध प्रश्न 2 करने पर आपको समझ आ गया होगा कि

किसी पिंड पर कार्य केवल तभी किया जाता है जब

1. उस पर **आरोपित बल शून्य नहीं होता**,
2. उसका विस्थापन **परिमित** होता है, और
3. **बल और विस्थापन एक-दूसरे के लंबवत् नहीं होते।**

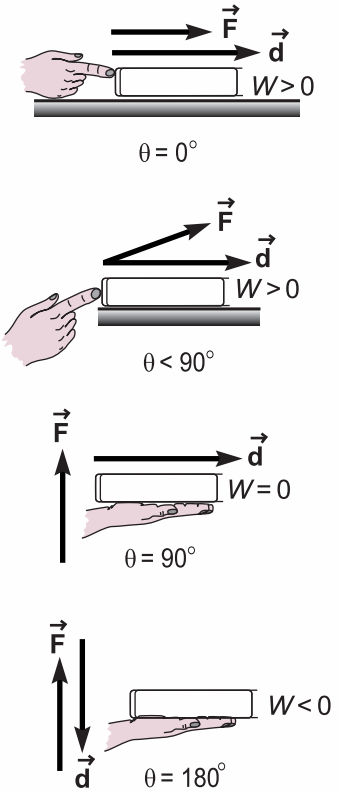
किया गया कार्य धनात्मक भी हो सकता है और ऋणात्मक भी। आइए, इस बात को कुछ विस्तार से समझें।

9.2.2 धनात्मक और ऋणात्मक कार्य

जब बल का घटक विस्थापन के अनुदिश होता है तब **किया गया कार्य धनात्मक होता है** (चित्र 9.8)। आप देख सकते हैं कि यह परिणाम समीकरण 9.2ख से मिलता है। चित्र 9.4 पर आधारित उदाहरण 9.1 में बल, विस्थापन की दिशा के **अनुदिश नहीं** लग रहा है और कोण θ का मान 0° और 90° के बीच में है यानी $0° \leq \theta < 90°$ ।

ध्यान दें

जब एक पिंड किसी दूसरे पिंड पर ऋणात्मक कार्य करता है तो वह दूसरा पिंड उतना ही **धनात्मक** कार्य पहले पिंड पर करता है।



चित्र 9.8 : धनात्मक, शून्य और ऋणात्मक कार्य।

चित्र 9.9 : खिलाड़ी द्वारा भारों को ऊपर उठाने में किया गया कार्य धनात्मक होता है और भारों को नीचे ले जाने में किया गया कार्य ऋणात्मक होता है।

ध्यान दें कि सभी आंकिक सवालों में हमने सार्थक अंकों के नियमों का पालन किया है। ये नियम 'यांत्रिकी प्रयोगशाला' नामक पाठ्यक्रम BPHCL-132 में दिए गए हैं।

कभी न भूलें

समीकरण 9.2ख से बल $\vec{F}$ द्वारा किया गया कार्य धनात्मक है। ऐसी स्थिति में हम कहते हैं कि बल **द्वारा पिंड पर कार्य किया गया है**। अब मान लें कि कण के विस्थापन की दिशा के **विपरीत दिशा** में बल का परिमित घटक है। इसके उदाहरण हैं गुरुत्व बल के विपरीत दिशा में किसी पिंड को ऊपर उछालने में उस पिंड की गति या किसी प्रक्षेप्य के गिरने से पहले की गति। ऐसी स्थितियों में **बल द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक होता है** और कोण θ का मान $90°$ और $180°$ के बीच का होता है यानी $90° < \theta \leq 180°$ (चित्र 9.8)। समीकरण 9.2ख से बल द्वारा पिंड पर किया गया कार्य ऋणात्मक है। हम कहते हैं कि **पिंड द्वारा कार्य किया जा रहा है**।

उदाहरण 9.2 को पढ़कर आप यह बात बेहतर समझ पाएंगे।

उदाहरण *9.2* : धनात्मक और ऋणात्मक कार्य

एक खिलाड़ी द्रव्यमान 70 kg के भार को अचर वेग से अपने कंधों से 0.50 m की ऊंचाई तक ले जाता है और उन्हें उतनी ही ऊंचाई से नीचे लाता है (चित्र 9.9)। खिलाड़ी द्वारा भारों को उठाने और नीचे ले आने में किये गए कार्य की गणना करें। $g = 10\,\text{ms}^{-2}$ लें।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि खिलाड़ी द्वारा भारों पर आरोपित बल की गणना की जाए और फिर समीकरण 9.2ख को लागू किया जाए। साथ ही बल और विस्थापन की दिशाओं का भी ध्यान रखा जाए।

चूंकि भार अचर वेग से गतिमान हैं, अतः, वे साम्यावस्था में हैं। अतः, खिलाड़ी द्वारा भारों पर लगाया गया बल उनके भार की विपरीत दिशा में है। अतः, $F = mg = 700\,\text{N}$। जब भारों को ऊपर की ओर ले जाया जाता है तो आरोपित बल विस्थापन की दिशा के अनुदिश होता है। अतः, किया गया कार्य धनात्मक है :

$$W = (F\cos\theta)d = 700\text{N} \times (\cos 0°) \times 0.50\,\text{m} = 3.5 \times 10^2\,\text{J}$$

जब भारों को नीचे ले जाया जाता है तो खिलाड़ी द्वारा लगाया गया बल ऊपर की दिशा में होता है लेकिन अब वह भारों के विस्थापन की दिशा के विपरीत होता है। अतः, किया गया कार्य है :

$$W = (F\cos\theta)d = 700\text{N} \times (\cos 180°) \times 0.50\,\text{m} = -\,3.5 \times 10^2\,\text{J}$$

चूंकि $\cos 180° = -1$। अतः, खिलाड़ी द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक है यानी उसके द्वारा उठाए गए भार उस पर धनात्मक कार्य करते हैं।

आइए, अभी तक की चर्चा को हम सार रूप में पेश करें।

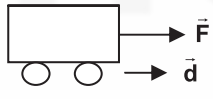
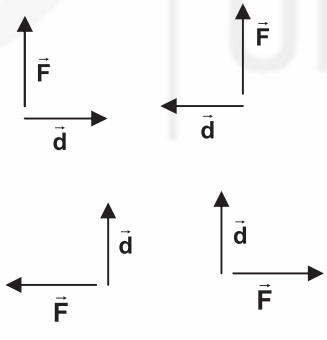
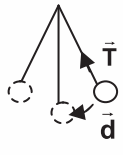
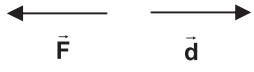
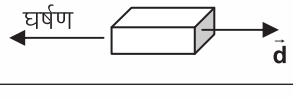
- **$W > 0$ या धनात्मक होता है यदि बल (या बल का एक घटक) विस्थापन की दिशा के अनुदिश होता है (θ का मान शून्य और 90° के बीच में होता है)।**
- **$W < 0$, या ऋणात्मक होता है यदि बल (या बल का एक घटक) विस्थापन की दिशा के विपरीत दिशा में होता है (θ का मान 90° और 180° के बीच का होता है)। $W = 0$ जब $\theta = 0°$।**
- **यदि $W < 0$ हो तो कार्य पिंड द्वारा किया जाता है।**

आम तौर पर, बल $\vec{\mathbf{F}}$ और विस्थापन $\vec{\mathbf{r}}$ के घटकों के पदों में एकविम, द्विविम और त्रिविम गतियों के लिए किए गए कार्य का मान निम्नलिखित होता है :

घटक रूप में किया गया कार्य		
बल	**विस्थापन**	**किया गया कार्य**
$\vec{\mathbf{F}} = F_x\,\hat{\mathbf{i}}$	$\vec{\mathbf{r}} = x\,\hat{\mathbf{i}}$	$W = F_x\,x$ (9.4क)
$\vec{\mathbf{F}} = F_x\,\hat{\mathbf{i}} + F_y\,\hat{\mathbf{j}}$	$\vec{\mathbf{r}} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}}$	$W = F_x\,x + F_y\,y$ (9.4ख)
$\vec{\mathbf{F}} = F_x\,\hat{\mathbf{i}} + F_y\,\hat{\mathbf{j}} + F_z\,\hat{\mathbf{k}}$	$\vec{\mathbf{r}} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}$	$W = F_x\,x + F_y\,y + F_z\,z$ (9.4ग)

बाकी की सभी स्थितियों (उदाहरण के लिए, एकविम विस्थापन और द्विविम बल या द्विविम विस्थापन और त्रिविम बल, आदि) पर समीकरणों 9.4क से ग को लागू करके किए गए कार्य का मान ज्ञात किया जा सकता है। तालिका 9.1 में हम कुछ विशेष स्थितियों के लिए किए गए कार्य के मान दे रहे हैं।

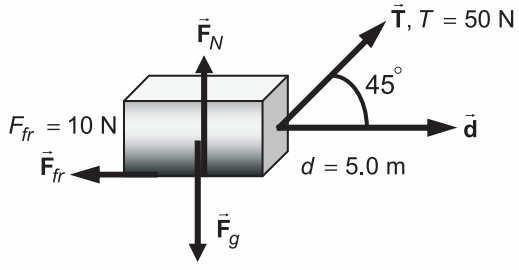
तालिका 9.1 : किए गए कार्य की सामान्य परिभाषा की विशेष स्थितियां।

विवरण	समीकरण	उदाहरण
• यदि विस्थापन और बल एक ही दिशा में हों तब $\theta = 0^\circ$ और $\cos\theta = 1$। ध्यान दें कि इस स्थिति के लिए किया गया कार्य अधिकतम होता है क्योंकि कोण की कोज्या का मान 1 है।	$W = F\,d\cos 0^\circ = F\,d$	ठेले को क्षैतिजतः खींचना ($\vec{\mathbf{F}}$, $\vec{\mathbf{d}}$ के अनुदिश) 
• यदि विस्थापन की दिशा बल के लंबवत् हो तब $\theta = 90^\circ$ और $\cos\theta = 0$। इस स्थिति में किया गया कार्य शून्य होता है क्योंकि गति की दिशा में बल का घटक शून्य होता है। ऐसे बल को हम '**कार्य-रहित बल**' कहते हैं। अतः, किया गया कार्य शून्य होता है जब i) बल शून्य हो, ii) विस्थापन शून्य हो, iii) बल और विस्थापन एक-दूसरे के लंबवत् हों।	$W = F\,d\cos 90^\circ = 0$ 	जब हम चलते हैं, तो पृथ्वी द्वारा हमारे पैरों पर लगाया गया प्रतिक्रिया बल हमारे विस्थापन के लंबवत् होता है। अतः, प्रतिक्रिया बल एक कार्य-रहित बल है। एक दोलक की डोरी में तनाव बल कार्य-रहित बल है।  ऊर्ध्वाधर बल किसी पिंड को क्षैतिज दिशा में विस्थापित नहीं कर सकते। क्षैतिज बल किसी पिंड को ऊर्ध्वाधर दिशा में विस्थापित नहीं कर सकते। कोई भी बल किसी पिंड को अपने से लंबवत् दिशा में विस्थापित नहीं कर सकता।
• यदि विस्थापन की दिशा बल की दिशा के विपरीत हो तब $\theta = 180^\circ$ और $\cos\theta = -1$। तब किया गया कार्य ऋणात्मक होता है।	$W = F\,d\cos 180^\circ = -F\,d$ 	घर्षण बल या श्यान बल के विपरीत किया गया कार्य। 

अब आप इस अवधारणा पर आधारित एक बोध प्रश्न करें।

बोध प्रश्न 3 – अचर बल द्वारा किया गया कार्य

चित्र 9.10 में दिखाया गया द्रव्यमान 2.0 kg का बक्स दाईं ओर 5.0 m की दूरी से विस्थापित किया जाता है। बक्स पर लग रहे प्रत्येक बल द्वारा किए गए कार्य की गणना करें। बक्स पर किया गया कुल कार्य क्या है?



चित्र 9.10

पता लगाएं कि इनमें से कौन-सा बल ऋणात्मक कार्य करता है और कौन-सा धनात्मक कार्य करता है। इनमें से कौन-सा/से बल कार्य-रहित बल हैं? अपने उत्तर की व्याख्या करें।

आइए, अब हम इस इकाई के प्रारंभिक लक्ष्य पर वापिस चलें और बिना न्यूटन के गति के नियमों को लागू किए हुए किसी पिंड की स्थिति और वेग प्राप्त करने की एक वैकल्पिक विधि खोजें। वस्तुतः हम किसी कण की स्थिति और वेग का संबंध न्यूटन के गति के दूसरे नियम से शुरू करके भी प्राप्त कर सकते हैं। इस संबंध को **कार्य-ऊर्जा प्रमेय** कहा जाता है। अगले भाग में हम इस प्रमेय को अचर बलों के लिए व्युत्पन्न करेंगे। लेकिन उससे पहले हमें कण की **गतिज ऊर्जा** की परिभाषा देनी होगी।

9.3 कार्य-ऊर्जा प्रमेय और गतिज ऊर्जा

अपने चारों ओर हम पिंडों पर कार्य किए जाने के अनेक उदाहरण देखते हैं। एक फुटबाल खिलाड़ी (जैसेकि, रोनाल्डो) विरामावस्था से फुटबाल को उछालता है और सीधा गोल में पहुंचा देता है। एक गाड़ी विरामावस्था से चलती है और किसी बल के अधीन **गतिमान** होती है। बिजली का स्विच दबाने पर पंखा **गति** करने लगता है। आप इस तरह के बलों के कई उदाहरण सोच सकते हैं जो पिंडों पर आरोपित होने पर उन्हें **गति** देते हैं और **उनकी चाल में परिवर्तन** लाते हैं। आइए, प्रारंभ में हम सरल रैखिक गति का उदाहरण लें (जैसेकि, सीधी सड़क पर बस की गति का उदाहरण) ताकि गणित का प्रयोग सरल रहे।

मान लें कि **अचर द्रव्यमान** m वाले एक पिंड पर नेट बल F_{net} आरोपित किया जाता है और वह दूरी d तय करता है। पिंड पर किया गया कार्य $W = F_{net}\, d$ है। यदि पिंड का त्वरण a हो तब न्यूटन के दूसरे नियम से

$$F_{net} = ma \qquad (9.5)$$

अब मान लें कि प्रारंभ में पिंड विरामावस्था में था : ($u = 0$)। अचर त्वरण a के लिए उसकी अंतिम चाल क्या होगी?

अंतिम चाल का मान है $v^2 = 2ad$ या $ad = \frac{v^2}{2}$ ।

$\therefore$ किया गया कार्य = $(ma)\, d = \frac{1}{2} mv^2$

यह तो एक नई खोज है! इस समीकरण में दाईं ओर यह नई राशि $\frac{1}{2}mv^2$ क्या है? इसे हम पिंड की **गतिज ऊर्जा** कहते हैं :

$$\text{K.E.} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (9.6\text{क})$$

ऊर्जा की परिभाषा निम्नलिखित है।

ऊर्जा

ऊर्जा किसी पिंड की कार्य करने की क्षमता होती है। इसका मापन उस कार्य द्वारा किया जाता है जिसे करने की उस पिंड में क्षमता होती है।

याद रखें : ऊर्जा और कार्य भिन्न अवधारणाएं हैं। ऊर्जा किसी पिंड की कार्य करने की क्षमता है। आपने ऊपर दी गई व्युत्पत्ति से यह जाना है कि **जब किसी पिंड पर कार्य किया जाता है तो उसकी ऊर्जा में परिवर्तन होता है। इसका विलोम भी सत्य है। जब किसी पिंड की ऊर्जा में परिवर्तन होता है तो उस पर कार्य किया जाता है। गतिज शब्द हमें गति से प्राप्त होता है।** गतिज ऊर्जा की परिभाषा निम्नलिखित है :

गतिज ऊर्जा

द्रव्यमान m वाले कण की, जिसकी चाल v है, गतिज ऊर्जा होती है :

गतिज ऊर्जा $\text{K.E.} = \frac{1}{2} mv^2$ (9.6क)

गतिज ऊर्जा

किसी पिंड की गतिज ऊर्जा उसकी अपने वेग के कारण कार्य करने की क्षमता होती है। गतिज ऊर्जा की SI इकाई जूल (J) है।

यदि पिंड प्रारंभ में विरामावस्था में नहीं है और चाल u से गतिमान है तब $v^2 = u^2 + 2ad$ । अतः, $ad = \frac{1}{2}(v^2 - u^2)$ और किया गया कार्य है

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2 = \Delta\text{K.E.} \qquad (9.6\text{ख})$$

कार्य-ऊर्जा प्रमेय

जहां ΔK.E. पिंड की गतिज ऊर्जा में **परिवर्तन** है। इस तरह के सरल गणित द्वारा हमने जाना है कि किसी बल द्वारा किया गया कार्य पिंड की चाल में u से v तक परिवर्तन कर देता है। साथ ही, यह उसकी प्रारंभिक और अंतिम चालों पर निर्भर करता है। इस तरह, हमने एक महत्त्वपूर्ण परिणाम की खोज की है जिसे **कार्य-ऊर्जा प्रमेय** कहा जाता है। समीकरण 9.6ख के बाईं ओर दिया गया कार्य दो पदों का अंतर है। ये

दोनों पद इस रूप के हैं : $\frac{1}{2}$(द्रव्य मान).(चाल)^2 । अभी आपने जाना है कि यह राशि $\frac{1}{2}$(द्रव्य मान).(चाल)^2 द्रव्यमान m के कण की जो चाल v से चल रहा है, **गतिज ऊर्जा** है। इस राशि का स्वरूप एक ही रहता है चाहे गति सरल रैखिक हो या समतल में या समष्टि में। क्या आपने ध्यान दिया कि गतिज ऊर्जा की इकाई कार्य की इकाई जैसी ही है? यह कार्य की ही तरह एक अदिश राशि है। इस परिणाम पर आपको कोई अचरज नहीं होना चाहिए क्योंकि ये दोनों राशियां कार्य-ऊर्जा प्रमेय द्वारा एक-दूसरे से संबंधित हैं। आइए, अब इस प्रमेय का कथन दें।

कार्य-ऊर्जा प्रमेय

द्रव्यमान m वाले कण पर नेट बाह्य बल द्वारा किया गया कार्य उस कण की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन के बराबर होता है :

$$W = (\text{K.E.})_f - (\text{K.E.})_i = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 \qquad (9.7)$$

यहां W द्रव्यमान m वाले कण पर बाह्य बल द्वारा किया गया कार्य है।

$(\text{K.E.})_f$ कण की अंतिम गतिज ऊर्जा है, $(\text{K.E.})_i$ कण की प्रारंभिक गतिज ऊर्जा है, v_f कण की अंतिम चाल है और v_i कण की प्रारंभिक चाल है।

कार्य-ऊर्जा प्रमेय हमें क्या बताती है? यह हमें बताती है कि जब एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक गतिमान किसी कण पर एक नेट बाह्य बल कार्य करता है तब उसकी गतिज ऊर्जा बदल जाती है। **उस बल द्वारा कण पर किए गए कार्य का मान सदैव उसकी गतिज ऊर्जा में परिवर्तन के बराबर होता है**। यहां आपको यह भी समझना चाहिए कि **कार्य-ऊर्जा प्रमेय <u>क्या नहीं</u> है**। **समीकरण 9.7** हमें न्यूटन के दूसरे नियम से मिला है। **अतः, यह अपने-आप में कोई नया नियम नहीं है। इसीलिए इसे हम प्रमेय कहते हैं**।

इस प्रमेय से हमें केवल कार्य और गतिज ऊर्जा के बीच एक संबंध मिलता है जिसकी व्युत्पत्ति न्यूटन के गति के दूसरे नियम से की गई है। आपको कार्य-ऊर्जा प्रमेय की **<u>सीमाएं</u>** भी समझनी चाहिए। इसमें कार्य और गतिज ऊर्जा आते हैं जो **अदिश** राशियां हैं, सदिश राशियां नहीं। अतः, कार्य-ऊर्जा प्रमेय हमें यह नहीं बता सकती कि बल आरोपित होने पर कोई पिंड उस विशेष प्रकार की गति **क्यों** करता है। यह व्याख्या हमें आरोपित नेट बाह्य बल और परिणामी गति के विश्लेषण से ही मिल सकती है जिनमें **सदिश** राशियां आती हैं।

ध्यान दें

जब नेट बाह्य बल $\vec{F}$ गति की दिशा के अनुदिश होता है तब किया गया कार्य धनात्मक होता है और पिंड की गतिज ऊर्जा **बढ़** जाती है। जब बल गति की दिशा के विपरीत होता है तब किया गया कार्य ऋणात्मक होता है और गतिज ऊर्जा **घट** जाती है। जब बल गति की दिशा के लंबवत् होता है तब किया गया कार्य शून्य होता है और गतिज ऊर्जा **में कोई परिवर्तन नहीं होता। जब पिंड की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन नहीं होता, तब नेट बल द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है।**

कार्य-ऊर्जा प्रमेय केवल ऊर्जा का लेखा-जोखा रखने की अवधारणा है। क्या कभी लेखाकार यह समझा पाता है कि किसी व्यवसाय में लाभ या हानि **क्यों** होती है? नहीं, वह केवल यह बता सकता है कि कितने धन का व्यय किस चीज़ पर किया गया। केवल व्यवसाय का मालिक ही बता सकता है कि धन का व्यय उस तरह **क्यों** किया गया है। ठीक इसी तरह कार्य-ऊर्जा प्रमेय हमें केवल इतना बताती है कि जब किसी पिंड की चाल बदलती है तो कितना कार्य किया जाता है या जब पिंड पर कार्य किया जाता है तो उसकी चाल में कितना परिवर्तन होता है।

कार्य-ऊर्जा प्रमेय एक बहुत शक्तिशाली विधि है जिससे हम कण की चाल और उसकी स्थिति में संबंध स्थापित कर सकते हैं भले ही कण की गति कितनी ही जटिल क्यों न हो। इस तरह, गति से संबंधित अनेक समस्याओं को हल करने में कार्य-ऊर्जा प्रमेय बहुत उपयोगी साबित होती है। जैसाकि आप अगले भाग में जानेंगे, समीकरण 9.7 द्वारा दी गई कार्य-ऊर्जा प्रमेय का स्वरूप सभी प्रकार की (एकविम, द्विविम या त्रिविम) गतियों के लिए समान रहता है। यह प्रमेय सभी प्रकार के बलों पर लागू होती है चाहे वे अचर बल हों या कण की स्थिति के साथ-साथ बदलते हों। यह अचर द्रव्यमान और रॉकेट जैसे परिवर्तनशील द्रव्यमान वाले निकायों पर भी लागू होती है। अब आप कार्य-ऊर्जा प्रमेय के कुछ अनुप्रयोग समझें और बिना न्यूटन के दूसरे नियम को लागू किए हुए गतिमान कणों की स्थितियां और वेग निर्धारित करना सीखें।

उदाहरण 9.3 : कार्य-ऊर्जा प्रमेय

द्रव्यमान 200 kg का एक अंतरिक्ष यान अंतरिक्ष में $300\ \text{ms}^{-1}$ की चाल से गतिमान है। उस पर केवल इंजन का प्रणोद बल ही आरोपित होता है जिसका परिमाण 0.60 N है। यह बल अंतरिक्ष यान को एक सरल रेखा में अपनी दिशा में 3000 km की दूरी से विस्थापित करता है (चित्र 9.11)। अंतरिक्ष यान की अंतिम चाल क्या है, यदि दिया हो कि उसका द्रव्यमान अचर रहता है?

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि कार्य-ऊर्जा प्रमेय लागू करके अंतरिक्ष यान की अंतिम चाल प्राप्त की जाए।

हम जानते हैं	$m = 200\ \text{kg},\ v_i = 300\ \text{ms}^{-1},\ F = 0.60\ \text{N},\ s = 3000\ \text{km}$
हमें पता करना है	$v_f = ?$

दिया है कि आरोपित बल और विस्थापन एक ही दिशा में हैं। अतः, $W = F\,d$ और कार्य-ऊर्जा प्रमेय (समीकरण 9.7) को लागू करके हमें मिलता है :

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_i^2 + (F)\,(s)$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}(200\,\text{kg})\times(300\,\text{ms}^{-1})^2 + (0.60\,\text{N})\times(3.0\times10^6\,\text{m}) = 10.8\times10^6\,\text{J}$$

$$\therefore\ v_f = 328.6\ \text{ms}^{-1} \approx 3.3\times10^2\,\text{ms}^{-1}\ \text{(दो सार्थक अंकों तक)}$$

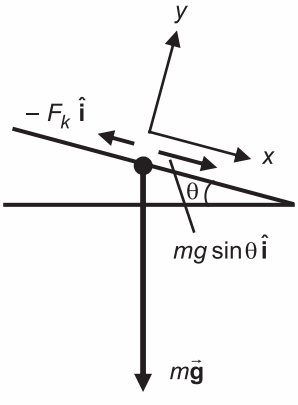
चित्र 9.11: कार्य-ऊर्जा प्रमेय लागू करके हम अंतरिक्ष में गतिमान अंतरिक्ष यान की चाल निर्धारित कर सकते हैं।

उदाहरण 9.3 में, हमें पिंड की स्थिति मालूम थी और बल, विस्थापन के अनुदिश था। अब हम एक उदाहरण लेंगे जिसमें बल विस्थापन की दिशा में नहीं है।

उदाहरण 9.4 : कार्य-ऊर्जा प्रमेय

द्रव्यमान 30 kg की एक बच्ची 15° की अचर प्रवणता वाले ढलान के ऊपरी सिरे से नीचे की ओर स्केटिंग करती है (चित्र 9.12क)। बच्ची की चाल ढलान के निचले सिरे तक पहुंचने में $1.5\ \text{ms}^{-1}$ से बढ़कर $3.0\ \text{ms}^{-1}$ हो जाती है। मान लें कि उसकी गति का विरोध करने वाले गतिक घर्षण बल का परिमाण 50 N है। ढलान की लंबाई की गणना करें। $g = 10\,\text{ms}^{-2}$ लें।

(क)



(ख)

चित्र 9.12: **क) चाल दी हुई होने पर कार्य-ऊर्जा प्रमेय का प्रयोग करके दूरी प्राप्त करना; ख) इस समस्या के लिए बल-निर्देशक आरेख।**

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि कार्य-ऊर्जा प्रमेय का उपयोग करके बच्ची द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात की जाए (जिसका मान ढलान की लंबाई के बराबर है)।

हम जानते हैं	$m = 30\ \text{kg}$, $v_i = 1.5\ \text{ms}^{-1}$, $v_f = 3.0\ \text{ms}^{-1}$, $F_k = 50\ \text{N}$, $\theta = 15^\circ$
हमें पता करना है	$d = ?$

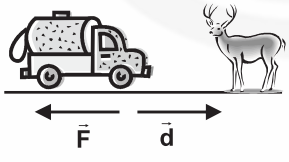
इस स्थिति के लिए $W = F_{net}\,d$, जहां F_{net} बच्ची के विस्थापन के अनुदिश नेट बाह्य बल का घटक है (चित्र 9.12ख)। F_{net} का मान है :

$$F_{net} = mg\ \sin 15^\circ - F_k = (300 \times 0.259 - 50)\ \text{N} = 27.7\ \text{N}$$

कार्य-ऊर्जा प्रमेय से : $W = F_{net}\,d = \frac{m}{2}(v_f^2 - v_i^2)$

$$\therefore\ d = \frac{m}{2F_{net}}(v_f^2 - v_i^2) = 3.67\ \text{m} \approx 3.7\ \text{m}\quad \text{(दो सार्थक अंकों तक)}$$

अब हम कार्य-ऊर्जा प्रमेय को लागू करके अपनी रोज़ाना की ज़िन्दगी से जुड़े एक दिलचस्प सवाल का जवाब ढूंढेंगे। यातायात के नियमों के अनुसार सड़क पर चलने वाले हर वाहन चालक को अपने से ठीक आगे वाली गाड़ी से एक न्यूनतम दूरी रखनी चाहिए और दी हुई गति सीमा के अधीन वाहन को चलाना चाहिए। ऐसा क्यों है? सामान्य बुद्धि से आप यह तर्क दे सकते हैं कि ऐसा इसलिए है कि यदि आगे वाली गाड़ी अचानक रुक जाए तो वाहन चालक की गाड़ी उसे टकरा न जाए। पर क्या कोई ऐसा तरीका है जिससे हम यह निर्धारित कर सकें कि किसी दी हुई गति सीमा के लिए वाहनों के बीच में कितनी न्यूनतम दूरी रहनी चाहिए? इस सवाल का जवाब हमें कार्य-ऊर्जा प्रमेय से बहुत आसानी से मिलता है (उदाहरण 9.5)।



चित्र 9.13: **कार्य-ऊर्जा प्रमेय का उपयोग करके ट्रक के रुकने की दूरी प्राप्त करना।**

उदाहरण 9.5 : कार्य-ऊर्जा प्रमेय

द्रव्यमान m का एक ट्रक चाल v से चल रहा होता है जब उसका चालक सड़क पर अपने ठीक सामने एक हिरण को देखता है। वह तुरंत ब्रेक लगाकर ट्रक पर बल F आरोपित करता है। ट्रक दूरी d चलकर रुक जाता है (चित्र 9.13)। इस दूरी का मान क्या है?

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि कार्य-ऊर्जा प्रमेय लागू करके दूरी का मान ज्ञात किया जाए।

हम जानते हैं	m, v और F
हमें पता करना है	$d = ?$

ध्यान दें: इस स्थिति में बल और विस्थापन एक दूसरे की विपरीत दिशा में हैं और ट्रक का अंतिम वेग शून्य है। अतः, कार्य-ऊर्जा प्रमेय को लागू करके हमें मिलता है :

$$-F\,d = -\frac{1}{2}mv^2 \quad \text{यानी} \quad d = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{F}\right)v^2$$

ध्यान दें कि ब्रेक द्वारा आरोपित समान बल और समान द्रव्यमान के लिए दूरी d, v^2 के समानुपाती होती है। अतः, यदि चाल को दोगुना कर दिया जाए (मान लें कि ट्रक का चालक, $40\ kmh^{-1}$ की निर्धारित गति सीमा के बजाय $80\ kmh^{-1}$ की चाल से गतिमान हो) तब ट्रक के रुकने की दूरी 4 गुनी हो जाएगी। यदि चाल 3 गुनी हो तो ट्रक के रुकने की दूरी 9 गुनी हो जाएगी। यानी ट्रक अपनी मूल रुकने की दूरी d की 9 गुना दूरी तय करने के बाद ही रुक पाएगा। इसी कारण से गति सीमाएं निर्धारित की जाती हैं और इस बात पर ज़ोर दिया जाता है कि सड़क पर किन्हीं भी दो वाहनों के बीच में एक निश्चित न्यूनतम दूरी बनी रहनी चाहिए। क्या आप सड़क पर वाहन चलाते समय इस नियम का पालन करते हैं? **याद रखें** : यदि हम भौतिकी की इस छोटी सी बात का ध्यान रखें तो बहुत सी दुर्घटनाओं को रोक सकते हैं।

वाहन की चाल में थोड़ा सा भी अंतर गंभीर चोट लगने की संभावना में बहुत बड़ा अंतर पैदा कर सकता है। जैसेकि किसी पैदल चलने वाले की $40\ kmh^{-1}$ की चाल से चल रही गाड़ी से टक्कर की तुलना में $50\ kmh^{-1}$ की चाल से चल रही गाड़ी से टक्कर होने पर उसकी मृत्यु की संभावना बढ़ जाती है।

अब आप कार्य-ऊर्जा प्रमेय को एक सरल स्थिति पर लागू करें।

बोध प्रश्न 4 – कार्य-ऊर्जा प्रमेय को लागू करना

द्रव्यमान 1.0 kg का एक बक्सा $12\ ms^{-1}$ के प्रारंभिक वेग से एक खुरदुरे फ़र्श पर फिसलता है। बक्से और फ़र्श के बीच का गतिक घर्षण गुणांक 0.50 है। गतिक घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य प्राप्त करें यदि बक्सा अपनी आरंभिक स्थिति से 10 m की दूरी तय करता है। बक्से की प्रारंभिक और अंतिम गतिज ऊर्जाओं के मान प्राप्त करें। $g = 9.8\ ms^{-2}$ लें।

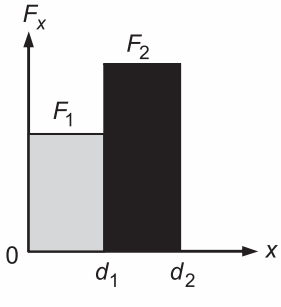
अब आप थोड़ा रुक कर सोचें कि इस इकाई में अभी तक आपने क्या सीखा है। इस इकाई में अभी तक आपने अचर बल द्वारा किए गए कार्य की परिभाषा सीखी है। आपने कार्य-ऊर्जा प्रमेय लागू करके अचर बल के अधीन गति से जुड़े सवालों को हल करना सीखा है। लेकिन आप जानते हैं कि हमारे चारों ओर ऐसे बहुत से **बल** हैं जो **पिंड की स्थिति के साथ बदलते** हैं। इनमें सबसे आम उदाहरण हैं कमानी द्वारा आरोपित बल, गुरुत्वाकर्षण बल और स्थिर वैद्युत बल। हम ऐसे परिवर्तनशील बलों (यानी जो बल अचर नहीं हैं) द्वारा किए गए कार्य की गणना कैसे करते हैं? क्या हम इन पर कार्य-ऊर्जा प्रमेय लागू कर सकते हैं? यही बात आप भाग 9.4 में सीखेंगे।

9.4 परिवर्तनशील बल द्वारा किया गया कार्य

आइए, सबसे पहले एकविम गति का उदाहरण लें : पिंड पर आरोपित बल उसकी x-दिशा में स्थिति पर ही निर्भर करता है। चित्र 9.14 में दिखाई गई एक सरल स्थिति लें। एक अचर बल F_1 पिंड को $x = 0$ से $x = d_1$ तक d_1 की दूरी से विस्थापित करता है : बल F_1 द्वारा किया गया कार्य $W_1 = F_1 d_1$ है। फिर एक और अचर बल F_2 उसे $x = d_1$ से $x = d_2$ तक $(d_2 - d_1)$ की दूरी से विस्थापित करता है। इस बल द्वारा किया गया कार्य $W_2 = F_2 (d_2 - d_1)$ है। कुल किया गया कार्य है :

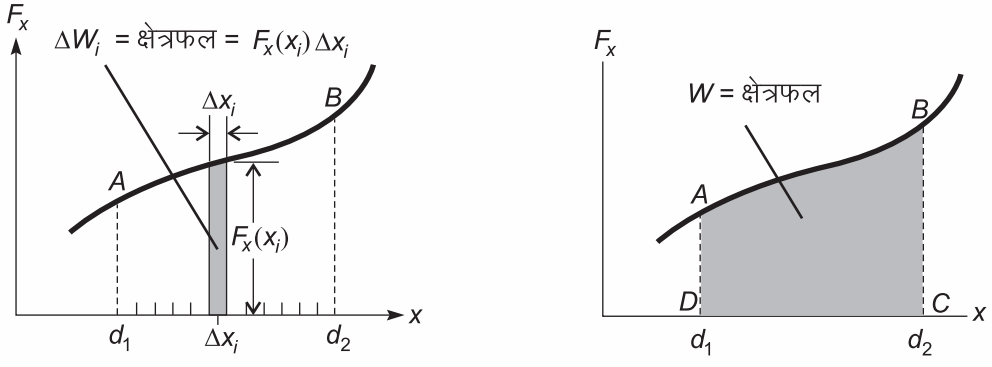
$$W = W_1 + W_2 = F_1 d_1 + F_2 (d_2 - d_1)$$

ध्यान दें कि यह बल बनाम विस्थापन आरेख में **सलेटी और काले आयतों के क्षेत्रफलों का योग है**। आइए, अब हम इस परिणाम को व्यापक स्थिति पर लागू करें।



चित्र 9.14: एक के बाद एक लग रहे दो अचर बलों द्वारा किया गया कार्य।

लेकिन अभी भी हम यही मानकर चलेंगे कि बल केवल x पर निर्भर करता है (x-दिशा में कण की स्थिति पर)। स्कूल की गणित में आपने पढ़ा है कि किसी फलन का समाकल उसके वक्र के नीचे के क्षेत्रफल के बराबर होता है।



चित्र 9.15 : परिवर्तनशील बल द्वारा किया गया कार्य।

आइए, हम बल F_x लें जो x (पिंड के विस्थापन) के साथ लगातार बदल रहा है (देखें चित्र 9.15क)। अब हम पूछते हैं : स्थिति A ($x = d_1$) से स्थिति B($x = d_2$) तक पिंड को ले जाने में किया गया कार्य क्या होगा? इस सवाल का जवाब प्राप्त करने के लिए हम वक्र के नीचे के क्षेत्रफल के रूप में समाकल की अवधारणा का इस्तेमाल करेंगे। चित्र 9.15क में वक्र के नीचे बिंदु A से बिंदु B तक के क्षेत्र को बड़ी संख्या में संकरी **आयताकार पट्टियों में** विभाजित करें। मान लें कि iवीं आयताकार पट्टी की चौड़ाई Δx_i है और उसका मान अत्यल्प है ताकि पिंड के विस्थापन Δx_i के दौरान उस पर लग रहा बल अचर हो। चौड़ाई Δx_i वाली ऐसी iवीं आयताकार पट्टी के लिए लग रहे अचर बल को हम प्रतीक $F_x(x_i)$ द्वारा दिखाते हैं। तब $F_x(x_i)$ द्वारा विस्थापन Δx_i के लिए किया गया कार्य iवीं आयताकार पट्टी के क्षेत्रफल के बराबर होगा यानी उस आयत के क्षेत्रफल के बराबर जिसकी ऊंचाई $F_x(x_i)$ हो और चौड़ाई Δx_i हो :

$$\Delta W_i = F_x(x_i)\Delta x_i \qquad (9.8\text{क})$$

वक्र के नीचे के क्षेत्र को हमने चौड़ाई Δx_i वाली अनेक (माना कि n) पट्टियों में विभाजित किया है। अतः, $x = d_1$ से $x = d_2$ तक किया गया कुल कार्य ऐसे सभी n आयतों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर होगा।

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + \cdots + W_n = \sum_{i=1}^{n} W_i$$

$$= F_x(x_1)\Delta x_1 + F_x(x_2)\Delta x_2 + F_x(x_3)\Delta x_3 + \cdots + F_x(x_n)\Delta x_n$$

या $$W = \sum_{i=1}^{n} F_x(x_i)\Delta x_i \qquad (9.8\text{ख})$$

समीकरण 9.8ख से हमें वक्र के नीचे के क्षेत्रफल का मात्र **अनुमान** मिलता है। इस क्षेत्रफल का सही मान हम चौड़ाई Δx_i के मान को छोटे-से-छोटा **(यानी शून्य की ओर अग्रसर) लेकर या पट्टियों की संख्या को अनंत की ओर लेकर प्राप्त करते हैं**। इस सीमा में $\Delta x_i \to 0$ और $n \to \infty$ होता है और तब समीकरण 9.8ख द्वारा दिया गया योग, **वक्र के नीचे के क्षेत्रफल के सही मान के बराबर हो जाता है** :

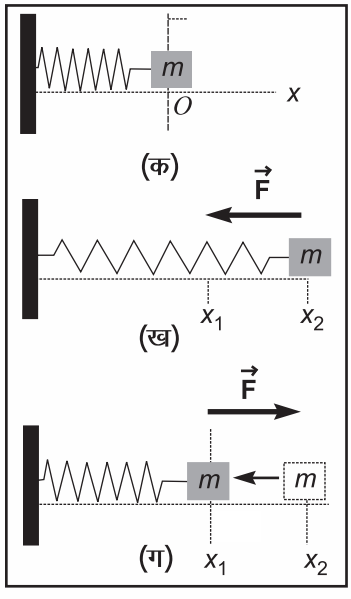
$$W = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} F_x(x_i)\Delta x_i$$

इस योग को हम निम्नलिखित निश्चित समाकल द्वारा निरूपित करते हैं :

$$W = \int_{d_1}^{d_2} F_x \, dx \qquad (9.9)$$

परिवर्तनशील बल द्वारा किया गया कार्य

अतः, एक परिवर्तनशील बल F_x द्वारा किसी पिंड को x-अक्ष के अनुदिश स्थिति A ($x = d_1$) से स्थिति B ($x = d_2$) तक ले जाने में **किया गया कार्य** समीकरण 9.9 द्वारा दिया जाता है। यह समीकरण **विस्थापन के सापेक्ष बल का निश्चित समाकल** है। यह वक्र $F_x(x)$ (चित्र 9.15ख) के नीचे के छायांकित क्षेत्र $ABCD$ का क्षेत्रफल है। आइए, अब हम समीकरण 9.9 को लागू करके परिवर्तनशील एकविम बल द्वारा किया गया कार्य प्राप्त करें।



चित्र 9.16: **एक क) कमानी-द्रव्यमान तंत्र में कमानी बल द्वारा किया गया कार्य; ख) ब्लॉक को बिंदु $x = x_1$ से $x = x_2$ तक खींचा जाता है; ग) ब्लॉक को $x = x_2$ से $x = x_1$ तक दबाया जाता है।**

उदाहरण 9.6 : कमानी बल द्वारा किया गया कार्य

एक कमानी का एक सिरा एक अचल दीवार से जुड़ा है और दूसरा सिरा एक ब्लॉक से जुड़ा है जो क्षैतिज सतह पर मुक्त रूप से फिसल सकता है (चित्र 9.16)। ब्लॉक को x-अक्ष के अनुदिश उसकी आरंभिक स्थिति $x = x_1$ से अंतिम स्थिति $x = x_2$ तक ले जाने में कमानी बल द्वारा किया गया कार्य क्या होगा? जब ब्लॉक $x = x_2$ से $x = x_1$ तक वापिस चलता है तो कमानी बल द्वारा किया गया कार्य क्या होता है?

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि बल एकविम है। इसका मान x-अक्ष के अनुदिश कमानी की स्थिति पर निर्भर करता है। अतः, यह एक परिवर्तनशील बल है। इस बल द्वारा कमानी को $x = x_1$ से $x = x_2$ तक ले जाने में किए गए कार्य की गणना के लिए हम समीकरण 9.9 लागू कर सकते हैं। लेकिन समीकरण 9.9 को लागू करने में हम दो सरलीकरण करेंगे : (1) कमानी द्रव्यमानहीन है और (2) कमानी आदर्श है यानी वह हुक के नियम का पालन करती है।

हम समीकरण 9.9 में समीकरण 6.5ख से कमानी बल का व्यंजक रखते हैं और परिणामी व्यंजक को समाकलित करते हैं (हाशिए में दी गई टिप्पणी पढ़ें) :

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x \, dx = -\int_{x_1}^{x_2} k\,x\,dx = -\frac{1}{2} k\,x^2 \Big|_{x_1}^{x_2} = -\frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2)$$

किए गए कार्य का व्यंजक प्राप्त करने के लिए हमने इस समाकल का उपयोग किया है:

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

ध्यान दें कि चूंकि $x_2 > x_1$, **ब्लॉक अपनी आरंभिक स्थिति के मुकाबले अपनी सामान्य स्थिति से अधिक दूरी पर है**। अतः, $W < 0$ और ब्लॉक <u>द्वारा</u> कमानी <u>पर</u> कार्य किया जाता है। जब कमानी को दबाया जाता है जिससे कि ब्लॉक वापिस $x = x_2$ से $x = x_1$ तक चलता है, तब किया गया कार्य है :

$$W = -\int_{x_2}^{x_1} k\,x\,dx = -\frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2) = \frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2)$$

इस स्थिति में, **ब्लॉक अपनी आरंभिक स्थिति के मुकाबले अपनी सामान्य अवस्था के और अधिक निकट है**। चूंकि $x_2 > x_1$, अतः, $W > 0$ और ब्लॉक <u>पर</u> कमानी <u>द्वारा</u> कार्य किया जाता है।

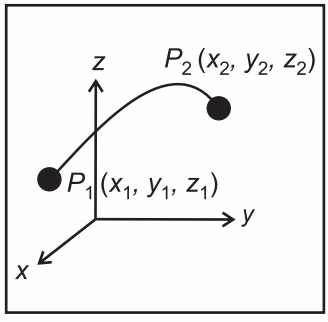
ध्यान दें

कमानी बल **द्वारा** ब्लॉक पर **किया गया कार्य धनात्मक होता है** यदि ब्लॉक सामान्य अवस्था ($x = 0$) के अधिक निकट पहुंचता है। कमानी बल **द्वारा** ब्लॉक पर **किया गया कार्य ऋणात्मक** होता है यदि ब्लॉक सामान्य अवस्था ($x = 0$) से अधिक दूरी पर जाता है। यह **शून्य** होता है यदि ब्लॉक की अंतिम स्थिति और आरंभिक स्थिति एक ही बिंदु ($x = 0$) पर हो।

आइए, अब हम समीकरण 9.9 को समतल में गति और अंतरिक्ष में गति पर लागू करें। हम त्रिविम परिवर्तनशील बल द्वारा किए गए कार्य की सबसे व्यापक स्थिति लेते हैं। मान लें कि बल का व्यंजक है :

$$\vec{\mathbf{F}} = F_x\,\hat{\mathbf{i}} + F_y\,\hat{\mathbf{j}} + F_z\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (9.10\text{क})$$

बल के घटक कण की स्थिति पर निर्भर करते हैं। पर हम गणना को आसान रखने के लिए मान लेते हैं कि :



चित्र 9.17: समष्टि में गतिमान पिंड पर परिवर्तनशील बल द्वारा किया गया कार्य।

- F_x केवल x पर निर्भर करता है, y और z पर नहीं,
- F_y केवल y पर निर्भर करता है, x और z पर नहीं, और
- F_z केवल z पर निर्भर करता है, x और y पर नहीं।

समष्टि में (चित्र 9.17) लघु विस्थापन

$$d\vec{\mathbf{r}} = dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} + dz\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (9.10\text{ख})$$

के लिए, समीकरण 9.10क के परिवर्तनशील त्रिविम बल द्वारा किया गया कार्य होता है :

$$dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \qquad (9.10\text{ग})$$

जब कण बल $\vec{\mathbf{F}}$ के अधीन समष्टि में बिंदु $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ से बिंदु $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$ तक गतिमान होता है, तब $\vec{\mathbf{F}}$ द्वारा किया गया कार्य होता है :

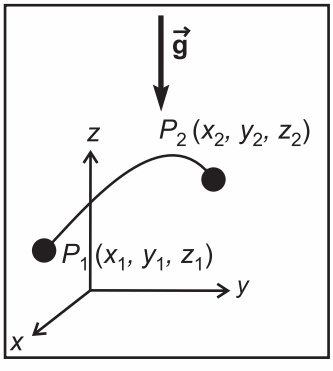
परिवर्तनशील बल द्वारा किया गया कार्य

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y\,dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z\,dz \qquad (9.11)$$

जब बल द्विविम होता है, तब $\vec{\mathbf{F}} = F_x\,\hat{\mathbf{i}} + F_y\,\hat{\mathbf{j}}$ और विस्थापन $d\vec{\mathbf{r}} = dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}}$, xy समतल में होता है। तो जब कण समतल में बिंदु $P_1\,(x_1, y_1)$ से बिंदु $P_2\,(x_2, y_2)$ तक गतिमान होता है, तब $\vec{\mathbf{F}}$ द्वारा किया गया कार्य होता है :

परिवर्तनशील बल द्वारा किया गया कार्य

$$W = \int_{P_1}^{P_2} dW = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y\,dy \qquad (9.12)$$



चित्र 9.18: समष्टि में गतिमान पिंड पर गुरुत्व बल द्वारा किया गया कार्य।

यदि $\vec{\mathbf{F}}$ का एक ही घटक हो, माना कि x-घटक, तब समीकरण 9.12 में y पद शून्य हो जाता है और यह समीकरण, समीकरण 9.9 में समानीत हो जाता है। आइए, हम एक उदाहरण में समीकरण 9.11 को लागू करें।

उदाहरण 9.7: गुरुत्व बल द्वारा किया गया कार्य

द्रव्यमान m का एक कण गुरुत्व बल $\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{g}}$ के अधीन बिंदु $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ से बिंदु $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$ तक विस्थापित होता है (चित्र 9.18)। दोनों ही बिंदु पृथ्वी के निकट स्थित हैं। इस बल द्वारा कण पर किया गया कार्य क्या है?

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि विस्थापन समष्टि में हो रहा है लेकिन बल एकविम है और पृथ्वी की सतह के निकट अचर है।

गुरुत्व बल द्वारा कण पर किये गए कार्य की गणना समीकरण 9.11 से की जा सकती है। ध्यान दें कि निर्देशांक तंत्र का चुनाव ऐसा है कि गुरुत्व बल ऋणात्मक z-अक्ष की दिशा में है। अतः,

$$F_x = 0, \qquad F_y = 0 \qquad \text{और} \qquad F_z = -mg$$

इस व्यंजक को समीकरण 9.11 में रखने पर किये गए कार्य का मान होगा :

$$W = = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y\,dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z\,dz = 0 + 0 + \left(-\int_{z_1}^{z_2} mg\,dz\right)$$

या $W = -mg(z_2 - z_1) = -mg\,\Delta z$, जहां Δz ऊंचाई में परिवर्तन है।

ध्यान दें

गुरुत्व बल द्वारा किया गया कार्य कण की प्रारंभिक और अंतिम स्थितियों में ऊर्ध्वाधर अंतर पर निर्भर करता है। इसका मान कण के पथ पर निर्भर नहीं करता। अतः, कण की गति का विवरण महत्त्वपूर्ण नहीं होता।

आइए, अब हम गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किए गए कार्य की गणना करें। आपने इकाई 7 में पढ़ा है कि किन्हीं दो पिंडों के बीच में लग रहा गुरुत्वाकर्षण बल उनके बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है। यानी यह एक परिवर्तनशील बल है जो पिंड की स्थिति के साथ बदलता है।

उदाहरण 9.8 : गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किया गया कार्य

द्रव्यमान m का एक उपग्रह पृथ्वी की सतह के निकट बिंदु A से पृथ्वी की सतह से $3R_e$ की दूरी पर स्थित बिंदु B तक ले जाया जाता है (चित्र 9.19)। उपग्रह पर गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किया गया कार्य क्या है?

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि गुरुत्वाकर्षण बल एक परिवर्तनशील बल है और चूंकि गति समष्टि में हो रही है इसलिए हम समीकरण 9.11 का प्रयोग करेंगे।

इकाई 7 में, आपने एक-दूसरे से दूरी r पर स्थित किन्हीं दो पिंडों के बीच के गुरुत्वाकर्षण बल के बारे में पढ़ा है। इस स्थिति में गुरुत्वाकर्षण बल का मान है :

$$\vec{\mathbf{F}} = -\frac{GM_e\,m}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

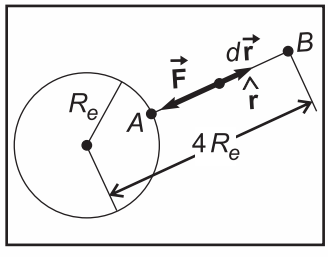
बिंदु $r = R_e$ से बिंदु $r = 3R_e$ तक उपग्रह को ले जाने में गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किया गया कार्य समीकरण 9.11 द्वारा दिया जाता है। इस समस्या का आरेख हमने चित्र 9.19 में दिखाया गया है। आप देख सकते हैं कि $\hat{\mathbf{r}}$, $d\vec{\mathbf{r}}$ के अनुदिश एकक सदिश है यानी $\hat{\mathbf{r}} \,||\, d\vec{\mathbf{r}}$। अतः,

$$\hat{\mathbf{r}}.d\vec{\mathbf{r}} = 1 \times |d\vec{\mathbf{r}}| = dr \quad \text{और} \quad \vec{\mathbf{F}}.d\vec{\mathbf{r}} = -\frac{GM_e\,m}{r^2}(\hat{\mathbf{r}}.d\vec{\mathbf{r}}) = -\frac{GM_e\,m}{r^2}dr$$

अतः, उपग्रह पर गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किया गया कार्य है :

$$W = \int_A^B \vec{\mathbf{F}}.d\vec{\mathbf{r}} = -\int_{r_A}^{r_B} \frac{GM_e\,m}{r^2}dr$$

याद रखें कि हम पृथ्वी के सतह के निकट गुरुत्वाकर्षण बल का मान $m\vec{\mathbf{g}}$ लेते हैं जो किसी एक जगह पर अचर होता है। इसे हम **गुरुत्व बल** कहते हैं।



चित्र 9.19 : गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किया गया कार्य। पैमाने के अनुसार नहीं।

समीकरण

$W = -\frac{3}{4}\frac{GM_e m}{R_e}$, में

$G = 6.67\times10^{-11}\,\text{Nm}^2\,\text{kg}^{-2}$,

$M_e = 5.97\times10^{24}$ kg,

$R_e = 6.37\times10^{6}$ m,

और $m = 100$ kg,

रखने पर हमें मिलता है :

$W = -4.70\times10^{9}$ J

ध्यान दें कि हमने समाकल की सीमा में पृथ्वी के केन्द्र से बिंदु A और बिंदु B की वास्तविक दूरियां रखी हैं। अब हम समाकलन का यह परिणाम $\int \frac{1}{r^2}\,dr = -\frac{1}{r}$ इस्तेमाल करते हैं और लिखते हैं :

$$W = \frac{GM_e m}{r}\Big|_{r_A}^{r_B} = GM_e m\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

इस स्थिति में $r_A = R_e$ और $r_B = 4R_e$ है। अतः, उपग्रह पर किया गया कार्य है :

$$W = GM_e m\left(\frac{1}{4R_e} - \frac{1}{R_e}\right) = -\frac{3}{4}\frac{GM_e m}{R_e}$$

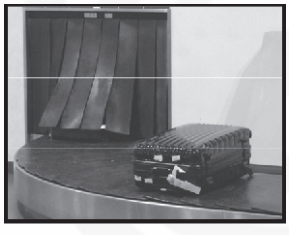
किया गया कार्य ऋणात्मक है क्योंकि बल की दिशा पृथ्वी के केंद्र की ओर है और विस्थापन की दिशा उसके विपरीत है। द्रव्यमान 100 kg वाले एक उपग्रह के लिए उस पर गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किया गया कार्य

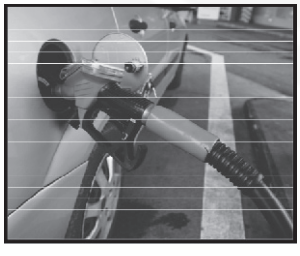
$= -4.70\times10^{9}$ J (हाशिए पर दी गई टिप्पणी पढ़ें)।

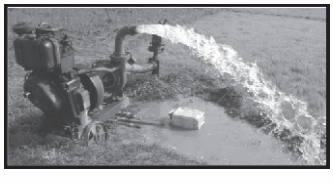
अब आप परिवर्तनशील बल द्वारा किए गए कार्य की गणना करें।

बोध प्रश्न 5 – परिवर्तनशील बल द्वारा किया गया कार्य

सरल रेखा में गतिमान एक अटैची पर परिमाण $F = (2.0x - 5.0x^2)$N का बल लगाया जाता है। स्थिति $x_1 = 1.0$m से स्थिति $x_2 = 3.0$m तक अटैची को ले जाने में बल द्वारा किये गए कार्य की गणना करें।







चित्र 9.20: कुछ उदाहरण जिनमें शक्ति की अवधारणा का उपयोग किया गया है : कन्वेयर बेल्ट, पेट्रोल और पानी को पम्प करना ।

इस भाग में, अब तक आपने एकविम, द्विविम और त्रिविम परिवर्तनशील बलों द्वारा किए गए कार्य की गणना करना सीखा है। पिछले भाग में आपने **अचर बलों** पर **कार्य-ऊर्जा प्रमेय** को लागू किया था। **ध्यान दें** कि **कार्य-ऊर्जा प्रमेय (समीकरण 9.7) को परिवर्तनशील बलों पर लागू किया जा सकता है**। इसकी व्युत्पत्ति इस पाठ्यक्रम के दायरे से बाहर है। इस इकाई के अंत में, हम **शक्ति** की अवधारणा पर विचार करेंगे, जो किए गए कार्य से संबंधित है।

9.5 शक्ति

यह अवधारणा क्यों महत्त्वपूर्ण है?

यह उन स्थितियों में महत्त्वपूर्ण होती है जब हम कम से कम समय में कार्य करना चाहते हैं। उदाहरण के लिए, इमारत के निर्माण में ईंटों या अन्य सामग्री को भूमि से किसी ऊंचाई तक जल्दी से जल्दी पहुंचाने में, ऊपर के तलों तक पम्प द्वारा पानी पहुंचाने में, मशीनों द्वारा सामान या व्यक्तियों को एक जगह से दूसरी जगह तक ले जाने में, आदि (चित्र 9.20)। तब हम कार्य करने की **दर** की बात करते हैं जिसका संबंध शक्ति से होता है।

शक्ति

किसी बल द्वारा कार्य करने की दर को शक्ति कहते हैं। यदि समयांतराल Δt में बल द्वारा **किया गया कार्य** ΔW हो तो उस समयांतराल में बल द्वारा किए गए कार्य से संबंधित **औसत शक्ति** को हम इस प्रकार परिभाषित करते हैं :

$$\langle P \rangle = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad (9.13)$$

शक्ति

कार्य करने की **दर** को **तात्क्षणिक शक्ति** P कहा जाता है :

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \qquad (9.14)$$

शक्ति की SI इकाई **वॉट** (W) है।

हम शक्ति और अचर या औसत बल के बीच का संबंध इस प्रकार प्राप्त कर सकते हैं :

मान लें कि एक निकाय पर एक अचर या औसत बल $\vec{\mathbf{F}}$ लग रहा है और निकाय का **समयांतराल** Δt में विस्थापन $\Delta \vec{\mathbf{r}}$ है। इस दौरान किया गया कार्य $\vec{\mathbf{F}}.\Delta \vec{\mathbf{r}}$ है और तात्क्षणिक शक्ति यानी बल द्वारा कार्य करने की दर है :

$$P = \frac{dW}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\mathbf{F}}.\Delta \vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \vec{\mathbf{F}}.\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}$$

या $$P = \vec{\mathbf{F}}.\vec{\mathbf{v}} \qquad (9.15)$$

आइए, अब हम शक्ति का मान प्राप्त करने का उदाहरण लें।

उदाहरण 9.9 : औसत और तात्क्षणिक शक्ति

एक अटैची को कन्वेयर बेल्ट द्वारा एक स्थान से दूसरे स्थान तक ले जाने में किया गया कार्य है : $W(t) = ct^2$ । मान लें कि $t_1 = 0\,\text{s}$ से $t_2 = 30\,\text{s}$ तक के समयांतराल में बेल्ट के बल के कारण औसत शक्ति 300 W है। तब क्षण $t = 10\,\text{s}$ पर बेल्ट के कारण तात्क्षणिक शक्ति क्या होगी? मान लें कि बेल्ट घर्षणहीन है।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि समीकरण 9.13 को लागू करके अचर c का मान प्राप्त किया जाए और फिर समीकरण 9.14 को लागू करके तात्क्षणिक शक्ति प्राप्त की जाए।

हम पाते हैं कि $t_1 = 0\,\text{s}$ पर $W_1 = 0$ और $t_2 = 30\,\text{s}$ पर $W_2 = 900c$ ।

समीकरण 9.13 से $\langle P \rangle = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \left(\frac{900c}{30}\right)\text{W} = (30c)\,\text{W} = 300\,\text{W}$

$$\Rightarrow \quad c = 10\ \text{Js}^{-2}$$

समीकरण 9.14 से तात्क्षणिक शक्ति है : $P = \frac{dW}{dt} = 2ct = (20t)\,\text{W}$

$t = 10\,\text{s}$ पर $\quad P = 200\,\text{W} = 2.0 \times 10^2\,\text{W}$

बोध प्रश्न 6 – शक्ति

द्रव्यमान 4000 kg की एक लिफ़्ट अचर चाल से 25.0 s में ऊपर की ओर 200 m की दूरी तय करती है। केबल द्वारा लिफ़्ट पर लग रहा बल किस औसत दर से लिफ़्ट पर कार्य करता है? $g = 9.8 \text{ms}^{-2}$ लें।

आइए, अब हम इस इकाई का सारांश दें।

9.6 सारांश

अवधारणा	विवरण
अचर बल द्वारा किया गया कार्य	■ यदि किसी पिंड पर लग रहे **अचर बल $\vec{F}$** के कारण उसका विस्थापन $\vec{d}$ होता है तो उस पर **किया गया कार्य** होता है : $W = (F \cos\theta) d = \vec{F} . \vec{d}$ **किया गया कार्य प्रेक्षक के निर्देश तंत्र पर निर्भर नहीं करता।** **विस्थापन की दिशा के लंबवत्, बल का घटक पिंड पर कोई कार्य नहीं करता।** यदि बल पिंड के विस्थापन की लंबवत् दिशा में लग रहा हो तो भी वह पिंड पर कोई कार्य नहीं करता। ऐसे बल को **कार्य-रहित बल** कहते हैं। जब **बल (या बल का एक घटक) विस्थापन के अनुदिश** होता है तब **किया गया कार्य धनात्मक होता है।** जब **बल (या बल का एक घटक) विस्थापन की दिशा के विपरीत दिशा में** होता है तब **किया गया कार्य ऋणात्मक होता है** यानी **पिंड द्वारा कार्य किया जाता है।** घटक रूप में $W = F_x x$ (एकविम) $W = F_x x + F_y y$ (द्विविम) $W = F_x x + F_y y + F_z z$ (त्रिविम)
ऊर्जा	■ **ऊर्जा** किसी पिंड की कार्य करने की क्षमता होती है। इसका मापन उस कार्य द्वारा किया जाता है जिसे करने की उस पिंड में क्षमता होती है।
गतिज ऊर्जा	■ द्रव्यमान m वाले कण की, जिसकी चाल v है, **गतिज ऊर्जा** होती है : $\text{K.E.} = \frac{1}{2} mv^2$
परिवर्तनशील बल द्वारा किया गया कार्य	■ किसी पिंड को विस्थापित करने में **परिवर्तनशील** या **चर बल** द्वारा **किया गया कार्य** होता है : $W = \int_{x_1}^{x_2} F_x \, dx$ (एकविम)

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y\,dy \qquad \text{(द्विविम)}$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y\,dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z\,dz \qquad \text{(त्रिविम)}$$

- किसी पिंड को स्थिति $\vec{r}_1\ (= x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$ से स्थिति $\vec{r}_2\ (= x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k})$ तक विस्थापित करने में **गुरुत्व बल** $\vec{F} = m\vec{g}$ द्वारा पिंड पर **किया गया कार्य** होता है :

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}.d\vec{r} = -\,mg(z_2 - z_1)$$

- **कमानी बल** $(\vec{F} = -\,kx\hat{i})$ द्वारा कमानी को x_1 से x_2 तक खींचने में किया गया कार्य :

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} k\,x\,dx = -\,\frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2)$$

- द्रव्यमान M वाले किसी पिंड द्वारा द्रव्यमान m वाले किसी पिंड पर, जिसका विस्थापन $\vec{r}_A$ से $\vec{r}_B$ तक होता है, आरोपित **गुरुत्वाकर्षण बल** द्वारा किया गया कार्य होता है :

$$W = \int_A^B \vec{F}\,.\,d\vec{r} = -\int_{r_A}^{r_B} \frac{GMm}{r^2}\,dr = GMm\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

कार्य-ऊर्जा प्रमेय

- द्रव्यमान m वाले पिंड पर नेट बाह्य बल द्वारा किया गया कार्य उस कण की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन के बराबर होता है :

$$W = (\text{K.E.})_f - (\text{K.E.})_i = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

कार्य-ऊर्जा प्रमेय हमें न्यूटन के दूसरे नियम से मिलती है। **अतः, यह अपने-आप में कोई नया नियम नहीं है।**

शक्ति

- **किसी बल द्वारा कार्य करने की दर को शक्ति कहते हैं।**

$$\langle P \rangle = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad \text{(औसत शक्ति)}$$

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad \text{(तात्क्षणिक शक्ति)}$$

साथ ही $P = \vec{F}.\vec{v}$

9.7 अंत में कुछ प्रश्न

1. एक व्यक्ति लिफ़्ट में गतिमान है और उसके हाथ से एक बैग लटक रहा है। बैग पर उसके हाथ द्वारा आरोपित बल द्वारा कार्य किया जाता है। किए गए कार्य के बारे में निम्नलिखित कथनों में से कौन सा कथन सही है?

   क) किया गया कार्य सदैव धनात्मक होता है चाहे लिफ़्ट ऊपर की ओर जाए या नीचे की ओर।

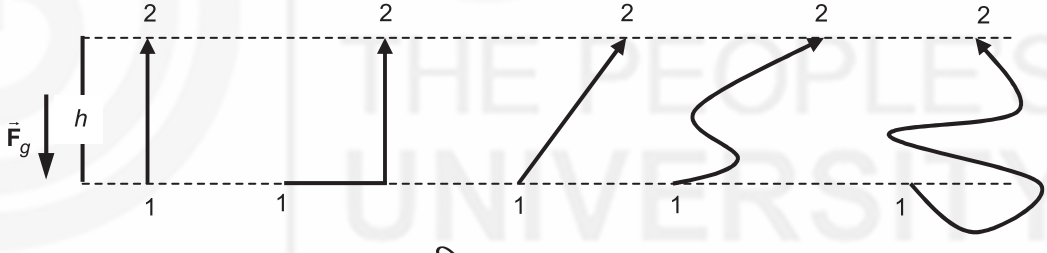
   ख) किया गया कार्य सदैव ऋणात्मक होता है चाहे लिफ़्ट ऊपर की ओर जाए या नीचे की ओर।

   ग) किया गया कार्य धनात्मक होता है जब लिफ़्ट ऊपर की ओर जाती है और ऋणात्मक होता है जब लिफ़्ट नीचे की ओर आती है।

   घ) किया गया कार्य ऋणात्मक होता है जब लिफ़्ट ऊपर की ओर जाती है और धनात्मक होता है जब लिफ़्ट नीचे की ओर आती है।

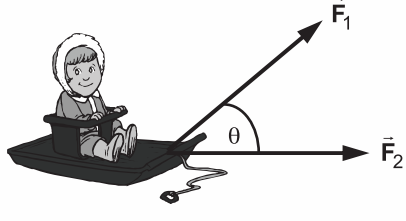
2. एक कण पर जब बल $\vec{\mathbf{F}} = (a\text{N})\hat{\mathbf{i}} + (2.0\text{N})\hat{\mathbf{j}}$ लगता है तो उसका विस्थापन $\vec{\mathbf{d}} = (4.0\text{m})\hat{\mathbf{i}} - (5.0\text{m})\hat{\mathbf{j}}$ होता है। अचर a का मान प्राप्त करें जब किया गया कार्य (क) शून्य हो, (ख) 20 J हो और (ग) – 16 J हो।

3. एक कण बिंदु 1 से बिंदु 2 तक चित्र 9.21 में दिखाए गए पांच पथों के अनुदिश गति करता है। प्रत्येक स्थिति में गुरुत्व बल द्वारा किया गया कार्य क्या है? अपने उत्तर की व्याख्या करें।



चित्र 9.21

4. चित्र 9.22 में दिखाए गए स्लेड पर लग रहे समान परिमाण F वाले दोनों बलों में से कौन-सा बल उस पर अधिक कार्य करता है जब वह दूरी d तय करता है?



चित्र 9.22

5. एक कमानी द्वारा आरोपित एकविम प्रत्यानयन बल $F = -ax - bx^2$ है जहां a और b अचर हैं। एक द्रव्यमान m को बिंदु $x = x_1$ से $x = x_2$ तक ले जाने में कमानी बल द्वारा किए गए कार्य की गणना करें।

6. द्रव्यमान 5000 kg का एक अंतरिक्ष यान अंतरिक्ष में 10000 ms^{-1} की चाल से गतिमान है। उसकी गति की विपरीत दिशा में रॉकेट छोड़कर उसकी चाल को कम किया जाता है। रॉकेट का 2000 km की दूरी पर प्रणोद 45000 N है। अंतरिक्ष यान की अंतिम चाल परिकलित करें।

7. विरामावस्था में स्थित द्रव्यमान 450 g की एक गेंद को जब एक डंडे से मारा जाता है तो वह 40.0 ms^{-1} की चाल से गतिमान होती है। डंडे द्वारा गेंद पर किया गया कार्य क्या है? मान लें कि डंडे द्वारा आरोपित बल गेंद के विस्थापन के समांतर है और गेंद और डंडा 5.00×10^{-3} m की दूरी तक एक-दूसरे से संपर्क में हैं। यदि गेंद के भार को नगण्य माना जाए तो डंडे द्वारा गेंद पर लग रहा औसत बल क्या होगा?

8. विरामावस्था से किसी पिंड को कितनी ऊंचाई से गिराया जाना चाहिए ताकि उसकी गतिज ऊर्जा का मान उस मान के बराबर हो जाए जब वह 36.0 ms^{-1} की चाल से गतिमान होता है? $g = 9.80 ms^{-2}$ लें।

9. द्रव्यमान 5.0 kg के एक ब्लॉक को 1.5 ms^{-1} की अचर चाल से खींचने के लिए आवश्यक शक्ति क्या होगी? घर्षण गुणांक 0.30 है। $g = 9.80 ms^{-2}$ लें।

10. द्रव्यमान 30.0 kg की एक बच्ची एक साइकिल की सवारी कर रही है जिसका द्रव्यमान 15.0 kg है। 1.50 ms^{-1} की अचर चाल बनाए रखने के लिए उसे कितनी शक्ति लगानी होगी जब वह i) समतल भूमि पर चल रही हो, और ii) 5° ढलान वाले नत तल पर चल रही हो? दिया है कि दोनों ही स्थितियों में घर्षण बल 30.0 N है। $g = 10.0 ms^{-2}$ लें।

9.8 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. हम समीकरण 9.2क को लागू करेंगे क्योंकि बल और विस्थापन एक ही दिशा में हैं। गुरुत्व बल का परिमाण mg है और विस्थापन का परिमाण d है।

$$\therefore \quad W = mgd$$

m (kg) और d (m) के आंकिक मान समीकरण पर रखने पर हमें मिलता है :

$$W = 60 kg \times 10 ms^{-2} \times 500 m = 3.0 \times 10^5 J$$

2. क) चूंकि बस सड़क पर अचर वेग से गतिमान है, अतः, उस पर आरोपित बल शून्य है। अतः, बस पर कार्य नहीं किया जा रहा है।

ख) विद्यार्थी द्वारा किताबों पर कार्य नहीं किया जा रहा है क्योंकि विद्यार्थी के सापेक्ष किताबों का विस्थापन शून्य है।

ग) बक्स पर कार्य किया जा रहा है क्योंकि उस पर आरोपित बल और उसका विस्थापन शून्य नहीं है। फ़र्श पर कार्य नहीं किया जा रहा है क्योंकि उसका विस्थापन शून्य है।

घ) नहीं, क्योंकि अलमारी का विस्थापन शून्य है।

च) किए गए कार्य का मान हम समीकरण 9.2ख से प्राप्त करेंगे। यहां $F = 100 N$ और $d = 1.0 m$ ।

$\theta = 0^\circ$ के लिए $W = (100\,\text{N}) \times \cos 0^\circ \times (1.0\,\text{m}) = 100\,\text{J} = 1.0 \times 10^2\,\text{J}$

$\theta = 90^\circ$ के लिए $W = 0$

$\theta = 60^\circ$ के लिए $W = (100\,\text{N}) \times \cos 60^\circ \times (1.0\,\text{m}) = 50\,\text{J}$

3. $\vec{\mathbf{F}}_g$ और $\vec{\mathbf{F}}_N$ द्वारा किया गया कार्य शून्य है क्योंकि इन दोनों बलों की दिशा विस्थापन के लंबवत् है। दोनों बल कार्य-रहित बल हैं। बक्से पर किया गया कुल कार्य बल $\vec{\mathbf{F}}_{fr}$ और बल $\vec{\mathbf{T}}$ द्वारा किए गए कार्य का योग है :

$$W = (T\cos 45^\circ) \times 5.0\,\text{m} + (F_{fr}\cos 180^\circ) \times 5.0\,\text{m}$$

$$= 50\,\text{N} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times 5.0\,\text{m} + 10\,\text{N} \times (-1) \times 5.0\,\text{m} = 126.8\,\text{J} \approx 1.3 \times 10^2\,\text{J}$$

तनाव बल बक्से पर धनात्मक कार्य करता है और घर्षण बल बक्से पर ऋणात्मक कार्य करता है।

4. मान लें कि बक्सा धनात्मक x-दिशा में फिसलता है। गतिक घर्षण बल है : $\vec{\mathbf{F}} = -0.50 \times 1.0\,\text{kg} \times (9.8\,\text{ms}^{-2})\hat{\mathbf{i}} = -(4.9\,\text{N})\hat{\mathbf{i}}$ और विस्थापन है $\vec{\mathbf{d}} = (10\,\text{m})\,\hat{\mathbf{i}}$

घर्षण बल बक्से पर ऋणात्मक कार्य करता है : $W = -49\,\text{J}$

मान लें कि अंतिम वेग v है। समीकरण 9.7 में $v_i = 12\,\text{ms}^{-1}$, $m = 1.0\,\text{kg}$ और $W = -49\,\text{J}$ रखने पर

$$\frac{1}{2} \times (1.0\,\text{kg}) \times v^2 - \frac{1}{2} \times (1.0\,\text{kg}) \times (12\,\text{ms}^{-1})^2 = -49\,\text{J}$$

$$\therefore \quad v = 6.8\,\text{ms}^{-1}$$

5. समीकरण 9.9 में $F = (2.0x - 5.0x^2)\,\text{N}$ रखने पर

$$W = \int_{1.0}^{3.0} (2.0x - 5.0x^2)\,dx\ \text{J} = -35.3\,\text{J} \approx -35\ \text{J}$$

6. मान लें कि लिफ़्ट धनात्मक y-दिशा में गतिमान है। केबल द्वारा लिफ़्ट पर आरोपित बल लिफ़्ट पर आरोपित गुरुत्व बल के बराबर पर विपरीत दिशा में है। अतः, समीकरण 9.15 में $\vec{\mathbf{F}} = (4000\,\text{kg}) \times (9.8\,\text{ms}^{-2})\hat{\mathbf{j}} = (3.92 \times 10^4\,\text{N})\hat{\mathbf{j}}$ और $\vec{\mathbf{v}} = \left(\frac{200\,\text{m}}{25.0\,\text{s}}\right)\hat{\mathbf{j}} = (8.00\,\text{ms}^{-1})\hat{\mathbf{j}}$ रखने पर

$$P_{av} = (3.92 \times 10^4\,\text{N})\hat{\mathbf{j}} \cdot (8.00\,\text{ms}^{-1})\hat{\mathbf{j}} = 31.36 \times 10^4\,\text{W} \approx 3.1 \times 10^5\,\text{W}$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. सही कथन (ग) है। हाथ द्वारा आरोपित बल बैग के भार के बराबर और विपरीत है। जब लिफ़्ट ऊपर की ओर जाती है तब किया गया कार्य धनात्मक होता है क्योंकि बल और विस्थापन एक ही दिशा में हैं। जब लिफ़्ट नीचे की ओर आती है तब किया गया कार्य ऋणात्मक होता है क्योंकि बल और विस्थापन विपरीत दिशा में हैं।

2. क) चूंकि किया गया कार्य शून्य है इसलिए समीकरण 9.2ख से

$$[(a\text{N})\hat{\mathbf{i}} + (2.0\text{N})\hat{\mathbf{j}}] \cdot [(4.0\text{m})\,\hat{\mathbf{i}} - (5.0\text{m})\hat{\mathbf{j}}] = 0$$

या $(4.0a)\text{J} - 10\text{J} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2.5$

ख) इस स्थिति में $(4.0a)\text{J} - 10\text{J} = 20\text{J} \quad \Rightarrow \quad a = 7.5$

ग) इस स्थिति में $(4.0a)\text{J} - 10\text{J} = -16\text{J} \quad \Rightarrow \quad a = -1.5$

3. मान लें कि कण का द्रव्यमान m है। तब, प्रत्येक स्थिति में किया गया कार्य $-mgh$ है क्योंकि प्रत्येक स्थिति में विस्थापन (गुरुत्व बल $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$ की दिशा के विपरीत दिशा में) बराबर है।

4. $\vec{\mathbf{F}}_1$ द्वारा किया गया कार्य है $W_1 = F\,d\cos\theta$ और $\vec{\mathbf{F}}_2$ द्वारा किया गया कार्य है $W_2 = F\,d$ क्योंकि दोनों बलों के परिमाण समान हैं। चूंकि जब θ शून्य न हो तब $F\cos\theta < F$, इसलिए $\vec{\mathbf{F}}_2$ स्लेड पर अधिक कार्य करता है।

5. चूंकि कमानी बल केवल x पर निर्भर करता है, अतः, हम कमानी बल द्वारा किए गए कार्य की गणना के लिए समीकरण 9.9 का उपयोग करेंगे।

$$\therefore\ W = \int_{x_1}^{x_2} (-ax - bx^2)\,dx = -\frac{a}{2}(x_2^2 - x_1^2) - \frac{b}{3}(x_2^3 - x_1^3)$$

6. कार्य-ऊर्जा प्रमेय (समीकरण 9.7) से, प्रणोद द्वारा किया गया कार्य है

$$W = (-45000\text{N})\hat{\mathbf{i}} \cdot (2000\times10^3\,\text{m})\hat{\mathbf{i}} = -9\times10^{10}\,\text{J}$$

जहां $\hat{\mathbf{i}}$ अंतरिक्ष यान की गति की दिशा के अनुदिश एकक सदिश है। किया गया कार्य ऋणात्मक है क्योंकि प्रणोद अंतरिक्ष यान की गति की दिशा के विपरीत है। अंतरिक्ष यान की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन है :

$$(\text{K.E.})_f - (\text{K.E.})_i = \frac{1}{2}\times(5000\text{kg})\times v_f^2 - \frac{1}{2}\times(5000\text{kg})\times(10000\,\text{ms}^{-1})^2$$
$$= (2500\,v_f^2 - 2500\times10^8)\,\text{J}$$

जहां v_f अंतरिक्ष यान की अंतिम चाल है। समीकरण 9.7 से,

$(2500\,v_f^2 - 2500\times10^8)\,\text{J} = -900\times10^8\,\text{J}$। अतः, $v_f = 8000\ \text{ms}^{-1}$

7. समीकरण 9.7 से, किया गया कार्य है :

$$W = \frac{1}{2}\times(450\times10^{-3}\,\text{kg})\times(40.0\,\text{ms}^{-1})^2 - 0 = 360\,\text{J}$$

औसत बल किए गए कार्य की परिभाषा से प्राप्त होता है। किया गया कार्य है $W = F\,d$ क्योंकि $\vec{\mathbf{F}}, \vec{\mathbf{d}}$ के समांतर है।

$$\therefore\ F = \frac{W}{d} = \frac{360\,\text{J}}{0.005\,\text{m}} = 72000\,\text{N} = 7.20\times10^4\,\text{N}$$

8. $36.0\,\text{ms}^{-1}$ की चाल से गतिमान द्रव्यमान m वाले पिंड की गतिज ऊर्जा है

$$K = \frac{1}{2}m\times(36.0\,\text{ms}^{-1})^2 = (648\,m)\,\text{J}$$

मान लें कि पिंड को ऊंचाई h से गिराया जाता है ताकि उसकी गतिज ऊर्जा का मान इस मान के बराबर हो जाए। गुरुत्व बल द्वारा पिंड पर किया गया कार्य है

$$(-mg\hat{\mathbf{j}}).(-h\hat{\mathbf{j}}) = mgh$$

कार्य-ऊर्जा प्रमेय से $mgh = (648\,m)\text{J} \quad \Rightarrow \quad h = \dfrac{648}{9.80}\text{m} = 66.1\text{m}$

9. ब्लॉक पर लग रहा घर्षण बल है $\vec{\mathbf{F}}_K = \mu_K\vec{\mathbf{F}}_N = -\mu_k mg\,\hat{\mathbf{i}}$ । ब्लॉक को अचर चाल से खींचने के लिए, उस पर लग रहा नेट बल शून्य होना चाहिए। चूंकि ब्लॉक पर केवल घर्षण बल लग रहा है, इसलिए उस पर बराबर और विपरीत दिशा में बल लगना चाहिए जिसका मान है :

$$\vec{\mathbf{F}} = \mu_K mg\,\hat{\mathbf{i}}$$

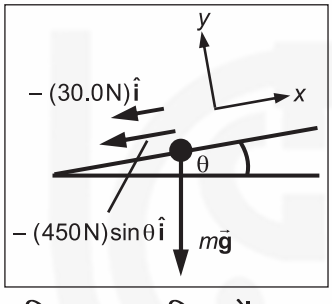
आवश्यक शक्ति है : $P = \vec{\mathbf{F}}.\vec{\mathbf{v}} = (\mu_k mg\,\hat{\mathbf{i}}.v\,\hat{\mathbf{i}})$

$$= (0.30)(5.0\text{kg})(9.8\text{ms}^{-2})(1.5\text{ms}^{-1})) = 22\text{W}$$

10. मान लें कि बच्ची साइकिल की सवारी धनात्मक x-दिशा में कर रही है। दिया है कि $\vec{\mathbf{v}} = 1.50\text{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}}$ ।

i) समतल भूमि पर औसत शक्ति है

$$P = \vec{\mathbf{F}}.\vec{\mathbf{v}} = (30\text{N}\hat{\mathbf{i}}).(1.50\text{ ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}}) = 45.0\,\text{W}$$



चित्र 9.23: चित्र में कोण θ पैमाने के अनुसार नहीं है।

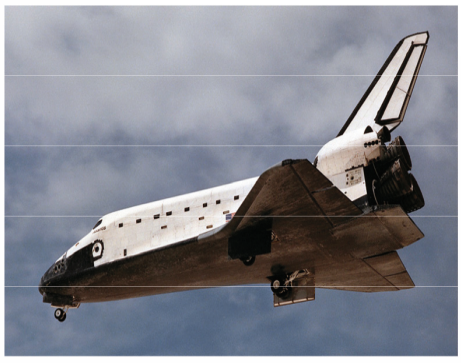
ii) मान लें कि x और y-अक्ष क्रमशः नत तल के अनुदिश और लंबवत् हैं (चित्र 9.23)। अतः, $\vec{\mathbf{v}} = (1.50\text{ms}^{-1})\hat{\mathbf{i}}$ और

$$\vec{\mathbf{F}} = -(450\text{N})\sin 5^\circ\,\hat{\mathbf{i}} - (30.0\text{N})\hat{\mathbf{i}}$$

चूंकि बच्ची को $(-\vec{\mathbf{F}})$ के बराबर बल लगाना है, अतः, आवश्यक शक्ति है

$$P = -\vec{\mathbf{F}}.\vec{\mathbf{v}} = (450\text{N}\times\sin 5^\circ\,\hat{\mathbf{i}} + 30.0\text{N}\,\hat{\mathbf{i}}).(1.50\text{ ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}})$$

$$= (39.2\text{N}\hat{\mathbf{i}} + 30.0\text{N}\,\hat{\mathbf{i}}).(1.50\text{ ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}}) = 103.8\text{ W} \approx 104\text{ W}$$



वायु घर्षण के कारण ऊष्मा के रूप में कितनी ऊर्जा रूपांतरित होती है? यह चित्र (स्रोत : www.nasa.gov) पृथ्वी पर उतरती हुई अंतरिक्ष शटल का है। इस प्रश्न का उत्तर आपको इस इकाई में मिलेगा !

इकाई 10

स्थितिज ऊर्जा और ऊर्जा का संरक्षण

इकाई की रूपरेखा

10.1 परिचय
उद्देश्य
10.2 संरक्षी बल
10.3 स्थितिज ऊर्जा
स्थितिज ऊर्जा और स्थायित्व
10.4 यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण
10.5 ऊर्जा संरक्षण नियम
10.6 सारांश
10.7 अंत में कुछ प्रश्न
10.8 हल और उत्तर

अध्ययन निर्देशिका

इस इकाई में आप **ऊर्जा संरक्षण नियम** को समझेंगे। इस नियम तक पहुंचने के लिए आपको यांत्रिकी की कुछ और मूलभूत अवधारणाओं को सीखना होगा जैसेकि **संरक्षी बल**, **स्थितिज ऊर्जा** और **असंरक्षी बल**। इस इकाई में इन अवधारणाओं को समझाने का तरीका शायद आपके लिए नया हो। अतः, आप इन्हें ध्यान से पढ़ें। इस इकाई को पढ़ने से पहले, **सदिश बीजगणित, अदिश गुणनफल और कलन की अवधारणाओं को ज़रूर दोहरा लें**। साथ ही, आप सभी उदाहरण, बोध प्रश्न और अंत में दिये गए प्रश्न खुद हल करें ताकि आप इस इकाई में दी गई अवधारणाओं को अच्छी तरह समझ सकें।

अपने लिखित कार्य में आप सदिश राशि को ऊपर तीर लगा कर इस प्रकार लिखें : $\vec{r}$। एकक सदिश को ऊपर कैप लगा कर इस प्रकार लिखें : $\hat{r}$।

"प्रकृति में एक प्रच्छन्न समरसता अंतर्निहित है जो हमारे मानस में सरल गणितीय नियमों के रूप में प्रतिबिंबित होती है।"

हरमन वेयल

10.1 परिचय

(क)

(ख)

चित्र 10.1: इन स्थितियों में ऊर्जा का कौन सा रूप दिखाई दे रहा है?

इकाई 9 में, आपने **अचर और परिवर्तनशील बलों द्वारा किए गए कार्य** की गणना करना सीखा है। आपने **कार्य-ऊर्जा** प्रमेय के बारे में भी पढ़ा है जो पिंड पर किसी बल द्वारा किए गए कार्य और उसकी **गतिज ऊर्जा** में परिवर्तन के बीच एक सम्बन्ध देती है। इस इकाई में आप **ऊर्जा संरक्षण नियम** के बारे में पढ़ेंगे जो प्रकृति का एक मूलभूत नियम है। लेकिन इस नियम को समझने के लिए आपको पहले **स्थितिज ऊर्जा** की अवधारणा समझनी होगी। स्थितिज ऊर्जा एक भौतिक राशि है जिसका सम्बन्ध बलों के एक विशेष वर्ग से है जिन्हें हम **संरक्षी बल** कहते हैं। इसलिए इस इकाई में सबसे पहले भाग 10.2 और 10.3 में हम इन दो अवधारणाओं की चर्चा करेंगे।

आपने स्कूल के भौतिकी के पाठ्यक्रम में पढ़ा है कि किसी पिंड की स्थितिज ऊर्जा वह ऊर्जा है जो उसमें उसकी स्थिति, आकार या विन्यास के कारण होती है। वास्तव में, अपने जीवन में हम बहुत-सी ऐसी स्थितियां देखते हैं, जिनमें किसी पिंड पर बल लग रहा होता है और उसका विस्थापन होता है पर उसकी चाल नहीं बदलती। इसके बदले, उसकी स्थिति, आकार या आमाप बदलते हैं। उदाहरण के लिए, मान लें कि एक व्यक्ति ज़मीन पर से बक्सा उठा कर अपने कंधे पर रखता है (चित्र 10.1क)। बक्से में बल की दिशा में विस्थापन होता है, पर उसकी आरंभिक और अंतिम चालें शून्य हैं। इस स्थिति में कार्य किया जा रहा है और इसमें ऊर्जा भी शामिल है (क्योंकि इसे हमने कार्य करने की क्षमता कहा है)। पर यह गतिज ऊर्जा तो नहीं है। तो फिर यह क्या है? इसी तरह से जब हम एक कमानी को या इलास्टिक की पट्टी को खींचते हैं तो हम कार्य कर रहे होते हैं हालांकि चाल में कोई परिवर्तन नहीं हो रहा होता (चित्र 10.1ख)। तो इस कार्य के साथ कौन सी ऊर्जा सम्बन्धित है? स्कूल में शायद आपको इसी तरह से **स्थितिज ऊर्जा** की अवधारणा से परिचित कराया गया होगा।

लेकिन भाग 10.3 में हमने स्थितिज ऊर्जा की अवधारणा को एक अलग तरह से समझाया है जिससे हमें ऊर्जा संरक्षण नियम (भाग 10.4) का गणितीय वर्णन करने में मदद मिलती है। अंत में भाग 10.5 में हम **असंरक्षी बलों** और **ऊर्जा संरक्षण नियम** की चर्चा करेंगे। हमारी सलाह है कि आप इन अवधारणाओं और ऊर्जा संरक्षण नियम को ध्यान से पढ़ें ताकि आप इन्हें अच्छी तरह समझ सकें। अगले खंड में हम **कोणीय गति** के वर्णन और बहु-कण निकाय की गति के विश्लेषण के लिए ज़रूरी अवधारणाएं विकसित करेंगे। आप **कोणीय संवेग संरक्षण नियम** भी समझेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- संरक्षी बल की परिभाषा दे सकेंगे और संरक्षी एवं असंरक्षी बलों के बीच अंतर कर सकेंगे;
- सरल निकायों की स्थितिज ऊर्जा की गणना कर सकेंगे;
- सरल समस्याओं पर यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम को लागू कर सकेंगे;
- बता सकेंगे कि कोई पिंड स्थायी साम्यावस्था में है या अस्थायी साम्यावस्था या उदासीन साम्यावस्था में; और
- ऊर्जा संरक्षण नियम समझा सकेंगे और उसे सरल समस्याओं पर लागू कर सकेंगे।

10.2 संरक्षी बल

आइए, सबसे पहले हम इकाई 9 के उदाहरणों 9.6, 9.7 और 9.8 को फिर से लें जिनमें हमने कमानी बल, गुरुत्व बल और गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किए गए कार्य की गणना की थी। आइए, हम हर स्थिति के लिए प्राप्त कार्य का सामान्य व्यंजक लिखें।

क) पिंड पर **कमानी बल ($\vec{F} = -k\vec{x}$) द्वारा किया गया कार्य** जो उसे स्थिति x_1 से x_2 तक $\vec{x}$ द्वारा विस्थापित कर देता है। उदाहरण 9.6 में हमने इसका यह मान निकाला है :

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\, dx = -\int_{x_1}^{x_2} k\, x\, dx = -\frac{k}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right)$$

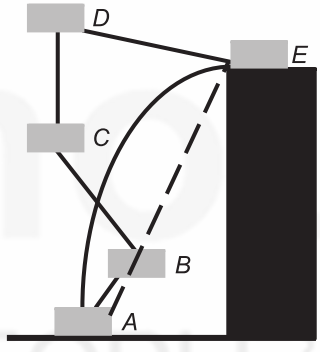
ख) पिंड पर **गुरुत्व बल ($\vec{F} = m\vec{g}$) द्वारा किया गया कार्य** जो उसे स्थिति $\vec{r}_1$ से $\vec{r}_2$ तक विस्थापित कर देता है। उदाहरण 9.7 में हमने इसका यह मान निकाला है :

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -mg\,(z_2 - z_1)$$

ग) पिंड पर **गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किया गया कार्य** जो उसे स्थिति $\vec{r}_A$ से $\vec{r}_B$ तक विस्थापित कर देता है। उदाहरण 9.8 में हमने इसका यह मान निकाला है :

$$W = \int_{A}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{r_A}^{r_B} \frac{GM_e\, m}{r^2}\, dr = GM_e\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

ऐसा करने से हम संरक्षी बल की अवधारणा तक पहुंचेंगे। आइए, देखें कि कैसे।



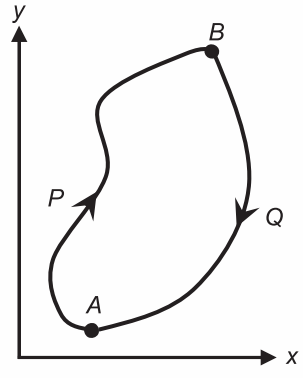
चित्र 10.2: संरक्षी बल द्वारा किया गया कार्य कण के पथ पर निर्भर नहीं करता। भले ही कण किसी भी पथ – *AE* या *ABCDE* – पर क्यों न चले, गुरुत्व बल द्वारा किया गया कार्य समान आरंभिक और अंतिम स्थितियों के लिए समान रहता है।

क्या आपको किए गए कार्य के लिए प्राप्त इन तीन परिणामों में कोई समानता दिखाई देती है? इन सभी उदाहरणों में, **किया गया कार्य केवल पिंड की आरंभिक और अंतिम स्थितियों पर निर्भर करता है। यह उन स्थितियों के बीच पिंड द्वारा चले गए पथ पर निर्भर नहीं करता**। जैसेकि उदाहरण 9.6 में, कण पर कमानी बल द्वारा किया गया कार्य समान रहेगा भले ही कण का पथ कोई भी क्यों न हो। यही बात किसी भी कण पर गुरुत्व बल (उदाहरण 9.7) और गुरुत्वाकर्षण बल (उदाहरण 9.8) द्वारा किए गए कार्य के लिए भी सत्य है।

आप ऊपर बताए गए सभी उदाहरणों के लिए इस कथन की सत्यता की जांच कर सकते हैं। ये सभी बल एक विशेष प्रकार के बलों के उदाहरण हैं जिन्हें हम **संरक्षी बल** कहते हैं। आइए, हम संरक्षी बल को परिभाषित करें (चित्र 10.2 देखें)।

संरक्षी बल की परिभाषा

कोई भी बल **संरक्षी** होता है यदि इसके द्वारा एक गतिमान कण पर किया गया कार्य उस कण की **आरंभिक** और **अंतिम स्थितियों** के बीच चले गए पथ पर निर्भर **नहीं** करता : वह उन बिन्दुओं को मिलाने वाले सभी पथों के लिए समान होता है।



चित्र 10.3: बंद पथ *APBQA* पर संरक्षी बल द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है।

संरक्षी बल की एक अन्य परिभाषा

कोई भी बल संरक्षी होता है यदि इसके द्वारा बंद पथ (जो एक ही बिंदु से शुरू होकर उसी पर ख़त्म होता हो) पर गतिमान कण पर किया गया कुल कार्य शून्य होता है (चित्र 10.3)।

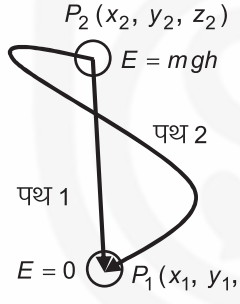
आइए, हम इन परिभाषाओं को गुरुत्व बल पर लागू करें और देखें कि यह बल संरक्षी है या नहीं।

उदाहरण *10.1* : संरक्षी बल की जांच

क्या गुरुत्व बल संरक्षी बल है?

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि हम यह परखें कि गुरुत्व बल पर संरक्षी बल की दोनों परिभाषाओं में से कोई भी परिभाषा लागू होती है या नहीं।

उदाहरण 9.7 में आपने पढ़ा है कि पिंड पर गुरुत्व बल द्वारा किया गया कार्य उसकी आरंभिक और अंतिम स्थितियों के बीच की ऊर्ध्वाधर दूरी पर निर्भर करता है, भले ही पिंड उनके बीच किसी भी पथ पर चले (चित्र 10.4 देखें)। अतः, **गुरुत्व बल संरक्षी है**। आप यह भी परख सकते हैं कि गुरुत्व बल पर संरक्षी बल की दूसरी परिभाषा लागू होती है या नहीं।



चित्र 10.4: गुरुत्व बल द्वारा बंद पथ पर किया गया कार्य शून्य है। अतः, यह एक संरक्षी बल है।

मान लें कि उदाहरण 9.7 का पिंड अंतिम बिंदु $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$ से आरंभिक बिंदु $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ पर किसी अन्य पथ द्वारा लौटता है (चित्र 10.4 देखें)। इस स्थिति में गुरुत्व बल द्वारा किया गया कार्य क्या है? उदाहरण 9.7 की विधि लागू करके हमें मिलता है :

$$W_{P_2 \to P_1} = \int_{x_2}^{x_1} F_x\,dx + \int_{y_2}^{y_1} F_y\,dy + \int_{z_2}^{z_1} F_z\,dz = 0 + 0 + \left(-\int_{z_2}^{z_1} mg\,dz\right)$$

$$= -mg\,(z_1 - z_2) = mg\,(z_2 - z_1) = mg\,\Delta z$$

चूंकि किया गया कार्य एक अदिश राशि है, हम बंद पथ के अलग-अलग भागों पर किए गए कार्य को जोड़कर कुल किया गया कार्य प्राप्त कर सकते हैं। अतः, बिंदु $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ से शुरू होकर उस पर ख़त्म होने वाले बंद पथ पर गुरुत्व बल द्वारा किया गया कार्य है :

$$W_{P_1 \to P_2 \to P_1} = W_{P_1 \to P_2} + W_{P_2 \to P_1}$$

$$= -mg\,(z_2 - z_1) + mg\,(z_2 - z_1) = 0$$

इस तरह गुरुत्व बल, संरक्षी बल की दूसरी परिभाषा को भी संतुष्ट करता है।

अब आप खुद यह परखें कि कमानी बल संरक्षी है या नहीं।

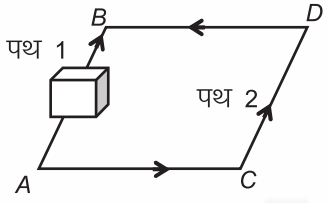
बोध प्रश्न 1 – संरक्षी बल की जांच

भाग 10.2 में दी गई संरक्षी बल की परिभाषा लागू करें और सिद्ध करें कि कमानी बल संरक्षी है।

हमें संरक्षी बल की इन परिभाषाओं से ही **असंरक्षी बल** की परिभाषा मिलती है। कोई **बल असंरक्षी होता है यदि गतिमान कण पर इसके द्वारा किया गया कुल कार्य कण के पथ पर निर्भर करता है या बंद पथ के लिए शून्य नहीं होता**। अभी तक आपने इस भाग में संरक्षी बल की परिभाषा सीखी है और यह परखना सीखा है कि कोई बल संरक्षी है या नहीं। आप इसी आधार पर असंरक्षी बलों को पहचान सकते हैं। आइए, एक उदाहरण ले कर परखें कि घर्षण बल असंरक्षी है या नहीं।

उदाहरण *10.2* : असंरक्षी बल

एक बक्से को खुरदुरे फ़र्श पर अचर वेग से खींचा जा रहा है यानी उस पर लग रहा नेट बल शून्य है। माना कि बक्सा बिंदु A से B तक दो अलग-अलग पथों – AB के अनुदिश पथ 1 और $ACDB$ के अनुदिश पथ 2 पर चलता है (चित्र 10.5 देखें)। इन दो पथों के अनुदिश घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करें। अतएव, जांच करें कि घर्षण बल संरक्षी है या नहीं।



चित्र 10.5 : दो पथों के अनुदिश घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करना।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि घर्षण बल हमेशा गति की दिशा के विपरीत दिशा में लगता है। पथ 1 के अनुदिश किया गया कार्य है : $W_1 = - F_{fr}\, d_{AB}$ जहां F_{fr} बक्से पर स्थैतिक घर्षण बल है और d_{AB} बिंदु A से बिंदु B की दूरी AB है। पथ 2 के अनुदिश किया गया कार्य है :

$$W_2 = - F_{fr}\,(d_{AC} + d_{CD} + d_{DB})$$

जहां d_{AC}, d_{CD} और d_{DB} क्रमशः बिंदु A से बिंदु C की दूरी AC है, बिंदु C से बिंदु D की दूरी CD है और बिंदु D से बिंदु B की दूरी DB है। W_1 और W_2 बराबर नहीं हैं। यानी घर्षण बल बक्से द्वारा तय किये गए पथ पर निर्भर करता है।

अतः, घर्षण बल संरक्षी **नहीं** है – यह एक **असंरक्षी** बल है।

संरक्षी बल की इस परिभाषा से हमें एक बहुत उपयोगी फलन मिलता है जिसे **स्थितिज ऊर्जा** कहते हैं।

10.3 स्थितिज ऊर्जा

आपने अभी यह सीखा है कि एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक गतिमान कण पर लग रहे **संरक्षी बल द्वारा किया गया कार्य, केवल कण की आरंभिक और अंतिम स्थितियों पर निर्भर करता है, उनके बीच के पथ पर नहीं**। अतः, संरक्षी बल के लिए हम लिख सकते हैं कि

$$\int_A^B \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} \;=\; \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} \;=\; \left(\vec{\mathbf{r}}_B\right) \text{ का फलन } - \left(\vec{\mathbf{r}}_A\right) \text{ का फलन}$$

हम कण की स्थिति के इस फलन को $U(\vec{r})$ लिखते हैं और इस समीकरण को इस तरह लिखते हैं :

$$\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -U(\vec{r}_B) + U(\vec{r}_A) \qquad (10.1\text{क})$$

स्थितिज ऊर्जा

या $$U(\vec{r}_B) - U(\vec{r}_A) = -\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (10.1\text{ख})$$

ध्यान दें

यदि हम A पर स्थितिज ऊर्जा ($U_A = a$) को $U_A = a + c$ लिखें और B पर स्थितिज ऊर्जा ($U_B = b$) को $U_B = b + c$ लिखें (जहां c एक अचर है जिसका मान सभी स्थितियों के लिए समान है), तब A से B तक जाने में किया गया कार्य है :

$$-\Delta U = -[(b + c) - (a + c)]$$
$$= a - b$$

जो पहले जितना ही है। वास्तव में, इसका अर्थ यह है कि आप फलन U का शून्य जहां चाहे वहां ले सकते हैं। आप इसे पृथ्वी की सतह पर शून्य मान सकते हैं। या आपको अनंत पर इसका मान शून्य लेना ज़्यादा सुविधाजनक लग सकता है।

हम कण की स्थिति के फलन $U(\vec{r})$ को **स्थितिज ऊर्जा फलन** या केवल **स्थितिज ऊर्जा** कहते हैं। समीकरण 10.1क और ख की संकेत प्रणाली (ऋणात्मक चिन्ह) का कारण आपको अभी स्पष्ट हो जाएगा। ध्यान दें कि हमने अभी तक इस बात का कोई प्रमाण नहीं दिया है कि इस फलन $U(\vec{r})$ का अस्तित्व है।

लेकिन हमने ऐसे तीन उदाहरण ज़रूर देखे हैं जिनके लिए बल द्वारा किया गया कार्य पिंड के पथ पर निर्भर नहीं करता। अतः, हम कह सकते हैं कि कम से कम इन बलों के लिए इस फलन $U(\vec{r})$ का अस्तित्व है। साथ ही ध्यान दें कि समीकरण 10.1ख कण की किन्हीं दो स्थितियों $\vec{r}_A$ और $\vec{r}_B$ पर **स्थितिज ऊर्जा के अंतर पर निर्भर करता है**। हम $U(\vec{r}_B)$ में एक अचर राशि जोड़ सकते हैं और वही अचर राशि $U(\vec{r}_A)$ में जोड़ सकते हैं और समीकरण 10.1ख फिर भी संतुष्ट होगा (हाशिए पर दी गई टिप्पणी पढ़ें)। अतएव, हमने स्थितिज ऊर्जा की जो परिभाषा दी है, उसके अनुसार **केवल स्थितिज ऊर्जा में अंतर ही अर्थपूर्ण है**।

स्थितिज ऊर्जा

परिभाषा से, दो स्थितियों $\vec{r}_B$ और $\vec{r}_A$ के बीच **स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन** ΔU का मान, एक संरक्षी बल द्वारा कण को $\vec{r}_A$ से $\vec{r}_B$ तक ले जाने में किए गए **कार्य के ऋणात्मक मान** के बराबर होता है :

$$\Delta U = U_B - U_A = U(\vec{r}_B) - U(\vec{r}_A) = -\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (10.1\text{ख})$$

आइए, अब हम कुछ संरक्षी बलों से संबद्ध स्थितिज ऊर्जाओं के अंतर की गणना करें।

उदाहरण *10.3* : स्थितिज ऊर्जा

गुरुत्व बल और गुरुत्वाकर्षण बल से संबद्ध स्थितिज ऊर्जा फलन निर्धारित करें।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि समीकरण 10.1ख को लागू किया जाए।

क) **गुरुत्व बल के लिए स्थितिज ऊर्जा**

उदाहरण 9.7 में हमने बिंदु $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ से बिंदु $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$ तक कण को ले जाने में गुरुत्व बल द्वारा किए गए कार्य का यह मान प्राप्त किया है :

$$W = \left(\int_{z_1}^{z_2} (-mg)\, dz \right) = -mg\,(z_2 - z_1)$$

समीकरण 10.1ख से हम लिख सकते हैं :

$$U_2 - U_1 = -\left(\int_{z_1}^{z_2} (-mg)\, dz \right) = mg(z_2 - z_1)$$

आइए, हम इस परिपाटी का प्रयोग करें कि भूमि पर $U_1 = 0$ है जहां $z_1 = 0$। और कण की भूमि से ऊंचाई h है। तब

$$U_2(h) = U = mgh$$

भूमि के सापेक्ष गुरुत्व बल द्वारा या उसके विरुद्ध किए गए कार्य से संबद्ध स्थितिज ऊर्जा $U = mgh$ को **गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा** कहते हैं।

ख) **गुरुत्वाकर्षण बल के लिए स्थितिज ऊर्जा**

उदाहरण 9.8 में, हमने स्थिति $\vec{r}_A$ से स्थिति $\vec{r}_B$ तक कण को ले जाने में गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किए गए कार्य का यह मान प्राप्त किया है :

$$W = G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

समीकरण 10.1ख से हम लिख सकते हैं:

$$U_B - U_A = -W = -G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

परिपाटी से, हम इस स्थितिज ऊर्जा के लिए आरंभिक बिंदु या संदर्भ बिंदु अनंत पर लेते हैं यानी उपरोक्त व्यंजक में हम $r_A = \infty$ लेते हैं और $r_B = r$ रखते हैं। तब

$$U_B = U(r) = -\frac{G m_1 m_2}{r}$$

गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा या उसके विरुद्ध किसी कण को अनंत से किसी स्थिति r तक लाने में किए गए कार्य से संबद्ध स्थितिज ऊर्जा $U(r) = -\dfrac{G m_1 m_2}{r}$ को उस कण की **गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा** कहते हैं।

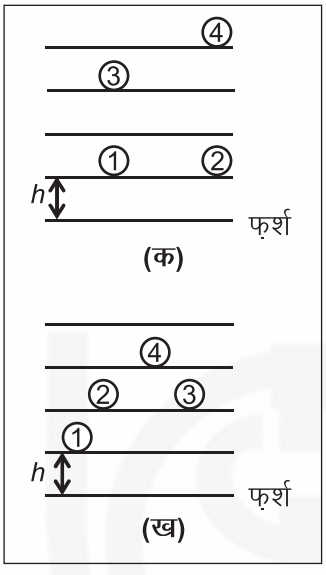
अब आप कमानी बल के लिए स्थितिज ऊर्जा फलन ख़ुद लिखें। इसके लिए बोध प्रश्न 2 करें।

बोध प्रश्न 2 – कमानी बल के लिए स्थितिज ऊर्जा फलन

कमानी बल के लिए स्थितिज ऊर्जा फलन प्राप्त करें।

स्थितिज ऊर्जा केवल संरक्षी बलों के लिए परिभाषित की जाती है और केवल स्थितिज ऊर्जा में अंतर ही अर्थपूर्ण है।

आपने स्कूल में स्थितिज ऊर्जा के बारे में जो पढ़ा है और इसकी जो गणितीय अवधारणा आपने अभी तक इस इकाई में पढ़ी है, आइए, अब हम उनमें संबंध स्थापित करें। इसके लिए हम गुरुत्व बल का उदाहरण लेंगे। ध्यान दें कि गुरुत्व के कारण किसी पिंड की स्थितिज ऊर्जा, एक संदर्भ स्थिति के सापेक्ष उसकी स्थिति और उसके द्रव्यमान पर निर्भर करती है। अतः, भूमि के सापेक्ष, मेज़ पर रखी किताब की स्थितिज ऊर्जा, एक ज़्यादा ऊंची अलमारी पर रखी उसी किताब की स्थितिज ऊर्जा से कम होती है। उस किताब की स्थितिज ऊर्जा उसी मेज़ पर रखी अधिक द्रव्यमान वाली किताब की स्थितिज ऊर्जा से भी कम होती है।



चित्र 10.6: निकाय के विन्यास के कारण स्थितिज ऊर्जा।

आइए, अब हम कुछ कंचे लें, जिनमें से हरेक का द्रव्यमान m है और उन्हें एक रैक में अलग-अलग ऊंचाई पर अलग-अलग खानों में रखें। यदि हम कंचों को फ़र्श से उठाकर रैक में चित्र 10.6क के अनुसार रखें तो उनकी कुल स्थितिज ऊर्जा क्या होगी? मान लें कि रैक के हरेक खाने के बीच की और सबसे निचले खाने की फ़र्श से दूरी h है। तब फ़र्श के सापेक्ष इन कंचों की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा है :

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = mgh + mgh + mg(3h) + mg(4h) = 9mgh$$

आइए, अब हम कंचों का विन्यास बदल कर उन्हें फ़र्श से उठाकर चित्र 10.6ख के अनुसार रखें। अब इनकी कुल स्थितिज ऊर्जा क्या होगी? फ़र्श के सापेक्ष यह है :

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = mgh + mg(2h) + mg(2h) + mg(3h) = 8mgh$$

यह परिणाम पिछले परिणाम से अलग है। ऐसा क्यों है? ऐसा इसलिए है क्योंकि दोनों ही स्थितियों में कंचों की आपेक्षिक स्थितियां भिन्न हैं। इस बात को हम ऐसे कहते हैं : **प्रत्येक स्थिति में कंचों के निकाय का विन्यास (वितरण) भिन्न है।** आप इन कंचों को अलग-अलग तरह से रखकर इनके अलग-अलग विन्यास बना सकते हैं। आप पाएंगे कि हर अलग विन्यास के लिए गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा अलग है। आप यह भी पा सकते हैं कि कुछ स्थितियों में गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा का मान एक ही है यद्यपि कंचों के विन्यास भिन्न हैं! लेकिन आपको हर विन्यास के लिए स्थितिज ऊर्जा की गणना करनी होगी।

इस तरह, **निकाय की स्थितिज ऊर्जा उसमें मौजूद कणों की स्थितियों और उसके विन्यास (यानी उनके वितरण या उनकी आपेक्षिक स्थितियों) पर निर्भर करती है।** आइए, अब हम एक निकाय की स्थितिज ऊर्जा की परिभाषा दें।

स्थितिज ऊर्जा

परिभाषा से, कणों के निकाय की **स्थितिज ऊर्जा** उस पर तब किए गए **कार्य के ऋणात्मक मान के बराबर होती है** जब उस निकाय की **स्थिति, आकार** या **विन्यास** में परिवर्तन होता है।

स्थितिज ऊर्जा, कण या निकाय की समष्टि में स्थिति, आकार या विन्यास बदलने के लिए उसकी (कण या निकाय की) कार्य करने की क्षमता के बराबर होती है।

हम यह भी कह सकते हैं कि **किसी संदर्भ स्तर के सापेक्ष किसी कण या निकाय की वह ऊर्जा जो उस कण या निकाय में केवल उसकी स्थिति या विन्यास में परिवर्तन के कारण मौजूद होती है, उसकी स्थितिज ऊर्जा कहलाती है।**

शायद आपके मन में अब यह सवाल उठ रहा हो : **आखिर यह स्थितिज ऊर्जा है क्या?**

आइए, इसे इस तरह समझें :

कोई पिंड लें, जैसेकि भूमि से कुछ ऊंचाई पर रखी ईंट, जिसमें उसकी ऊंचाई से संबद्ध कुछ स्थितिज ऊर्जा है। यह ईंट को गुरुत्व बल के विरुद्ध उस ऊंचाई तक उठाने में किए गए कार्य का ऋणात्मक मान है। अब यदि वह ईंट, कांच के बर्तनों पर गिरे तो वह उन्हें चकनाचूर कर सकती है। यानी उस ईंट में **कार्य करने की क्षमता** है। अतः, यदि हम किसी पिंड की स्थिति या विन्यास बदलते हैं तो उसमें स्थितिज ऊर्जा आ जाती है, यानी **कार्य करने की क्षमता** (potential to do work) आ जाती है। अतः, ऊर्जा के इस रूप को हम स्थितिज ऊर्जा कहते हैं। इस तरह, हम कह सकते हैं कि **किसी पिंड की स्थितिज ऊर्जा, उसमें उसके आकार या स्थिति या विन्यास में हुए परिवर्तन के कारण आती है और इसके कारण उस पिंड में कार्य करने की क्षमता आती है।**

आपने यह भी देखा होगा कि हमने दोनों ही $U = mgh$ और $U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$ को **गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा** का नाम दिया है। द्रव्यमान m_2 वाले एक पिंड के केंद्र से दूरी r पर स्थित द्रव्यमान m_1 के पिंड की **गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा** $U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$ है। आपने उदाहरण 10.2ख में जाना है कि **यह (द्रव्यमान m_1 के) पिंड को अनंत (∞) से उस बिंदु तक लाने में किए गए कार्य के बराबर है।**

हो सकता है कि $U = mgh$ और $U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$, दोनों ही को **गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा** कहने की बात आपको समझ नहीं आ रही हो। अगर आप ऐसा सोचते हैं कि ये दोनों राशियां अलग-अलग हैं, तो आपकी यह अवधारणा ठीक नहीं है। **वास्तव में ये दोनों अलग-अलग राशियां नहीं हैं।**

आपको यह समझना चाहिए कि $U = mgh$ की गणना करते हुए हमने माना था कि पृथ्वी के कारण पिंड पर लग रहा गुरुत्वाकर्षण बल अचर है। यह मानना तब तक सही है जब तक कि h का मान पृथ्वी की त्रिज्या के मुकाबले बहुत कम हो। यदि हम पिंड को अधिक ऊंचाई (जैसे कि 5000 km की ऊंचाई) पर लेंगे तो हम उसकी गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा के लिए व्यंजक $U = mgh$ का प्रयोग नहीं कर पाएंगे। गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा का व्यंजक $U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$ किन्हीं भी दो द्रव्यमानों के बीच किसी भी दूरी पर लागू होता है और यह व्युत्क्रम वर्ग नियम का परिणाम है। व्यंजक $U = mgh$, व्यंजक $U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$ का एक विशिष्ट सन्निकटन है।

अभी तक हमने संरक्षी बलों की परिभाषा दी है और इससे संबद्ध स्थितिज ऊर्जा की अवधारणा समझाई है। इन दोनों अवधारणाओं को साथ-साथ लेने पर हमें **यांत्रिक**

ध्यान दें

गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$

द्रव्यमान m_1 और m_2 वाले दोनों कणों की पारस्परिक गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा है : यदि हम द्रव्यमान m_2 के कण को अनंत से द्रव्यमान m_1 के कण से दूरी r तक लाएं तो द्रव्यमान m_2 की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा भी

$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$

होती है।

ध्यान दें

दोनों स्थितियों में ऊर्जा का शून्य (संदर्भ बिंदु) भिन्न है। $U = mgh$ के लिए, शून्य को भूमि पर (पृथ्वी की सतह पर) लिया जाता है। लेकिन व्यंजक

$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$

प्राप्त करने में हम शून्य (या संदर्भ बिंदु) को अनंत पर लेते हैं।

दोनों का अंतर (अंतिम स्थितिज ऊर्जा – आरंभिक स्थितिज ऊर्जा) **संदर्भ बिंदु के चुनाव पर निर्भर नहीं करता।**

ऊर्जा संरक्षण नियम मिलता है। पर उसे पढ़ने से पहले आप परखना चाहेंगे कि आपने स्थितिज ऊर्जा की अवधारणा समझी है या नहीं।

बोध प्रश्न 3 – स्थितिज ऊर्जा

द्रव्यमान M की एक बच्ची दस सीढ़ियां चढ़ कर भूमि से 4.0 m की ऊंचाई पर स्थित प्रथम तल पर पहुंचती है। बच्ची की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा क्या है यदि हम संदर्भ बिंदु (i) भूमि पर, (ii) दूसरी सीढ़ी पर और (iii) पांचवीं सीढ़ी पर लें? द्वितीय तल के सापेक्ष बच्ची की स्थितिज ऊर्जा क्या है यदि उसकी प्रथम तल से ऊंचाई 4.0 m हो? $g = 9.8 \text{ms}^{-2}$ लें।

हम स्थितिज ऊर्जा और बल से उसके संबंध का उपयोग करके किसी कण या निकाय का **स्थायित्व** (stability) भी निर्धारित कर सकते हैं।

10.3.1 स्थितिज ऊर्जा और स्थायित्व

आपने इकाई 5 में सीखा है कि कोई पिंड साम्यावस्था में होता है यदि उस पर लग रहा नेट बल शून्य हो। अतः, आइए, हम समीकरण 10.1ख का उपयोग करके स्थिति x_1 से स्थिति x_2 तक सरल रेखा में गतिमान एक कण पर लग रहे बल का व्यंजक उसकी स्थितिज ऊर्जा के पदों में प्राप्त करें। उसकी स्थितिज ऊर्जा का मान है :

$$\Delta U = - \int_{x_1}^{x_2} F_x \, dx \qquad (10.2)$$

कलन से इसका अर्थ है कि F_x फलन $U(x)$ का अवकलज है :

$$F_x = - \frac{dU(x)}{dx} \quad \text{(एकविम)} \qquad (10.3)$$

आप इस परिणाम की जांच एक उदाहरण लेकर कर सकते हैं। याद करें कि x-अक्ष के अनुदिश गतिमान कमानी की स्थितिज ऊर्जा का मान है : $U(x) = \frac{1}{2} k x^2$ । तब समीकरण 10.3 से हमें मिलता है :

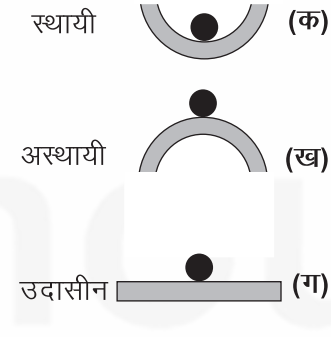
$$F_x = - \frac{dU(x)}{dx} = - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} k x^2\right) = - k x$$

यह हुक के नियम द्वारा दिया गया कमानी बल है। समीकरण 10.3 का उपयोग करके हम स्थितिज ऊर्जा फलन से बल का मान प्राप्त कर सकते हैं। इसकी मदद से हम निकाय का **स्थायित्व** (stability) भी निर्धारित कर सकते हैं। संरक्षी बल के अधीन गतिमान किसी कण या निकाय के लिए समीकरण 10.3 का उपयोग करके हम साम्यावस्था का प्रतिबंध लिख सकते हैं :

$$F_x = - \frac{dU(x)}{dx} = 0 \quad \text{या} \quad \frac{dU(x)}{dx} = 0 \qquad (10.4)$$

मान लें कि समीकरण 10.4 किसी बिंदु x_0 पर संतुष्ट होता है। अब हम किसी पिंड या निकाय के लिए **स्थायी**, **अस्थायी** और **उदासीन साम्यावस्था** के प्रतिबंध लिखेंगे :

- यदि $x = x_0$ पर $\frac{d^2U}{dx^2} > 0$ (U का **द्वितीय अवकलज धनात्मक है**) तो **कण/निकाय उस बिंदु पर स्थायी साम्यावस्था में है**;
- यदि $x = x_0$ पर $\frac{d^2U}{dx^2} < 0$ (U का **द्वितीय अवकलज ऋणात्मक है**) तो **कण/निकाय उस बिंदु पर अस्थायी साम्यावस्था में है**;
- यदि $x = x_0$ पर $\frac{d^2U}{dx^2} = 0$, तो हमें उच्च कोटि अवकलज ज्ञात करने होंगे। यदि सभी अवकलजों का मान शून्य है ताकि x_0 के इर्द-गिर्द के क्षेत्र में U अचर है, तो **कण/निकाय उदासीन साम्यावस्था में होता है। कण या निकाय के विस्थापन के कारण उस पर कोई बल नहीं लगता और वह मुक्त होता है।**



चित्र 10.7 : क) स्थायी; ख) अस्थायी और ग) उदासीन साम्यावस्था के उदाहरण।

चित्र 10.7 में हमने तीनों प्रकार की साम्यावस्थाएं दिखायी हैं : चित्र 10.7क स्थायी साम्यावस्था दिखाता है। एक गोल कटोरी की तली में रखा कंचा स्थायी साम्यावस्था का उदाहरण है। चित्र 10.7ख अस्थायी साम्यावस्था दिखाता है। उलटी गोल कटोरी के उच्चतम बिंदु पर रखा कंचा अस्थायी साम्यावस्था का उदाहरण है। चित्र 10.7ग उदासीन साम्यावस्था दिखाता है। क्षैतिज मेज की सतह पर विरामावस्था में रखा कंचा उदासीन साम्यावस्था का उदाहरण है।

अभी तक आपने दो तरह की ऊर्जाओं के बारे में पढ़ा है : गतिज ऊर्जा और संरक्षी बलों से संबद्ध स्थितिज ऊर्जा। अब हम इन दोनों अवधारणाओं और इकाई 7 में समझाई गई कार्य-ऊर्जा प्रमेय का उपयोग करके एक दिलचस्प परिणाम पर पहुंचेंगे : **यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण**।

10.4 यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण

समीकरण 9.6ख या समीकरण 9.7 से कार्य-ऊर्जा प्रमेय याद करें :

$$W = \Delta \text{K.E.} = (\text{K.E.})_f - (\text{K.E.})_i = K_f - K_i \qquad (10.5\text{क})$$

समीकरण 10.1ख का उपयोग करके हम लिख सकते हैं :

$$-W = \Delta U = U_f - U_i \qquad (10.5\text{ख})$$

समीकरणों 10.5क और ख को संयोजित करने पर हमें मिलता है :

$$K_f - K_i = -(U_f - U_i)$$

इन पदों को अलग तरह से रखकर हम लिख सकते हैं :

$$K_i + U_i = K_f + U_f \qquad (10.6)$$

इस समीकरण के बायीं ओर का व्यंजक कण की आरंभिक चाल और किसी आरंभिक स्थिति $\vec{r}_i$ पर उसकी स्थितिज ऊर्जा पर निर्भर करता है; वह $\vec{r}_f$ पर निर्भर नहीं करता है। इसी तरह इस समीकरण के दायीं ओर का व्यंजक कण की अंतिम चाल और किसी अंतिम स्थिति $\vec{r}_f$ पर उसकी स्थितिज ऊर्जा पर निर्भर करता है; वह $\vec{r}_i$ पर निर्भर नहीं करता है। ऐसी स्थिति में, समीकरण 10.6 तभी संतुष्ट होगा जब उसके दोनों पक्ष किसी अचर के बराबर हों क्योंकि $\vec{r}_i$ और $\vec{r}_f$ के कुछ भी मान हो सकते हैं – ये नियत नहीं हैं। इस अचर को हम E लिखते हैं और तब हमें मिलता है :

$$K_i + U_i = K_f + U_f = E \qquad (10.7क)$$

E को कण की **कुल यांत्रिक ऊर्जा** कहा जाता है। **यह उसकी गतिज ऊर्जा और स्थितिज ऊर्जा का योग है** :

$$K + U = E \qquad (10.7ख)$$

इस तरह, आपने सीखा है कि

यदि कण पर लग रहा बल संरक्षी है तो कण की कुल यांत्रिक ऊर्जा उसकी स्थिति पर निर्भर नहीं करती : वह अचर रहती है।

भौतिकी की भाषा में हम कहते हैं :

कण की कुल यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित रहती है।

इसका यह अर्थ है कि कण की (जो संरक्षी बल के अधीन गतिमान है) गतिज ऊर्जा और स्थितिज ऊर्जा में बदलाव हो सकता है पर **सभी क्षणों पर उनका योग अचर रहता है**। इस तरह, यदि कण की गतिज ऊर्जा बढ़ती है तो उसकी स्थितिज ऊर्जा कम हो जाएगी और स्थितिज ऊर्जा के बढ़ने पर गतिज ऊर्जा कम हो जाएगी। उसकी आरंभिक यांत्रिक ऊर्जा और अंतिम यांत्रिक ऊर्जा सदैव समान होंगी :

$$E_i = E_f \qquad (10.8)$$

ध्यान दें

समीकरण 10.8 से हमें **संरक्षी बल** के नाम की व्याख्या भी मिलती है: जब ऐसा बल किसी निकाय पर लगता है, तो उस निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा **संरक्षित** रहती है यानी वह समय के साथ बदलती नहीं।

ध्यान दें कि यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण, संरक्षी बलों का गुणधर्म है। वास्तव में इन बलों के साथ संरक्षी शब्द इसीलिए जोड़ा गया है। यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम प्राप्त करते हुए आपको स्थितिज ऊर्जा की चिन्ह परिपाटी का कारण भी समझ आया होगा। हम प्रकृति के एक मूलभूत नियम को गणित और भौतिकी की अवधारणाओं द्वारा व्यक्त करने की कोशिश कर रहे हैं। आइए, अब हम इस नियम का कथन दें।

यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण

यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण

यदि किसी कण या निकाय पर केवल संरक्षी बल कार्य करते हैं, तो उस कण या निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा (गतिज ऊर्जा और स्थितिज ऊर्जा का योग) संरक्षित रहती है :

$$E_f = E_i \qquad (10.8)$$

जहां $E_f = K_f + U_f$ और $E_i = K_i + U_i$

आप इस नियम को और स्थितिज और गतिज ऊर्जा के संबंध को नीचे दी गई सरल गतिविधि करके समझ सकते हैं। इन्हें करने से यांत्रिक निकायों में गतिज ऊर्जा और स्थितिज ऊर्जा के संबंध को भी आप समझ पाएंगे। इस गतिविधि के लिए आपको भिन्न द्रव्यमानों की कुछ गेंदें या कंचे और एक चिकनी समतल किताब या दफ़्ती चाहिए होगी।

गतिविधि

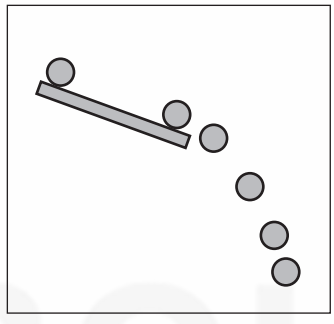
यांत्रिक निकायों में गतिज ऊर्जा और स्थितिज ऊर्जा

ठीक एक सी टेबल टेनिस की गेंदें या कंचे और एक चिकनी सतह वाली (लगभग घर्षणहीन) किताब या दफ़्ती लें। आप खेल के मैदान में स्लाइड पर भी यह गतिविधि कर सकते हैं।

चिकनी सतह वाली (लगभग घर्षणहीन) किताब या दफ़्ती को नत तल की तरह क्षैतिज से कोण बनाते हुए एक हाथ में पकड़ें। गेंद (या अन्य पिंड) को दूसरे हाथ से नत तल के किसी बिंदु से नीचे की ओर लुढ़काएं। तल से गिरने के बाद उसके द्वारा तय की गई क्षैतिज दूरी मापें (चित्र 10.8)। अब नत तल एक अलग ऊंचाई पर क्षैतिज से उसी कोण पर रखें ताकि गेंद की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा अलग हो। फिर से गेंद को उसी बिंदु से लुढ़काएं और उसके द्वारा तय की गई क्षैतिज दूरी मापें। तल को अलग-अलग ऊंचाइयों पर रखें और यह गतिविधि दोहरा कर मापन करें। अब इस गतिविधि के आधार पर इन सवालों के जवाब दें।

प्रत्येक स्थिति में दूरी के मापनों की तुलना करें। इससे आप क्या अंदाज़ा लगाते हैं? अधिक ऊंचाई से गिरने वाली गेंद कितनी क्षैतिज दूरी तय करती है? कम ऊंचाई से गिरने वाली गेंद की तुलना में यह दूरी कम है या ज़्यादा? प्रत्येक स्थिति में गेंद की स्थितिज ऊर्जा क्या है?

जब आप नत तल की ऊंचाई समान रखकर अलग द्रव्यमानों की गेंदें लेते हैं तब क्या होता है? क्या इस बार गेंदों द्वारा तय की गई क्षैतिज दूरियां समान हैं या भिन्न?



चित्र 10.8: गतिज ऊर्जा और स्थितिज ऊर्जा में संबंध।

क्या अब आप समझ पाए कि नत तल की आरंभिक ऊंचाई अधिक होने का अर्थ है कि गेंद की स्थितिज ऊर्जा अधिक है और उसकी कार्य करने की क्षमता भी अधिक है? यह गेंद की चाल में हुए अधिक परिवर्तन में दिखाई देती है (कार्य-ऊर्जा प्रमेय याद करें जो गतिज ऊर्जा में परिवर्तन $\Delta K.E.$ का मान बताती है; यह मान इस स्थिति में अधिक है)। अतः, **अधिक स्थितिज ऊर्जा वाली गेंद अधिक दूरी तय करती है।**

लेकिन **तय की गई दूरी बराबर होनी चाहिए** यदि नत तल की आरंभिक ऊंचाई प्रत्येक स्थिति में समान होती है। परिणाम पिंड के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता। यह केवल नत तल की आरंभिक ऊंचाई पर निर्भर करता है। लेकिन ध्यान रहे कि इन गतिविधियों में आप घर्षण को (अधिक से अधिक चिकना नत तल ले कर) कम से कम करने की कोशिश करें।

आप ऐसी ही गतिविधि खिलौना बंदूक या तीर कमान से कर सकते हैं। जब आप बंदूक में नकली गोली डालकर उसका घोड़ा दबाते हैं तो आप उसमें लगी एक कमानी को दबा कर उसे स्थितिज ऊर्जा दे रहे होते हैं। अब घोड़ा दबाने पर, कमानी की स्थितिज ऊर्जा गोली की गतिज ऊर्जा में बदल जाती है। गोली लक्ष्य की ओर गतिमान होती है।

तीर-कमान पर भी यही लागू होता है : तनी हुई कमान की स्थितिज ऊर्जा, तीर की गतिज ऊर्जा में बदल जाती है।

इस प्रकार **संरक्षी बलों के अधीन गतिमान निकायों के लिए**

जब गतिज ऊर्जा बढ़ती है	**तब स्थितिज ऊर्जा घटती है**

और

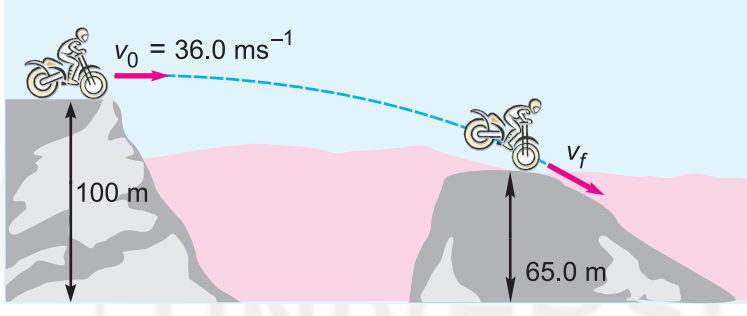
जब स्थितिज ऊर्जा बढ़ती है	**तब गतिज ऊर्जा घटती है**

ताकि निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा अचर रहे।

आइए, अब हम यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम को पिंडों की गति पर लागू करें।

उदाहरण *10.4* : यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण और गति

एक जोखिम भरे करतब दिखाने वाला कलाकार अपनी मोटरसाइकिल पर एक चट्टान से दूसरी चट्टान पर कूदना चाहता है (चित्र 10.9)। वह 100 m ऊंची चट्टान से $36.0\,ms^{-1}$ की चाल पर क्षैतिज दिशा में कूदता है। दूसरी चट्टान पर जिसकी ऊंचाई 65.0 m है, वह किस चाल से पहुंचता है? वायु प्रतिरोध को नगण्य मानें। $g = 10.0\ ms^{-2}$ लें।



चित्र 10.9 : यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण और गति।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि चाल की गणना के लिए यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम को लागू किया जाए। प्रश्न में स्थितिज ऊर्जा केवल गुरुत्व बल के कारण है।

दिया है कि $K_i + U_i = K_f + U_f$ या $\frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f$

अतः, $v_f = \sqrt{v_i^2 + 2g(h_i - h_f)}$

$$v_f = \sqrt{(36.0\,ms^{-1})^2 + 2 \times (10.0\,ms^{-2})(100\ m - 65.0\,m)} = 44.7\,ms^{-1}$$

ध्यान दें

मान लें कि हम इस सवाल को केवल न्यूटन के गति के नियमों से हल करते और यह मानते कि पिंड पर केवल गुरुत्व बल लग रहा है। तब हमें $\vec{F} = m\vec{g}$ के लिए गति के समीकरण $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ का पिंड के पथ पर समाकलन करना पड़ता और उसे आदि प्रतिबंध लागू करके हल करना पड़ता। अब यदि पिंड का पथ किसी जटिल आकार का होता जैसे सर्पिल पथ या कोई अन्य वक्र तो कल्पना करें कि इस समाकल को हल करना कितना कठिन होता।

बोध प्रश्न 4 – यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण

एक गोताखोर $1.5\ ms^{-1}$ की आरंभिक चाल से कूदती है और पानी में गिरते समय उसकी चाल $4.5\ ms^{-1}$ है। वह किस ऊंचाई से कूदती है? $g = 10.0\,ms^{-2}$ लें।

आपने इकाई 7 में पढ़ा है कि पृथ्वी के केंद्र से परिमित दूरी पर g शून्य नहीं होता। अतः, पृथ्वी के केंद्र से पिंड की जो भी दूरी हो, उस पर गुरुत्व बल लगता है। लेकिन यदि किसी पिंड को एक न्यूनतम वेग दिया जा सके तो वह पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण से पलायन कर सकता है। इस वेग को **पलायन वेग** कहते हैं। अब हम उदाहरण 10.5 में इसका मान निकालेंगे।

उदाहरण *10.5* : पलायन वेग

द्रव्यमान M के एक वृहत् पिंड से द्रव्यमान m के एक कण का पलायन वेग प्राप्त करें।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि कण तब पलायन करेगा जब उसकी कुल ऊर्जा $E \geq 0$ होगी।

मान लें कि वृहत् पिंड से द्रव्यमान m के कण की दूरी r है। इस दूरी पर कण की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा है : $U = -\frac{GMm}{r}$ । यदि कण को पिंड के गुरुत्वाकर्षण से पलायन करना हो तो उसकी कुल ऊर्जा $E \geq 0$ होनी चाहिए। यदि दूरी r पर कण का वेग v हो तो कण की कुल यांत्रिक ऊर्जा है :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

अतः, कण के पलायन का प्रतिबंध है :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \geq 0 \Rightarrow v^2 \geq \frac{2GM}{r} \quad \text{या} \quad v \geq \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

अतः
$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \qquad (10.9)$$

वृहत् पिंड के गुरुत्वाकर्षण से द्रव्यमान m के कण के पलायन के लिए कण का न्यूनतम वेग है। इसे **पलायन वेग** कहते हैं। ध्यान दें कि यह कण के द्रव्यमान m पर निर्भर नहीं करता।

यदि कण पृथ्वी की सतह पर होता तो $r = R_e, M = M_e$ और

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}} = \sqrt{2gR_e} \qquad (10.10)$$

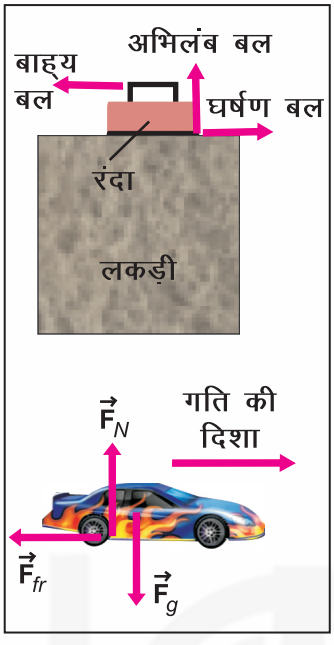
अब $g = 9.8\,\text{ms}^{-2}$ लेने पर, हमें मिलता है $v_e = 1.1\times10^4\,\text{ms}^{-1} = 11\,\text{km s}^{-1}$ । इस वेग से चल कर हम लगभग 5 मिनट में श्रीनगर से कन्याकुमारी पहुंच सकते हैं!

बोध प्रश्न 5 – चंद्रमा पर पलायन वेग

चंद्रमा की सतह पर पलायन वेग का परिकलन करें। चंद्रमा का द्रव्यमान 7.35×10^{22} kg है और त्रिज्या 1.74×10^6 m ।

इसी के साथ हम संरक्षी बलों के अधीन गति का वर्णन करने के लिए संरक्षी बलों, स्थितिज ऊर्जा और यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण पर यह चर्चा समाप्त करते हैं। अगले भाग में हम चर्चा में असंरक्षी बलों को शामिल करके ऊर्जा संरक्षण का व्यापक नियम बताने जा रहे हैं।

10.5 ऊर्जा संरक्षण नियम



चित्र 10.10: शुष्क घर्षण बल।

उदाहरण 10.2 में आपने दो अलग-अलग पथों पर घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य प्राप्त किया था। आप किस परिणाम पर पहुंचे थे? **दोनों पथों के लिए किया गया कार्य भिन्न था**। अतः, संरक्षी बल की परिभाषा से, **घर्षण बल संरक्षी नहीं है** और इसके लिए हम स्थितिज ऊर्जा फलन परिभाषित नहीं कर सकते। आपने सीखा कि **ऐसे बल** (घर्षण, वायु प्रतिरोध, पानी के कारण प्रतिरोध, आदि) **जिनके लिए किया गया कार्य कण के पथ पर निर्भर करता है, असंरक्षी बल कहलाते हैं**।

जब कण या निकाय पर असंरक्षी बल लगते हैं, तो उसकी यांत्रिक ऊर्जा घट जाती है और आम तौर पर उस कण या निकाय की ऊर्जा में हुई कमी (या क्षय) ऊष्मा के रूप में दिखाई देती है। इसीलिए, असंरक्षी बलों को **क्षयकारी बल** (dissipative force) भी कहा जाता है। अब हम कुछ **महत्त्वपूर्ण असंरक्षी बलों** का संक्षेप में वर्णन करेंगे।

- **शुष्क घर्षण बल**

आपने एक दूसरे के संपर्क में रखी **दो ठोस सतहों के बीच लग रहे घर्षण बलों** के बारे में पढ़ा है। जब वे सतहें विरामावस्था में होती हैं तो उनके बीच स्थैतिक घर्षण बल लगता है। जब वे एक-दूसरे के सापेक्ष गतिमान होती हैं तो उन पर गतिक घर्षण बल लगता है। ये बल किसी भी पिंड की गति की दिशा के विपरीत दिशा में लगते हैं (चित्र 10.10)।

- **तरल घर्षण बल**

चित्र 10.11: तरल घर्षण बल।

जब कोई ठोस किसी तरल या गैसीय माध्यम में गति करता है तो उस पर लग रहे घर्षण बल को **तरल घर्षण बल** कहते हैं। यह संपर्क में स्थित ठोस की सतह और तरल के बीच लगता है और तरल माध्यम में ठोस के आपेक्षिक वेग $\vec{v}$ पर निर्भर करता है। इसके उदाहरण हैं : जब कोई पिंड वायु में गति करता है तो उस पर वायु द्वारा आरोपित **वायु प्रतिरोध** या जल या अन्य तरल में गतिमान कण पर लग रहा **श्यान बल** (चित्र 10.11)। v के मानों के एक बड़े परास के लिए, **तरल घर्षण बल** का मान होता है:

$$F_{fr}(v) = C_1 v + C_2 v^2$$

जहां C_1 और C_2 दिए हुए तरल में दिए हुए पिंड के लिए अचर होते हैं। तरल घर्षण बल हमेशा $\vec{v}$ की दिशा के विपरीत दिशा में लगता है।

- **अप्रत्यास्थ विकृति के बल**

किसी पिंड पर लग रहे अप्रत्यास्थ विकृति के बल उसकी सतह को प्रत्यास्थता सीमा से परे विकृत कर देते हैं (चित्र 10.12)। ऐसी स्थितियों में, यांत्रिक ऊर्जा, प्रत्यास्थ विकृतियों की आंतरिक ऊर्जा में रूपांतरित हो जाती है।

अप्रत्यास्थ विकृति का एक और जाना पहचाना उदाहरण एक कमानी का है जिसे प्रत्यास्थता सीमा से परे खींच दिया गया हो या संपीडित कर दिया गया हो। जब उस पर से बाह्य बल हटा दिया जाता है, तो वह अपनी प्रारंभिक लंबाई पर वापिस नहीं पहुंचती। हम कहते हैं कि कमानी में अप्रत्यास्थ विकृति हो गई है। विकृति लाने वाले बल असरंक्षी होते हैं और ठीक-ठीक परिभाषित नहीं होते। इन बलों द्वारा किए गए कार्य का अपरोक्ष रूप से अनुमान भर लगाया जा सकता है – कुल यांत्रिक ऊर्जा में हुई हानि का पता लगाकर।

चित्र 10.12: अप्रत्यास्थ विकृति का बल।

ऊर्जा संरक्षण नियम प्राप्त करने के लिए, अब आइए, देखें कि उन निकायों के लिए जिन पर संरक्षी बल और असंरक्षी दोनों प्रकार के बल लगते हैं, कार्य-ऊर्जा प्रमेय का स्वरूप क्या होता है।

इसके लिए हम निकाय पर लग रहे कुल बल को संरक्षी ($\vec{\mathbf{F}}_c$) और असंरक्षी ($\vec{\mathbf{F}}_{nc}$) बलों के योग के रूप में लिखते हैं :

$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_c + (\vec{\mathbf{F}}_{nc}) \qquad (10.11)$$

कार्य-ऊर्जा प्रमेय से, जो सभी प्रकार के बलों पर लागू होती है, हमें बिंदु A से बिंदु B तक कण को ले जाने में किए गए कार्य का मान मिलता है :

$$W_{total} = \int_A^B \vec{\mathbf{F}}.d\vec{\mathbf{r}} = \int_A^B \vec{\mathbf{F}}_c.d\vec{\mathbf{r}} + \int_A^B \vec{\mathbf{F}}_{nc}.d\vec{\mathbf{r}} = \Delta \text{K.E.} \qquad (10.12)$$

आपने सीखा है कि **संरक्षी बल द्वारा किए गए कार्य को स्थितिज ऊर्जा फलन के पदों में भी लिखा जा सकता है** (याद करें समीकरण 10.1ख)। अतः, हम लिख सकते हैं :

$$W_{total} = -U_B + U_A + W_{nc}, \text{ जहां } W_{nc} = \int_A^B \vec{\mathbf{F}}_{nc} \cdot d\vec{\mathbf{r}} \qquad (10.13)$$

समीकरण 10.13 को समीकरण 10.12 में रखने पर हमें मिलता है :

$$W_{total} = -U_B + U_A + W_{nc} = K_B - K_A \qquad (10.14)$$

समीकरण 10.14 के पदों को हम इस तरह व्यवस्थित कर सकते हैं :

$$K_B + U_B - (K_A + U_A) = W_{nc} \qquad (10.15)$$

या $$E_B - E_A = \Delta E_{mechanical} = W_{nc} \qquad (10.16)$$

असंरक्षी बलों के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय

जहां E_B और E_A क्रमशः बिंदु B और बिंदु A पर कण की कुल यांत्रिक ऊर्जाएं हैं। समीकरण 10.12 और 10.13 से 10.16 तक के समीकरण **असंरक्षी घटक वाले बलों के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय निरूपित करते हैं**। यदि असंरक्षी बलों द्वारा किया गया कार्य शून्य हो, तो इन समीकरणों से हमें यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम प्राप्त होता है : $E_B = E_A$। इस तरह हमने यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम को और व्यापक बना दिया है।

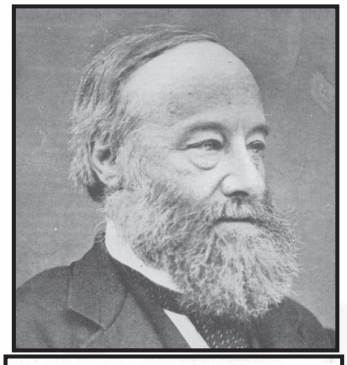
किसी कण की जिस पर असंरक्षी बल लग रहे हों, यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित रहती है बशर्ते उन असंरक्षी बलों द्वारा उस पर किया गया कार्य शून्य हो। यह बात **यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम** में **"केवल"** शब्द द्वारा व्यक्त होती है।

अब आइए, हम व्यापक कार्य-ऊर्जा प्रमेय का उपयोग करके ऊर्जा संरक्षण नियम प्राप्त करें।

ऊर्जा संरक्षण नियम समीकरण 10.16 और समीकरणों 9.7 और 9.16ख द्वारा दी गई कार्य-ऊर्जा प्रमेय का एक व्यापक रूप है। यह एक अत्यन्त व्यापक नियम है जो एक वियुक्त निकाय में ऊर्जा के सभी स्वरूपों पर लागू होता है। आइए, समझें कि इस बात का क्या अर्थ है।

अभी तक आपने पढ़ा है कि **किसी दिए हुए बल द्वारा किए गए कार्य** को **ऊर्जा के किसी न किसी स्वरूप में परिवर्तन** के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। उदाहरण के लिए,

- गुरुत्व बल या गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किया गया कार्य **गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन** के रूप में व्यक्त होता है।
- कमानी को प्रत्यास्थता सीमा के भीतर खींचने में कमानी बल द्वारा किया गया कार्य उसकी **प्रत्यास्थ ऊर्जा में परिवर्तन** के रूप में व्यक्त होता है।



जेम्स प्रेस्कॉट जूल (4 दिसंबर, 1818 – 11 अक्टूबर, 1889) और वह उपकरण जिसका प्रयोग कर उन्होंने ऊष्मा का अध्ययन किया और यांत्रिक कार्य के साथ उसका संबंध खोजा। उनके शोध से ऊर्जा संरक्षण की धारणा बनी और ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम विकसित हुआ। उन्होंने लॉर्ड केल्विन के साथ काम करके परम तापमान का पैमाना भी विकसित किया और प्रतिरोध के लिए धारा प्रवाह तथा उसमें उत्पन्न ऊष्मा के बीच संबंध भी दिया, जो जूल का नियम कहलाता है।

घर्षण जैसे असंरक्षी बलों द्वारा **किए गए कार्य** के बारे में हम क्या कह सकते हैं? यह ऊर्जा के किस स्वरूप से संबद्ध है? आइए, पता लगाएं।

जब दो सतहों के बीच में घर्षण बल लगता है तो क्या होता है? उदाहरण के लिए, जब हम खुरदुरी मेज़ पर एक ब्लॉक को खिसकाते हैं तो क्या होता है? हम पाते हैं कि दोनों सतहें गरम हो जाती हैं। या जब हम किन्हीं भी दो खुरदरी सतहों को एक-दूसरे पर रगड़ते हैं तो वे गरम हो जाती हैं। हम कहते हैं कि घर्षण बल के कारण **यांत्रिक ऊर्जा, ऊष्मा में रूपांतरित हो गई है**। इस परिणाम पर हम कैसे पहुंचते हैं?

यह समझ ब्रिटेन के भौतिकीविद् **जेम्स प्रेस्कॉट जूल** के शोध से बनी जिन्होंने सबसे पहले इस बात को प्रदर्शित किया और यह भी दिखाया कि ऊष्मा भी ऊर्जा का एक रूप है। कुछ बेहतरीन प्रयोगों में गिरते हुए भार द्वारा एक छोटी सी रहट को चला कर उन्होंने दर्शाया कि घर्षण के कारण निकाय में **यांत्रिक ऊर्जा की हानि होती है पर इसी के साथ निकाय में तुल्य मात्रा में ऊष्मा उपस्थित हो जाती है**। इस तरह, जूल ने निष्कर्ष निकाला कि **ऊष्मा, ऊर्जा का एक स्वरूप है** और **निकाय की यांत्रिक ऊर्जा और ऊष्मा का योग संरक्षित रहता है**।

अतः, हम कह सकते हैं कि **घर्षण बल** द्वारा किया गया कार्य परिवेश में **ऊष्मा** के रूप में **क्षयित ऊर्जा** द्वारा व्यक्त किया जा सकता है।

यदि निकाय या पिंड पर दोनों कमानी बल और घर्षण बल लग रहे हैं तो इन बलों द्वारा किया गया कुल कार्य प्रत्यास्थ ऊर्जा में परिवर्तन और ऊष्मा के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

यह बात हम सौ से अधिक सालों से जानते हैं कि **ऊर्जा के अनेक भिन्न रूप** हैं : यांत्रिक ऊर्जा, ऊष्मा, गुरुत्वीय ऊर्जा, प्रत्यास्थ ऊर्जा, विद्युत् ऊर्जा, ध्वनि, रासायनिक

ऊर्जा, प्रकाश एवं अन्य विद्युत्-चुंबकीय तरंगों से संबद्ध विकिरण ऊर्जा, नाभिकीय ऊर्जा, और द्रव्यमान से संबद्ध ऊर्जा। और इनमें से प्रत्येक को हम एक सूत्र या व्यंजक द्वारा व्यक्त कर सकते हैं। यह बात भी अब स्पष्ट है कि ऊर्जा की अवधारणा एक यांत्रिक निकाय की गतिज और स्थितिज ऊर्जा के मुकाबले कहीं अधिक व्यापक है। अतः, **ऊर्जा संरक्षण नियम को हम ब्रह्मांड में मौजूद सभी प्रकार की ऊर्जाओं के लिए व्यापक बना सकते हैं और उसे एक वियुक्त निकाय पर लागू कर सकते हैं।**

आप पूछ सकते हैं : **वियुक्त निकाय** से हमारा क्या तात्पर्य है?

एक वियुक्त निकाय में न तो ऊर्जा और न ही पदार्थ निकाय से बाहर जा सकते हैं या उसके भीतर आ सकते हैं। इसी तरह के निकायों पर ऊर्जा संरक्षण नियम लागू होता है।

हम किसी पिंड या निकाय की **यांत्रिक ऊर्जा** और **अन्य हर प्रकार की ऊर्जा** (जिसमें तापीय, वैद्युत्, रासायनिक, ध्वनि, विद्युत्-चुंबकीय ऊर्जा आदि शामिल हैं) के योग को निकाय की **कुल ऊर्जा** कहते हैं। तब **कुल ऊर्जा में परिवर्तन** है :

$$\Delta E_{total} = \Delta E_{mechanical} + \Delta E_{other} \qquad (10.17)$$

ऊर्जा संरक्षण नियम

1. **एक वियुक्त निकाय की कुल ऊर्जा में परिवर्तन शून्य होता है यदि उस निकाय में ऊर्जा के सभी स्वरूपों को गणना में लिया जाता है :**

$$\Delta E_{total} = \Delta E_{mechanical} + \Delta E_{other} = 0 \qquad (10.18)$$

2. इसका अर्थ है कि

$$E = \text{अचर} \qquad (10.19)$$

ऊर्जा संरक्षण नियम

यानी **वियुक्त निकाय की कुल ऊर्जा संरक्षित रहती है यदि उस निकाय में ऊर्जा के सभी स्वरूपों को गणना में ले लिया गया हो।**

ऊर्जा संरक्षण नियम वियुक्त निकायों पर लागू होता है जिसका अर्थ है कि हम न तो निकाय में किसी भी रूप में ऊर्जा या पदार्थ डाल रहे हैं और न ही निकाल रहे हैं। ऐसे में जब हम वियुक्त निकाय की ऊर्जा की गणना करते हैं (जिसमें न तो हम ऊर्जा या पदार्थ डाल रहे हैं न निकाल रहे हैं), तो निकाय की कुल ऊर्जा सदैव अचर रहती है।

कभी न भूलें

वियुक्त निकायों में, ऊर्जा के एक स्वरूप में हुई हानि, ऊर्जा के किसी अन्य रूप में हुई वृद्धि के रूप में दिखाई देती है। उदाहरण के लिए, घर्षण के कारण चाल कम होने से गतिज ऊर्जा में हुई कमी, ऊष्मा में वृद्धि के रूप में दिखाई देती है। इस तरह, **ऐसे निकाय की ऊर्जा में कुल परिवर्तन** (जो ऊर्जा के भिन्न स्वरूपों में हुए परिवर्तन के कुल योग के बराबर है) **सदैव शून्य रहेगा**। इस बात को हम ऐसे भी कहते हैं :

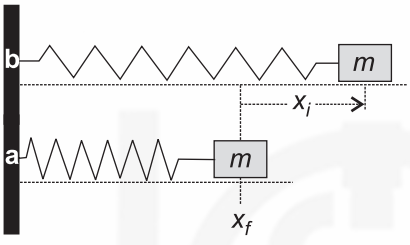
ऊर्जा को न तो उत्पन्न किया जा सकता है न ही नष्ट। यह केवल एक स्वरूप से दूसरे स्वरूप में परिवर्तित या रूपांतरित होती है।

ऊर्जा संरक्षण नियम एक व्यापक नियम है जो सभी संभव स्थितियों और प्रक्रियाओं पर लागू होता है : वे जिनमें गति शामिल है, ऊष्मा से संबद्ध, या जिनमें रासायनिक, वैद्युत्, नाभिकीय, विकिरण ऊर्जा शामिल हैं, आदि। गति इनमें से सिर्फ़ एक प्रक्रिया है। ऊर्जा संरक्षण नियम एकल कण की अपेक्षा कणों के निकाय के लिए अधिक अर्थपूर्ण है और एक "वियुक्त" निकाय पर लागू होता है।

आइए, अब हम ऊर्जा संरक्षण नियम को एक भौतिक स्थिति पर लागू करें।

उदाहरण *10.6* : ऊर्जा संरक्षण नियम

कमानी से जुड़ा एक ब्लॉक घर्षण वाली सतह पर क्षैतिजतः फिसलता है। कमानी द्वारा ब्लॉक को विरामावस्था से स्थिति $d = 0.02\,\text{m}$ तक खींचकर छोड़ दिया जाता है। साम्यावस्था की स्थिति पर ब्लॉक की चाल क्या है? ब्लॉक का द्रव्यमान 1.0 kg है और कमानी नियतांक $500\,\text{Nm}^{-1}$ है। गतिक घर्षण गुणांक $\mu_k = 0.12$ और $g = 10\ \text{ms}^{-2}$ है।



चित्र 10.13 : उदाहरण 10.6 के लिए चित्र।

हल ■ यहां **मुख्य विचार** यह है कि निकाय की सीमा ऐसे चुनी जाए कि वह वियुक्त हो और फिर उस पर ऊर्जा संरक्षण नियम लागू किया जाए। हमें ऊर्जा में परिवर्तन निकालते समय यांत्रिक ऊर्जा, प्रत्यास्थ ऊर्जा और घर्षण जैसे असंरक्षी बल के कारण तापीय ऊर्जा को शामिल करना होगा।

चित्र 10.13 देखें जिसमें कमानी-ब्लॉक निकाय को दिखाया गया है। समीकरण 10.18 से, $\Delta E_{total} = \Delta E_{mechanical} + \Delta E_{other} = 0$ है। चूंकि ब्लॉक कमानी से जुड़ा है, उसकी कुल यांत्रिक ऊर्जा, उसकी गतिज ऊर्जा, गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा और प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा का योग है। साथ ही, चूंकि ब्लॉक क्षैतिज गति कर रहा है, अतः, वह एक ही ऊंचाई पर रहता है और उसकी गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा नहीं बदलती। अतः, $(\Delta\text{P.E.})_{grav} = 0$ और उसकी आरंभिक और अंतिम स्थितियों में यांत्रिक ऊर्जा में परिवर्तन होता है :

$$\Delta E_{mechanical} = \Delta\text{K.E.} + (\Delta\text{P.E.})_{elastic} = \frac{m}{2}\left(v_f^2 - v_i^2\right) + \frac{k}{2}\left(x_f^2 - x_i^2\right)$$

चूंकि ब्लॉक को विरामावस्था से छोड़ा जाता है, अतः, $v_i = 0$, और साम्यावस्था पर उसकी स्थिति $x_f = 0$ है। अतः,

$$\Delta E_{mechanical} = \frac{1}{2}\left(m v_f^2\right) - \frac{1}{2}\left(k x_i^2\right)$$

अब चूंकि घर्षण बल ही एकमात्र असंरक्षी बल है, अतः,

$$\Delta E_{thermal} = -W_{fr}, \quad \text{जहां} \quad W_{fr} = -(\mu_k mg)d \qquad (\because F_{fr} = \mu_k F_N = \mu_k mg)$$

$$\therefore \quad \Delta E_{total} = \frac{1}{2}\left(m v_f^2\right) - \frac{1}{2}\left(k x_i^2\right) + \mu_k\, mg\, d = 0$$

$$\therefore \quad v_f^2 = \left(\frac{k x_i^2}{m}\right) - 2\mu_k\, g\, d$$

दिए गए प्रश्न में आंकिक मान रखने पर हमें मिलता है : $v_f = 0.39\ \text{ms}^{-1}$

इस इकाई के अंत में हम बता रहे हैं कि भौतिकी की समस्याओं को हल करने के लिए ऊर्जा संरक्षण नियम का प्रयोग कैसे किया जाता है। चित्र 10.14 में हमने दिखाया है कि आपको समुचित ऊर्जा समीकरणों का चुनाव कैसे करना चाहिए।

भौतिकी में समस्या समाधान के लिए ऊर्जा संरक्षण नियमों का उपयोग

यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण :

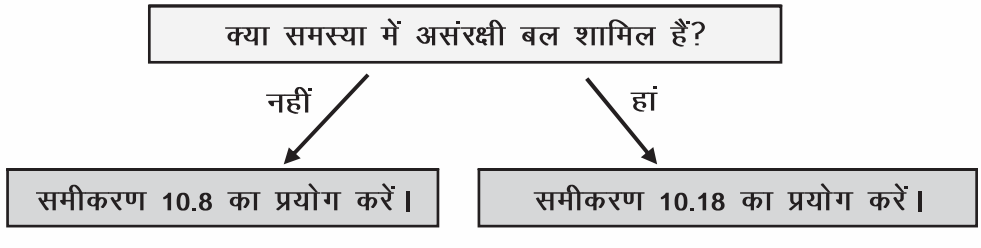
ध्यान रखें : यह नियम उन कणों या निकायों पर लागू होता है जिन पर **केवल** संरक्षी बलों द्वारा कार्य किया जा रहा हो।

1. निकाय की **प्रारंभिक** और **अंतिम** अवस्थाओं को, जो स्थितियों और वेगों द्वारा अभिलक्षित होती हैं, पहचानें। आरंभिक स्थिति को अधोलिखित अक्षर *i* या 1 से दर्शाएं और अंतिम स्थिति को *f* या 2 से।
2. समस्या के लिए समुचित निर्देशांक तंत्र चुनें। स्थितिज ऊर्जा के लिए समुचित संदर्भ स्तर चुनें जो इस पर निर्भर करेगा कि संरक्षी बल किस प्रकार का है (गुरुत्व, कमानी बल या गुरुत्वाकर्षण बल, आदि)।
3. प्रारंभिक और अंतिम गतिज ऊर्जाओं और स्थितिज ऊर्जाओं की सूची बनाएं। पहचानें कि इनमें से कौन सी ज्ञात हैं या किनकी गणना की जा सकती है और कौन सी अज्ञात हैं।
4. ज्ञात और अज्ञात गतिज ऊर्जाओं और स्थितिज ऊर्जाओं के मान (समीकरण 10.1ख से) यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम (समीकरण 10.8) में रखें और अज्ञात राशियों के मान निकालें।

ऊर्जा संरक्षण :

ध्यान रखें : यह नियम **केवल वियुक्त निकायों पर** लागू होता है, यानी वे निकाय जिन पर नेट बाह्य बल शून्य है और जिनसे न तो पदार्थ, न ही ऊर्जा अंदर या बाहर आ जा सकते हैं।

1. उस निकाय को निर्धारित करें जिस पर आप यह नियम लागू करना चाहते हैं। निकाय की परिसीमा भी निर्धारित करें यानी तय करें कि क्या निकाय के **अंदर** है और क्या उसके **बाहर**।
2. निकाय की **प्रारंभिक** और **अंतिम** अवस्थाओं को, जो स्थितियों और वेगों द्वारा अभिलक्षित होती हैं, पहचानें। आरंभिक स्थिति को अधोलिखित अक्षर *i* या 1 से दर्शाएं और अंतिम स्थिति को *f* या 2 से।
3. निकाय पर लग रहे असंरक्षी बल पहचानें और उनसे संबद्ध ऊर्जा ज्ञात करें।
4. ज्ञात और अज्ञात चर पहचानें और समीकरण 10.18 लागू करके अज्ञात राशि प्राप्त करें।



चित्र 10.14 : दी गई समस्या के लिए सही समीकरण का चुनाव कैसे करें?

अब हम इस इकाई की अवधारणाओं का सारांश देंगे।

10.6 सारांश

अवधारणा	विवरण

संरक्षी बल

■ कोई भी बल **संरक्षी** होता है यदि इसके द्वारा एक गतिमान कण पर किया गया कार्य उस कण की आरंभिक और अंतिम स्थितियों के बीच चले गए पथ पर निर्भर नहीं करता : **वह केवल कण की आरंभिक और अंतिम स्थितियों पर निर्भर करता है और उन बिन्दुओं को मिलाने वाले सभी पथों के लिए समान होता है।**

$$\int_A^B \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} \quad = \quad \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} \quad = \quad (\vec{r}_B) \text{ का फलन } - (\vec{r}_A) \text{ का फलन}$$

कोई भी बल **संरक्षी** होता है यदि **इसके द्वारा बंद पथ** (जो एक ही बिंदु से शुरू होकर उसी पर ख़त्म होता हो) **पर किया गया कुल कार्य शून्य होता है।**

स्थितिज ऊर्जा

■ दो स्थितियों $\vec{\mathbf{r}}_B$ और $\vec{\mathbf{r}}_A$ के बीच **स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन** ΔU का मान, एक संरक्षी बल द्वारा कण को $\vec{\mathbf{r}}_A$ से $\vec{\mathbf{r}}_B$ तक ले जाने में किए गए **कार्य के ऋणात्मक मान** के बराबर होता है :

$$\Delta U = U_B - U_A = U(\vec{r}_B) - U(\vec{r}_A) = -\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

स्थितिज ऊर्जा केवल संरक्षी बलों के लिए परिभाषित की जाती है और केवल स्थितिज ऊर्जा में अंतर ही अर्थपूर्ण है।

कणों के निकाय की **स्थितिज ऊर्जा** उस पर तब किए गए **कार्य के ऋणात्मक मान के बराबर होती है** जब उस निकाय की **स्थिति**, **आकार** या **विन्यास** में परिवर्तन होता है। **स्थितिज ऊर्जा कण या निकाय की स्थिति, आकार या विन्यास बदलने के लिए उसकी (कण या निकाय की) कार्य करने की क्षमता के बराबर होती है।**

यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण

■ यदि **किसी कण या निकाय पर केवल संरक्षी बलों द्वारा कार्य किया जाता है, तो उस कण या निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा (गतिज ऊर्जा और स्थितिज ऊर्जा का योग) संरक्षित रहती है :**

$$E_f = E_i$$

जहां $E_f = K_f + U_f$ और $E_i = K_i + U_i$

स्थितिज ऊर्जा से बल

■ स्थितिज ऊर्जा फलन $U(x)$ के **संगत बल** होता है :

$$F_x = -\frac{dU(x)}{dx}$$

असंरक्षी बल

■ वे बल जो संरक्षी **नहीं** होते **असंरक्षी बल** कहलाते हैं। ऐसे बलों के लिए (घर्षण, वायु प्रतिरोध, पानी के कारण प्रतिरोध, आदि) **किया गया कार्य कण के पथ पर निर्भर करता है।**

असंरक्षी बलों के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय

■ यदि कण पर लग रहे बल में **असंरक्षी घटक** हो यानी

$$\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc}$$

तब बल के लिए **कार्य-ऊर्जा प्रमेय** होती है :

$$W_{nc} = \Delta E_{mechanical}$$

जहां $$W_{nc} = \int_A^B \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r}$$

और $$\Delta E_{mechanical} = (K_f + U_f) - (K_i + U_i)$$

ऊर्जा संरक्षण नियम

■ **यदि ऊर्जा के सभी रूपों को लिया जाए तो वियुक्त निकाय की कुल ऊर्जा में परिवर्तन शून्य होता है:**

$$\Delta E_{total} = \Delta E_{mechanical} + \Delta E_{thermal} + \Delta E_{other} = 0$$

यानी E = अचर

वियुक्त निकाय की कुल ऊर्जा संरक्षित रहती है यदि ऊर्जा के सभी रूपों को शामिल कर लिया गया हो।

10.7 अंत में कुछ प्रश्न

1. नीचे दी गई प्रत्येक स्थिति में संरक्षी और असंरक्षी बलों की पहचान करें।

   क) कमानी से जुड़ा एक ब्लॉक ऊर्ध्वाधरतः दोलन करता है और वायु प्रतिरोध नगण्य है।

   ख) मछली पकड़ने के लिए एक पक्षी झील में ऊर्ध्वाधरतः गोता लगाता है। पानी का प्रतिरोध परिमित है।

   ग) एक मोटरसाइकिल सवार वायु की दिशा के विपरीत पहाड़ी पर खुरदुरे पथ पर चलता है।

   घ) एक डिब्बा चिकने नत तल पर अचर त्वरण से फिसलता है।

2. मान लें कि एक पिंड की कुल यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित रहती है। क) यदि गतिज ऊर्जा घटती है तो स्थितिज ऊर्जा के लिए क्या सत्य होगा? ख) यदि स्थितिज ऊर्जा घटती है तो गतिज ऊर्जा के लिए क्या सत्य होगा? ग) यदि गतिज ऊर्जा नहीं बदलती तो स्थितिज ऊर्जा के लिए क्या सत्य होगा?

3. नीचे दिए गए विकल्पों में से सही विकल्प चुनें और अपने उत्तर का कारण दें। वायु प्रतिरोध नगण्य मानने पर मुक्त रूप से गिर रहे पिंड की स्थितिज और गतिज ऊर्जाओं का योग

   क) घटता है।

   ख) बढ़ता है।

   ग) अचर रहता है।

   घ) शून्य की ओर प्रवृत्त होता है।

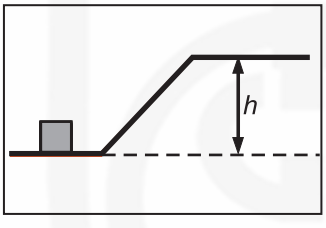
4. सही विकल्प चुनें। एक गोताखोर पानी से 15.0 m की ऊंचाई पर स्थित पटल से गोता लगाती है। जब वह पानी की सतह से 7.50 m की ऊंचाई पर होती है, तब

   क) उसका वेग पानी की सतह पर पहुंचने के क्षण पर उसके वेग का आधा होगा।

   ख) उसकी गतिज ऊर्जा और पानी की सतह के सापेक्ष उसकी स्थितिज ऊर्जा बराबर हैं।

   ग) उसके गतिज ऊर्जा और रैखिक संवेग बराबर हैं।

   घ) उसके रैखिक संवेग और स्थितिज ऊर्जा बराबर हैं।



चित्र 10.15

5. द्रव्यमान 100 g की एक गेंद 10 m की ऊंचाई से विरामावस्था से ऊर्ध्वाधरतः नीचे की ओर फेंकी जाती है। क्रमशः 10 m, 5.0 m और 0 m की ऊंचाइयों पर गेंद की गतिज ऊर्जा, गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा और कुल यांत्रिक ऊर्जा प्राप्त करें। वायु प्रतिरोध नगण्य मानें और $g = 10\ ms^{-2}$ लें।

6. द्रव्यमान m का एक खंड ऊंचाई h के घर्षणहीन रैम्प पर ऊपर की ओर गतिमान है (देखें चित्र 10.15)। उसकी आरंभिक न्यूनतम चाल क्या है?

7. एक मजदूर (भार 5.0 N वाली) एक ईंट ऊपर फेंकता है और तब उसका हाथ भूमि से 4.0 m की ऊंचाई पर है। क) जब ईंट की भूमि से ऊंचाई 4.5 m हो तब गुरुत्व बल द्वारा किए गए कार्य की गणना करें। कार्य के लिए सही चिन्ह का उपयोग करें। ख) ईंट की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा में अंतर $(\Delta U = U_f - U_i)$ प्राप्त करें।

8. द्रव्यमान 100 kg का एक बक्स विरामावस्था से एक नत समतल पर 6.0 m की ऊंचाई से छोड़ा जाता है। जब बक्स नत समतल के निचले सिरे पर पहुंचता है तब उसकी चाल $10\ ms^{-1}$ होती है। इस प्रक्रिया में उत्पन्न ऊष्मा की गणना करें। $g = 10\ ms^{-2}$ लें।

9. द्रव्यमान 25 kg की एक बच्ची विरामावस्था से पेड़ पर 12 m की दूरी तक फिसलती है। भूमि पर पहुंचने से ठीक पहले बच्ची की चाल $6.0\ ms^{-1}$ है। बच्ची पर आरोपित औसत घर्षण बल ज्ञात करें। $g = 10\ ms^{-2}$ लें।

10. लकड़ी के एक घन को 9.0 N के क्षैतिज बल से खुरदुरे फ़र्श पर अचर चाल से 5.0 m की दूरी तक धकेला जाता है। इस दौरान उसके तापमान को लगातार मापा जाता है और पाया जाता है कि घन की तापीय ऊर्जा में 25 J की वृद्धि हुई है। उस फ़र्श की जिस पर घन फिसलता है, तापीय ऊर्जा में कितनी वृद्धि होती है?

10.8 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. उदाहरण 9.6 में हमने कमानी बल ($\vec{\mathbf{F}} = -k\vec{\mathbf{x}}$) द्वारा एक कमानी को x_1 से x_2 तक विस्थापन $\vec{\mathbf{x}}$ देने में किया गया कार्य ज्ञात किया है :

$$W = W_{1\to 2} = -\frac{k}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right)$$

अब मान लें कि हम कमानी को x_1 से x_2 तक एक दूसरे पथ के अनुदिश विस्थापन $\vec{\mathbf{x}}$ द्वारा विस्थापित करते हैं : पहले हम स्थिति x_1 से किसी स्थिति x_3 तक कमानी को संपीडित करते हैं और फिर इसे अंतिम स्थिति x_2 तक पहुँचाने से पहले एक अन्य स्थिति x_4 तक खींचते हैं। इस स्थिति में कमानी द्वारा किया गया कार्य है :

$$W = W_{1\to 3} + W_{3\to 1} + W_{1\to 2} + W_{2\to 4} + W_{4\to 2}$$

$$= \int_{x_1}^{x_3} F_x\,dx + \int_{x_3}^{x_1} F_x\,dx + \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx + \int_{x_2}^{x_4} F_x\,dx + \int_{x_4}^{x_2} F_x\,dx$$

उदाहरण 9.6 के अनुसार गणना करके आप देख सकते हैं कि

$W_{1\to 3} = -W_{3\to 1}$ और $W_{2\to 4} = -W_{4\to 2}$ जिससे कि

$$W = W_{1\to 2} = -\frac{k}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right)$$

चूंकि कमानी बल द्वारा किया गया कार्य कमानी द्वारा चले गए पथ पर निर्भर नहीं करता, अतः, हम कह सकते हैं कि **आदर्श कमानी बल संरक्षी बल** है। आप यह भी देख सकते हैं कि कमानी बल, संरक्षी बल की दूसरी परिभाषा को भी संतुष्ट करता है क्योंकि

$$W_{1\to 1} = W_{1\to 2} + W_{2\to 1}$$

$$= W_{1\to 2} - W_{1\to 2} = 0$$

2. चूंकि कमानी बल ($\vec{\mathbf{F}} = -k\vec{\mathbf{x}}$) द्वारा एक कमानी को x_1 से x_2 तक विस्थापन $\vec{\mathbf{x}}$ देने में किया गया कार्य है :

$$W = -\int_{x_1}^{x_2} k\,x\,dx = -\frac{k}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right)$$

अतः, समीकरण 10.1ख से हम लिख सकते हैं : $U_2 - U_1 = -W = \frac{k}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right)$

एक बार फिर, यदि हम आरंभिक स्थिति को $x_1 = 0$ पर लें और अंतिम स्थिति को $x_2 = x$ पर तो हम लिख सकते हैं : $U = \frac{1}{2}kx^2$ । साम्यावस्था $x = 0$ के सापेक्ष कमानी बल द्वारा या उसके विरुद्ध किए गए कार्य से संबद्ध स्थितिज ऊर्जा $U = \frac{1}{2}kx^2$ को **प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा** कहते हैं।

3. मान लें कि $\hat{\mathbf{j}}$ की दिशा ऊपर की ओर है। 10 सीढ़ियों की ऊंचाई 4.0 m है। अतः, हरेक सीढ़ी की ऊंचाई 0.4 m है।

   i) बच्चे की भूमि से ऊंचाई 4.0 m है। अतः, भूमि के सापेक्ष बच्चे की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा है :

   $$U = M\text{kg} \times 9.8\text{ms}^{-2} \times 4.0\text{m} = (39.2M)\text{J} \approx (39M)\text{J}$$

   ii) दूसरी सीढ़ी की भूमि से ऊंचाई $(0.4\text{m}) \times 2 = 0.8\text{m}$ है। अतः, दूसरी सीढ़ी के सापेक्ष बच्चे की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा है :

   $$U = M\text{kg} \times 9.8\text{ms}^{-2} \times (4.0\text{m} - 0.8\text{m}) = (31.36M)\text{J} \approx (31M)\text{J}$$

   iii) पांचवीं सीढ़ी की भूमि से ऊंचाई $(0.4\text{m}) \times 5 = 2.0\text{m}$ है। अतः, पांचवीं सीढ़ी के सापेक्ष बच्चे की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा है :

   $$U = M\text{kg} \times 9.8\text{ms}^{-2} \times (4.0\text{m} - 2.0\text{m}) = (19.6M)\text{J} \approx (20M)\text{J}$$

   iv) द्वितीय तल के सापेक्ष, जो बच्चे से 4.0 m की ऊंचाई पर है, जब बच्चा प्रथम तल पर है, बच्चे की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा है :

   $$U = M\text{kg} \times 9.8\text{ms}^{-2} \times (0 - 4.0\text{m}) = -(39.2M)\text{J} \approx -(39M)\text{J}$$

4. जब गोताखोर h m की ऊंचाई से कूदती है, तो समीकरण 10.4ख से, उसकी कुल यांत्रिक ऊर्जा है

   $$E = K_i + U_i = \frac{1}{2}m \times (1.5\text{ms}^{-1})^2 + m \times 10\ \text{ms}^{-2} \times h \qquad \text{(i)}$$

   जो उसकी गतिज ऊर्जा और स्थितिज ऊर्जा का योग है। यहां m गोताखोर का द्रव्यमान है। गोताखोर की अंतिम ऊर्जा, केवल उसकी गतिज ऊर्जा है क्योंकि उसकी स्थितिज ऊर्जा शून्य है।

   $$\therefore \quad K_f + U_f = \frac{1}{2}m \times (4.5\text{ms}^{-1})^2 \qquad \text{(ii)}$$

   क्योंकि कुल यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित रहती है, अतः, हम समीकरणों (i) और (ii) को बराबर रखते हैं। अतः,

   $$\frac{1}{2}m \times (1.5\text{ms}^{-1})^2 + m \times 10\text{ms}^{-2} \times h = \frac{1}{2}m \times (4.5\text{ms}^{-1})^2$$

   $$\therefore \quad h = \frac{[(4.5\text{ms}^{-1})^2 - (1.5\text{ms}^{-1})^2]}{2 \times 10\ \text{ms}^{-2}} = 0.90\text{m}$$

5. चंद्रमा की सतह पर पलायन वेग है $v_{em} = \sqrt{\frac{2GM_m}{R_m}}$

   जहां M_m = चंद्रमा का द्रव्यमान और

   R_m = चंद्रमा की त्रिज्या

   G, M_m और R_m के मान रखने पर हमें मिलता है :

   $$v_{em} = 2.37 \times 10^3\ \text{ms}^{-1}$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. क) इस स्थिति में लग रहे बल हैं गुरुत्व बल और कमानी द्वारा आरोपित प्रत्यानयन बल। ये दोनों बल संरक्षी हैं।

   ख) पक्षी पर लग रहा गुरुत्वाकर्षण बल संरक्षी है। पानी का प्रतिरोध असंरक्षी है।

   ग) मोटरसाइकिल सवार पर लग रहा गुरुत्वाकर्षण बल संरक्षी है। खुरदुरे पथ द्वारा आरोपित घर्षण बल असंरक्षी है। वायु प्रतिरोध असंरक्षी है।

   घ) क्योंकि नत तल चिकना है, घर्षण बल शून्य है। इस स्थिति में लग रहे बल हैं गुरुत्व बल और अभिलंब बल, जो संरक्षी हैं।

2. पिंड की कुल यांत्रिक ऊर्जा उसकी गतिज ऊर्जा और स्थितिज ऊर्जा का योग है। अतः, यदि पिंड की कुल यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित रहती है, तो

   क) यदि गतिज ऊर्जा घटती है तो स्थितिज ऊर्जा बढ़ेगी।

   ख) यदि स्थितिज ऊर्जा घटती है तो गतिज ऊर्जा बढ़ेगी।

   ग) यदि गतिज ऊर्जा नहीं बदलती तो स्थितिज ऊर्जा भी नहीं बदलेगी।

3. सही विकल्प (ग) है क्योंकि मुक्त रूप से गिर रहे पिंड पर केवल गुरुत्वाकर्षण बल लगता है जो संरक्षी है। अतः, कुल यांत्रिक ऊर्जा जो गतिज और स्थितिज ऊर्जाओं का योग है अचर रहती है।

4. सही विकल्प (ख) है। मान लें कि गोताखोर का द्रव्यमान m है। पानी से 15.0 m की ऊंचाई पर उसकी गतिज ऊर्जा शून्य है क्योंकि उसकी चाल शून्य है। उसकी कुल ऊर्जा केवल स्थितिज ऊर्जा है : $mgh = (147\ m)$ J। जब वह पानी की सतह से 7.50 m की ऊंचाई पर होती है, तब उसकी स्थितिज ऊर्जा है : $(73.5\ m)$ J। क्योंकि गुरुत्वाकर्षण बल संरक्षी है, गोताखोर की कुल यांत्रिक ऊर्जा अचर रहती है। अतः, गोताखोर की गति की किसी भी अवस्था में, कुल यांत्रिक ऊर्जा $(147\ m)$ J है। चूंकि 7.50 m की ऊंचाई पर उसकी स्थितिज ऊर्जा $(73.5\ m)$ J है, उसकी गतिज ऊर्जा है : $[(147 - 73.5)\ m]$ J = $(73.5\ m)$ J जो उसकी स्थितिज ऊर्जा के बराबर है।

5. 10 m की ऊंचाई पर, भूमि के सापेक्ष गेंद की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा है :

$$U = 0.10\ \text{kg} \times 10\,\text{ms}^{-2} \times 10\,\text{m} = 10\,\text{J}$$

   क्योंकि गेंद आरंभ में विरामावस्था में है, उसकी आरंभिक गतिज ऊर्जा शून्य है। समीकरण 10.7ख से, कुल यांत्रिक ऊर्जा $E = 10\,\text{J} + 0 = 10\,\text{J}$ है। 5.0 m की ऊंचाई पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा है

$$U = 0.10\,\text{kg} \times 10\,\text{ms}^{-2} \times 5.0\,\text{m} = 5.0\,\text{J}$$

   क्योंकि गुरुत्वाकर्षण बल संरक्षी है, गेंद की कुल यांत्रिक ऊर्जा (10 J) संरक्षित रहेगी। अतः, 5.0 m की ऊंचाई पर गतिज ऊर्जा है
   $K = 10\,\text{J} - 5.0\,\text{J} = 5.0\,\text{J}$। 0 m की ऊंचाई पर, स्थितिज ऊर्जा शून्य है। अतः, गतिज ऊर्जा, कुल यांत्रिक ऊर्जा के बराबर है और 10 J है।

6. गति के आरंभ में खंड में केवल गतिज ऊर्जा है : $K_i = \frac{1}{2}mu^2$ जहां u खंड की आरंभिक चाल है। आरंभिक स्थितिज ऊर्जा $U_i = 0$ है। अधिकतम ऊंचाई पर

गतिज ऊर्जा शून्य है और स्थितिज ऊर्जा mgh है। समीकरण 10.8 से हमें मिलता है :

$$\frac{1}{2}mu^2 + 0 = 0 + mgh \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{2gh}$$

7. क) मज़दूर द्वारा किया गया कार्य है $W = \int_{4.0m}^{4.5m} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ जहां $\vec{\mathbf{F}} = -5.0\text{N}\hat{\mathbf{j}}$ ईंट का भार है और $d\vec{\mathbf{r}} = dy\,\hat{\mathbf{j}}$ उसका विस्थापन। यहां $\hat{\mathbf{j}}$ विस्थापन के अनुदिश एकक सदिश है।

$$W = -\int_{4.0\text{m}}^{4.5\text{m}} 5.0\text{N}\,dy = -\,5.0\text{N} \times (4.5\text{m} - 4.0\text{m}) = -\,2.5\text{J}$$

ख) गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन किए गए कार्य के ऋणात्मक मान के बराबर होता है। अतः, यह 2.5 J है।

8. हम समीकरण 10.16 से निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा में परिवर्तन की गणना करते हैं :

$$\Delta E_{mechanical} = \frac{1}{2} \times (100\,\text{kg}) \times (10\,\text{ms}^{-1})^2 - (100\,\text{kg}) \times (10\,\text{ms}^{-2}) \times 6.0\,\text{m}$$

$$= 5000\,\text{J} - 6000\,\text{J} = -1000\,\text{J} = -1.0 \times 10^3\,\text{J}$$

अतः, इस प्रक्रिया में उत्पन्न कुल ऊष्मा 1.0×10^3 J है।

9. हम कुल यांत्रिक ऊर्जा में परिवर्तन की गणना करते हैं :

$$\Delta E_{mech} = \frac{1}{2} \times 25 \times (6.0\,\text{ms}^{-1})^2 - 25\,\text{kg} \times 10\,\text{ms}^{-2} \times 12\,\text{m}$$

$$= 450\,\text{J} - 3000\,\text{J} = -2550\,\text{J}$$

औसत घर्षण बल $\vec{\mathbf{F}}_{fr}$ के विरुद्ध किया गया कार्य है 2550 J। अतः,

$\vec{\mathbf{F}}_{fr} \cdot \vec{\mathbf{d}} = 2550$ J जहां $\vec{\mathbf{F}}_{fr} = F_{fr}\,\hat{\mathbf{j}}$ और $\vec{\mathbf{d}} = (12\,\text{m})\,\hat{\mathbf{j}}$

और $$F_{fr} = \frac{2550}{12}\text{N} = 2.1 \times 10^2\,\text{N}$$

10. मान लें कि निकाय में घन, फ़र्श और नेट बाह्य बल निकाय की परिसीमा के भीतर हैं। तब यह एक वियुक्त निकाय है। मान लें कि $\hat{\mathbf{i}}$ बल के अनुदिश एकक सदिश है। बल द्वारा किया गया कार्य है

$$W = \int_0^{5.0\text{m}} 9.0\text{N}\hat{\mathbf{i}} \cdot dx\,\hat{\mathbf{i}} = 45\text{J}$$

घन की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन शून्य है क्योंकि उसकी चाल अचर है। घन की कुल यांत्रिक ऊर्जा में परिवर्तन उसकी स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन के बराबर है जो बल द्वारा किए गए कार्य के ऋणात्मक मान के बराबर है।

$$\therefore \quad \Delta E_{mech} = -\,45\,\text{J}$$

घन की तापीय ऊर्जा में परिवर्तन 25 J है। चूंकि वियुक्त निकाय की कुल ऊर्जा ऊर्जा संरक्षित रहती है, तो समीकरण 10.18 से, इस स्थिति में

$$-\,45\,\text{J} + 25\,\text{J} + \Delta E_{thermal}^{floor} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta E_{thermal}^{floor} = 20\,\text{J}$$

जहां $\Delta E_{\text{thermal}}^{\text{floor}}$ फ़र्श की तापीय ऊर्जा में वृद्धि है।

भौतिक नियतांकों की तालिका

प्रतीक	राशि	मान
c	निर्वात में प्रकाश की चाल	3.00×10^{8} ms^{-1}
μ_0	मुक्त आकाश की चुंबकशीलता	1.26×10^{-6} NA^{-2}
ε_0	मुक्त आकाश की विद्युत्शीलता	8.85×10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}
$1/4\pi\varepsilon_0$		8.99×10^{9} Nm^2 C^{-2}
e	प्रोटॉन का आवेश	1.60×10^{-19} C
$-e$	इलेक्ट्रॉन का आवेश	-1.60×10^{-19} C
h	प्लांक नियतांक	6.63×10^{-34} Js
$\hbar$	$h / 2\pi$	1.05×10^{-34} Js
m_e	इलेक्ट्रॉन का विराम द्रव्यमान	9.11×10^{-31} kg
$-e/m_e$	इलेक्ट्रॉन के आवेश और द्रव्यमान का अनुपात	-1.76×10^{11} Ckg^{-1}
m_p	प्रोटॉन का विराम द्रव्यमान	1.67×10^{-27} kg (1 amu)
m_n	न्यूट्रॉन का विराम द्रव्यमान	1.68×10^{-27} kg
a_0	बोर त्रिज्या	5.29×10^{-11} m
N_A	आवोगाद्रो नियतांक	6.02×10^{23} mol^{-1}
R	सार्वत्रिक गैस नियतांक	8.31 Jmol^{-1}K^{-1}
k_B	बोल्ट्समान नियतांक	1.38×10^{-23} J K^{-1}
G	सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक	6.67×10^{-11} Nm^2 kg^{-2}

खगोल भौतिकीय आंकड़े

खगोलीय पिंड	द्रव्यमान (kg)	माध्य त्रिज्या (m)	पृथ्वी के केंद्र से माध्य दूरी (m)
सूर्य	1.99×10^{30}	6.96×10^{8}	1.50×10^{11}
चंद्रमा	7.35×10^{22}	1.74×10^{6}	3.84×10^{8}
पृथ्वी	5.97×10^{24}	6.37×10^{6}	0

BPHCT-131 के खंडों और इकाइयों की सूची

खंड 1 : प्रारंभिक गणितीय अवधारणाएं

इकाई 1 सदिश बीजगणित – I

इकाई 2 सदिश बीजगणित – II

इकाई 3 प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणें

इकाई 4 अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण

खंड 2 : यांत्रिकी की बुनियादी अवधारणाएं

इकाई 5 न्यूटन के गति के नियम और बल की अवधारणा

इकाई 6 न्यूटन के गति के नियमों को लागू करना

इकाई 7 गुरुत्वाकर्षण

इकाई 8 रैखिक संवेग और आवेग

इकाई 9 कार्य और गतिज ऊर्जा

इकाई 10 स्थितिज ऊर्जा और ऊर्जा का संरक्षण

खंड 3 : घूर्णी गति और बहु-कण निकाय

इकाई 11 कोणीय गति की शुद्धगतिकी

इकाई 12 घूर्णी गति की गतिकी

इकाई 13 केन्द्रीय बलों के अधीन गति

इकाई 14 बहु-कण निकायों की गतिकी

इकाई 15 बहु-कण निकायों के लिए संरक्षण नियम

खंड 4 : आवर्ती दोलन

इकाई 16 सरल आवर्त गति

इकाई 17 आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण

इकाई 18 अवमंदित दोलन

इकाई 19 तरंग गति

पाठ्यक्रम : यांत्रिकी (BPHCT-131) 4 क्रेडिट

सदिश बीजगणित: सदिशों का ज्यामितीय और बीजगणितीय निरूपण; सदिश बीजगणित; अदिश और सदिश गुणनफल; किसी अदिश के सापेक्ष सदिश के अवकलज।

प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण : समघात प्रथम कोटि अवकल समीकरण (पृथक्करणीय और रैखिक प्रथम कोटि अवकल समीकरण)।

द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण : अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि समघात अवकल समीकरण।

गति के नियम : निर्देश तंत्र; न्यूटन के गति के नियम; सरल रैखिक गति; समतल में गति; एकसमान वर्तुल गति; त्रिविमीय गति।

न्यूटन के गति के नियमों के अनुप्रयोग : घर्षण; तनाव; गुरुत्वाकर्षण; कमानी-द्रव्यमान निकाय – हुक का नियम; वृत्ताकार कक्षा में उपग्रह की गति और उसके अनुप्रयोग; भूतुल्यकाली कक्षाएं; भूमंडलीय स्थिति निर्धारण प्रणाली (जी पी एस) की अवधारणा; भार और भारहीनता।

रैखिक संवेग और आवेग : संवेग संरक्षण; आवेग; आवेग-संवेग प्रमेय; रॉकेट की गति।

कार्य और ऊर्जा : कार्य और ऊर्जा; ऊर्जा संरक्षण; सीधा और द्विविम संघट्टन।

कोणीय गति की शुद्धगतिकी : कोणीय गति की शुद्धगतिकी, कोणीय विस्थापन, कोणीय वेग और कोणीय त्वरण; व्यापक कोणीय गति।

घूर्णी गति की गतिकी : बल आघूर्ण; जड़त्व आघूर्ण; घूर्णी गतिज ऊर्जा; कोणीय संवेग, कोणीय संवेग संरक्षण और उसके अनुप्रयोग।

केंद्रीय बल क्षेत्र के अधीन गति : केंद्रीय बल क्षेत्र में कण की गति (समतल में गति, कोणीय संवेग संरक्षण, समान क्षेत्रफल नियम); केप्लर के नियम (केवल कथन)।

बहु-कण निकायों की गतिकी : बहु-कण निकायों की गतिकी, संहति केंद्र; असंतत द्रव्यमान बंटन के लिए संहति केंद्र निर्धारण; दृढ़ पिंड का संहति केंद्र (गुणात्मक विवरण)।

संरक्षण नियम : बहु-कण निकायों के लिए रैखिक संवेग, कोणीय संवेग और ऊर्जा संरक्षण।

सरल आवर्त गति : सरल आवर्त गति; सरल आवर्त गति का अवकल समीकरण और उसके हल; सरल आवर्त गति में गतिज ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा और कुल ऊर्जा और उनके कालिक माध्य।

आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण : रैखिकता और अध्यारोपण सिद्धांत, दो समान या असमान आवृत्ति वाले संरेख आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण; समान या असमान आवृत्ति वाले दो परस्पर लंबवत् आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण; लिसाजू की आकृतियाँ और उनके उपयोग।

अवमंदित दोलन : अवमंदित दोलन के लिए गति समीकरण और उसका हल (बिना व्युत्पत्ति के); प्रबल, क्रांतिक और दुर्बल अवमंदन के लिए हलों का गुणात्मक विवरण; अवमंदन के अभिलक्षण – लघुगणकीय अपक्षय, विश्रांति काल और गुणता कारक।

तरंग गति : गुणात्मक विवरण (तरंग निर्माण और संचरण; तरंग गति का वर्णन, तरंग वेग, आवृत्ति और तरंग दैर्घ्य; तरंग गति का गणितीय वर्णन)

शब्दावली

त्वरण	**Acceleration**	स्थिर वैद्युत बल	**Electrostatic force**
क्रिया	**Action**	ऊर्जा	**Energy**
अनुरूप	**Analogous**	साम्यावस्था	**Equilibrium**
अनुरूपता	**Analogy**	साम्य स्थिति	**Equilibrium position**
प्रक्षेपण कोण	**Angle of projection**	परिमित	**Finite**
कोणीय त्वरण	**Angular acceleration**	तरल	**Fluid**
कोणीय विस्थापन	**Angular displacement**	आकर्षण बल	**Force of attraction**
कोणीय संवेग	**Angular momentum**	प्रतिकर्षण बल	**Force of repulsion**
कोणीय गति	**Angular motion**	अप्रत्यास्थ विकृति का बल	**Force of inelastic deformation**
कोणीय स्थिति	**Angular position**	निर्देश तंत्र	**Frame of reference**
कोणीय चाल	**Angular speed**	बल निर्देशक आरेख	**Free-body diagram**
कोणीय वेग	**Angular velocity**	मुक्त रूप से गिरना	**Free-fall**
वामावर्त	**Anti-clockwise, Counter-clockwise**	घर्षण	**Friction**
क्षेत्रफल	**Area**	मूलभूत	**Fundamental**
औसत	**Average**	भूस्थावर	**Geostationary**
अक्ष	**Axis**	गुरुत्वाकर्षण	**Gravitation**
पिंड	**Body, object**	गुरुत्वीय	**Gravitational**
परिबद्ध	**Bounded**	गुरुत्व	**Gravity**
कार्तीय निर्देशांक	**Cartesian coordinates**	क्षैतिज	**Horizontal**
केन्द्रीय बल	**Central force**	आवेग	**Impulse**
अभिकेन्द्र	**Centripetal**	अत्यल्प	**Infinitesimal**
परिवर्तन	**Change**	तात्क्षणिक	**Instantaneous**
वर्तुल गति	**Circular motion**	समाकल, समाकलन	**Integral, integration**
दक्षिणावर्त	**Clockwise**	पारस्परिक क्रिया	**Interaction**
घटक	**Component**	अंतराल	**Interval**
अवधारणा	**Concept**	वियुक्त निकाय	**Isolated system**
विन्यास	**Configuration**	शुद्धगतिकी	**Kinematics**
संरक्षण	**Conservation**	घूर्णी गतिज ऊर्जा	**Kinetic energy of rotation**
संरक्षी बल	**Conservative force**	रैखिक संवेग	**Linear momentum**
अचर	**Constant**	परिमाण	**Magnitude**
निर्देशांक तंत्र	**Coordinate system**	द्रव्यमान	**Mass**
बलयुग्म	**Couple**	यांत्रिकी	**Mechanics**
वक्र	**Curve**	यांत्रिक ऊर्जा	**Mechanical energy**
क्षयकारी बल	**Dissipative force**	जड़त्व आघूर्ण	**Moment of inertia**
विस्थापन	**Displacement**	उदासीन साम्यावस्था	**Neutral equilibrium**
गतिक, गतिकी	**Dynamic, Dynamics**	असंरक्षी बल	**Non-conservative force**

अजड़त्वीय	**Non-inertial**
असमान गति	**Non-uniform motion**
अभिलंब बल	**Normal force**
कार्य-रहित बल	**No-work force**
प्रेक्षक	**Observer**
एकविम	**One-dimensional**
कक्षा, कक्षीय	**Orbit, Orbital**
मूल बिंदु	**Origin**
समांतर	**Parallel**
दोलक	**Pendulum**
लंबवत्	**Perpendicular**
भौतिक	**Physical**
समतल ध्रुवीय निर्देशांक	**Plane polar coordinates**
स्थिति सदिश	**Position vector**
स्थितिज रोधक	**Potential barrier**
स्थितिज ऊर्जा	**Potential energy**
शक्ति	**Power**
त्रिज्य	**Radial**
दर	**Rate**
प्रतिक्रिया	**Reaction**
संदर्भ अक्ष	**Reference axis**
प्रतिरोध, प्रतिरोधी बल	**Resistance, resistive force**
विरामावस्था	**Rest**
प्रत्यानयन बल	**Restoring force**
परिणामी	**Resultant**
परिक्रमण	**Revolution**
दक्षिण-हस्त नियम	**Right-hand rule**
दृढ़ पिंड	**Rigid body**
घूर्णन	**Rotation**
घूर्णी	**Rotational**
उपग्रह	**Satellite**
सार्थक अंक	**Significant digits**
प्रवणता	**Slope**
चाल	**Speed**
कमानी बल	**Spring force**
स्थायित्व	**Stability**
स्थायी साम्यावस्था	**Stable equilibrium**
स्थैतिक घर्षण	**Static friction**
अध्यारोपण	**Superposition**
निकाय	**System**
स्पर्शरेखीय	**Tangential**
तनाव	**Tension**
तापीय ऊर्जा	**Thermal energy**
त्रिविम	**Three-dimensional**
आवर्तकाल	**Time period**
बल आघूर्ण	**Torque**
स्थानान्तरण	**Translation**
अनुप्रस्थ	**Transverse**
द्विविम	**Two-dimensional**
एकसमान गति	**Uniform motion**
इकाई	**Unit**
अस्थायी साम्यावस्था	**Unstable equilibrium**
परिवर्तनशील, चर बल	**Variable force**
वेग	**Velocity**
ऊर्ध्वाधर	**Vertical**
श्यान बल	**Viscous force**
निर्बल नाभिकीय बल	**Weak nuclear force**
भार, भारहीनता	**Weight, Weightlessness**
कार्य	**Work**
कार्य-ऊर्जा प्रमेय	**Work-energy theorem**

ignou
THE PEOPLE'S
UNIVERSITY