इग्नू
जन-जन का
विश्वविद्यालय
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
विज्ञान विद्यापीठ

BPHCT-131
यांत्रिकी

खंड
1

प्रारंभिक गणितीय अवधारणाएं

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति

प्रो. अजय घटक (सेवानिवृत्त)
आई आई टी, दिल्ली
नई दिल्ली

डॉ. नरेश कुमार (सेवानिवृत्त)
हिन्दू कॉलेज
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

डॉ. प्रगति अशधीर
हिन्दू कॉलेज
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

प्रो. एस. सी. गर्ग
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय, नई दिल्ली

डॉ. शुभलक्ष्मी लांबा
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय, नई दिल्ली

प्रो. विजयश्री
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय, नई दिल्ली

प्रो. सुदीप रंजन झा
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय, नई दिल्ली

प्रो. एस. गोखले
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय, नई दिल्ली

डॉ. संजय गुप्ता
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय, नई दिल्ली

खंड निर्माण दल

डॉ. शुभलक्ष्मी लांबा (इकाइयां 1, 2)
विज्ञान विद्यापीठ, इग्नू, नई दिल्ली

प्रो. विजयश्री (इकाई 3)
विज्ञान विद्यापीठ, इग्नू, नई दिल्ली

प्रो. एस. सी. गर्ग (इकाई 4)
विज्ञान विद्यापीठ, इग्नू, नई दिल्ली

पाठ्यक्रम समन्वयक : डॉ. शुभलक्ष्मी लांबा और प्रो. सुदीप रंजन झा

अनुवाद

प्रो. विजयश्री (इकाइयां 1, 2, 3)
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

प्रो. एस. सी. गर्ग (इकाई 4)
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

खंड मुद्रण

श्री सुनील कुमार
सहायक कुलसचिव (प्रकाशन), इग्नू

अगस्त, 2019

ISBN: 978-93-89499-95-7

अस्वीकरण: इस पाठ्यक्रम में इंटरनेट से ली गई सामग्री का उपयोग केवल शैक्षणिक उद्देश्य के लिए किया गया है, व्यावसायिक उद्देश्य के लिए नहीं।

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय के पाठ्यक्रमों के विषय में और अधिक जानकारी विश्वविद्यालय के कार्यालय मैदान गढ़ी, नई दिल्ली.110 068 और इग्नू की वेबसाइट www.ignou.ac.in. *से प्राप्त की जा सकती है।*

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की ओर से प्रो. पूर्णिमा मितल, निदेशक, विज्ञान विद्यापीठ द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित।

लेज़र टाईपसेटिंग एवं मुद्रकः गीता ऑफसेट प्रिंटर्स प्रा. लि., सी–90, ओखला औद्योगिक क्षेत्र, फेज़–1, नई दिल्ली–20

विषय-सूची

यांत्रिकी : पाठ्यक्रम परिचय

अपनी रोज़मर्रा की ज़िंदगी में हमें तरह-तरह की वस्तुओं की गति देखने को मिलती है। **वस्तुओं की गति और साम्यावस्था में विराम की स्थिति में वस्तुओं के ज्ञान से संबंधित भौतिकी की शाखा को यांत्रिकी (mechanics)** कहते हैं। जब आप साइकिल की सवारी करते हैं, भारी वज़न उठाते हैं, फुटबॉल खेलते हैं या मकान बनाते हैं, तो आप यांत्रिकी के नियम इस्तेमाल कर रहे होते हैं। अंतरिक्ष युग के अनेक लुभावने विकास, जैसे कि अंतरिक्ष यानों (spacecrafts) और कृत्रिम उपग्रहों (artificial satellites) को छोड़ना, यांत्रिकी के नियमों के सीधे अनुप्रयोग हैं।

हम यांत्रिकी के नियम कहां इस्तेमाल करते हैं?

आज यांत्रिकी को भौतिकी का सर्वाधिक आधारभूत क्षेत्र माना जाता है। भौतिकी के अन्य क्षेत्रों, जैसे तरंगों (waves), ऊष्मीय भौतिकी (thermal physics), विद्युत्-चुम्बकत्व (electromagnetism), प्रकाशिकी (optics) आदि के अध्ययन के लिए आपको यांत्रिकी की अच्छी ख़ासी जानकारी होना ज़रूरी है।

अतः, बी. एससी. में भौतिकी के पहले पाठ्यक्रम के तौर पर यांत्रिकी का पाठ्यक्रम दिया जा रहा है। इस 4 क्रेडिट के पाठ्यक्रम में आप विस्तार से यांत्रिकी की आधारभूत अवधारणाओं और नियमों का अध्ययन करेंगे और उन्हें पिंडों की गति पर लागू करेंगे। हम अनेक प्रकार के पिंडों की स्थानांतरण-गति, कोणीय/घूर्णी गति और दोलनी गति की चर्चा करेंगे। इस पाठ्यक्रम में 4 खंड हैं।

आपने इनमें से अनेक अवधारणाओं को स्कूल की भौतिकी के पाठ्यक्रम में पढ़ा है। आप जानते हैं कि भौतिकी के नियमों और अवधारणाओं को गणित की भाषा में बहुत ही सटीक ढंग से व्यक्त किया जा सकता है। अतः, इस पाठ्यक्रम के **"प्रारंभिक गणितीय अवधारणाएं"** नामक **खंड 1** में हम यांत्रिकी के अध्ययन के लिए आवश्यक गणित की प्रारंभिक अवधारणाएं समझाएंगे। इस खंड में आप सदिश बीजगणित की बुनियादी अवधारणाएं समझेंगे और अदिशों के सापेक्ष सदिश फलनों के अवकलज निकालना सीखेंगे। आप प्रथम और द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों को हल करना भी सीखेंगे।

"यांत्रिकी की बुनियादी अवधारणाएं" नामक **खंड 2** में आप **शुद्धगतिकी** और **गतिकी** की उन अवधारणाओं को दोहराएंगे जिन्हें आपने स्कूल में पढ़ा है। इनमें **न्यूटन के गति के नियम** और **बल**, **संवेग**, **आवेग**, **कार्य** और **ऊर्जा** की अवधारणाएं शामिल हैं। यहां हम इन अवधारणाओं की विस्तार से चर्चा करेंगे और उन्हें अनेक सरल स्थितियों में कणों की स्थानांतरण-गति पर लागू करेंगे। उदाहरण के लिए, आप गुरुत्व और वायु प्रतिरोध के अधीन गिर रहे पैराशूटधारी की गति, बक्से की नत समतल पर

या खुरदुरे फ़र्श पर घर्षण बल के अधीन गति, गैस उत्सर्जित होने पर रॉकेट की गति आदि का अध्ययन करेंगे।

"घूर्णी गति और बहु-कण निकाय" नामक **खंड 3 कोणीय/घूर्णी गति**, **बल आघूर्ण** और **कोणीय संवेग** के बारे में है। साथ ही इसमें आप **रैखिक संवेग**, **ऊर्जा** और **कोणीय संवेग** के तीन महत्वपूर्ण **संरक्षण नियमों** के बारे में भी पढ़ेंगे। हम इन अवधारणाओं को एकल कण, द्वि-कण और बहु-कण निकायों की गति से जुड़ी अनेक सरल और जटिल स्थितियों पर लागू करेंगे। उदाहरण के लिए, आप वक्राकार पथों पर गाड़ियों की, पृथ्वी के चारों ओर चंद्रमा और भूतुल्यकाली उपग्रहों की, सूर्य के चारों ओर पृथ्वी और अन्य ग्रहों की, डम्बेल की, फेरिस व्हील या मेरी-गो-राउन्ड पर खेल रहे बच्चों की गति, कणों के संघट्टन आदि का अध्ययन करेंगे।

खंड 4 की विषयवस्तु **"आवर्ती दोलन"** है जो आप प्रकृति में आम तौर पर देखते हैं। दोलनी गति के उदाहरण हैं दोलन करता हुआ लोलक, गिटार या वीणा के कंपन करते तार, क्रिस्टल जालक में अपनी साम्यावस्था के प्रति परमाणुओं के कंपन, हृदय की धड़कनें आदि। दोलनी गति की सही समझ दो कारणों से महत्वपूर्ण है। पहला यह कि अनेक प्रकार के यांत्रिक और अयांत्रिक निकायों की गतियां दोलनी होती हैं। दूसरा और शायद अधिक महत्वपूर्ण कारण यह है कि तरंग परिघटनाओं के अध्ययन के लिए दोलनी गति की अच्छी समझ नितांत आवश्यक है। खंड की शुरुआत में हम सरल आवर्ती गति और आवर्ती दोलक पर अवमंदन के प्रभाव की चर्चा करेंगे। चूंकि दोलनी गति और तरंग परिघटनाएं एक-दूसरे से संबद्ध हैं, अतः, खंड 4 में दोलनों पर अपनी चर्चा का अंत हम तरंग परिघटना के संक्षिप्त परिचय से करेंगे।

अंत में, कुछ बातें इस बारे में कि आप इस पाठ्यक्रम को कैसे पढ़ें। पाठ्यक्रम के खंड 1 में आप खंड 2, 3 और 4 की विषयवस्तु को समझने के लिए आवश्यक गणित सीखेंगे। गणित का भौतिकी के अनुप्रयोगों में सही उपयोग करने के लिए केवल ज्ञान ही काफ़ी नहीं, बल्कि कौशल भी होना चाहिए और आप जानते हैं कि कौशल अभ्यास से ही आता है। गणितीय विधियों में आवश्यक कौशल पाने के लिए आपको पाठ्य सामग्री में दिए गए चरणों और उदाहरणों को खुद करना होगा और सभी प्रश्नों को हल करना होगा। इसलिए जब भी आप पढ़ने बैठें, अपने साथ कागज़ और पेंसिल अवश्य रखें। जैसा कि आप जानते हैं, भौतिकी को कहानी की तरह पढ़ कर नहीं समझा जा सकता। आपको अवधारणाओं को तो समझना है ही, साथ ही अपनी तार्किक क्षमता का विकास भी करना है और तरह-तरह के सवालों को हल करना भी सीखना है। पठन सामग्री में दिये गये सभी गणित के चरणों को खुद हल करें।

इस पाठ्यक्रम में अनेक हल किए गए उदाहरण, प्रत्येक इकाई में बोध प्रश्न और इकाई के अंत में प्रश्न दिए गए हैं। आप इन उदाहरणों, बोध प्रश्नों और अंत में दिए गए प्रश्नों के उत्तर केवल पढ़ें नहीं, इन्हें स्वयं हल करने की कोशिश करें। यह बात बाकी सभी खंडों पर भी लागू होती है। पाठ्यक्रम सामग्री में बहुत से प्रश्न तो सिर्फ़ अभ्यास के लिए हैं – पर कुछ चुनौतीपूर्ण प्रश्न भी दिए गए हैं। आप अपने अध्ययन को तब तक पूरा न समझें जब तक कि आप इनमें से अधिकांश प्रश्नों को हल न कर सकें।

हमारी शुभकामनाएं आपके साथ हैं कि आप पाठ्यक्रम में दिए प्रश्नों को हल करके इस सामग्री को अच्छी तरह समझ सकें। हम आपकी सफलता की कामना करते हैं।

खंड 1 : प्रारंभिक गणितीय अवधारणाएं

इस पाठ्यक्रम के पहले खंड में, इकाइयों 1 और 2 में सदिश बीजगणित की आरंभिक संकल्पनाओं की चर्चा और इकाइयों 3 और 4 में साधारण अवकल समीकरणों की चर्चा की गई है।

स्कूल की भौतिकी और गणित के पाठ्यक्रमों में आपने अदिश और सदिश राशियों के बारे में पढ़ा है। उदाहरण के लिए, आप जानते हैं कि लंबाई, द्रव्यमान, घनत्व और तापमान अदिश राशियां हैं। आप यह भी जानते हैं कि विस्थापन, वेग, त्वरण, बल और संवेग सदिश राशियां हैं।

"सदिश बीजगणित–I'' नामक **इकाई 1** में आप अदिशों और सदिशों की परिभाषाएं और सदिशों का ज्यामितीय निरूपण दोहराएंगे जो आप स्कूल में पढ़ चुके हैं। आप सदिशों के ज्यामितीय निरूपण का उपयोग करके सदिश योग और घटाना, और अदिश और सदिश गुणनफल की अवधारणाएं भी दोहराएंगे। फिर आप सदिशों और सदिश बीजगणित के बारे में विस्तार से पढ़ेंगे। **"सदिश बीजगणित–II''** नामक **इकाई 2** में आप सदिशों को, दिए हुए निर्देशांक तंत्र के सापेक्ष, उनके घटकों के पदों में व्यक्त करना सीखेंगे। आप सदिशों को घटक रूप में जोड़ना, घटाना और गुणा करना भी सीखेंगे। सदिश बीजगणित का इस रूप में अध्ययन करना आपके लिए ज़रूरी है क्योंकि भौतिकी के पाठ्यक्रमों में आप इन परिणामों का काफ़ी ज्यादा उपयोग करेंगे। इकाई 2 में आप सदिश फलनों (यानी वे सदिश जो एक या अधिक अदिशों के फलन हों) और उनके गुणनफलों को अवकलित करना सीखेंगे।

इकाइयों 3 और 4 में, हम साधारण अवकल समीकरणों को हल करने की विधियां समझाएंगे। **"प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणें"** नामक **इकाई 3** में हम पहले साधारण अवकल समीकरणों से संबंधित बुनियादी परिभाषाएं और उनका वर्गीकरण समझाएंगे। साथ ही, हम व्यापक हल और विशेष हल की अवधारणाएं भी समझाएंगे। फिर हम इन समीकरणों को हल करने की कुछ विधियां समझाएंगे और यांत्रिकी, रेडियोएक्टिव क्षय और विद्युत् परिपथों से इनके उदाहरण देंगे। इकाई 3 के परिशिष्ट में हमने संक्षेप में दो या अधिक चरों के फलनों के आंशिक अवकलज निकालने का तरीका समझाया है। इकाई 3 पढ़ने से पहले आप इस परिशिष्ट को ध्यान से पढ़ लें।

"अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण" नामक **इकाई 4** में आप ऐसे समीकरणों को हल करने की विधियां सीखेंगे। साथ ही, आप दोलनी तंत्रों में इनके अनुप्रयोग भी सीखेंगे। इकाइयां 3 और 4 आपके लिए बिल्कुल नई हो सकती हैं। आप इन्हें ध्यान से पढ़ें और इनमें दिए गए सभी उदाहरणों, बोध प्रश्नों और इकाई के अंत में दिए गए प्रश्नों को स्वयं हल करें।

हम आशा करते हैं कि इस खंड को पढ़ने में आपको आनंद आएगा और हम फिर से आपकी सफलता की कामना करते हैं।

पक्षी का भूमि के सापेक्ष वेग क्या है? उत्तर जानने के लिए, अंत में दिया प्रश्न 3क हल करें !

इकाई 1

सदिश बीजगणित–I

इकाई की रूपरेखा

अध्ययन निर्देशिका

हम आशा करते हैं कि आपने (+2) या ग्यारहवी-बारहवीं कक्षा में भौतिकी और गणित पढ़े होंगे। इसलिए हम यह मान कर चलेंगे कि इस इकाई में दी गई सदिश बीजगणित की मूल संकल्पनाएं आपको मालूम हैं। तो हम उन्हें जल्दी से दोहराएंगे। आप इस इकाई में दी गई संकल्पनाओं को दोहरा ज़रूर लें ताकि आपको ये संकल्पनाएं अच्छी तरह समझ में आ जाएं। तभी आप बाकी इकाइयों को पढ़ें। हमने इस इकाई की शुरूआत में पूर्व परीक्षण प्रश्न और हर भाग में बोध प्रश्न दिए हैं। हर प्रश्न को हल करने में आपको लगभग 5 से 10 मिनट या इससे कम लगना चाहिए। अगर आप इन्हें हल कर लेते हैं तो तब आप जान लें कि आप ये बुनियादी सदिश अवधारणाएं अच्छी तरह समझते हैं। तब आप उन भागों को बेशक न पढ़ें। नहीं तो, आप इन भागों को अच्छी तरह ध्यान से पढ़ें ताकि आप इनमें दिए गए सवालों को हल कर सकें। तभी आप अगली इकाई पढ़ें। हां, ध्यान रहे कि आप सवालों को खुद हल करें और उनके जवाब पहले देखने के लालच से बचें!

> **"गणित को लेकर आपको जो कठिनाइयां आती हैं उनसे परेशान होने की आवश्यकता नहीं है। मैं आपको विश्वास दिला सकता हूं कि मेरी कठिनाइयां उनसे भी ज़्यादा हैं।"**
>
> **अल्बर्ट आइंस्टीन**

1.1 परिचय

आप **http://www.math.mcgill.ca/labute/courses/133f03/VectorHistory.html** पर सदिशों का इतिहास पढ़ सकते हैं।

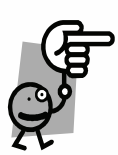
आपने अपनी भौतिकी की स्कूली शिक्षा के दौरान अनेक भौतिक राशियों के बारे में पढ़ा है। साथ ही आपने इन राशियों को अदिश और सदिश राशियों में वर्गीकृत करना भी सीखा है। उदाहरण के लिए, आप यह जानते हैं कि द्रव्यमान, तापमान और समय अदिश राशियां हैं। आप यह भी जानते हैं कि वेग, संवेग, त्वरण, विद्युत् क्षेत्र आदि सदिश राशियां हैं। **आपको यह ज़रूर समझना चाहिए कि सदिशों की अवधारणा एक गणितीय अवधारणा है जिसका प्रयोग हम अपने संसार के वास्तविक भौतिक गुणधर्मों का वर्णन करने के लिए करते हैं**। जिस रूप में हम आज सदिशों का प्रयोग करते हैं, उस रूप में सदिशों की अवधारणा उन्नीसवीं और बीसवीं सदी में विकसित हुई हालांकि इससे कुछ भिन्न रूप में इनका इतिहास काफ़ी पुराना है।

इस इकाई में हम **सदिशों की बुनियादी अवधारणाओं को दोहराएंगे**। भाग 1.2 में आप भौतिक राशियों के अदिश और सदिश राशियों में वर्गीकरण को दोहराएंगे और उनके **ज्यामितीय निरूपण** को फिर से सीखेंगे। भाग 1.3 में आप इस निरूपण का प्रयोग करके **सदिशों के योग**, **घटाने** और **अदिश और सदिश राशियों को गुणा** करने पर कुछ प्रश्न हल करेंगे। भाग 1.4 में आप **अदिश** और **सदिश गुणनफल** दोहराएंगे और कुछ भौतिक राशियों को अदिश और सदिश गुणनफलों के रूप में व्यक्त करेंगे। प्रत्येक भाग में आप उसमें दी गई अवधारणाओं पर प्रश्न भी हल करेंगे। अगली इकाई में आप सदिशों के बीजगणितीय निरूपण को दोहराएंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- ❖ भौतिक राशियों को अदिश राशियों और सदिश राशियों में वर्गीकृत कर सकेंगे;
- ❖ एक सदिश को उसके ज्यामितीय रूप में व्यक्त कर सकेंगे;
- ❖ एकक सदिश की परिभाषा दे सकेंगे;
- ❖ किसी भी दिशा में सदिश का घटक निर्धारित कर सकेंगे;
- ❖ ज्यामितीय निरूपण का प्रयोग करके सदिशों का योग निकाल सकेंगे और एक सदिश से दूसरे सदिश को घटा सकेंगे;
- ❖ सदिशों के अदिश गुणनफल और सदिश गुणनफल की गणना कर सकेंगे; और
- ❖ सदिशों के ज्यामितीय निरूपण का प्रयोग करके सदिश बीजगणित पर आधारित भौतिकी के कुछ सरल प्रश्न हल कर सकेंगे।



कभी न भूलें

अपने लिखित कार्य में सदैव ही जिस अक्षर से आप सदिश को प्रकट करें उस अक्षर के ऊपर एक तीर का निशान ज़रूर लगाएं, उदाहरण के लिए $\vec{r}$ । एकक सदिश को व्यक्त करने के लिए अक्षर के ऊपर एक कैप का निशान लगाएं, उदाहरण के लिए, $\hat{r}$ ।

1.2 अदिश और सदिश राशियां

क्या आपको अदिश और सदिश राशियों की परिभाषाएं याद हैं? यदि हां, तो इन परिभाषाओं का प्रयोग करके नीचे दिए गए पूर्व परीक्षण में कुछ भौतिक राशियों का अदिश और सदिश राशियों में वर्गीकरण करें। अन्यथा भाग 1.2.1 और भाग 1.2.2 को पढ़ें और फिर से इन प्रश्नों को हल करें।

आप पहले से क्या जानते हैं?

1. निम्नलिखित कथनों में दी गई भौतिक राशियों को अदिश और सदिश राशियों में वर्गीकृत करें :

   क) आज का अधिकतम तापमान 42°C रहा।

   ख) ऊपर की दिशा में लिफ़्ट का त्वरण $2\ ms^{-2}$ है।

   ग) मानसून के बादल $2\ kmh^{-1}$ की चाल से चल रहे हैं।

   घ) लोहे का घनत्व $7.9 \times 10^{-3}\ kgm^{-3}$ है।

   च) एक तालाब में फेंका गया पत्थर $0.5\ ms^{-1}$ के वेग से डूबता है।

   छ) सोडियम वाष्प लैंप, तरंगदैर्घ्य 5893 Å का एकवर्णी प्रकाश उत्पन्न करता है।

   ज) पृथ्वी का द्रव्यमान 5.9742×10^{24} kg है।

   झ) दिल्ली के सापेक्ष उत्तर दिशा की ओर ट्रेन का विस्थापन 270 km है।

   त) एक इलेक्ट्रॉन का आवेश 1.6×10^{-19} C है।

   थ) लोहे का गलनांक 1538° C है।

2. निम्नलिखित राशियों में से सदिश राशियों को पहचानें : आवेश, बल, संवेग, चाल, दूरी, आवेग, विद्युत् क्षेत्र, विद्युत् विभव, गलनांक, जड़त्व आघूर्ण, वेग, ऊर्जा, विस्थापन, चुंबकीय क्षेत्र, दाब, भार। अपनी मर्ज़ी की किसी भी दिशा में प्रत्येक सदिश का ग्राफ़ीय निरूपण करें। प्रत्येक सदिश को व्यक्त करने के लिए उपयुक्त प्रतीक का प्रयोग करें।

यदि आपने इन प्रश्नों का सही उत्तर दे दिया है तब आप जानते हैं कि भौतिक राशियों को अदिश और सदिश राशियों में कैसे वर्गीकृत किया जाता है और उनका ज्यामितीय निरूपण कैसे किया जाता है। तब आप भाग 1.2.1 और 1.2.2 को छोड़ कर आगे बढ़ सकते हैं। अन्यथा आप इन भागों को पढ़ें और फिर से पूर्व परीक्षण के प्रश्नों को हल करें।

1.2.1 अदिश राशियां

आपने स्कूल में अनेक भौतिक राशियों के बारे में पढ़ा है जैसे कि द्रव्यमान, लंबाई, आवेश, तापमान आदि। इन राशियों का वर्णन एक संख्या और उसके साथ मापन की इकाई लगा कर किया जाता है। आप जानते हैं कि ऐसी सभी राशियां अदिश राशियां कहलाती हैं। आइए, पहले हम अदिश राशियों की परिभाषा दोहराएं और इनके कुछ गुणधर्मों का कथन दें।

अदिश राशियां

अदिश भौतिक राशियों का वर्णन एक ऐसी संख्या द्वारा किया जाता है जिसके साथ मापन की एक उपयुक्त इकाई लगी होती है।

हम किसी आरेख या समीकरण में एक अदिश को एक अक्षर या प्रतीक द्वारा निरूपित करते हैं जो किसी अदिश राशि के मापन की इकाई और संख्या दोनों का निरूपण करता है। उदाहरण के लिए, हम किसी वस्तु के द्रव्यमान को अक्षर M द्वारा निरूपित करते हैं, जहां M एक संख्या है जिसके साथ एक इकाई जुड़ी है, जैसेकि 60 kg। इसी तरह, पृथ्वी के क्रोड का तापमान T है जहां $T = 300^\circ$C। अदिश राशियों का जोड़, घटाना, गुणा, भाग ठीक साधारण संख्याओं की तरह किया जाता है। वस्तुतः, अंकगणित के सभी नियम अदिश राशियों पर लागू होते हैं। यदि a, b और c, किसी अदिश राशि, जैसेकि द्रव्यमान, के तीन मान हों, तब ये निम्नलिखित गुणधर्मों को संतुष्ट करते हैं :

$$a + b = b + a \qquad (1.1\text{क})$$

$$ab = ba \qquad (1.1\text{ख})$$

$$a + 0 = a \qquad (1.1\text{ग})$$

$$a \times 1 = 1 \times a \qquad (1.1\text{घ})$$

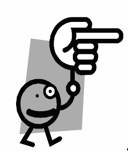
$$a(bc) = (ab)c \qquad (1.1\text{च})$$

$$a(b + c) = ab + ac \qquad (1.1\text{छ})$$

अदिश राशियों का एक अन्य महत्वपूर्ण गुणधर्म होता है :

अदिश एक ऐसी राशि है जिसका मान निर्देशांक तंत्र पर निर्भर नहीं करता। एक अदिश का मान सभी निर्देशांक तंत्रों में समान होता है।

इस गुणधर्म को **निश्चरता (invariance)** कहा जाता है यानी, **निर्देशांक तंत्रों के किसी भी रूपांतरण में अदिश राशियां निश्चर (अचर) रहती हैं।**



कभी न भूलें

अदिश राशियों का मान सभी निर्देशांक तंत्रों में समान होता है। निर्देशांक तंत्रों के किसी भी रूपांतरण में अदिश राशियां निश्चर (अचर) रहती हैं।

1.2.2 सदिश राशियां

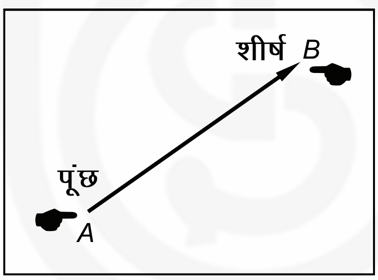
स्कूल की भौतिकी में आपने अनेक सदिश राशियों के बारे में भी पढ़ा है जैसेकि वस्तुओं का विस्थापन, वेग और त्वरण, किसी वस्तु पर लग रहा बल और किसी आवेश का विद्युत् क्षेत्र, आदि। यहां हम सदिश की परिभाषा और उसके ज्यामितीय निरूपण को दोहरा रहे हैं।

सदिश और उनका निरूपण

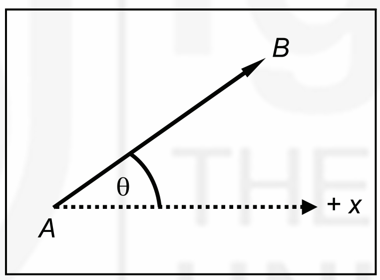
सदिश भौतिक राशियों का वर्णन एक **परिमाण** द्वारा (जो एक ऋणेतर अदिश राशि यानी धनात्मक संख्या होती है) जिसके साथ उचित इकाई लगी हो और समष्टि (space) में एक **दिशा** द्वारा किया जाता है। लेकिन यदि सदिश राशि की विमा (dimension) एक शुद्ध संख्या है, तब हम इसके साथ इकाई नहीं लगाते, जैसेकि एकक सदिशों के लिए।

सदिशों का ज्यामितीय/आलेखीय निरूपण

किसी सदिश के ज्यामितीय या आलेखीय निरूपण के लिए उसका परिमाण और दिशा दोनों दिखाने होते हैं। अतः, एक सदिश को एक **दिष्ट रेखा खंड** या तीर द्वारा दिखाया जाता है। तीर की लंबाई सदिश राशि के **परिमाण** को निरूपित करती है जो एक धनात्मक अदिश राशि होती है। **तीर की नोक सदिश की दिशा में होती है**। तीर की नोक को रेखा खंड के अंत पर या कहीं भी दिखाया जाता है (देखें चित्र 1.1)। चित्र 1.1क में दिखाए गए बिंदु A को सदिश की **पूंछ** (प्रारंभिक बिंदु) कहा जाता है और बिंदु B को सदिश का **शीर्ष** (अंतिम बिंदु) कहा जाता है। सदिश की **दिशा** A **से** B **की ओर** होती है। वह रेखा जिसके अनुदिश सदिश की दिशा होती है सदिश की **कार्य रेखा** कहलाती है। यह चित्र 1.1 में रेखा AB है। रेखा AB, संदर्भ रेखा से कोण θ बनाती है। इस व्याख्या में संदर्भ रेखा धनात्मक x-अक्ष है (चित्र 1.1ख)।



(क)



(ख)

चित्र 1.1: सदिश का ज्यामितीय निरूपण। क) सदिश एक दिष्ट रेखा खंड है जिसके परिमाण और दिशा दोनों होते हैं; ख) कोण θ सदिश की दिशा बताता है।

प्रायः हम आरेख या समीकरण में सदिश को एक अक्षर या प्रतीक के ऊपर एक तीर लगाकर व्यक्त करते हैं। छपी हुई सामग्री में हम सदिशों को **मोटे अक्षरों** से दिखाएंगे जिनके ऊपर एक तीर बना हो जैसेकि $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ आदि। अपने काम में सदिशों को लिखते हुए आप उनके प्रतीकों पर तीर ज़रूर लगाएं जैसेकि $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ आदि। छपी हुई सामग्री में हम सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ के परिमाण को $|\vec{\mathbf{a}}|$ से निरूपित करते हैं जिसे $\vec{\mathbf{a}}$ का मापांक कहा जाता है। इसे हम तिरछे अक्षर a द्वारा भी दिखाते हैं।

> **ध्यान दें**
>
> एक सदिश की दिशा बताने के लिए हमें सदिश राशि के दो अभिलक्षण, सदिश राशि का **अभिविन्यास** और **अभिदिशा** बताने होते हैं। सदिश का अभिविन्यास, सदिश और समष्टि में किसी संदर्भ रेखा या समतल के बीच का संबंध है। सदिश की **अभिदिशा**, उसके समांतर किसी रेखा पर किन्हीं दो बिंदुओं के **क्रम** द्वारा निर्धारित होती है।

अब आप पूर्व परीक्षण के प्रश्नों को हल करें और अपनी समझ को परखें। अगले भाग में हम सदिशों से जुड़ी कुछ संकल्पनाओं को दोहराएंगे जिन्हें आपने स्कूल में सीखा है जैसेकि सदिशों की समानता, एकक सदिश और शून्य सदिश। यदि आप इन्हें अच्छी तरह समझते हैं तो बोध प्रश्न 1 करें। यदि आप उसे हल कर लेते हैं तो आप 1.2.3 छोड़ कर आगे बढ़ सकते हैं।

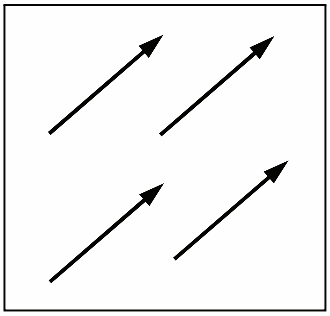
1.2.3 सदिशों की समानता, एकक सदिश और शून्य सदिश

हम हर अवधारणा को एक बक्स में देंगे और उसके कुछ उदाहरण देंगे। उसके बाद आप बोध प्रश्न 1 को हल कर सकते हैं।

सदिशों की समानता

दो सदिश **समान** कहलाते हैं जब उनके परिमाण बराबर हों और वे एक ही दिशा में हों। हम दो सदिशों $\vec{\mathbf{A}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ की समानता को इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}} \tag{1.2क}$$



चित्र 1.2: सदिशों की समानता। यहां दिखाए गए सभी सदिश समान हैं।

उदाहरण के लिए, चित्र 1.2 में दिखाए गये चारों सदिश बराबर हैं यद्यपि उन्हें पृष्ठ पर अलग-अलग स्थितियों पर बनाया गया है। ऐसा इसलिए है क्योंकि उनके परिमाण बराबर हैं और वे सभी एक ही दिशा में हैं। **याद रखें कि समान सदिशों की स्थितियां और उनके आरंभिक बिंदुओं की स्थितियां महत्वपूर्ण नहीं होतीं बल्कि महत्वपूर्ण यह होता है कि वे एक दूसरे के समांतर हों, उनके परिमाण बराबर हों और वे एक ही राशि का निरूपण करते हों।** ऐसे सदिशों को **मुक्त सदिश** (free vector) भी कहा जाता है। परिभाषा से, एक **मुक्त सदिश** को यदि समष्टि में स्वयं के समांतर स्थानांतरित किया जाए तो उसका मान नहीं बदलता।

भौतिकी में कभी-कभी किसी **सदिश की क्रिया रेखा नियत होती है**। उदाहरण के लिए, मुक्त रूप से गिर रहे पिंड के गुरुत्वीय त्वरण ($\vec{\mathbf{g}}$) की क्रिया रेखा नियत रहती है। इसी प्रकार दृढ़ पिंड पर लग रहे बल को पिंड के किसी भी बिंदु पर उसकी क्रिया रेखा पर लगाया जा सकता है। ऐसी स्थितियों में दो सदिश तभी बराबर होते हैं जब उनके परिमाण और दिशा समान हों और क्रिया रेखा भी समान हो। ऐसे सदिशों को अक्सर **सर्पी सदिश** (sliding vector) कहा जाता है। जबकि मुक्त सदिश को समष्टि में कहीं भी स्वयं के समांतर स्थानांतरित किया जा सकता है, **एक सर्पी सदिश को केवल उसकी क्रिया रेखा के अनुदिश स्थानांतरित किया जा सकता है**।

कभी-कभी **सदिश का आरंभिक बिंदु भी नियत होता है**। उदाहरण के लिए, एक प्रत्यास्थ पिंड पर लग रहे बल का आरंभिक बिंदु या बल के लगने का बिंदु नियत होता है। प्रत्यास्थ पिंड के किसी बिंदु A पर आरोपित बल $\vec{\mathbf{F}}$ के कारण हुआ विरूपण, उस पिंड के किसी अन्य बिंदु B पर उसी बल के आरोपित होने के कारण हुए विरूपण से भिन्न होता है। अतः, **बल का प्रभाव उसके लगने के बिंदु पर निर्भर करता है**। इस प्रकार के सदिश का परिमाण और दिशा नियत होते हैं और इसे आरोपित करने का बिंदु भी नियत होता है। इसे **बद्ध सदिश** (bound vector) कहते हैं। इस स्थिति में **दो सदिश तभी बराबर होते हैं जब वे अभिन्न हों**।

यदि किसी सदिश का किसी अन्य सदिश के बराबर परिमाण हो किंतु उसकी दिशा उस सदिश की दिशा के विपरीत हो तब हम लिखते हैं :

$$\vec{\mathbf{a}} = -\vec{\mathbf{b}} \tag{1.2ख}$$

आइए, अब हम एकक सदिश की परिभाषा दें।

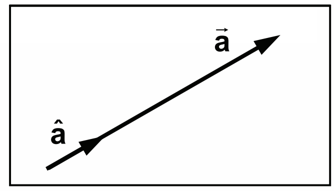
एकक सदिश

लंबाई या परिमाण 1 वाले सदिश को **एकक सदिश** (unit vector) कहा जाता है। परंपरा से, एकक सदिशों को विमाहीन माना जाता है। एकक सदिश का प्रयोग समष्टि में दिशा को प्रकट करने के लिए किया जाता है। किसी भी सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ का निरूपण इसके परिमाण (a) और इसकी दिशा में एकक सदिश जिसका प्रतीक $\hat{\mathbf{a}}$ है, के गुणनफल द्वारा किया जाता है (चित्र 1.3 देखें)। तब हम $\vec{\mathbf{a}}$ को ऐसे लिखते हैं :

$$\vec{\mathbf{a}} = a\,\hat{\mathbf{a}} \tag{1.3क}$$

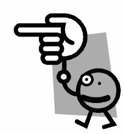
या

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\vec{\mathbf{a}}}{a} = \frac{\vec{\mathbf{a}}}{|\vec{\mathbf{a}}|} \tag{1.3ख}$$



चित्र 1.3: सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ की दिशा में एकक सदिश $\hat{\mathbf{a}}$। इसका परिमाण 1 है। $\hat{\mathbf{a}}$ को हम "a कैप" या "a हैट" कहते हैं।

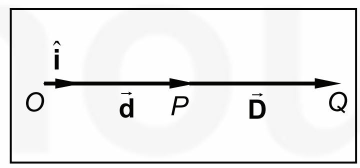
एकक सदिश दिशा बताता है। एक बार हम एक दी हुई दिशा में एकक सदिश को परिभाषित कर लेते हैं, तब हम उस दिशा में किसी भी सदिश को उस एकक सदिश और सदिश के परिमाण के गुणनफल के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। एकक सदिश की विमा (dimension) नहीं होती और उसकी इकाई भी नहीं होती।



कभी न भूलें

आइए, समझें कि हमें इस संकल्पना की आवश्यकता क्यों पड़ती है। मान लें कि एक व्यक्ति P, बिंदु O से पूर्व दिशा में 5 m चलता है और एक अन्य व्यक्ति Q भी बिंदु O से उसी दिशा में 10 m चलता है (चित्र 1.4 देखें)। अब हम एक एकक सदिश परिभाषित कर सकते हैं जिसका परिमाण 1 m है और दिशा पूर्व की ओर है। इसे हम प्रतीक $\hat{\mathbf{i}}$ द्वारा दिखाते हैं। तब O के सापेक्ष, P का विस्थापन (सदिश $\vec{\mathbf{d}}$) और Q का विस्थापन (सदिश $\vec{\mathbf{D}}$) होगा :

$$\vec{\mathbf{d}} = (5\text{ m})\,\hat{\mathbf{i}} \quad \text{और} \quad \vec{\mathbf{D}} = (10\text{ m})\,\hat{\mathbf{i}}$$



चित्र 1.4: एकक सदिश का प्रयोग करके हम लिख सकते हैं :
$\vec{\mathbf{d}} = (5\text{ m})\hat{\mathbf{i}}$ **और** $\vec{\mathbf{D}} = (10\text{ m})\hat{\mathbf{i}}$ ।

अब **उस दिशा में किसी भी नए सदिश को व्यक्त करने के लिए हमें उसके परिमाण को $\hat{\mathbf{i}}$ से गुणा करना होगा**। आइए, अब हम **शून्य सदिश (null vector)** की परिभाषा दें।

शून्य सदिश

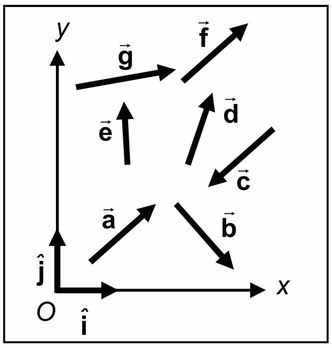
शून्य सदिश वह सदिश है जिसका परिमाण शून्य होता है और कोई निश्चित दिशा नहीं होती। इसे प्रतीक $\vec{\mathbf{0}}$ से प्रकट किया जाता है।

हमें शून्य सदिश को परिभाषित करने की आवश्यकता क्यों पड़ती है? इसे समझने के लिए भौतिकी का यह उदाहरण लें। मान लें कि एक लड़की उत्तर दिशा में 1 m चलती है और वहां से घूम कर दक्षिण दिशा में 1 m चल कर वापस प्रारंभिक बिंदु पर पहुंच जाती है। उसका विस्थापन क्या है? उसके विस्थापन का परिमाण शून्य है लेकिन क्योंकि विस्थापन एक सदिश राशि है, इसलिए इसे एक सदिश की तरह निरूपित करना होगा। तब हम कहते हैं कि लड़की का विस्थापन शून्य सदिश $\vec{\mathbf{0}}$ है। इसी तरह, जब दो समान परिमाण वाले बल एक पिंड पर विपरीत दिशा में लगाए जाते हैं, तब

उस पर लगा नेट बल शून्य सदिश $\vec{\mathbf{0}}$ होता है। जब हम एक सदिश को अदिश $m = 0$ से गुणा करते हैं तो परिणाम एक शून्य सदिश $\vec{\mathbf{0}}$ होता है।

अब आप बोध प्रश्न 1 हल करें।

बोध प्रश्न 1 – सदिशों की समानता, एकक सदिश और शून्य सदिश



चित्र 1.5: बोध प्रश्न 1 के लिये आरेख।

क) चित्र 1.5 में दिखाए गए सदिशों में सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ के बराबर सदिश को पहचानें।

ख) मान लें कि चित्र 1.5 में $\hat{\mathbf{i}}$ और $\hat{\mathbf{j}}$, क्रमशः x और y-अक्षों के अनुदिश एकक सदिश हैं। सदिश $2.5\,\hat{\mathbf{i}}$ और $4.0\,\hat{\mathbf{j}}$ खींचें।

ग) चित्र 1.5 में दिखाए गए प्रत्येक सदिश को समीकरण 1.3क के एकक सदिश संकेतन में लिखें।

घ) एक बस अपने डिपो से प्रातः चलती है और शाम को डिपो में अपने मूल स्थान पर लौट आती है। इस समयावधि में बस का विस्थापन कितना है?

अभी तक आपने सदिशों की परिभाषा और उनके ज्यामितीय निरूपण को दोहराया है। आपने समान सदिश, एकक सदिश और शून्य सदिश की अवधारणाओं को भी दोहराया है। आप जानते हैं कि भौतिकी में भौतिक राशियों और नियमों को गणितीय रूप में व्यक्त करने लिए हमें सदिशों पर गणितीय संक्रियाएं करनी होती हैं। ये संक्रियाएं विशिष्ट नियमों के अनुसार होती हैं जो अदिशों पर की जाने वाली गणितीय संक्रियाओं से अलग होती हैं। भाग 1.3 में आप सदिशों पर लागू होने वाली कुछ बुनियादी संक्रियाएं जैसे कि **सदिशों का योग, घटाना** और **एक अदिश राशि से एक सदिश को गुणा करना सीखेंगे**।

1.3 सदिश बीजगणित

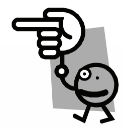
सदिशों को एक-दूसरे से जोड़ा और घटाया जा सकता है और संख्याओं (अदिश राशियों) से गुणा किया जा सकता है। भाग 1.3.1 और 1.3.2 में आप सदिशों के ज्यामितीय निरूपण का प्रयोग करके सदिशों को जोड़ने और घटाने की विधियों को दोहराएंगे। यदि आप इस भाग में दिए गए बोध प्रश्नों 2 और 3 को हल कर पाते हैं तो इसका अर्थ है कि आप इन संकल्पनाओं को अच्छी तरह से समझते हैं। तब आप इन भागों को छोड़ कर आगे बढ़ सकते हैं। नहीं तो, भाग 1.3.1 और 1.3.2 पढ़ें और फिर इन्हें हल करें।

1.3.1 सदिश योग

मान लें कि एक वस्तु पर दो बल लग रहे हैं और हमें उस पर लग रहा नेट बल मालूम करना है। इसे हम सदिश योग की संक्रिया को लागू करके मालूम कर सकते हैं। इस संक्रिया में हम एक ही प्रकार की दो सदिश राशियों जैसेकि दो विस्थापनों या दो बलों, माना कि $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$, को जोड़ कर उन्हीं जैसी एक अन्य सदिश राशि $\vec{\mathbf{c}}$ प्राप्त करते हैं। इस संक्रिया को हम इस तरह लिखते हैं :

$$\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} \qquad (1.4)$$

सदिश योग को दिखाने वाली समीकरणों में प्रयुक्त प्रतीक + का अर्थ होता है 'के साथ संयोजित' और प्रतीक = का अर्थ होता है 'के तुल्य'। ये अर्थ साधारण बीजगणित में इन प्रतीकों के अर्थ 'जोड़ा गया' और 'बराबर' से भिन्न हैं।



कभी न भूलें

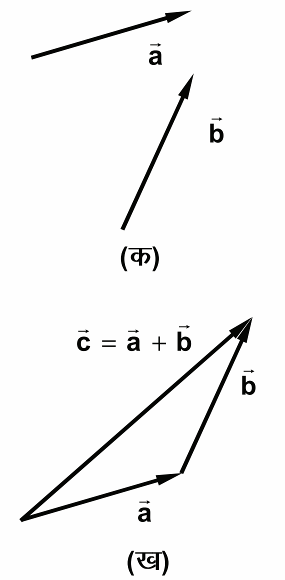
सदिशों के योगफल $\vec{c}$ का मान ज्ञात करने के लिए हम **सदिश योग के त्रिभुज नियम** और **सदिश योग के समांतर चतुर्भुज नियम** को लागू करते हैं। ये विधियां समतुल्य हैं और आप इन्हें स्कूल की भौतिकी में पढ़ चुके हैं। आइए, हम इन नियमों के कथन दें।

सदिश योग : त्रिभुज नियम

दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ (चित्र 1.6क) को जोड़ने और उनका योग $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ ज्ञात करने के लिए

- सदिशों को इस तरह खींचें कि पहले सदिश, माना कि $\vec{a}$, का शीर्ष, दूसरे सदिश, माना कि $\vec{b}$, की पूंछ पर रखा जाए (चित्र 1.6ख)।
- पहले सदिश ($\vec{a}$) की पूंछ से दूसरे सदिश ($\vec{b}$) के शीर्ष तक एक तीर खींचिए। यह सदिश जिसका शीर्ष दूसरे सदिश के शीर्ष पर है, परिणामी सदिश है :

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \qquad (1.4)$$



चित्र 1.6: दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ को जोड़ने के लिए सदिश योग का त्रिभुज नियम।

जब दो सदिशों की पूंछ एक ही बिंदु पर हों, तब इन्हें जोड़ने के लिए **सदिश योग का समांतर चतुर्भुज नियम** लागू करना बेहतर होता है। उदाहरण के लिए, एक वस्तु के एक ही बिंदु पर लग रहे दो बलों का परिणामी ज्ञात करने के लिए इस नियम को लागू करना अधिक उपयोगी होता है। इस नियम को लागू करके हम बीजीय विधि से परिणामी सदिश का परिमाण और दिशा परिकलित कर सकते हैं।

ध्यान दें

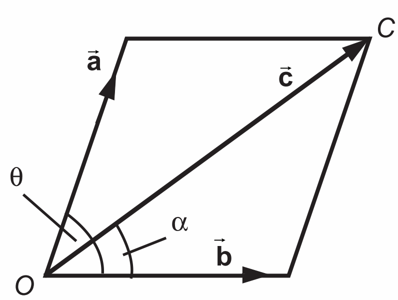
अलग-अलग बिंदुओं पर स्थित दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ का योगफल $\vec{a} + \vec{b}$ ज्ञात करने के लिए :

दूसरे सदिश $\vec{b}$ को स्वयं के समांतर इस प्रकार विस्थापित कीजिए जिससे कि **उसका पुच्छ पहले सदिश $\vec{a}$ के शीर्ष से जुड़ जाए। पहले सदिश के पुच्छ से दूसरे सदिश के शीर्ष तक सदिश खींचिए।**

ध्यान दें कि सदिश योग $\vec{c}$ और सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$, एक ही समतल में स्थित होते हैं। इस स्थिति में यह समतल उस पृष्ठ का तल है जिसे आप पढ़ रहे हैं।

सदिश योग का समांतर चतुर्भुज नियम

सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ का, जिनके पुच्छ एक उभयनिष्ठ बिंदु O पर हों, योगफल $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, उस समांतर चतुर्भुज के बिंदु O से गुज़रने वाले विकर्ण OC द्वारा निरूपित होता है, जिसकी भुजाएं $\vec{a}$ और $\vec{b}$ हों (चित्र 1.7)।



चित्र 1.7: सदिश योग का समांतर चतुर्भुज नियम।

अब आप जानना चाहेंगे कि **परिणामी $\vec{c}$ के परिमाण और दिशा क्या हैं**। दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ जिनके बीच का कोण θ है, के परिणामी $\vec{c}$ के परिमाण और दिशा हैं :

$$c = \sqrt{b^2 + 2ab\cos\theta + a^2} \quad (1.5क)$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left[\frac{a\sin\theta}{b + a\cos\theta}\right] \quad (1.5ख)$$

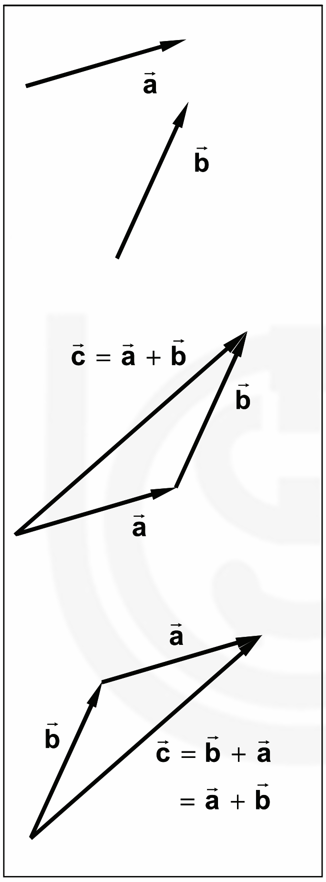
समीकरणों (1.5क और ख) में a, b और c क्रमशः सदिशों $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ के परिमाण हैं और α, सदिशों $\vec{b}$ और $\vec{c}$ के बीच का कोण है जिससे $\vec{c}$ की दिशा प्राप्त होती है (चित्र 1.7)। आप समीकरणों (1.5क और ख) को खुद भी सिद्ध कर सकते हैं। इसे इकाई के अंत में प्रश्न 8 के रूप में दिया गया है।

ध्यान दें कि सदिश योग बीजीय योग नहीं है। हम सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के परिमाणों को जोड़ कर सदिश $\vec{c}$ का परिमाण नहीं परिकलित कर सकते।

सदिश योग की ये विधियां ग्राफ़ीय विधियां हैं जिनमें हम सदिशों के ज्यामितीय निरूपण का प्रयोग करते हैं।

अब सवाल यह है कि हम **दो से अधिक सदिशों को कैसे जोड़ें**।

सदिश योग बाइनरी होता है यानी संख्याओं की तरह एक बार में हम दो सदिशों को ही जोड़ सकते हैं। लेकिन इसे दोहराने से पहले, आइए, हम सदिशों के योग के दो महत्वपूर्ण गुणधर्म दोहराएं।



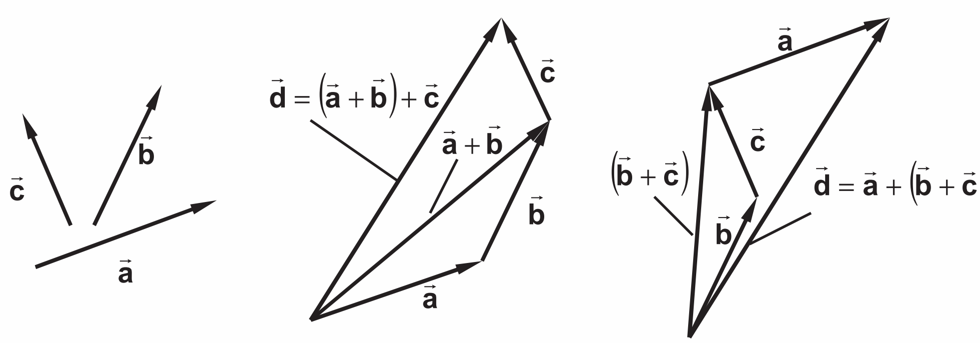
चित्र 1.8: सदिश योग क्रमविनिमेय होता है।

सदिशों के योग के गुणधर्म

1. **सदिशों के योग का क्रमविनिमेय गुणधर्म : सदिशों को किसी भी क्रम में जोड़ा जाये, उनका योग समान होता है।** आप चित्र 1.8 से देख सकते हैं कि
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (1.6)$$

2. **सदिशों के योग का साहचर्य गुणधर्म : यदि दो से अधिक सदिशों को जोड़ा जाता है, तो उन्हें चाहे किसी भी क्रम में रखा जाये, उनका योग समान होता है :**
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (1.7)$$

आगे पढ़ने से पहले आप सदिश योग के साहचर्य गुणधर्म को परखना चाहेंगे। इसके लिए, आपको सदिश योग के त्रिभुज नियम को दो बार लागू करना होगा। आप चित्र 1.9 देखें और दो से अधिक सदिशों को जोड़ने के लिए बोध प्रश्न 2 हल करें।

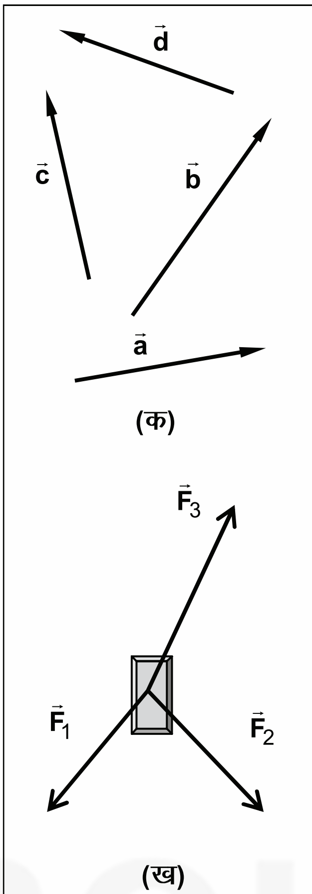


चित्र 1.9: सदिश योग साहचर्य होता है : $\vec{d} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$।

बोध प्रश्न 2 – दो से अधिक सदिशों को जोड़ना

क) चित्र 1.10क में दिखाए गए सदिशों का योग प्राप्त करें।

ख) एक ही तल में स्थित तीन बल $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ और $\vec{F}_3$, एक वस्तु पर लगते हैं (चित्र 1.10ख)। वस्तु पर कितना बल लगाना चाहिए कि वह इन तीन बलों के अधीन गति नहीं करे ?

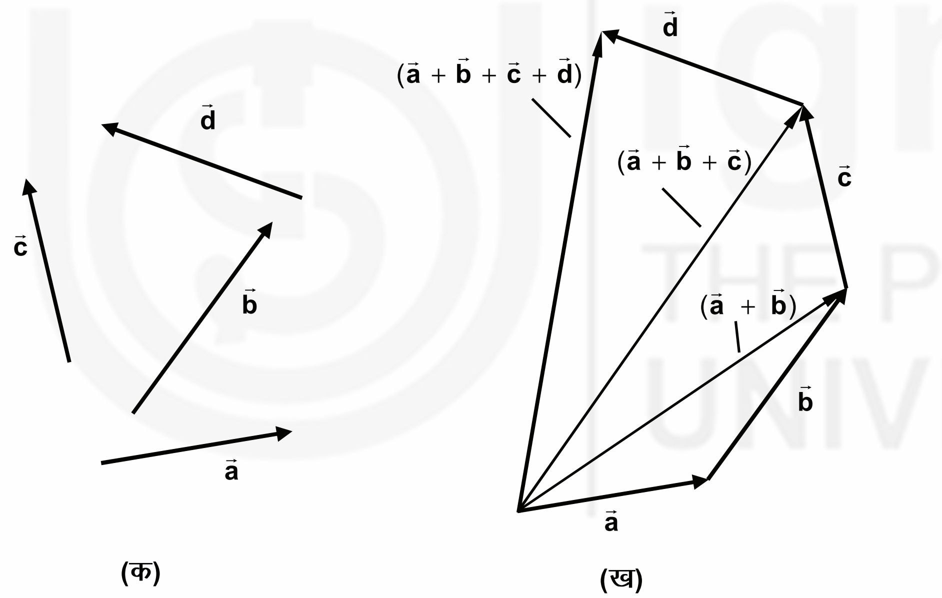


चित्र 1.10 : दो से अधिक सदिशों को जोड़ना।

क्या आपने बोध प्रश्न 2क को हल करते समय इस बात की ओर ध्यान दिया कि इस सदिश योग में परिणामी सदिश, पहले सदिश की पूंछ से अंतिम सदिश के शीर्ष तक खींचा गया सदिश है? यह **सदिश योग का बहुभुज नियम** है (हाशिए पर दी गई टिप्पणी पढ़ें)।

सदिश योग का बहुभुज नियम

यदि दो से अधिक सदिशों के परिमाणों और दिशाओं को बहुभुज की भुजाओं द्वारा क्रमवार निरूपित किया जाये तो परिणामी सदिश के परिमाण और दिशा बहुभुज की अंतिम भुजा द्वारा विपरीत क्रम में निरूपित होते हैं यानी यह पहले सदिश की पूंछ से अंतिम सदिश के शीर्ष तक खींचा गया सदिश होता है (चित्र 1.11)।



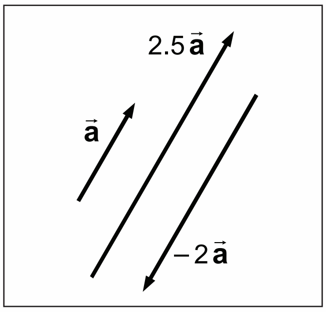
चित्र 1.11 : चार सदिशों $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ और $\vec{d}$ का परिणामी $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$ ज्ञात करने के लिए सदिश योग का बहुभुज नियम।

बोध प्रश्न 2क को हल करते समय आपने इस बात की ओर ध्यान दिया होगा कि **सदिशों को चाहे किसी भी क्रम में जोड़ा जाये, उनका परिणामी यानी योग समान होता है**।

अब मान लें कि आपको सदिश $\vec{a}$ को 3 बार जोड़ना है और $(\vec{a} + \vec{a} + \vec{a})$ निकालना है।

सदिश योग नियम से आप देख सकते हैं कि **इनका योग एक सदिश है, जिसका परिमाण $\vec{a}$ के परिमाण का 3 गुना है और दिशा $\vec{a}$ के अनुदिश है**।

चित्रों 1.8 से 1.11 को देखने से आपको यह लग सकता है कि सभी सदिश एक ही समतल में स्थित हैं जो कि इस पृष्ठ का तल है। ज़रूरी नहीं है कि यह सदैव सत्य हो। जैसेकि चित्र 1.9 में, सदिश $\vec{c}$ सदिश $(\vec{a} + \vec{b})$ के तल में नहीं भी हो सकता है। तब सदिशों का ज्यामितीय निरूपण करना सुविधाजनक नहीं होता। यदि सभी सदिश एक समतल में स्थित नहीं हों, तब आपको समीकरण 1.7 के प्रत्येक चरण को अलग-अलग खींचना होगा।



चित्र 1.12: एक सदिश की अदिश से गुणा।

अदिश m के लिए $|m|$ एक धनात्मक राशि होती है।
$|m| = m$ जब $m > 0$
और
$|m| = -m$ जब $m < 0$

हम इस विधि को एक अदिश m से एक सदिश को गुणा करने पर भी लागू कर सकते हैं (चित्र 1.12)। आइए, इसकी परिभाषा दें।

सदिश की अदिश से गुणा

सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ का अदिश राशि m से गुणनफल सदिश $m\vec{\mathbf{a}}$ होता है। इसका परिमाण $|m||\vec{\mathbf{a}}|$ होता है। साथ ही,

1. यदि $\vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ और $m > 0$, तो $m\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{a}}$ की दिशा में होता है।
2. यदि $\vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ और $m < 0$, तो $m\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{a}}$ की दिशा की विपरीत दिशा में होता है।
3. यदि $\vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ और अथवा $m = 0$ तो $m\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}}$ होता है।

भौतिकी में ऐसी अनेक राशियां होती हैं जिनमें एक सदिश को एक अदिश से गुणा करना होता है। उदाहरण के लिए, वेग $\vec{\mathbf{v}}$ से गतिमान द्रव्यमान m के कण का रैखिक संवेग $\vec{\mathbf{p}}$ होता है $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$। न्यूटन के गति के दूसरे नियम के अनुसार, अचर द्रव्यमान के कण पर लग रहा बल $\vec{\mathbf{F}}$, इसके द्रव्यमान और त्वरण $\vec{\mathbf{a}}$ का गुणनफल होता है : $\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$। अब जबकि आपने सदिश योग और एक अदिश से सदिश के गुणनफल को दोहरा लिया है, आप नीचे दिए गए उनके कुछ और गुणधर्मों को सत्यापित कर सकते हैं।

सदिश योग और एक अदिश से सदिश के गुणनफल के गुणधर्म

$$\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{a}}$$
$$\vec{\mathbf{a}} + (-\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$$
$$m(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) = m\vec{\mathbf{a}} + m\vec{\mathbf{b}}$$
$$(m + n)\vec{\mathbf{a}} = m\vec{\mathbf{a}} + n\vec{\mathbf{a}}$$
$$m(n\vec{\mathbf{a}}) = mn\vec{\mathbf{a}}$$
$$1(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{a}}$$
$$0(\vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$$
$$(-1)\vec{\mathbf{a}} = -\vec{\mathbf{a}}$$

आइए, अब हम सदिशों को घटाने की संकल्पना को दोहराएं।

1.3.2 सदिशों को घटाना

एक ही जैसे दो सदिशों में, **सदिश $\vec{\mathbf{b}}$ से सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ को घटाने के लिए, हम सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ और $(-\vec{\mathbf{b}})$ को जोड़ते हैं :**

$$\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}} + (-\vec{\mathbf{b}}) \tag{1.8}$$

इसे दो सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ का अंतर भी कहा जाता है। याद करें कि **सदिश $(-\vec{\mathbf{b}})$ का परिमाण सदिश $\vec{\mathbf{b}}$ के परिमाण के बराबर है लेकिन इसकी दिशा $\vec{\mathbf{b}}$ की दिशा के विपरीत है। यदि आप किसी सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ के शीर्ष और पूंछ में अदला-बदली कर दें तो आपको सदिश $(-\vec{\mathbf{a}})$ प्राप्त होगा।** ध्यान दें कि सदिशों का घटाना क्रमविनिमेय नहीं होता क्योंकि

$$\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}} = -(\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}) \tag{1.9}$$

अतः, सदिश $(\vec{b} - \vec{a})$ और $(\vec{a} - \vec{b})$ परिमाण में समान हैं लेकिन उनकी दिशाएं एक दूसरे के ठीक विपरीत हैं।

अब हम दिखाएंगे कि एक सदिश से दूसरे सदिश को कैसे घटाया जाता है।

एक सदिश से दूसरे सदिश को घटाना

मान लें कि आपको चित्र 1.13क में दिखाए गए सदिश $\vec{A}$ से सदिश $\vec{B}$ को घटाना है।

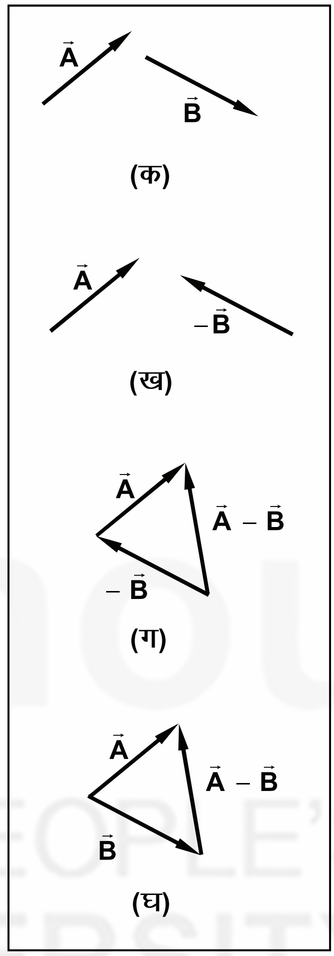
चूंकि सदिश $\vec{A} - \vec{B}$, सदिश $\vec{A} + (-\vec{B})$ है, अतः, हम सदिश $\vec{B}$ की दिशा उलट सकते हैं (जैसाकि चित्र 1.13ख में दिखाया गया है)।

फिर हम इसे $\vec{A}$ में जोड़ कर $\vec{A} - \vec{B}$ प्राप्त कर सकते हैं (चित्र 1.13ग)।

विकल्प के रूप में, **जब सदिश $\vec{A} - \vec{B}$ को सदिश $\vec{B}$ में जोड़ा जाता है, तब हमें सदिश $\vec{A}$ प्राप्त होता है।**

अतः, **हम सदिश $\vec{B}$ को उसके स्वयं के समांतर इस तरह विस्थापित करते हैं कि $\vec{A}$ और $\vec{B}$ की पूंछें मिल जाएं।**

तब **सदिश $\vec{A} - \vec{B}$, $\vec{A}$ के शीर्ष से $\vec{B}$ के शीर्ष तक का सदिश है** (चित्र 1.13घ)।



चित्र 1.13: क) सदिश $\vec{A}$ से सदिश $\vec{B}$ को घटाना; ख) सदिश $\vec{B}$ की दिशा उलट कर $(-\vec{B})$ प्राप्त करें; ग) सदिशों $\vec{A}$ और $(-\vec{B})$ को जोड़ें; घ) वैकल्पिक विधि।

अब आप सदिशों को एक दूसरे से जोड़ने और घटाने पर एक बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 3 – सदिशों को जोड़ना और घटाना

समीकरणों 1.5क और ख का प्रयोग करके सदिश $\vec{A}+\vec{B}$ और $\vec{A}-\vec{B}$ प्राप्त करें जबकि दिया है कि $|\vec{A}| = 3.0\,\text{ms}^{-1}$ और $\vec{A}$ की दिशा पूर्व की ओर है, $|\vec{B}| = 4.0\ \text{ms}^{-1}$ और $\vec{B}$ की दिशा उत्तर से पश्चिम दिशा में $45°$ पर है। उपयुक्त पैमाना चुनें और सदिश आरेख खींचें।

1.4 सदिशों के गुणनफल

सदिशों को दो अलग-अलग विधियों से गुणा किया जा सकता है जिनसे प्राप्त परिणाम या तो अदिश या फिर सदिश हो सकता है। यदि दो सदिशों के गुणनफल का परिणाम अदिश होता है तो उसे **अदिश गुणनफल** कहते हैं। यदि वह सदिश होता है तो उसे **सदिश गुणनफल** कहते हैं।

यदि आप इन संकल्पनाओं से अच्छी तरह से परिचित हों तो आप केवल इस भाग में दिए गए बोध प्रश्न करें। यदि आप उन्हें नहीं कर पाते तो इस भाग को ध्यान से पढ़ें और उन्हें फिर से हल करें।

1.4.1 अदिश गुणनफल

आइए, पहले हम अदिश गुणनफल की परिभाषा दें और उसके गुणधर्म बताएं।

ध्यान दें कि अदिश गुणनफल में यह आवश्यक नहीं है कि सदिश समान भौतिक राशियों को निरूपित करते हों जबकि सदिश योग में एक प्रकार के सदिशों को ही जोड़ा जा सकता है।

अदिश गुणनफल और उसके गुणधर्म

किन्हीं दो शून्येतर सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ का **अदिश या डॉट गुणनफल** जिसे $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ के रूप में लिखा जाता है, एक अदिश राशि है, जिसकी निम्नलिखित परिभाषा है :

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta = ab\cos\theta \qquad (1.10)$$

कोण θ, $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण है (या सटीक तौर पर $\vec{a}$ और $\vec{b}$ की दिशाओं के बीच का कोण है जैसाकि चित्र 1.14क में दिखाया गया है) जबकि इन सदिशों को उनकी पूंछें मिलाकर रखा गया हो। वास्तव में, ऐसे दो कोण हैं : θ और $(360^\circ - \theta)$ या $(2\pi - \theta)$। लेकिन इनमें से किसी का भी प्रयोग किया जा सकता है क्योंकि इनके कोसाइन समान मान वाले हैं। अदिश गुणनफल $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ को 'a डॉट b' कहते हैं। अब हम अदिश गुणनफल के कुछ गुणधर्म बताएंगे जो इसकी परिभाषा से प्राप्त होते हैं।

- यदि दो सदिश **समांतर** होते हैं, तो इनका गुणनफल अधिकतम होता है :

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = ab, \quad \theta = 0^\circ \text{ के लिए,} \quad \text{क्योंकि } \cos 0^\circ = 1 \qquad (1.11\text{क})$$

- यदि दो सदिश **परस्पर लंबवत्** होते हैं, तो इनका गुणनफल शून्य होता है :

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = 0, \quad \theta = 90^\circ \text{ के लिए,} \quad \text{क्योंकि } \cos 90^\circ = 0 \qquad (1.11\text{ख})$$

- सदिश $\vec{b}$ का स्वयं से अदिश गुणनफल होता है :

$$\vec{b}\,.\,\vec{b} = b^2 \quad \text{या} \quad b = \sqrt{\vec{b}\,.\,\vec{b}} \qquad (1.11\text{ग})$$

- सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण (जबकि उन्हें पूंछ से पूंछ मिला कर रखा गया हो) होता है :

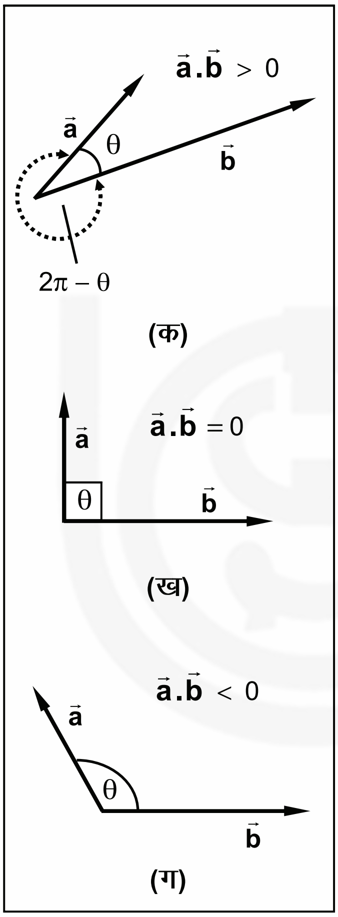
$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{ab} \qquad (1.11\text{घ})$$

- **क्रमविनिमेय गुणधर्म** : अदिश गुणनफल **क्रमविनिमेय** होता है, क्योंकि यह अदिश राशि है और वह उस क्रम पर निर्भर नहीं करता जिस क्रम में सदिश लिखे जाते हैं :

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = \vec{b}\,.\,\vec{a} \qquad (1.11\text{च})$$

- **बंटन गुणधर्म** : अदिश गुणनफल **बंटन** नियम का पालन करते हैं :

$$\vec{a}\,.\,(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\,.\,\vec{b} + \vec{a}\,.\,\vec{c} \qquad (1.11\text{छ})$$



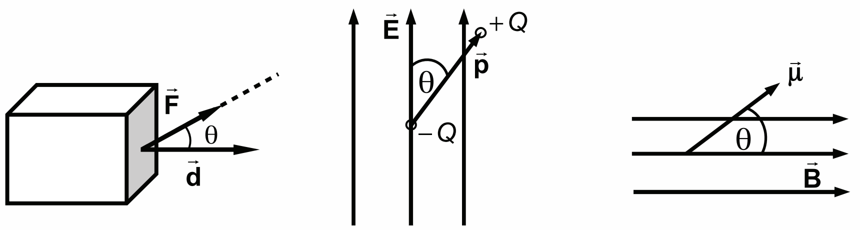
चित्र 1.14: क) अदिश गुणनफल की परिभाषा। न्यून कोणों पर सदिशों का अदिश गुणनफल धनात्मक होता है; ख) परस्पर लंबवत् सदिशों का अदिश गुणनफल शून्य होता है; ग) अधिक (obtuse) कोणों पर सदिशों का अदिश गुणनफल ऋणात्मक होता है।

भौतिकी में ऐसी अनेक राशियां हैं जिन्हें दो सदिशों के अदिश गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है। उदाहरण के लिए,

- अचर बल $\vec{F}$ के अधीन गतिमान किसी पिंड पर जिसका विस्थापन $\vec{d}$ है, उस बल द्वारा किया गया कार्य (W), $\vec{F}$ और $\vec{d}$ का अदिश गुणनफल होता है : $W = \vec{F}.\vec{d}$ (देखें चित्र 1.15क)।
- किसी वस्तु पर लग रहे बल द्वारा किए गए कार्य की दर को शक्ति (P) कहते हैं। यह बल $\vec{F}$ और वस्तु के वेग $\vec{v}$ के अदिश गुणनफल के बराबर होती है : $P = \vec{F}.\vec{v}$

- यदि एक वैद्युत द्विध्रुव को जिसका वैद्युत द्विध्रुव आघूर्ण $\vec{\mathbf{p}}$ है, एक विद्युत् क्षेत्र $\vec{\mathbf{E}}$ में रखा जाता है, तो उसकी स्थितिज ऊर्जा (U), वैद्युत द्विध्रुव और विद्युत् क्षेत्र के बीच के कोण पर निर्भर करती है और $\vec{\mathbf{p}}$ और $\vec{\mathbf{E}}$ के अदिश गुणनफल के बराबर होती है: $U = \vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{E}}$ (चित्र 1.15ख)।

- एक चुंबकीय क्षेत्र $\vec{\mathbf{B}}$ में रखे चुंबकीय द्विध्रुव आघूर्ण $\vec{\mu}$ की स्थितिज ऊर्जा (U), चुंबकीय द्विध्रुव और चुंबकीय क्षेत्र के बीच के कोण पर निर्भर करती है और उनके अदिश गुणनफल के बराबर होती है : $U = \vec{\mu} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ (चित्र 1.15ग)।



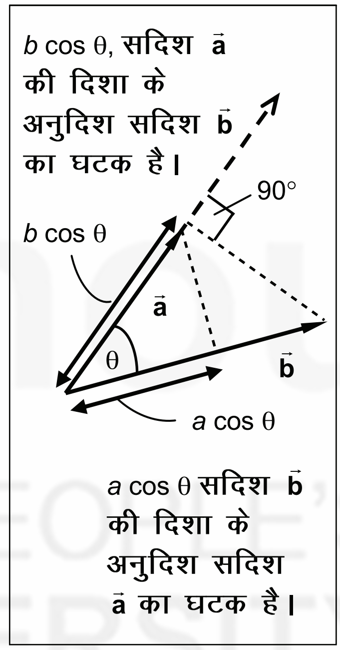
(क) (ख) (ग)

चित्र 1.15 : भौतिकी में अदिश गुणनफल के उदाहरण।

हम **एक सदिश का एक अन्य सदिश पर प्रक्षेप** ज्ञात करने के लिए अदिश गुणनफल का प्रयोग कर सकते हैं। एक सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ का एक अन्य सदिश $\vec{\mathbf{b}}$ पर **प्रक्षेप**, **$\vec{\mathbf{b}}$ के अनुदिश $\vec{\mathbf{a}}$ का घटक होता है** (चित्र 1.16)। इसका मान होता है $|\vec{\mathbf{a}}| \cos\theta$, जहां θ, $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ के बीच का कोण है। साथ ही, सदिश $\vec{\mathbf{b}}$ की लांबिक दिशा में सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ का घटक $|\vec{\mathbf{a}}| \cos(90^\circ - \theta)$ यानी $|\vec{\mathbf{a}}| \sin\theta$ होगा। इस तरह,

$$\vec{\mathbf{b}} \text{ के समांतर } \vec{\mathbf{a}} \text{ का घटक } = \frac{\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{b}}|} = |\vec{\mathbf{a}}| \cos\theta \qquad (1.11\text{ज})$$

$$\vec{\mathbf{b}} \text{ के लंबवत् } \vec{\mathbf{a}} \text{ का घटक } = |\vec{\mathbf{a}}| \sin\theta \qquad (1.11\text{झ})$$



चित्र 1.16 : एक सदिश का एक अन्य सदिश पर प्रक्षेप या उसके अनुदिश घटक।

अब आप अदिश गुणनफल की संकल्पना पर आधारित एक बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 4 – सदिशों का अदिश गुणनफल

क) नीचे दिए गए सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ के प्रत्येक युग्म के लिए $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}$ परिकलित करें:

i) $a = 4$ इकाई, $b = 5$ इकाई, $\theta = 30^\circ$

ii) $a = 5$ इकाई, $b = 5$ इकाई, $\theta = 150^\circ$

iii) $a = 2$ इकाई, $b = 3$ इकाई, $\theta = 90^\circ$

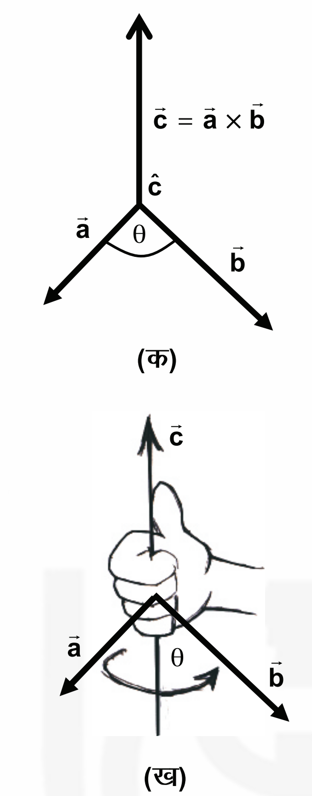
iv) $a = 2$ इकाई, $b = 3$ इकाई, $\theta = 0^\circ$

ख) दो शून्येतर सदिशों का अदिश गुणनफल शून्य है। क्या ये सदिश एक-दूसरे के समांतर हैं या एक-दूसरे पर लंबवत् हैं?

आइए, अब हम सदिश गुणनफल पर चर्चा करें।

1.4.2 सदिश गुणनफल

भौतिकी में अनेक स्थितियों में दो सदिशों का गुणनफल एक **सदिश** होता है। अतः, यहां हम सदिशों के एक अन्य उपयोगी गुणनफल, जिसे **सदिश गुणनफल** या **क्रॉस गुणनफल** कहा जाता है, का परिचय देंगे और इसके लिए हम एक विशिष्ट प्रतीक का प्रयोग करेंगे।



चित्र 1.17: क) सदिश गुणनफल की परिभाषा; ख) सदिश गुणनफल की दिशा के लिए दक्षिणहस्त नियम।

सदिश गुणनफल का परिचय

सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ का **सदिश गुणनफल**, सदिश $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ होता है

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = ab \sin\theta \,\hat{c} \quad \text{जिसका परिमाण} \quad c = ab \sin\theta \tag{1.12}$$

होता है। यहां θ, $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण है (या इनकी दिशाओं के बीच का कोण है) जबकि इन्हें पूंछ से पूंछ मिलाकर रखा जाता है। वस्तुतः इस प्रकार के दो कोण होते हैं θ और $(360° - \theta)$। क्योंकि इन कोणों के साइन के अलग-अलग मान होते हैं इसलिए गणना में हम **इनमें से कम मान वाले कोण** का प्रयोग करते हैं। इस तरह, $0 \le \theta \le \pi$ (चित्र 1.17क)। $\vec{a} \times \vec{b}$ को **"a क्रॉस b"** कहा जाता है।

सदिश गुणनफल की दिशा एकक सदिश $\hat{c}$ द्वारा दी जाती है, जो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ **से बने समतल के लंबवत् एकक सदिश है।** हम $\hat{c}$ की **अभिदिशा दक्षिणहस्त नियम** से परिकलित करते हैं :

इसमें अपने दाहिने हाथ की उंगलियों को इस तरह मोड़ें कि उंगलियों की पोर की दिशा $\vec{a}$ से $\vec{b}$ की ओर घूर्णन की दिशा में हो। तब आपके फैले हुए अंगूठे की दिशा $\hat{c}$ की दिशा बताती है जैसाकि चित्र 1.17ख में दिखाया गया है। इस तरह से परिभाषित सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ **दक्षिणहस्त त्रय** बनाते हैं।

सदिशों के क्रम के महत्व को समझने के लिए, बताएं कि $\vec{b} \times \vec{a}$ क्या होगा। इसके लिए आप सदिश गुणनफल की परिभाषा फिर से देखें। यदि आप अपनी अंगुलियों को इस तरह मोड़ें कि उनकी पोरें $\vec{b}$ से $\vec{a}$ की ओर घूर्णन की दिशा में हों, तब आपका अंगूठा $\vec{a} \times \vec{b}$ की विपरीत दिशा की ओर इंगित करेगा। इस तरह, $\vec{b} \times \vec{a}$ की दिशा, सदिश $\vec{a} \times \vec{b}$ की विपरीत दिशा में होती है, लेकिन दोनों सदिशों के परिमाण समान होते हैं यानी

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\,\vec{b} \times \vec{a} \tag{1.13}$$

अतः, **सदिश गुणनफल क्रमविनिमेय नहीं होता।**

कभी न भूलें

सदिश गुणनफल में सदिशों का क्रम महत्वपूर्ण होता है। सदिश गुणनफल क्रमविनिमेय नहीं होता।

भौतिकी में ऐसी अनेक राशियां होती हैं जिन्हें हम सदिश गुणनफल के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। यहां हम इनके कुछ उदाहरण दे रहे हैं।

बल आघूर्ण

आपने अपने स्कूल में भौतिकी के पाठ्यक्रम में बल आघूर्ण के बारे में ज़रूर पढ़ा होगा। जब किसी वस्तु पर नेट बाह्य बल आघूर्ण लगाया जाता है, तो यह इसकी घूर्णी गति में परिवर्तन ला देता है। किसी वस्तु पर आरोपित बल आघूर्ण की परिभाषा इस प्रकार दी जाती है :

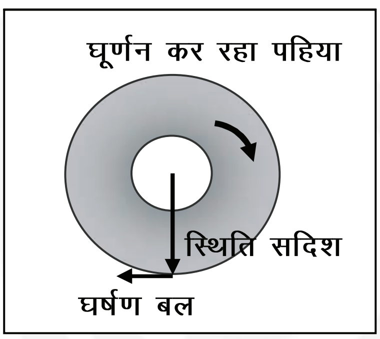
$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} \qquad (1.14\text{क})$$

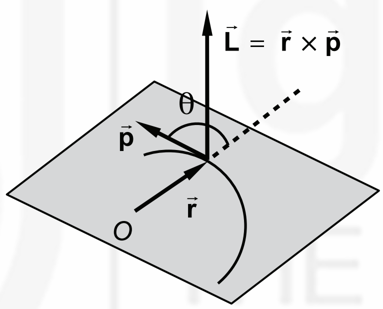
जहां $\vec{\mathbf{F}}$ **वस्तु पर आरोपित नेट बल है** और $\vec{\mathbf{r}}$ **उस बिंदु का, जिस पर बल लग रहा है, घूर्णन अक्ष के किसी बिंदु के सापेक्ष स्थिति सदिश है** (चित्र 1.18क)।

कोणीय संवेग

परिभाषा से, किसी कण का मूल बिंदु के सापेक्ष **कोणीय संवेग** $\vec{\mathbf{L}}$ (चित्र 1.18ख), मूल बिंदु के सापेक्ष कण के **स्थिति सदिश** $\vec{\mathbf{r}}$ और **रैखिक संवेग** $\vec{\mathbf{p}}$ का सदिश गुणनफल होता है :

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} \qquad (1.14\text{ख})$$





चित्र 1.18: भौतिकी में सदिश गुणनफल के कुछ उदाहरण। क) घूर्णन कर रहे पहिये पर बल आघूर्ण की दिशा इस पृष्ठ के तल के लंबवत् अंदर की ओर है; ख) स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}$ और रैखिक संवेग $\vec{\mathbf{p}}$ वाले कण का कोणीय संवेग।

एक चुंबकीय क्षेत्र $\vec{\mathbf{B}}$ में वेग $\vec{\mathbf{v}}$ से गतिमान बिंदु आवेश q पर लग रहा बल होता है :

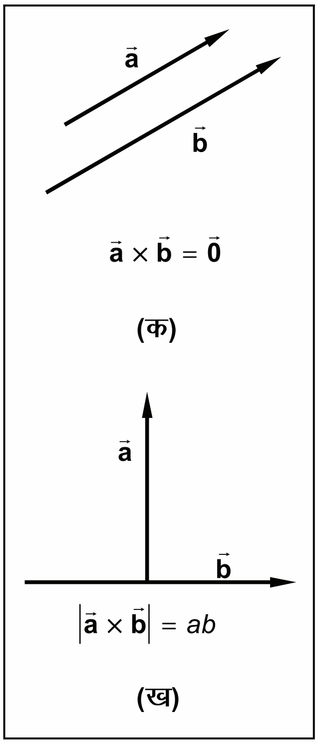
$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad (1.14\text{ग})$$

एक चुंबकीय क्षेत्र $\vec{\mathbf{B}}$ में धारावाही चालक के अवयव $d\vec{\mathbf{l}}$ पर लग रहा बल होता है :

$$\vec{\mathbf{F}} = I d\vec{\mathbf{l}} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad (1.14\text{घ})$$

जहां I, चालक में प्रवाहित धारा है।

अब हम सदिश गुणनफल के कुछ गुणधर्म बताएंगे।



चित्र 1.19 : क) समांतर और ख) एक-दूसरे के लंबवत् सदिशों के सदिश गुणनफल।

सदिश गुणनफल के गुणधर्म

- **दो समांतर सदिशों का सदिश गुणनफल एक शून्य सदिश** होता है (चित्र 1.19क)। इस तरह,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \qquad \text{क्योंकि } \theta \text{ शून्य है और } \sin 0^\circ = 0 \qquad (1.15\text{क})$$

- **एक सदिश का स्वयं से गुणनफल एक शून्य सदिश** होता है :

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \qquad (1.15\text{ख})$$

- सदिश गुणनफल की परिभाषा से :

$$(k\vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (k\vec{b}) \qquad (1.15\text{ग})$$

- **एक-दूसरे के लंबवत् दो सदिशों का सदिश गुणनफल अधिकतम होता है** (चित्र 1.19ख)। इस तरह,

$$\vec{a} \times \vec{b} = ab\,\hat{n} \quad \text{जब } \theta = 90^\circ \quad \text{क्योंकि} \quad \sin 90^\circ = 1 \qquad (1.15\text{घ})$$

  यहां $\hat{n}$ एक एकक सदिश है, **जो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ से बने समतल के लंबवत् है और इसकी दिशा दक्षिणहस्त नियम** द्वारा दी जाती है।

- **सदिश गुणनफल क्रमविनिमेय नहीं होता** :

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\,\vec{b} \times \vec{a} \qquad (1.15\text{च})$$

- **सदिश गुणनफल बंटन नियम का पालन करता है**, अर्थात्

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \qquad (1.15\text{छ})$$

- **सदिश गुणनफल साहचर्य नियम का पालन नहीं करता,** अर्थात्

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \qquad (1.15\text{ज})$$

अब आप सदिश गुणनफल की संकल्पना पर आधारित एक बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 5 – सदिश गुणनफल

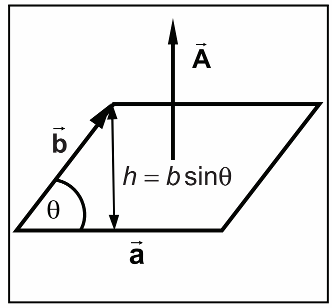
क) बोध प्रश्न 4क में दिए गए सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लिए सदिश गुणनफल $\vec{a} \times \vec{b}$ ज्ञात करें।

ख) सिद्ध करें कि बल केंद्र O के सापेक्ष बल $\vec{F} = F\hat{r}$ के कारण किसी बिंदु पर आरोपित बल आघूर्ण शून्य होता है जहां r उस बिंदु की बल केंद्र से दूरी है।

सदिश गुणनफल की ज्यामितीय व्याख्या भी होती है जिसे अब हम एक उदाहरण की मदद से समझायेंगे।

उदाहरण *1.1* : सदिश गुणनफल की ज्यामितीय व्याख्या

सामान्यतः हम क्षेत्रफल को एक अदिश राशि मानते हैं। लेकिन भौतिकी के अनेक अनुप्रयोगों में, जैसे कि अभिवाह परिकलित करते समय, हमें क्षेत्रफल के अभिविन्यास की जानकारी भी चाहिए होती है। उदाहरण के लिए, मान लें कि हम यह पता लगाना चाहते हैं कि पानी की धारा में रखे तार के लूप से किस दर से पानी का प्रवाह हो रहा है। तार का क्षेत्रफल दिया है। यदि हम लूप को धारा के समांतर रखें तो उसमें से हो कर जाने वाले पानी की प्रवाह दर अलग होगी। और अगर हम लूप को पानी की धारा की लांबिक दिशा में रखेंगे तो पानी की प्रवाह दर अलग होगी। जब लूप धारा के समांतर होता है तब इसमें से पानी का प्रवाह नहीं होता और प्रवाह दर शून्य होती है। तो आइए, अब हम यह देखें कि क्षेत्रफल की दिशा को निर्धारित करने के लिए सदिश गुणनफल का प्रयोग किस प्रकार किया जाता है।



चित्र 1.20: एक क्षेत्रफल सदिश के रूप में सदिश गुणनफल की व्याख्या।

एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल A लें जिसकी संलग्न भुजाएं सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ द्वारा दी जाती हैं (चित्र 1.20)। ध्यान दें कि इन सदिशों के पुच्छ एक ही बिंदु पर हैं और θ सदिशों के बीच का कोण है। सदिश गुणनफल $(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}})$ का परिमाण है $ab \sin\theta$। यह सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ को आविष्ट करने वाले समतल पर लंब होता है। चित्र 1.20 से आप यह देख सकते हैं कि समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल होता है :

$$A = a \times h = a(b\sin\theta) = |\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}|$$

इस तरह, हम संलग्न भुजाओं $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ वाले समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल सदिश $\vec{\mathbf{A}}$ को इस तरह लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$$

इस परिभाषा से, क्षेत्रफल सदिश की दिशा समांतर चतुर्भुज के तल के लंबवत् होती है और इसकी अभिदिशा दक्षिणहस्त नियम से प्राप्त होती है। इस तरह, क्षेत्रफल सदिश $\vec{\mathbf{A}}$, पृष्ठ पर अभिलंब होता है।

याद रखें कि क्षेत्रफल सदिश की दिशा यादृच्छिक होती है, पर हम जब एक बार इसे चुन लेते हैं तो यह अद्वितीय होती है।

इस इकाई में जो कुछ आपने पढ़ा है, अब हम उसका सारांश देंगे।

1.5 सारांश

अवधारणा	विवरण
अदिश	■ वे भौतिक राशियां जिनका वर्णन पूर्णतः एक संख्या तथा उपयुक्त मापन मात्रक द्वारा किया जा सकता है, **अदिश** होती हैं।
सदिश	■ वे भौतिक राशियां जिनका वर्णन पूर्णतः परिमाण से (जो एक ऋणेतर अदिश होता है) और समष्टि में एक दिशा से किया जा सकता है, **सदिश** होती हैं। एक सदिश राशि का ज्यामितीय निरूपण एक तीर (एक दिष्ट रेखा खंड) द्वारा किया जाता है।

सदिशों की समानता

- दो मुक्त सदिश समान होते हैं यदि उनके परिमाण और दिशाएं समान हों भले ही उनके पुच्छ कहीं भी क्यों न स्थित हों। यदि सदिश $\vec{\mathbf{b}}$ का परिमाण एक अन्य सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ के परिमाण के बराबर हो, लेकिन उसकी दिशा $\vec{\mathbf{a}}$ की दिशा के विपरीत हो, तब हम लिखते हैं :

$$\vec{\mathbf{b}} = -\vec{\mathbf{a}}$$

एकक सदिश

- परिमाण या लंबाई 1 वाले सदिश को **एकक सदिश** कहा जाता है। परंपरा के अनुसार, एकक सदिशों को विमाहीन (dimensionless) माना जाता है। एकक सदिश का प्रयोग समष्टि में दिशा को प्रकट करने के लिए किया जाता है।

  किसी भी सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ को इसके परिमाण (a) और इसकी दिशा के अनुदिश एकक सदिश $\hat{\mathbf{a}}$ के गुणनफल द्वारा व्यक्त किया जाता है :

$$\vec{\mathbf{a}} = a\,\hat{\mathbf{a}} \qquad \text{या} \qquad \hat{\mathbf{a}} = \frac{\vec{\mathbf{a}}}{a} = \frac{\vec{\mathbf{a}}}{|\vec{\mathbf{a}}|}$$

सदिशों को जोड़ना और घटाना

- **सदिश योग का त्रिभुज नियम** : यदि दो सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ को जिन्हें जोड़ना है, एक त्रिभुज की भुजाओं द्वारा एक क्रम में निरूपित किया जा सकता हो यानी एक सदिश $\vec{\mathbf{b}}$ का पुच्छ दूसरे सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ के शीर्ष पर हो, तब इनका योग या परिणामी सदिश, त्रिभुज की तीसरी भुजा द्वारा निरूपित होता है और वह पहले सदिश के पुच्छ से दूसरे सदिश के शीर्ष तक होता है (चित्र 1.6)।

- **सदिश योग का समांतर चतुर्भुज नियम** : यदि दो सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ को जिन्हें जोड़ना है, (परिणाम और दिशा दोनों में) समांतर चतुर्भुज की दो संलग्न भुजाओं द्वारा निरूपित किया गया हो, तो इनके परिणामी के परिमाण और दिशा इन दो सदिशों के प्रतिच्छेद बिंदु से होकर जाने वाले समांतर चतुर्भुज के विकर्ण द्वारा निरूपित होते हैं (चित्र 1.7)।

- **सदिश योग का बहुभुज नियम** : दो से अधिक सदिशों का योग या परिणामी प्राप्त करने के लिए, यदि उनके परिमाण और दिशा को बहुभुज की भुजाओं द्वारा क्रमवार निरूपित किया जाए तो परिणामी सदिश, विपरीत दिशा में उस बहुभुज की अंतिम भुजा द्वारा निरूपित होता है यानी वह सदिश प्रथम सदिश के पुच्छ से अंतिम सदिश के शीर्ष तक होता है (चित्र 1.11)।

- सदिश योग **क्रमविनिमेय** (**commutative**) और साहचर्य (**associative**) होता है।

$$\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}} \quad \text{और} \quad (\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) + \vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + (\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}})$$

- सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ से सदिश $\vec{\mathbf{b}}$ को घटाने के लिए यानी $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$ प्राप्त करने के लिए सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ को सदिश $(-\vec{\mathbf{b}})$ में जोड़ा जाता है:

$$\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}} + (-\vec{\mathbf{b}})$$

अदिश से सदिश की गुणा

- जब एक सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ को एक अदिश m से गुणा किया जाता है, तब सदिश $m\vec{\mathbf{a}}$ का परिमाण $|m||\vec{\mathbf{a}}|$ होता है। एक अदिश से एक सदिश के गुणनफल के लिए निम्न तथ्य सत्य हैं :

$$m(n)\vec{\mathbf{a}} = (m)n\vec{\mathbf{a}} = mn\vec{\mathbf{a}} \qquad \textbf{साहचर्य नियम}$$

$(m+n)\vec{\mathbf{a}} = m\vec{\mathbf{a}} + n\vec{\mathbf{a}}$ और $m(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) = m\vec{\mathbf{a}} + m\vec{\mathbf{b}}$ **बंटन नियम**

यदि $m = 0$, तब $m\vec{\mathbf{a}}$ **शून्य सदिश** होता है जिसका परिमाण शून्य होता है और कोई निश्चित दिशा नहीं होती।

अदिश गुणनफल

■ दो सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ का **अदिश गुणनफल** जिसे "a डॉट b" कहा जाता है और $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है, एक अदिश राशि होती है जिसे इस प्रकार से परिभाषित किया जाता है :

$$\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}|\,|\vec{\mathbf{b}}|\cos\theta = ab\cos\theta$$

दी हुई दिशा में सदिश के घटक

■ एक सदिश को किसी भी स्वेच्छ दिशा के अनुदिश **घटक सदिशों** में वियोजित किया जा सकता है। एक सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ के समांतर और लंबवत्, किसी अन्य सदिश $\vec{\mathbf{b}}$ के घटक होते हैं:

$\vec{\mathbf{b}}$ के समांतर $\vec{\mathbf{a}}$ का घटक $= \dfrac{\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{b}}|} = |\vec{\mathbf{a}}|\cos\theta$

$\vec{\mathbf{b}}$ के लंबवत् $\vec{\mathbf{a}}$ का घटक $= |\vec{\mathbf{a}}|\sin\theta$

जहां θ, $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ के बीच का कोण है।

सदिश गुणनफल

■ दो सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ का **सदिश गुणनफल** जिसे "a क्रॉस b" कहा जाता है और जिसे $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ से व्यक्त किया जाता है, एक सदिश राशि होती है जिसकी परिभाषा इस प्रकार दी जाती है :

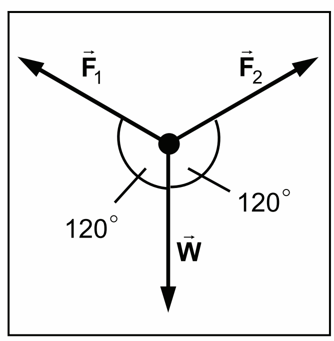
$\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = ab\sin\theta\,\hat{\mathbf{c}}$ जिसका परिमाण $c = ab\sin\theta$ होता है।

सदिश गुणनफल की दिशा एकक सदिश $\hat{\mathbf{c}}$ द्वारा दी जाती है जो सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ को आविष्ट करने वाले समतल पर लंब होता है और जिसकी अभिदिशा दक्षिणहस्त नियम द्वारा निर्धारित होती है।

1.6 अंत में कुछ प्रश्न

1. एक व्यक्ति पूर्व की ओर 1.0 km चलता है और फिर उत्तर-पश्चिम दिशा में उत्तर दिशा से 60° के कोण पर 1.5 km चलता है। ग्राफ़ीय विधि से व्यक्ति का परिणामी विस्थापन प्राप्त करें।

2. एक पिंड को 2 केबलों से लटकाया जाता है जो उस पर बल $\vec{\mathbf{F}}_1$ और $\vec{\mathbf{F}}_2$ लगाते हैं (चित्र 1.21)। पिंड का भार $W = 400$ N है। यदि पिंड पर लग रहा नेट बल शून्य हो तो F_1 और F_2 के मान प्राप्त करें।



चित्र 1.21: एक पिंड पर लग रहे बल।

3. क) एक पक्षी पवन के ठीक विपरीत दिशा में पवन के सापेक्ष $2.0\,\text{kmh}^{-1}$ की चाल से उड़ता है। पवन पूर्व से पश्चिम की ओर भूमि के सापेक्ष $1.0\,\text{kmh}^{-1}$ की चाल से बहती है। भूमि के सापेक्ष पक्षी का वेग क्या है?

   ख) एक व्यक्ति नदी के पार $2.0\,\text{ms}^{-1}$ की चाल से नाव खेता है। नदी $1.2\,\text{ms}^{-1}$ की चाल से बह रही है। ज्ञात करें कि उस व्यक्ति को किस दिशा में नाव को खेना चाहिये कि वह नाव को नदी के पार आरंभिक बिंदु के ठीक सामने वाले बिंदु पर ले जा सके।

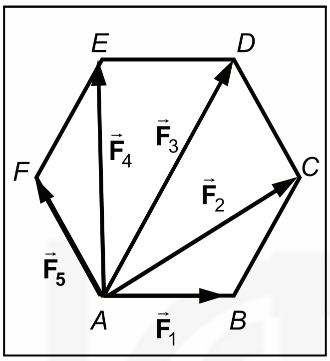
4. सिद्ध करें कि किन्हीं दो सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ के लिए, यदि सदिशों के योग और अंतर एक-दूसरे के लंबवत् हों तो इन सदिशों के परिमाण समान होते हैं।

5. किन्हीं दो शून्येतर परिमाण वाले सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ के बीच का कोण ज्ञात करें जबकि दिया हो कि $|\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}| = |\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}|$।

6. किन्हीं दो सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ के लिए सिद्ध करें कि

$$|\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}}|^2 + |\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}|^2 = a^2b^2$$

7. एक प्रोटॉन, एकसमान चुंबकीय क्षेत्र में 5.0×10^6 ms^{-1} की चाल से ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर गतिमान है। उस पर पश्चिम दिशा में 8.0×10^{-14} N का बल आरोपित होता है। जब यह क्षैतिजतः उत्तर दिशा में गतिमान होता है तब इस पर लग रहा बल शून्य होता है। इस प्रदेश में चुंबकीय क्षेत्र के परिमाण और दिशा क्या हैं? प्रोटॉन पर आवेश $= 1.6\times10^{-19}$ C।



चित्र 1.22: अंत के प्रश्न 12 के लिए चित्र।

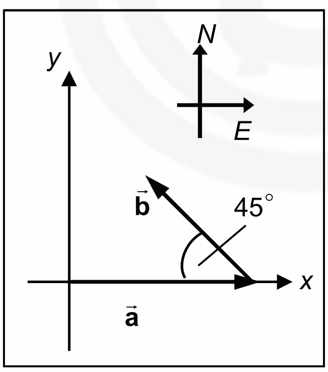
8. समीकरणों 1.5क और 1.5ख को सिद्ध करें।

9. दिया है कि $a = 2$ इकाई, $b = 6$ इकाई, $c = 1$ इकाई तो $\vec{\mathbf{a}}\,.\,(\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}})$ ज्ञात करें जबकि $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$, और $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{c}}$ के बीच के कोण क्रमशः 0° और 90° हैं।

10. दिया है कि सदिशों $\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{s}}$ के परिमाण क्रमशः 5 इकाई और 6 इकाई हैं और $\vec{\mathbf{r}}\,.\,\vec{\mathbf{s}}$ का मान 15 है। इन सदिशों के बीच का कोण ज्ञात करें।

11. अंत के प्रश्न 10 में दिए सदिशों $\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{s}}$ का सदिश गुणनफल ज्ञात करें।

12. चित्र 1.22 में दिए बलों $\vec{\mathbf{F}}_1$, $\vec{\mathbf{F}}_2$, $\vec{\mathbf{F}}_3$, $\vec{\mathbf{F}}_4$ और $\vec{\mathbf{F}}_5$ का परिणामी सदिश ज्ञात करें। (*ABCDEF* समषट्कोण है।)

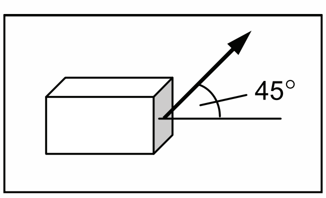


चित्र 1.23: अंत के प्रश्न 13 के लिए चित्र।

13. सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ का परिमाण 5 इकाई है और दिशा पूर्व की ओर है। सदिश $\vec{\mathbf{b}}$ का परिमाण 4 इकाई है और दिशा 45° उत्तर से पश्चिम की ओर है (चित्र 1.23)। सदिशों $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$ और $\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}$ के परिमाण और दिशा ज्ञात करें।

14. एक बक्स को रस्सी द्वारा जो भूमि से 45° के कोण पर है, खींचा जाता है (चित्र 1.24)। बक्स पर रस्सी के अनुदिश 105 N बल लगता है। बल के क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर घटक ज्ञात करें। बक्स को भूमि के अनुदिश 10 m खींचने में बल द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करें।

15. तीन सदिश $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ और $\vec{\mathbf{c}}$ प्रतिबंध $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}}=\vec{\mathbf{0}}$ को संतुष्ट करते हैं। यदि $|\vec{\mathbf{a}}| = 2$, $|\vec{\mathbf{b}}| = 1$ और $|\vec{\mathbf{c}}| = 3$ तो $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{b}}.\vec{\mathbf{c}}+\vec{\mathbf{c}}.\vec{\mathbf{a}}$ का मान ज्ञात करें।



चित्र 1.24: अंत के प्रश्न 14 के लिए चित्र।

1.7 हल और उत्तर

आप पहले से क्या जानते हैं?

1. क) तापमान – अदिश; ख) त्वरण – सदिश; ग) चाल – अदिश; घ) घनत्व – अदिश; च) वेग – सदिश; छ) तरंगदैर्घ्य – अदिश; ज) द्रव्यमान – अदिश; झ) विस्थापन – सदिश; त) आवेश – अदिश; थ) गलनांक – अदिश।

2. बल, संवेग, आवेग, विद्युत् क्षेत्र, वेग, विस्थापन, चुंबकीय क्षेत्र, भार। प्रत्येक राशि के लिए तीर बनाएं और उपयुक्त प्रतीक का प्रयोग करें जैसाकि नीचे दिखाया गया है :

बोध प्रश्न

1. क) सदिश $\vec{f}$ सदिश $\vec{a}$ के बराबर है। आप चित्र 1.5 में देख सकते हैं कि $\vec{f}$ और $\vec{a}$ के परिमाण और दिशा, दोनों बराबर हैं।

   ख) चित्र 1.25 देखें। सदिश $\vec{a} = 2.5\hat{i}$ और सदिश $\vec{b} = 4.0\hat{j}$।

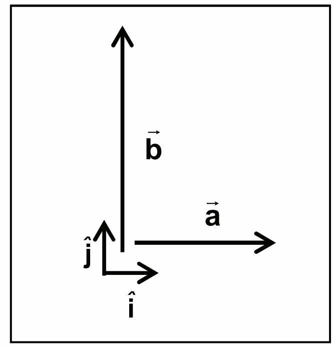
   ग) चित्र 1.26 देखें। एकक सदिश संकेतन में ये सदिश निम्नलिखित हैं :

   $\vec{a} = a\hat{a}$ $\quad \vec{c} = c\hat{c}$ $\quad \vec{e} = e\hat{e}$ $\quad \vec{g} = g\hat{g}$

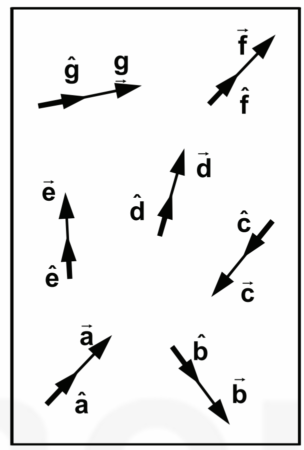
   $\vec{b} = b\hat{b}$ $\quad \vec{d} = d\hat{d}$ $\quad \vec{f} = f\hat{f}$

   घ) विस्थापन शून्य सदिश $\vec{0}$ है।

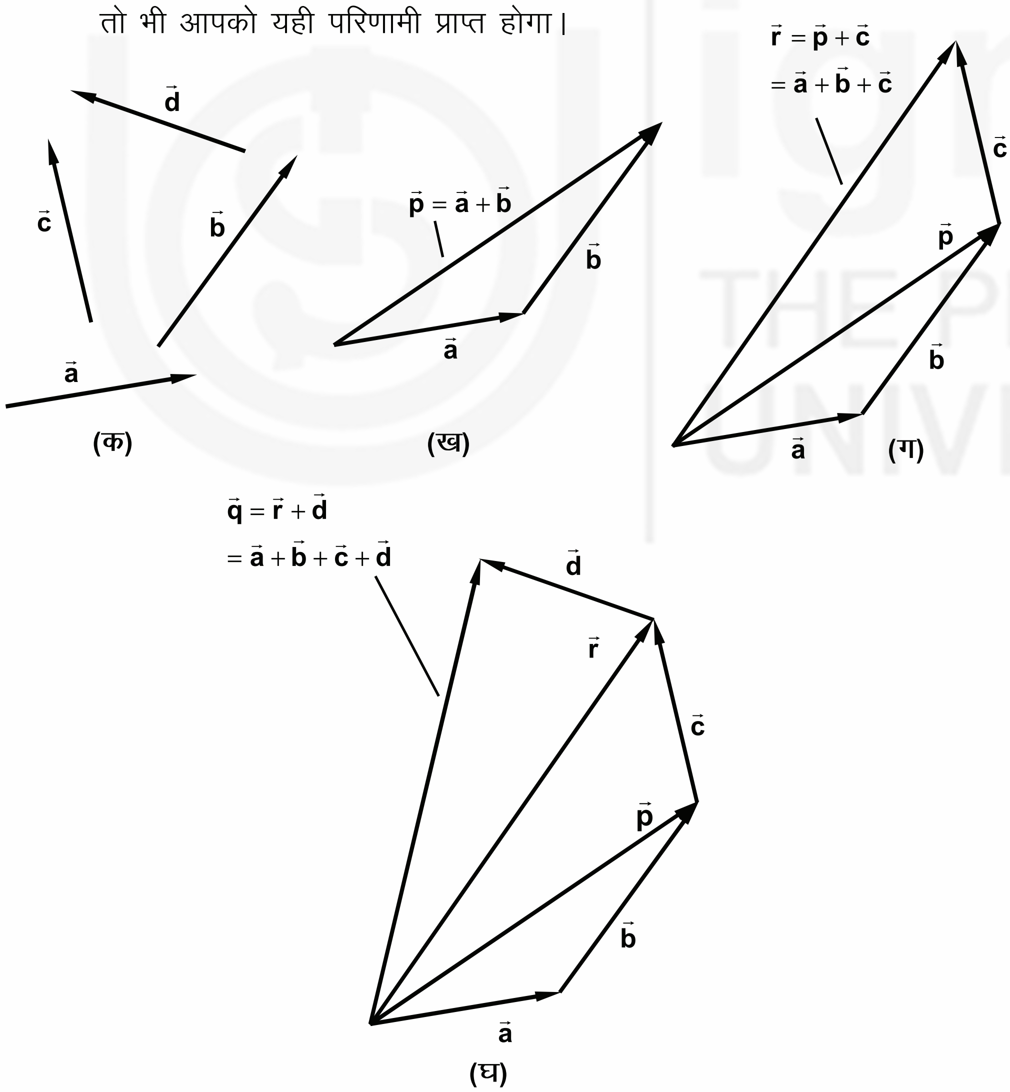
2. क) चित्र 1.27 देखें जिसमें हमने चित्र 1.10क के सदिशों को जोड़ने का एक तरीका दिखाया है। ध्यान रहे कि यदि आप सदिशों के जोड़ने का एक अलग क्रम लेंगे तो भी आपको यही परिणामी प्राप्त होगा।



चित्र 1.25 : बोध प्रश्न 1ख के लिए चित्र।



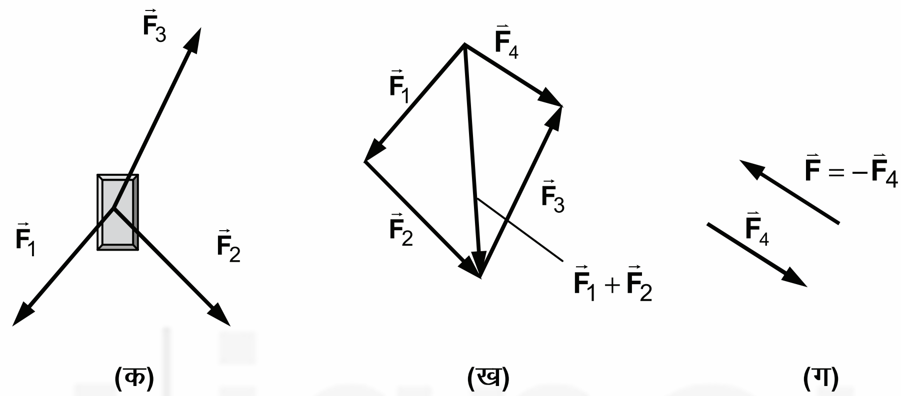
चित्र 1.26 : बोध प्रश्न 1ग के लिए चित्र। प्रत्येक सदिश के अनुदिश एकक सदिश मोटे तीर द्वारा दिखाया गया है।



चित्र 1.27 : चार सदिशों को जोड़ना।

सर्वप्रथम हम $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ को सदिश योग के त्रिभुज नियम द्वारा जोड़ते हैं जिससे हमें $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ प्राप्त होता है (चित्र 1.27ख)। इसके बाद $\vec{\mathbf{p}}$ और $\vec{\mathbf{c}}$ को जोड़ने के लिए फिर से त्रिभुज नियम लागू करने पर हम $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}$ प्राप्त करते हैं (चित्र 1.27ग)। अंत में सदिशों $\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{d}}$ को जोड़ने पर हमें परिणामी सदिश $\vec{\mathbf{q}} = \vec{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}} + \vec{\mathbf{d}}$ प्राप्त होता है (चित्र 1.27घ)।

ग) वस्तु पर परिणामी बल, बलों $\vec{\mathbf{F}}_1$, $\vec{\mathbf{F}}_2$ और $\vec{\mathbf{F}}_3$ (चित्र 1.28क) का सदिश योग $\vec{\mathbf{F}}_4$ है (चित्र 1.28ख)।

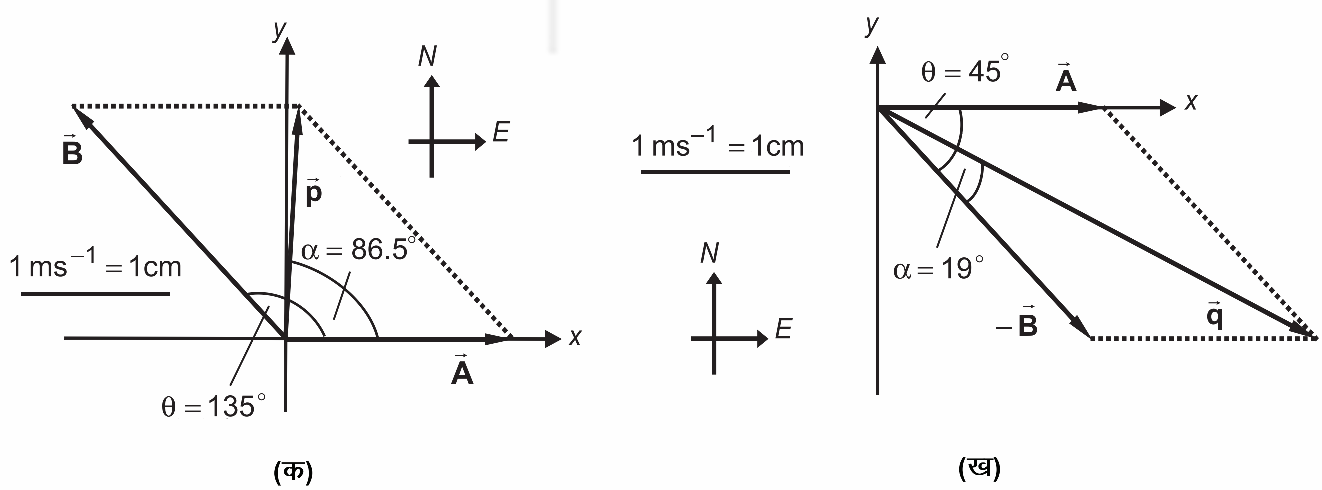


चित्र 1.28 : बोध प्रश्न 2ग के लिए चित्र।

वस्तु गति न करे, इसके लिए हमें उस पर लगने वाले परिणामी बल $\vec{\mathbf{F}}_4$ के बराबर परिमाण और विपरीत दिशा वाला बल लगाना चाहिए।

अतः, हमें उस पर $\vec{\mathbf{F}} = -\vec{\mathbf{F}}_4$ बल लगाना चाहिए (चित्र 1.28ग)।

3. सदिशों $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}$, $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ और $\vec{\mathbf{q}} = \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$ को चित्र 1.29क और ख में दिखाया गया है।



चित्र 1.29: बोध प्रश्न 3 के लिए चित्र।

$\vec{\mathbf{p}}$ प्राप्त करने के लिए (चित्र 1.29क), हम $\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{A}}$ और $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{B}}$ लेकर समीकरणों 1.5क और ख का प्रयोग करते हैं। अतः, $b = 3.0 \text{ ms}^{-1}$, $a = 4.0 \text{ ms}^{-1}$ और $\theta = 135^\circ$। कोण α, सदिश $\vec{\mathbf{p}}$ और सदिश $\vec{\mathbf{A}}$ के बीच का कोण है।

$\vec{\mathbf{p}}$ के परिमाण और दिशा हैं :

$$p = \sqrt{(3.0)^2 + (4.0)^2 + 2(3.0)(4.0)\cos 135^\circ} \approx 2.8 \text{ms}^{-1}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{(4.0)\sin 135^\circ}{(3.0) + (4.0)\cos 135^\circ}\right) = \tan^{-1}(16.5) = 86.5^\circ$$

$\vec{\mathbf{q}}$ प्राप्त करने के लिए (चित्र 1.29ख), हम $\vec{\mathbf{b}} = -\vec{\mathbf{B}}$ और $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{A}}$ लेते हैं और समीकरणों 1.5क और ख का प्रयोग करते हैं। अतः,
$b = 4.0 \text{ ms}^{-1}$, $a = 3.0 \text{ ms}^{-1}$ और $\theta = 45^\circ$। कोण α, सदिश $\vec{\mathbf{q}}$ और सदिश $-\vec{\mathbf{B}}$ के बीच का कोण है। $\vec{\mathbf{q}}$ के परिमाण और दिशा हैं :

$$q = \sqrt{(3.0)^2 + (4.0)^2 + 2(3.0)(4.0)\cos 45^\circ} \approx 6.5 \text{ms}^{-1},$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{(3.0)\sin 45^\circ}{(4.0) + (3.0)\cos 45^\circ}\right) = \tan^{-1}(0.346) = 19^\circ$$

4. क) $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}}$ प्राप्त करने के लिए हम समीकरण 1.10 का प्रयोग करते हैं।

(i) $a = 4$ इकाई, $b = 5$ इकाई, $\theta = 30^\circ$ के लिए

$\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} = 4 \times 5 \times \cos 30^\circ = 10\sqrt{3}$ इकाई

(ii) $a = 5$ इकाई, $b = 5$ इकाई, $\theta = 150^\circ$ के लिए

$\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} = 5 \times 5 \times \cos 150^\circ = -\frac{25}{2}\sqrt{3}$ इकाई

(iii) $a = 2$ इकाई, $b = 3$ इकाई, $\theta = 90^\circ$ के लिए

$\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} = 2 \times 3 \times \cos 90^\circ = 0$

(iv) $a = 2$ इकाई, $b = 3$ इकाई, $\theta = 0^\circ$ के लिए

$\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} = 2 \times 3 \times \cos 0^\circ = 6$ इकाई

ख) मान लें कि सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ के बीच का कोण θ है। क्योंकि सदिशों का परिमाण शून्य नहीं है, अतः, समीकरण 1.10 से

$$\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} = ab\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = 0 \text{ या } \theta = 90^\circ$$

अतः, सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ एक-दूसरे पर लंबवत् हैं।

5. क) सदिश गुणनफल प्राप्त करने के लिए हम समीकरण 1.12 का प्रयोग करते हैं।

(i) $a = 4$ इकाई, $b = 5$ इकाई, $\theta = 30^\circ$ के लिए

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = 4 \times 5 \times \sin 30^\circ \hat{\mathbf{c}} = 10\hat{\mathbf{c}} \text{ इकाई}$$

(ii) $a = 5$ इकाई, $b = 5$ इकाई, $\theta = 150°$ के लिए

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = 5 \times 5 \times \sin 150° \hat{\mathbf{c}} = 12.5 \hat{\mathbf{c}} \text{ इकाई}$$

(iii) $a = 2$ इकाई, $b = 3$ इकाई, $\theta = 90°$ के लिए

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = 2 \times 3 \times \sin 90° \hat{\mathbf{c}} = 6 \hat{\mathbf{c}} \text{ इकाई}$$

(iv) $a = 2$ इकाई, $b = 3$ इकाई, $\theta = 0°$ के लिए

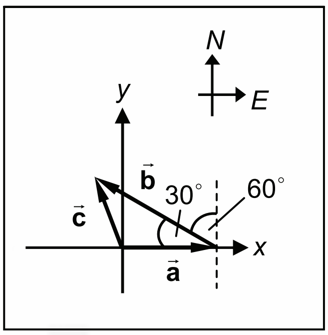
$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = 2 \times 3 \times \sin 0° \hat{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{0}}$$

प्रत्येक स्थिति में $\hat{\mathbf{c}}$ सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ को आविष्ट करने वाले समतल पर लंबवत् एकक सदिश होता है।

ख) बल आघूर्ण $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ हमें समीकरण 1.14क से मिलता है : $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times F\hat{\mathbf{r}}$
$\vec{\mathbf{r}}$ को $r\hat{\mathbf{r}}$ लिखने पर हमें मिलता है :

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = r\,F\,(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}}) = \vec{\mathbf{0}}$$

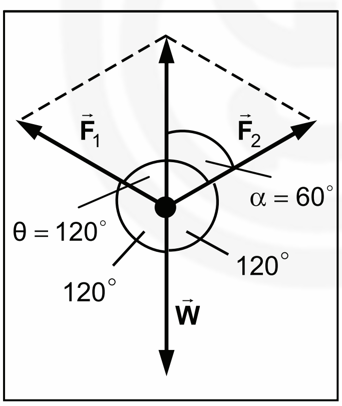
क्योंकि एक सदिश का स्वयं के साथ सदिश गुणनफल शून्य होता है (समीकरण 1.15ख)।



चित्र 1.30: अंत के प्रश्न 1 के लिए चित्र।

अंत में कुछ प्रश्न

1. चित्र 1.30 देखें। $\vec{\mathbf{d}}$ अंतिम विस्थापन है। लिए गए पैमाने पर सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ पूर्व दिशा में 1.0 km विस्थापन दर्शाता है। सदिश $\vec{\mathbf{b}}$ उत्तर-पश्चिम दिशा में 60° कोण पर 1.5 km विस्थापन दर्शाता है। अंतिम विस्थापन $\vec{\mathbf{c}}$, सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ की पूंछ से सदिश $\vec{\mathbf{b}}$ के शीर्ष तक होता है।



चित्र 1.31 : अंत के प्रश्न 2 के लिए चित्र।

2. यहां हम चित्र 1.21 को चित्र 1.31 के रूप में खींचते हैं। क्योंकि पिंड पर लग रहा नेट बल शून्य है, अतः,

$$\vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \vec{\mathbf{W}} = \vec{\mathbf{0}} \Rightarrow \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 = -\vec{\mathbf{W}} \qquad \text{(i)}$$

अतः, बलों $\vec{\mathbf{F}}_1$ और $\vec{\mathbf{F}}_2$ का परिणामी बल $\vec{\mathbf{F}}$ परिमाण में $\vec{\mathbf{W}}$ के समान और दिशा में विपरीत होगा (चित्र 1.31)। अब हम समीकरणों 1.5क और ख का प्रयोग करके परिणामी $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2$ प्राप्त करेंगे जहां $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{F}}_1$, $\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{F}}_2$, $\theta = 120°$ और $\alpha = 60°$ है। तब

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos 120°} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - F_1F_2} \qquad \text{(ii)}$$

$$\tan\alpha = \tan 60° = \sqrt{3} = \left(\frac{F_1 \sin 120°}{F_2 + F_1\cos 120°}\right) \qquad \text{(iii)}$$

$F_1 \sin 120° =$

$\sqrt{3}\left(F_2 + F_1 \cos 120°\right)$

$F_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\left[F_2 - F_1\left(\frac{1}{2}\right)\right]$

$2F_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}F_2$

$\therefore\ F_1 = F_2$

समीकरण (iii) को हल करने पर हमें मिलता है : $F_1 = F_2$ (हाशिये पर दी गई टिप्पणी पढ़ें)। यह हमें बताता है कि $\vec{\mathbf{F}}_1$ और $\vec{\mathbf{F}}_2$ के परिमाण समान हैं। इस परिणाम को समीकरण (ii) में रखने पर और क्योंकि $F = W$, हमें मिलता है :

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_1^2 - F_1^2} = F_1 = 400\,\text{N} \quad \text{और} \quad F_2 = 400\,\text{N}$$

3\. क) मान लें कि पवन के सापेक्ष पक्षी का वेग $\vec{\mathbf{v}}_{BW}$ है और भूमि के सापेक्ष पवन का वेग $\vec{\mathbf{v}}_{WG}$ है। भूमि के सापेक्ष पक्षी का वेग ($\vec{\mathbf{v}}_{BG}$) होता है :

$$\vec{\mathbf{v}}_{BG} = \vec{\mathbf{v}}_{BW} + \vec{\mathbf{v}}_{WG}$$

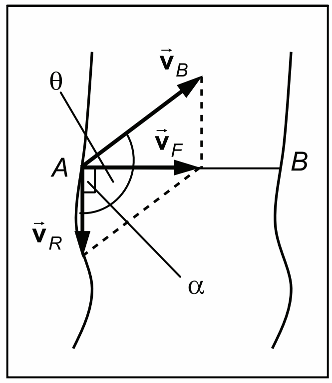
चूंकि पक्षी पवन के ठीक विपरीत दिशा में उड़ता है, अतः, हम लिख सकते हैं :

$$v_{BG} = v_{BW} - v_{WG}$$

$$\therefore \quad v_{BG} = 2.0\,\text{kmh}^{-1} - 1.0\,\text{kmh}^{-1} = 1.0\,\text{kmh}^{-1}$$

अतः, पक्षी भूमि के सापेक्ष पवन के ठीक विपरीत दिशा में यानी पश्चिम से पूर्व की ओर $1.0\,\text{kmh}^{-1}$ की चाल से उड़ता है।

ख) चित्र 1.32 देखें। नदी का वेग $\vec{\mathbf{v}}_R$ है। मान लें कि व्यक्ति वेग $\vec{\mathbf{v}}_B$ से नाव खेता है। नाव का परिणामी वेग $\vec{\mathbf{v}}_F$, *AB* के अनुदिश होना चाहिये (चित्र 1.32)। अतः, परिणामी वेग $\vec{\mathbf{v}}_F$ और $\vec{\mathbf{v}}_R$ के बीच का कोण $\alpha = 90^\circ$ है। मान लें कि $\vec{\mathbf{v}}_B$ और $\vec{\mathbf{v}}_R$ के बीच का कोण θ है। अब हम समीकरण 1.5ख का प्रयोग करके θ का मान प्राप्त करेंगे जहां $\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{v}}_R$ और $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{v}}_B$ है। दिया है कि $v_R = 1.2\,\text{ms}^{-1}$ और $v_B = 2.0\,\text{ms}^{-1}$ । इन मानों को समीकरण 1.5ख में रखने पर हमें मिलता है :



चित्र 1.32: अंत के प्रश्न 3 के लिए चित्र।

$$\tan\alpha = \tan 90^\circ = \frac{(2.0)\sin\theta}{(1.2)+(2.0)\cos\theta}$$

या
$$\cot 90^\circ = \frac{(1.2)+(2.0)\cos\theta}{(2.0)\sin\theta} = 0 \Rightarrow (1.2)+(2.0)\cos\theta = 0$$

या
$$\cos\theta = -\frac{1.2}{2.0} \quad \Rightarrow \theta = \cos^{-1}(-0.6) \approx 127^\circ$$

4\. किन्हीं दो सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ के लिए, सदिशों के योग और अंतर $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$ और $\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}$ हैं। क्योंकि $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$ और $\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}$ एक-दूसरे के लंबवत् हैं, इनका अदिश गुणनफल शून्य है और हमें मिलता है :

$$\left(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}\right).\left(\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}\right) = 0 \Rightarrow \vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}.\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{b}}.\vec{\mathbf{b}} = 0$$

या $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}.\vec{\mathbf{b}} = a^2 - b^2 = 0$ क्योंकि $\vec{\mathbf{b}}.\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}}$

या $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$

अतः, सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ के परिमाण समान हैं।

5\. समीकरण 1.11ग से सदिशों $\left|\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}\right|$ और $\left|\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}\right|$ के परिमाण हैं :

$$\left|\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}\right| = \sqrt{(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}).(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})} = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}$$

$$\left|\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}\right| = \sqrt{(\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}).(\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}})} = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$$

क्योंकि दिया है कि $|\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}| = |\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}|$, अतः, हम लिख सकते हैं कि :

$$a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

या $\quad 4ab\cos\theta = 0$

या $\quad \cos\theta = 0$ क्योंकि a और b के परिमाण शून्येतर हैं।

अतः, $\quad \theta = 90°$ यानी $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ के बीच का कोण 90° है।

6. मान लें कि सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ के बीच का कोण θ है। तब समीकरणों 1.10 और 1.12 से हम लिख सकते हैं कि :

$$|\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}}|^2 + |\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}|^2 = a^2b^2\cos^2\theta + a^2b^2\sin^2\theta$$

$$= a^2b^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = a^2b^2$$

$$|\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}}|^2 + |\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}|^2 = a^2b^2$$

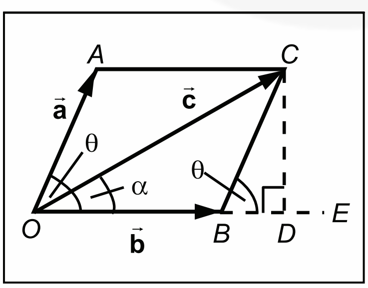
7. प्रोटॉन पर आरोपित बल है : $\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{B}}$ । जब प्रोटॉन का वेग क्षैतिज तल में उत्तर दिशा में है तब इस पर लग रहा बल शून्य है। यानी $\vec{\mathbf{v}}$ चुंबकीय क्षेत्र $\vec{\mathbf{B}}$ के समांतर है। अतः, चुंबकीय क्षेत्र $\vec{\mathbf{B}}$ की दिशा क्षैतिज तल में उत्तर दिशा में है।

अतः, जब प्रोटॉन ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर गतिमान होता है तब $\vec{\mathbf{v}}$ चुंबकीय क्षेत्र $\vec{\mathbf{B}}$ के लंबवत् होता है और

$$F = qvB\sin 90^\circ = qvB$$

या $$B = \frac{F}{qv} = \frac{8.0\times10^{-14}\,\text{N}}{1.6\times10^{-19}\,\text{C}\times5.0\times10^{6}\,\text{ms}^{-1}} = 0.1 \text{ tesla}$$

8. चित्र 1.7 को हमने चित्र 1.33 के रूप में फिर से दिखाया है। चित्र 1.33 में आप देख सकते हैं कि समांतर चतुर्भुज की भुजाएं OA और OB, क्रमशः सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ को निरूपित करती हैं जबकि विकर्ण OC परिणामी सदिश $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ को निरूपित करता है। $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ का परिणामी ज्ञात करने के लिए हमें $\vec{\mathbf{c}}$ के परिमाण और दिशा ज्ञात करने होंगे। सदिश $\vec{\mathbf{c}}$ का परिमाण समांतर चतुर्भुज के विकर्ण OC की लंबाई है। OC का मान प्राप्त करने के लिए हम समांतर चतुर्भुज की भुजा OB को E तक बढ़ाते हैं और बिंदु C से OE पर लंब CD खींचते हैं। समकोण त्रिभुज COD में



चित्र 1.33: सदिश योग का समांतर चतुर्भुज नियम।

$$OC = \sqrt{OD^2 + CD^2} = \sqrt{(OB+BD)^2 + CD^2} \qquad \text{(i)}$$

चित्र 1.33 में आप देख सकते हैं कि समकोण त्रिभुज CDB में

$$BD = BC\cos\theta = OA\cos\theta = a\cos\theta \text{ और}$$

$$CD = BC\sin\theta = OA\sin\theta = a\sin\theta$$

इन मानों को समीकरण (i) में रखने पर हमें $\vec{\mathbf{c}}$ का परिमाण OC प्राप्त होता है :

$$OC = \sqrt{OB^2 + BD^2 + 2OB.BD + CD^2}$$

$$= \sqrt{b^2 + a^2\cos^2\theta + 2ba\cos\theta + a^2\sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{b^2 + a^2 + 2ab\cos\theta}$$

$\vec{\mathbf{c}}$ की दिशा, सदिशों $\vec{\mathbf{c}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ के बीच के कोण α द्वारा दी जाती है :

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{CD}{OD}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{CD}{OB+BD}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{a\sin\theta}{b+a\cos\theta}\right)$$

9. अदिश गुणनफल के साहचर्य गुणधर्म से हम लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{a}}\,.\left(\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}}\right) = \vec{\mathbf{a}}\,.\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}\,.\,\vec{\mathbf{c}} = ab\cos 0^\circ + ac\cos 90^\circ = ab = 12$$

10. समीकरण 1.10 से $\cos\theta = \dfrac{\vec{\mathbf{r}}\,.\,\vec{\mathbf{s}}}{|\vec{\mathbf{r}}|\,|\vec{\mathbf{s}}|}$ या $\cos\theta = \dfrac{15}{5\times 6} = \dfrac{1}{2}$

अतः, सदिशों के बीच का कोण है : $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 60^\circ$

11. परिमाण क्रमशः 5 इकाई और 6 इकाई वाले सदिशों $\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{s}}$ का सदिश गुणनफल है :

$$\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{s}} = 5\times 6\times\sin 60^\circ\,\hat{\mathbf{c}} = 15\sqrt{3}\,\hat{\mathbf{c}} \text{ इकाई}$$

जहां सदिशों के बीच का कोण है : $\theta = 60^\circ$।

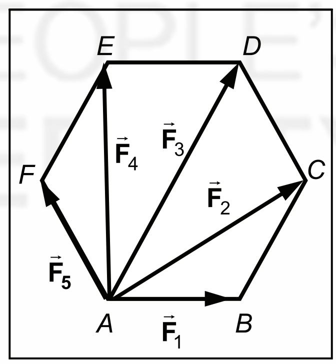
12. समषट्कोण की सब भुजाएं बराबर होती हैं। चित्र 1.22 को हमने चित्र 1.34 के रूप में फिर से दिखाया है। चित्र 1.34 से हम देख सकते हैं कि

$$\vec{\mathbf{F}}_2 + \vec{\mathbf{F}}_5 = \vec{\mathbf{F}}_3$$

($\because$ AF, CD के समांतर है, अतः, हम $\vec{\mathbf{F}}_5$ को CD के अनुदिश रख सकते हैं और सदिश योग का त्रिभुज नियम लागू कर सकते हैं।)

इसी तरह $\vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_4 = \vec{\mathbf{F}}_3$

$$\therefore\ \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \vec{\mathbf{F}}_3 + \vec{\mathbf{F}}_4 + \vec{\mathbf{F}}_5 = (\vec{\mathbf{F}}_2 + \vec{\mathbf{F}}_5) + \vec{\mathbf{F}}_3 + (\vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_4) = 3\vec{\mathbf{F}}_3$$

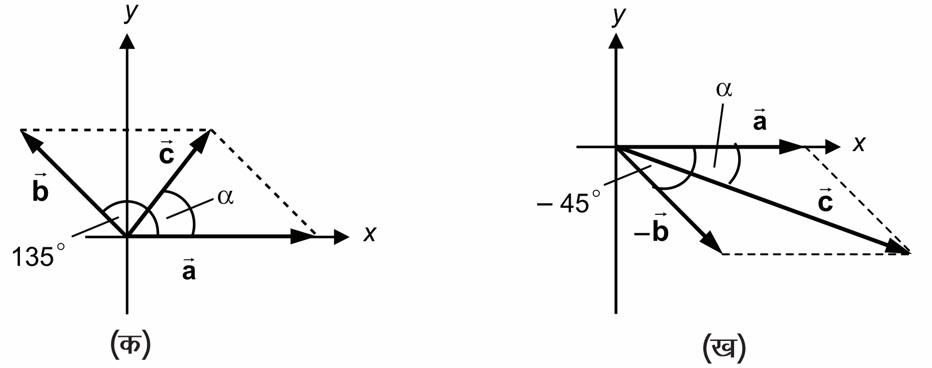


चित्र 1.34: अंत के प्रश्न 12 के लिए चित्र।

13. सदिश $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$ का परिमाण ज्ञात करने के लिए, हम समीकरण 1.5क में $a = 4$, $b = 5$ और $\theta = (90^\circ + 45^\circ) = 135^\circ$ रखते हैं (चित्र 1.35क)।

$$\therefore\quad c = \sqrt{(5)^2 + 2.(5)(4)\cos 135^\circ + (4)^2} = 3.6 \text{ इकाई}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{4\sin 135^\circ}{5+4\cos 135^\circ} = \tan^{-1}\left[\frac{4}{5\sqrt{2}-4}\right] = \tan^{-1}[1.3] = 52.4^\circ$$



चित्र 1.35: अंत के प्रश्न 13 के लिए चित्र।

सदिश $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$ का परिमाण ज्ञात करने के लिए, हम देखते हैं कि $\vec{\mathbf{a}}$ और $-\vec{\mathbf{b}}$ के बीच का कोण 315° (या $-45°$) है (चित्र 1.35ख)।

$$\therefore \qquad |\vec{\mathbf{c}}| = \sqrt{(5)^2 + (4)^2 + (2)(5)(4)\cos 315°} \; = 8.3 \text{ इकाई}$$

सदिश $\vec{\mathbf{c}}$ और सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ के बीच का कोण है

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4\sin 315°}{5 + 4\cos 315°}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{-4}{5\sqrt{2}+4}\right] = \tan^{-1}(-0.36) \approx 340°$$

14. बल का क्षैतिज घटक है $F_H = 105\cos 45° = 74.3\,\text{N}$

बल का ऊर्ध्वाधर घटक है $F_V = 105\sin 45° = 74.3\,\text{N}$

बल द्वारा किया गया कार्य है $W = Fd\cos 45° = 105 \times 10 \times 45° = 743\,\text{J}$

15. $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{a}} = |\vec{\mathbf{a}}|^2 = 4; \quad \vec{\mathbf{b}}.\vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{b}}|^2 = 1; \quad \vec{\mathbf{c}}.\vec{\mathbf{c}} = |\vec{\mathbf{c}}|^2 = 9$

हम लिख सकते हैं : $\vec{\mathbf{a}}.(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{0}} = 0$

$$\Rightarrow \qquad |\vec{\mathbf{a}}|^2 + \vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{b}}.\vec{\mathbf{c}} = 0 \Rightarrow \vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{b}}.\vec{\mathbf{c}} = -|\vec{\mathbf{a}}|^{\mathbf{2}} = -4 \qquad \text{(i)}$$

इसी तरह $\quad \vec{\mathbf{b}}.(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}) = 0 \Rightarrow \vec{\mathbf{b}}.\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}.\vec{\mathbf{c}} = -|\vec{\mathbf{b}}|^{\mathbf{2}} = -1 \qquad \text{(ii)}$

और $\quad \vec{\mathbf{c}}.(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}) = 0 \Rightarrow \vec{\mathbf{c}}.\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}.\vec{\mathbf{a}} = -|\vec{\mathbf{c}}|^2 = -9 \qquad \text{(iii)}$

समीकरणों (i, ii और iii) को जोड़ने पर हमें मिलता है :

$$2(\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{b}}.\vec{\mathbf{c}} + \vec{\mathbf{c}}.\vec{\mathbf{a}}) = -4 - 1 - 9 \; = -14$$

$$\therefore \qquad (\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{b}}.\vec{\mathbf{c}} + \vec{\mathbf{c}}.\vec{\mathbf{a}}) = -14/2 \; = -7$$

इस रेलगाड़ी का स्थिति सदिश, समय का सदिश फलन है। इसका वेग क्या है? यह इकाई पढ़ कर आप ऐसे सवालों के जवाब दे पायेंगे।

इकाई 2

सदिश बीजगणित – II

इकाई की रूपरेखा

अध्ययन निर्देशिका

इकाई 1 में आपने सदिश बीजगणित की प्रारंभिक संकल्पनाओं को दोहराया है। आपने सीखा है कि **सदिशों का ज्यामितीय निरूपण दिष्ट रेखा खंड** द्वारा किया जाता है। इस इकाई में हम कार्तीय निर्देशांक तंत्र के सापेक्ष सदिशों के घटकों के रूप में सदिशों का बीजीय निरूपण करेंगे। अपने स्कूल के गणित या भौतिकी के पाठ्यक्रमों में आपने सदिशों के घटकों के बारे में ज़रूर पढ़ा होगा। यदि ऐसा है, तो आप जल्दी से इस इकाई के भाग 2.2 और 2.3 दोहरा सकते हैं और इसमें दिए गए उदाहरणों और बोध प्रश्नों को हल कर सकते हैं। भाग 2.4 आपके लिए नया हो सकता है। स्कूल के गणित के पाठ्यक्रम में आपने एकल चर के फलनों का अवकलन सीखा है। उसे आप दोहरा लें। तब आप भाग 2.4 को बेहतर समझ पाएंगे। फिर भी इस भाग को आप ध्यान से पढ़ें। **इस इकाई में हमने बीजगणित का काफ़ी प्रयोग किया है। अतः, इसे पढ़ते हुए आप सदा अपने साथ कलम/पेंसिल और कागज़ रखें।** सभी उदाहरणों, बोध प्रश्नों और इकाई के अंत में दिए गए प्रश्नों के सभी चरणों को हल करें क्योंकि तभी आप इसमें दक्ष हो सकेंगे। लेकिन प्रश्नों को हल करने से पहले उनके उत्तर देखने के प्रलोभन से बचें!

"... (ब्रह्मांड की) किताब गणित की भाषा में लिखी गई है जिसके बिना उसका एक भी शब्द समझ पाना मनुष्यों के लिए नामुमकिन है, और जिसके बिना हम गहन अंधकार में भटकते रहते हैं।"

गैलीलियो गैलिली

2.1 परिचय

कार्तीय निर्देशांक द्विविम या त्रिविम सरल रेखीय निर्देशांक होते हैं। परंपरा से, त्रिविम कार्तीय निर्देशांक के 3 अक्ष होते हैं जिन्हें x, y और z-अक्ष कहते हैं। ये अक्ष रैखिक और एक दूसरे के लंबवत् होते हैं। त्रिविम में प्रत्येक निर्देशांक x, y और z के अंतराल $(-\infty, \infty)$ में कोई भी मान हो सकते हैं।

इकाई 1 में आपने सदिश बीजगणित की प्रारंभिक संकल्पनाओं को दोहराया है। आपने सदिशों का ग्राफ़ीय या ज्यामितीय निरूपण दोहराया है जिसमें निर्देशांक तंत्र का कोई संदर्भ नहीं दिया जाता। **सदिशों को निर्देशांक तंत्र के संदर्भ के बिना परिभाषित करने का** लाभ यह है कि इस तरह भौतिकी के नियमों को सदिशों के पदों में व्यक्त किया जा सकता है क्योंकि सदिश, निर्देशांक तंत्र पर निर्भर नहीं करते। उदाहरण के लिए, सदिश संकेतन पद्धति में हम न्यूटन के गति के द्वितीय नियम को $\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ के रूप में लिखते हैं। सदिशों के इस पहलू के कारण वे भौतिकी में एक शक्तिशाली साधन के रूप में इस्तेमाल किये जाते हैं। लेकिन जब सदिशों को दिष्ट रेखा खण्डों द्वारा निरूपित किया जाता है तब बहुत बार त्रिविम समष्टि में इन्हें जोड़ने और घटाने की कल्पना कर पाना कठिन होता है। अतः, सदिशों के आलेखीय/ज्यामितीय निरूपण का त्रिविम समष्टि में सीमित उपयोग होता है।

हम यह पाते हैं कि सदिशों का **एक निर्देशांक तंत्र के सापेक्ष इनके घटकों के रूप में बीजीय निरूपण करना** आसान होता है। इस इकाई में हम सदिशों के बीजीय निरूपण का प्रयोग कर, सदिशों के योग, घटाने तथा सदिश गुणनफल जैसी सदिश संक्रियाओं को समझाएंगे। आप देखेंगे कि ऐसा करने से सदिश बीजगणित काफ़ी सरल हो जाता है। इकाई के भाग 2.2 में हम द्विविम और त्रिविम कार्तीय निर्देशांक तंत्रों में सदिशों का बीजीय निरूपण समझाएंगे। इस भाग में हम यह भी बताएंगे कि घटक रूप में सदिशों को किस तरह जोड़ा और घटाया जाता है। भाग 2.3 में आप सदिशों का अदिश और सदिश गुणनफल ज्ञात करना सीखेंगे।

अनेक भौतिक राशियों की अभिव्यक्ति अचर सदिशों के योगफल और गुणनफल के रूप में की जाती है। लेकिन अनेक भौतिक राशियां समय के साथ परिवर्तित भी होती हैं या समष्टि में एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक स्थान के साथ परिवर्तित होती हैं। उदाहरण के लिए, एक वस्तु का वेग समय के साथ परिवर्तित होता है और एक बिंदु का विद्युत् क्षेत्र स्थिति के साथ परिवर्तित होता है। इस प्रकार की भौतिक राशियों को स्थिति या समय के **सदिश फलनों** के रूप में निरूपित किया जाता है। भाग 2.4 में आप पहले सदिश फलनों और भौतिकी में उनके उदाहरणों के बारे में पढ़ेंगे। स्कूल के भौतिकी के पाठ्यक्रम में आपने पढ़ा है कि वेग और त्वरण, समय के सापेक्ष विस्थापन के क्रमशः प्रथम और द्वितीय अवकलज हैं। विस्थापन भी समय का फलन हो सकता है। भौतिकी में आपको सीखना होगा कि सदिश फलनों को समय के सापेक्ष कैसे अवकलित किया जाता है। भाग 2.4.2 में आप यही सीखेंगे। अगली इकाई में आप प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों के बारे में पढ़ेंगे।

ध्यान दें

अपने लिखित कार्य में सदैव ही जिस अक्षर से आप सदिश को प्रकट करें उस अक्षर के ऊपर एक तीर का निशान ज़रूर लगाएं, उदाहरण के लिए $\vec{\mathbf{r}}$। एकक सदिश को व्यक्त करने के लिए अक्षर के ऊपर एक कैप का निशान लगाएं, उदाहरण के लिए, $\hat{\mathbf{r}}$।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- एक सदिश को द्विविम और त्रिविम कार्तीय निर्देश तंत्रों में उसके घटकों और उन तंत्रों के आधार सदिशों के पदों में व्यक्त कर सकेंगे;
- सदिशों को उनके घटक रूप में जोड़ और घटा सकेंगे;
- सदिशों के घटक रूप का प्रयोग कर, उनके अदिश और सदिश गुणनफलों को परिकलित कर सकेंगे;
- सदिश फलनों को अवकलित कर सकेंगे; और
- सदिश बीजगणित पर आधारित भौतिकी के प्रश्न हल कर सकेंगे।

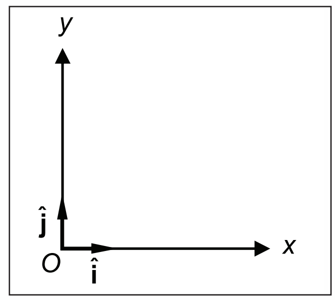
2.2 कार्तीय निर्देशांक तंत्र में सदिश घटक

किसी निर्देशांक तंत्र में एक सदिश के घटकों को परिभाषित करने के लिए, हमें वर्धमान निर्देशांकों की दिशा में निर्देशांक अक्षों के अनुदिश एकक सदिशों को परिभाषित करना होता है। आसानी के लिए, हम पहले द्विविम कार्तीय निर्देशांक तंत्र में निर्देशांक अक्षों के अनुदिश एकक सदिश को परिभाषित करेंगे।

2.2.1 कार्तीय निर्देशांक तंत्र में एकक सदिश

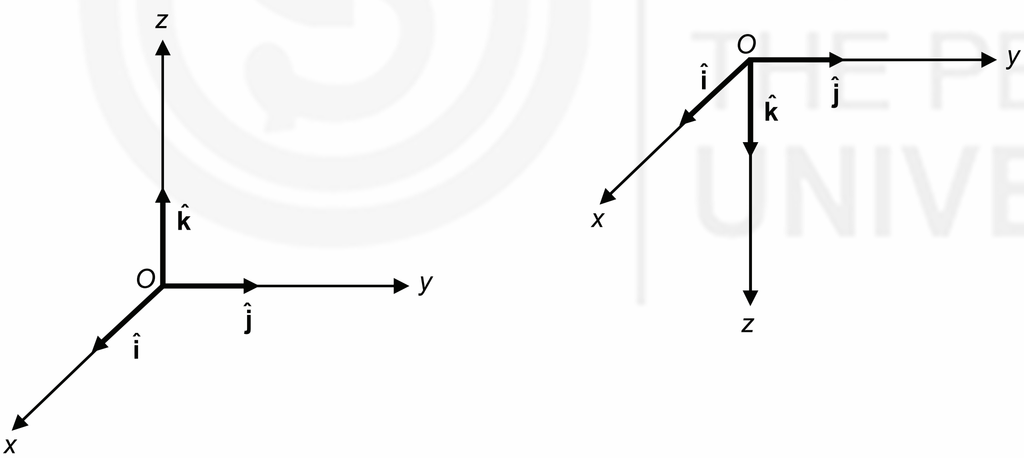
आपने स्कूल में भौतिकी या गणित के पाठ्यक्रमों में **द्विविम कार्तीय निर्देशांक तंत्र** के बारे में अवश्य ही पढ़ा होगा। इसमें **परस्पर लांबिक अक्ष** होते हैं जिन्हें हम x-अक्ष और y-अक्ष कहते हैं।

चित्र 2.1 देखें। **ध्यान दें** कि x-अक्ष और y-अक्ष एक दूसरे के **लंबवत्** होते हैं। इन दोनों अक्षों के प्रतिच्छेद बिंदु O को कार्तीय निर्देशांक तंत्र का **मूल बिंदु** (origin) कहा जाता है। निर्देशांकों के धनात्मक मानों को तीर द्वारा दर्शाई गई दिशा में मूल बिंदु से मापा जाता है। हम $+x$ दिशा में एकक सदिश को $\hat{\mathbf{i}}$ से और $+y$ दिशा में एकक सदिश को $\hat{\mathbf{j}}$ से प्रकट करते हैं। कार्तीय निर्देशांक तंत्र में ये सदिश अचर होते हैं।



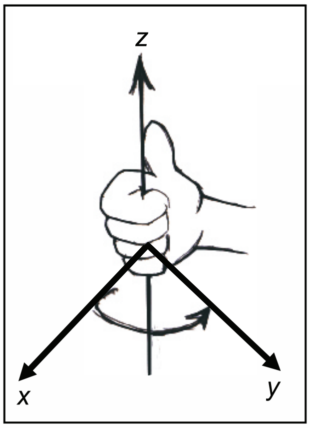
चित्र 2.1: द्विविम कार्तीय निर्देशांक तंत्र में एकक सदिश।

त्रिविम कार्तीय निर्देशांक तंत्र में तीन अक्ष होते हैं : x, y और z-अक्ष। इस निर्देशांक तंत्र में हम x, y और z-अक्षों के अनुदिश एकक सदिशों को क्रमशः $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ और $\hat{\mathbf{k}}$ द्वारा निरूपित करते हैं। हम z-अक्ष की दिशा, चित्र 2.2क और ख में दर्शाई गई दिशाओं में से एक के अनुसार चुन सकते हैं। इस तरह हम **दक्षिणहस्त** और **वामहस्त** कार्तीय निर्देशांक तंत्रों की परिभाषा दे सकते हैं।



चित्र 2.2: क) दक्षिणहस्त और ख) वामहस्त त्रिविम कार्तीय निर्देशांक तंत्र में एकक सदिश।

अब आप यह जानना चाहेंगे : **दक्षिणहस्त और वामहस्त कार्तीय निर्देशांक तंत्र का क्या अर्थ होता है?** परंपरा से, चित्र 2.2क में दिखाया गया निर्देशांक तंत्र दक्षिणहस्त कार्तीय निर्देशांक तंत्र है। ध्यान दें कि इस तंत्र के लिए तीनों निर्देशांक अक्ष एक दक्षिणहस्त त्रय बनाते हैं। इस तंत्र में, जब आप z-अक्ष के इर्द-गिर्द अपने **दाहिने हाथ** की उंगलियों को इस तरह मोड़ते हैं कि आपकी उंगलियों के पोर धनात्मक x-अक्ष से धनात्मक y-अक्ष की ओर घूर्णन की दिशा में हों तो आपका फैला हुआ अंगूठा धनात्मक



चित्र 2.3: दक्षिणहस्त निर्देशांक तंत्र के लिए दक्षिणहस्त नियम।

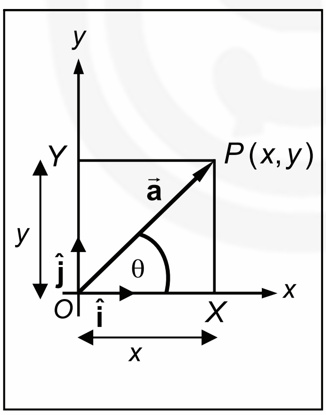
z-अक्ष की दिशा में होता है (चित्र 2.3)। इस बात को बेहतर समझने के लिए इकाई 1 के भाग 1.4.2 में दी गई सदिश गुणनफल की परिभाषा याद करें। एक दक्षिणहस्त तंत्र के लिए निर्देशांक अक्षों के अनुदिश एकक सदिशों $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ और $\hat{\mathbf{k}}$ के सदिश गुणनफल दक्षिणहस्त नियम का पालन करते हैं। यानी दक्षिणहस्त तंत्र के लिए $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}$, $\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}$ और $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$।

वामहस्त कार्तीय निर्देशांक तंत्र में, जिसे चित्र 2.2ख में दिखाया गया है, जब आप z-अक्ष के इर्द-गिर्द अपने **बायें हाथ** की उंगलियों को इस तरह मोड़ते हैं कि आपकी उंगलियों के पोर धनात्मक x-अक्ष से धनात्मक y-अक्ष की ओर घूर्णन की दिशा में हों तब आपका फैला हुआ अंगूठा जिस दिशा में होता है, वह धनात्मक z-अक्ष की दिशा होती है। हमें **सदैव यह निर्दिष्ट करना चाहिए कि हम कौन सा निर्देशांक तंत्र – दक्षिणहस्त या वामहस्त – इस्तेमाल कर रहे हैं**। इस पाठ्यक्रम समेत बीएससी के भौतिकी के सभी पाठ्यक्रमों और भौतिकी की अधिकतर किताबों में सदिशों के वर्णन के लिए दक्षिणहस्त कार्तीय निर्देशांक तंत्र का चुनाव किया जाता है। आइए, अब देखें कि किसी सदिश को कार्तीय निर्देशांक तंत्र में उसके घटकों के पदों में किस तरह निरूपित किया जाता है।

यदि हम दक्षिणहस्त तंत्र में एकक सदिशों $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ और $\hat{\mathbf{k}}$ से किसी एक की दिशा उलट दें तो हमें वामहस्त तंत्र प्राप्त होगा।

2.2.2 सदिश का उसके घटकों के पदों में निरूपण

हम किसी भी सदिश को x, y और z-अक्षों **के अनुदिश एकक सदिशों के पदों में** व्यक्त कर सकते हैं या फिर सदिश के x, y और z **घटकों के पदों में**। **किसी सदिश के निर्देशांक अक्षों के अनुदिश घटकों के निर्धारण की प्रक्रिया को निर्देशांक अक्षों के अनुदिश सदिश का वियोजन भी कहा जाता है**। आसानी के लिए, हम पहले द्विविम कार्तीय निर्देशांक तंत्र में सदिश के घटकों की परिभाषा देंगे।



चित्र 2.4: द्विविम कार्तीय निर्देशांक तंत्र में सदिश के घटक।

मान लें कि $\hat{\mathbf{i}}$ और $\hat{\mathbf{j}}$ क्रमशः x और y-अक्षों के अनुदिश एकक सदिश हैं। चित्र 2.4 में xy तल में सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ को दिखाया गया है जिसका दिष्ट रेखा खंड $\overline{\mathbf{OP}}$ द्वारा ग्राफ़ीय निरूपण किया गया है। मूल बिंदु O सदिश का पुच्छ है और P उसका शीर्ष। मान लें कि बिंदु P के निर्देशांक (x, y) हैं। अब हम क्रमशः x और y-अक्षों के लंबवत् P से रेखाएं PX और PY खींचते हैं।

परिभाषा से, x-अक्ष के अनुदिश सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ का **सदिश घटक**, परिमाण OX वाला सदिश है जिसकी दिशा $\hat{\mathbf{i}}$ के अनुदिश है। इकाई 1 के भाग 1.4.1 से याद करें कि यह $\vec{\mathbf{a}}$ का $\hat{\mathbf{i}}$ के अनुदिश **प्रक्षेप** है जिसका मान $\vec{\mathbf{a}}.\hat{\mathbf{i}}$ है। x-अक्ष या $\hat{\mathbf{i}}$ के अनुदिश $\vec{\mathbf{a}}$ के **अदिश घटक** को, जिसे $\vec{\mathbf{a}}$ का x घटक भी कहते हैं, a_x द्वारा निरूपित किया जाता है। यह एक अदिश राशि है जिसका मान इस स्थिति के लिए $a_x = x$ है जोकि बिंदु P का x निर्देशांक है।

चित्र 2.4 से आप देख सकते हैं कि
$\vec{\mathbf{a}}.\hat{\mathbf{j}} = a\cos(90^\circ - \theta)$
$= a\sin\theta$

इसी तरह, y-अक्ष के अनुदिश सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ का **सदिश घटक** परिमाण OY वाला सदिश है जिसकी दिशा $\hat{\mathbf{j}}$ के अनुदिश है। y-अक्ष के अनुदिश या $\hat{\mathbf{j}}$ के अनुदिश $\vec{\mathbf{a}}$ का **अदिश घटक** जिसे $\vec{\mathbf{a}}$ का y घटक भी कहते हैं, a_y द्वारा निरूपित किया जाता है। यह एक अदिश राशि है जिसका मान इस स्थिति के लिए $a_y = y$ है जो बिंदु P का y निर्देशांक है। यदि सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ और x-अक्ष या $\hat{\mathbf{i}}$ के बीच का कोण θ हो तब त्रिकोणमिति से (चित्र 2.4) हम लिख सकते हैं :

$$a_x = OX = a\cos\theta = \vec{\mathbf{a}}.\hat{\mathbf{i}} \quad \text{और} \quad a_y = OY = a\sin\theta = \vec{\mathbf{a}}.\hat{\mathbf{j}} \qquad (2.1)$$

चित्र 2.4 से आप यह भी देख सकते हैं कि $\vec{\mathbf{a}}$ अपने **सदिश घटकों** $\overrightarrow{\mathbf{OX}} = \vec{\mathbf{a}}_x = a_x\,\hat{\mathbf{i}}$ और $\overrightarrow{\mathbf{OY}} = \vec{\mathbf{a}}_y = a_y\,\hat{\mathbf{j}}$ का सदिश योग है। अतः,

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_x + \vec{\mathbf{a}}_y = a_x\,\hat{\mathbf{i}} + a_y\,\hat{\mathbf{j}} = a\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + a\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}} \qquad (2.2\text{क})$$

जहां हमने समीकरण 2.1 के परिणामों का भी प्रयोग किया है। सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ का उसके घटकों के पदों में वर्णन पूर्ण करने के लिए हम उस सदिश के **परिमाण और दिशा** उसके अदिश घटकों के पदों में लिखते हैं। इकाई 1 के समीकरण 1.11ग और समीकरण 2.2क से $\vec{\mathbf{a}}$ का परिमाण है :

$$a = \sqrt{\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{a}}} = \sqrt{\left(a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}}\right).\left(a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}}\right)} = \sqrt{\left(a_x^2 + a_y^2\right)} \qquad (2.2\text{ख})$$

$\vec{\mathbf{a}}$ की दिशा कोण θ द्वारा दी जाती है जिसका मान x-अक्ष से वामावर्त दिशा में मापन करने पर धनात्मक होता है। चित्र 2.4 से आप देख सकते हैं कि कोण θ का मान है :

$$\theta = \tan^{-1}\frac{a_y}{a_x} \qquad (2.2\text{ग})$$

अब $\vec{\mathbf{a}}$ कोई भी सदिश हो सकता है। लेकिन यदि यह बिंदु P का **स्थिति सदिश** है तो हम इसे $\vec{\mathbf{r}}$ द्वारा निरूपित करते हैं और समीकरणों 2.2क, ख और ग को इस तरह लिखते हैं :

$$\vec{\mathbf{r}} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}}, \qquad r = \sqrt{\left(x^2 + y^2\right)} \quad \text{और} \quad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad (2.3)$$

समीकरण 2.2क, ख और ग, xy तल में स्थित किसी भी सदिश पर लागू होते हैं जिसका पुच्छ, बिंदु $A(x_1, y_1)$ पर हो और शीर्ष, बिंदु $B(x_2, y_2)$ पर हो जैसाकि चित्र 2.5 में दिखाया गया है। x-अक्ष से कोण θ पर सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ के सदिश और अदिश घटक निम्नलिखित होते हैं :

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_x + \vec{\mathbf{a}}_y = a_x\,\hat{\mathbf{i}} + a_y\,\hat{\mathbf{j}} \qquad (2.4\text{क})$$

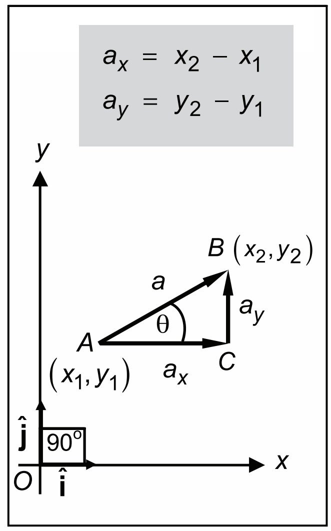
$$a_x = x_2 - x_1 = \vec{\mathbf{a}}\,.\,\hat{\mathbf{i}} = a\cos\theta, \qquad a_y = y_2 - y_1 = \vec{\mathbf{a}}\,.\,\hat{\mathbf{j}} = a\sin\theta \qquad (2.4\text{ख})$$

आप चित्र 2.5 से समीकरणों 2.4क और ख की जांच कर सकते हैं। साथ ही,

$$a = \sqrt{\left(a_x^2 + a_y^2\right)} = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2} \qquad (2.4\text{ग})$$

$$\text{और} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{a_y}{a_x} = \tan^{-1}\frac{\left(y_2 - y_1\right)}{\left(x_2 - x_1\right)} \qquad (2.4\text{घ})$$

अभी तक आपने सीखा है कि xy तल में स्थित किसी भी सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ को द्विविम कार्तीय निर्देशांक तंत्र में या तो **ज्यामितीय रूप से दिष्ट रेखा खंड $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ द्वारा** या उसके **घटकों** (a_x, a_y) द्वारा निरूपित किया जा सकता है। आपने यह भी सीखा है कि किसी सदिश के परिमाण और दिशा द्विविम कार्तीय निर्देशांक तंत्र के सापेक्ष उसके घटकों के पदों में पूर्णतः निर्धारित किए जा सकते हैं। अब आप स्वयं कुछ सदिशों के घटक निर्धारित करना चाहेंगे। इसके लिए एक बोध प्रश्न करें।



चित्र 2.5: द्विविम कार्तीय निर्देशांक तंत्र में सदिश का वियोजन। यदि A और B के निर्देशांक क्रमशः (x_1, y_1) और (x_2, y_2) हों तो $a_x = x_2 - x_1$ और $a_y = y_2 - y_1$ ।

समीकरण 2.4क मिलता है जब हम सदिशों $a_x\hat{\mathbf{i}}$ और $a_y\hat{\mathbf{j}}$ पर सदिश योग का त्रिभुज नियम लागू करते हैं। चित्र 2.5 से आप देख सकते हैं कि समकोण त्रिभुज ACB में

$(AB)^2 = (AC)^2 + (CB)^2$

$\Rightarrow a^2 = a_x^2 + a_y^2$

और $\tan\theta = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{a_y}{a_x}$

बोध प्रश्न 1 – सदिश के कार्तीय घटक

परिमाण 3 वाले सदिश $\vec{\mathbf{A}}$, परिमाण 4 वाले सदिश $\vec{\mathbf{B}}$ और परिमाण 5 वाले सदिश $\vec{\mathbf{C}}$ के, जो x-अक्ष से क्रमशः $60°$, $135°$ और $210°$ के कोण पर हैं, x और y घटक प्राप्त करें।

आगे बढ़ने से पहले, आइए, हम इन सभी परिणामों को एक साथ लिखें।

दोहराएं

सदिश के द्विविम कार्तीय घटक

- किसी सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ को, जिसका पुच्छ बिंदु (x_1, y_1) पर है और शीर्ष बिंदु (x_2, y_2) पर है, द्विविम समष्टि में द्विविम कार्तीय निर्देशांक अक्षों (x और y-अक्षों) के अनुदिश उसके x और y घटकों, a_x और a_y, के द्वारा निरूपित किया जा सकता है : $\vec{\mathbf{a}} = a_x\,\hat{\mathbf{i}} + a_y\,\hat{\mathbf{j}}$ (2.4क)
- सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ के द्विविम अदिश कार्तीय घटक हैं, क्रमशः

$$a_x = x_2 - x_1 = a\cos\theta, \qquad a_y = y_2 - y_1 = a\sin\theta \qquad (2.4ख)$$

- $\vec{\mathbf{a}}$ का **परिमाण** है : $a = \sqrt{(a_x^2 + a_y^2)} = \sqrt{((x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2)}$ (2.4ग)
- $\vec{\mathbf{a}}$ की **दिशा** कोण θ द्वारा दी जाती है जो सदिश $\vec{\mathbf{a}}$, x-अक्ष से बनाता है :

$$\theta = \tan^{-1}\frac{a_y}{a_x} \qquad (2.4घ)$$

शायद आप जानते हों कि $m\vec{\mathbf{a}} + n\vec{\mathbf{b}}$ जैसा एक सदिश जहां m और n अदिश हैं, $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ का **रैखिक संयोजन** कहलाता है। समीकरण 2.4क में दिया गया सदिश $\vec{\mathbf{a}}$, एकक सदिशों $\hat{\mathbf{i}}$ और $\hat{\mathbf{j}}$ का रैखिक संयोजन है। एकक सदिश $\hat{\mathbf{i}}$ और $\hat{\mathbf{j}}$ द्विविम कार्तीय निर्देशांक तंत्र में **आधार सदिश** हैं। इन्हें **मानक आधार** भी कहा जाता है।

लेकिन वास्तविक संसार त्रिविम होता है। अतः, आपने समतल में सदिश घटकों के बारे में जो कुछ पढ़ा है, उसका व्यापकीकरण करते हुए अब हम त्रिविम समष्टि में सदिशों का वर्णन करेंगे। इसके लिए हम त्रिविम कार्तीय निर्देशांक तंत्र का प्रयोग करते हैं।

त्रिविम समष्टि में हम **किसी भी सदिश को** दक्षिणहस्त त्रिविम कार्तीय निर्देशांक अक्षों के अनुदिश उसके घटकों के पदों में व्यक्त कर सकते हैं। ध्यान दें कि $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ और $\hat{\mathbf{k}}$ क्रमशः x, y, z-अक्षों के अनुदिश एकक सदिश हैं।

चूंकि तीन एकक सदिश, $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ और $\hat{\mathbf{k}}$, परस्पर लंबवत् हैं, अतः,

$\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{i}} = 1.1\cos 0° = 1,$

$\hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{i}} = 1.1\cos 90° = 0$

$\hat{\mathbf{k}}.\hat{\mathbf{i}} = 1.1\cos 90° = 0$

और

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{a}}.\hat{\mathbf{i}} &= (a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}).\hat{\mathbf{i}} \\ &= a_x\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{i}} + a_z\hat{\mathbf{k}}.\hat{\mathbf{i}} \\ &= a_x\end{aligned}$$

a_y और a_z घटकों को इसी प्रकार प्राप्त किया जा सकता है।

अब एक सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ लें जिसके दक्षिणहस्त कार्तीय निर्देशांक तंत्र के सापेक्ष सदिश घटक क्रमशः $a_x\hat{\mathbf{i}}$, $a_y\hat{\mathbf{j}}$ और $a_z\hat{\mathbf{k}}$ हैं। त्रिविम समष्टि में किसी सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ के लिए हम लिख सकते हैं कि

$$\vec{\mathbf{a}} = a_x\,\hat{\mathbf{i}} + a_y\,\hat{\mathbf{j}} + a_z\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (2.5)$$

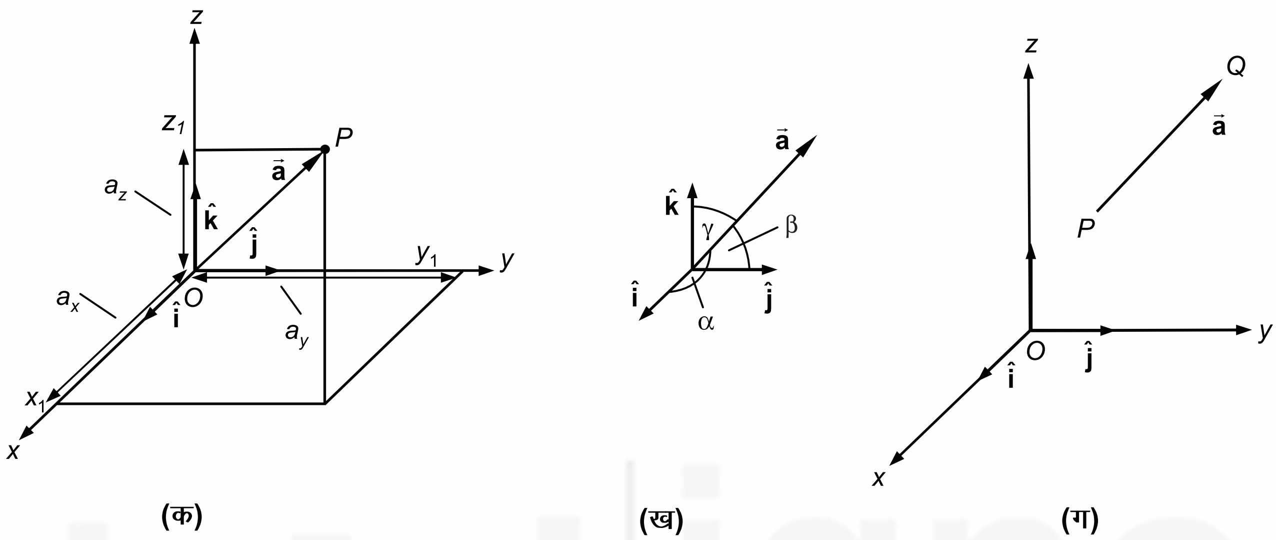
समीकरणों 2.4क, ख का त्रिविम में व्यापकीकरण करने पर हम क्रमशः $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ और $\hat{\mathbf{k}}$ के अनुदिश, सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ के घटकों को लिख सकते हैं (हाशिये में दी गई टिप्पणी पढ़ें):

$$a_x = \vec{\mathbf{a}}.\hat{\mathbf{i}}, \qquad a_y = \vec{\mathbf{a}}.\hat{\mathbf{j}} \qquad \text{और} \qquad a_z = \vec{\mathbf{a}}.\hat{\mathbf{k}} \qquad (2.6)$$

आइए, अब हम सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ के परिमाण और दिशा को उसके घटकों (a_x, a_y, a_z) के पदों में लिखें। इसके लिए आप चित्र 2.6 देखें। चित्र 2.6क में दिखाए गए सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ का पुच्छ, मूल बिंदु पर और शीर्ष, बिंदु $P(x_1, y_1, z_1)$ पर है। सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ का परिमाण है :

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (2.7)$$

सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ की दिशा उसके और x, y और z दिशाओं के अनुदिश एकक सदिशों के बीच के कोणों की कोज्याओं द्वारा दी जाती हैं जिनके मान हैं $\cos\alpha$, $\cos\beta$ और $\cos\gamma$। इन्हें **दिक्कोज्या** कहते हैं। कोण α, β और γ चित्र 2.6ख में दिखाए गए हैं। यहां α, $\vec{\mathbf{a}}$ और $\hat{\mathbf{i}}$ के बीच का कोण है जिसे $(\vec{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{i}})$ द्वारा सूचित किया जाता है, β, $(\vec{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{j}})$ है और γ, $(\vec{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{k}})$ है।



चित्र 2.6: क) त्रिविम कार्तीय निर्देशांक तंत्र में सदिश $\vec{a}$; ख) सदिश और x, y और z-अक्षों के बीच के कोण; ग) त्रिविम कार्तीय निर्देशांक तंत्र में सदिश $\vec{a}$ जिसका पुच्छ, P पर है और शीर्ष, Q पर है।

अतः, हम लिख सकते हैं कि

$$a_x = (\vec{\mathbf{a}} \,.\, \hat{\mathbf{i}}) = a\cos\alpha \quad (2.8\text{क})$$

$$a_y = (\vec{\mathbf{a}} \,.\, \hat{\mathbf{j}}) = a\cos\beta \quad (2.8\text{ख})$$

$$a_z = (\vec{\mathbf{a}} \,.\, \hat{\mathbf{k}}) = a\cos\gamma \quad (2.8\text{ग})$$

> आम तौर पर, आप किसी भी बिंदु को निर्देशांक तंत्र के मूल बिंदु के तौर पर ले सकते हैं। लेकिन आसानी के लिए हम बिंदु P को निर्देशांक तंत्र का मूल बिंदु ले लेते हैं। उस स्थिति में सदिश के घटक बिंदु Q के निर्देशांक होंगे।

समीकरणों 2.8क, ख और ग का वर्ग करके उन्हें जोड़ने पर और समीकरण 2.7 से तुलना करने पर हमें मिलता है :

$$a^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2$$

इस तरह, $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad (2.9)$$

तो **दिक्कोज्याओं के वर्गों का योग 1 के बराबर होता है।**

जैसाकि आप द्विविम स्थिति के लिए पढ़ चुके हैं, **यह ज़रूरी नहीं कि किसी सदिश का पुच्छ मूल बिंदु पर ही हो।**

मान लें कि सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ (जैसाकि चित्र 2.6ग में दिखाया गया है) का पुच्छ, बिंदु $P(x_1, y_1, z_1)$ पर है और शीर्ष, बिंदु $Q(x_2, y_2, z_2)$ पर है। उस स्थिति में हम पहले की तरह सदिश के घटकों को इस तरह लिख सकते हैं :

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1 \quad \text{और} \quad a_z = z_2 - z_1 \quad (2.10\text{क})$$

सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ का परिमाण रेखा खंड PQ की लंबाई है (चित्र 2.6ग)। इसका मान है :

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (2.10\text{ख})$$

सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ किसी भौतिक राशि जैसे कि वेग, त्वरण, बल या विद्युत् क्षेत्र का निरूपण कर सकता है। स्पष्ट है कि इसके प्रत्येक घटक के परिमाण की इकाई वही होनी चाहिए जो उस सदिश द्वारा निरूपित भौतिक राशि की है। उदाहरण के लिए, बल $\vec{\mathbf{F}} = (2\text{N})\hat{\mathbf{i}} + (3\text{N})\hat{\mathbf{j}} - (1\text{N})\hat{\mathbf{k}}$ लें जिसे पारंपरिक रूप से हम इस तरह भी लिख सकते हैं:

$\vec{\mathbf{F}} = (2\text{N}, 3\text{N}, -1\text{N})$

बल का परिमाण है

$F = [2^2 + 3^2 + (-1)^2]^{1/2}\ \text{N}$

$= \sqrt{14}\ \text{N}$

इसी तरह विस्थापन $\vec{\mathbf{d}} = (2\text{m})\hat{\mathbf{i}} + (1\text{m})\hat{\mathbf{j}}$ का परिमाण है $\sqrt{5}\ \text{m}$ ।

ध्यान दें कि सदिश $\vec{\mathbf{d}}$ और $\vec{\mathbf{F}}$ भिन्न हैं क्योंकि वे भिन्न भौतिक राशियों का निरूपण करते हैं।

इस तरह, किसी सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ को जिसे त्रिविम समष्टि में ज्यामितीय रूप से दिष्ट रेखाखण्ड $\overrightarrow{\mathbf{PQ}}$ द्वारा निरूपित किया जाता है, बीजीय रूप से घटकों $a_x\ (= x_2 - x_1),\ a_y (= y_2 - y_1),\ a_z (= z_2 - z_1)$ के द्वारा निरूपित किया जा सकता है जहां (x_1, y_1, z_1) और (x_2, y_2, z_2) एक दक्षिणहस्त कार्तीय निर्देशांक तंत्र के मूलबिंदु के सापेक्ष क्रमशः बिंदुओं P और Q के निर्देशांक हैं। अब हम शून्य सदिश, सदिशों की समानता और सदिश योग और घटाने की अवधारणाओं का बीजीय निरूपण प्रस्तुत करेंगे।

शून्य सदिश : यदि $\vec{\mathbf{a}}$ शून्य सदिश हो यानी शून्य परिमाण वाला सदिश हो तो उसका प्रत्येक घटक शून्य होगा यानी

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}} \quad \Rightarrow \quad a_x = a_y = a_z = 0 \qquad (2.11)$$

सदिशों की समानता : यदि सदिश $\vec{\mathbf{a}} = a_x\,\hat{\mathbf{i}} + a_y\,\hat{\mathbf{j}} + a_z\,\hat{\mathbf{k}}$ और $\vec{\mathbf{b}} = b_x\,\hat{\mathbf{i}} + b_y\,\hat{\mathbf{j}} + b_z\,\hat{\mathbf{k}}$ समान हैं तो x, y और z-अक्षों के अनुदिश उनके घटक बराबर होंगे :

$$a_x\,\hat{\mathbf{i}} + a_y\,\hat{\mathbf{j}} + a_z\,\hat{\mathbf{k}} = b_x\,\hat{\mathbf{i}} + b_y\,\hat{\mathbf{j}} + b_z\,\hat{\mathbf{k}}$$

यदि और केवल यदि $\quad a_x = b_x,\ a_y = b_y,\ a_z = b_z \qquad (2.12)$

सदिशों का योग और घटाना : किन्हीं दो सदिशों

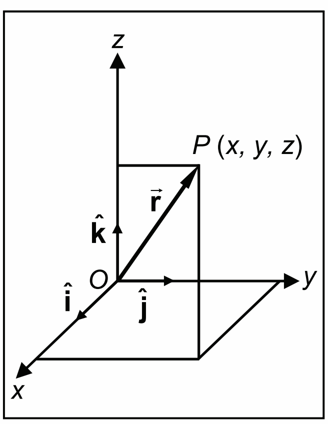
$$\vec{\mathbf{a}} = a_x\,\hat{\mathbf{i}} + a_y\,\hat{\mathbf{j}} + a_z\,\hat{\mathbf{k}} \quad \text{और} \quad \vec{\mathbf{b}} = b_x\,\hat{\mathbf{i}} + b_y\,\hat{\mathbf{j}} + b_z\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (2.13\text{क})$$

के लिए सदिशों $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ और $\vec{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$ के मान हैं, क्रमशः

$$\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = (a_x + b_x)\hat{\mathbf{i}} + (a_y + b_y)\hat{\mathbf{j}} + (a_z + b_z)\hat{\mathbf{k}} \qquad (2.13\text{ख})$$

और $$\vec{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = (a_x - b_x)\hat{\mathbf{i}} + (a_y - b_y)\hat{\mathbf{j}} + (a_z - b_z)\hat{\mathbf{k}} \qquad (2.13\text{ग})$$

आइए, हम भौतिकी से इन अवधारणाओं के उदाहरण लें।



चित्र 2.7: कार्तीय निर्देशांक तंत्र में बिंदु P का स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}$ ।

उदाहरण *2.1* : कार्तीय निर्देशांक तंत्र में स्थिति सदिश तथा विस्थापन

समष्टि में किसी बिंदु का **स्थिति सदिश**, एक दिए हुए निर्देशांक तंत्र के मूल बिंदु के सापेक्ष उसकी स्थिति दर्शाता है। एक कार्तीय निर्देशांक तंत्र के सापेक्ष, जिसका मूल बिंदु O पर है, बिंदु P का स्थिति सदिश चित्र 2.7 में दिखाया गया है। बिंदु P अपने कार्तीय निर्देशांकों (x, y, z) द्वारा पूर्ण रूप से निर्धारित होता है। बिंदु P के स्थिति सदिश को सदिश $\vec{\mathbf{r}}$ द्वारा निरूपित किया जाता है जिसकी दिशा O से P तक OP के अनुदिश होती है। इसका परिमाण रेखा खंड OP की लंबाई के बराबर होता है।

क्रमशः x, y के और z-अक्षों के अनुदिश इसके घटकों के पदों में हम लिख सकते हैं कि

$$\vec{\mathbf{r}} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (2.14\text{क})$$

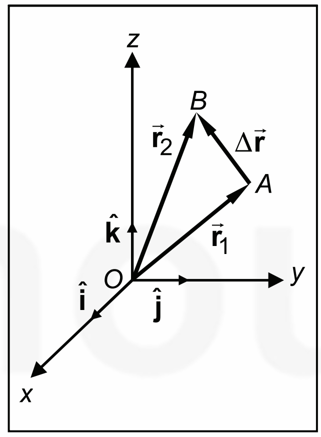
$\vec{\mathbf{r}}$ का परिमाण रेखा खंड OP की लंबाई है जिसका मान हैः

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (2.14\text{ख})$$

चूंकि स्थिति सदिश निर्देशांक तंत्र के मूल बिंदु के सापेक्ष परिभाषित किया जाता है, यह अद्वितीय नहीं होता। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों है? ऐसा इसलिए है क्योंकि निर्देशांक तंत्र के मूल बिंदु को कहीं भी चुना जा सकता है और वह अद्वितीय नहीं होता। उदाहरण के लिए, यदि आप किसी बाग में किसी पेड़ की स्थिति बताना चाहते हैं तो आप निर्देशांक तंत्र के मूल बिंदु के रूप में या तो बाग का गेट ले सकते हैं या बाग का मध्यबिंदु ले सकते हैं। इन दोनों स्थितियों के लिए पेड़ का स्थिति सदिश भिन्न होगा। गणितीय रूप से समष्टि में एक ही बिंदु का निर्धारण करने के ये दो तरीके हैं और ये दोनों ही किसी न किसी रूप में संबंधित होने चाहिए। इन संबंधों को हम **रूपान्तरण समीकरण** कहते हैं। भौतिकी में रूपान्तरण समीकरण अत्यधिक महत्वपूर्ण होते हैं।

कण का विस्थापन : जब एक बिंदु कण, बिंदु A से जिसका स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}_1 = x_1\,\hat{\mathbf{i}} + y_1\,\hat{\mathbf{j}} + z_1\,\hat{\mathbf{k}}$ है, स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}_2 = x_2\,\hat{\mathbf{i}} + y_2\,\hat{\mathbf{j}} + z_2\,\hat{\mathbf{k}}$ वाले बिंदु B तक गति करता है तो A से B तक कण का विस्थापन (चित्र 2.8) निम्नलिखित सदिश द्वारा परिभाषित होता है :

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1 \qquad (2.15\text{क})$$



चित्र 2.8: कार्तीय निर्देशांक तंत्र में विस्थापन सदिश $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ ।

ज्यामितीय रूप से यह कण की आरंभिक स्थिति से अंतिम स्थिति तक खींचा गया सदिश है।

समीकरण 2.13ग से घटक रूप में विस्थापन सदिश होता है :

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = (x_2 - x_1)\hat{\mathbf{i}} + (y_2 - y_1)\hat{\mathbf{j}} + (z_2 - z_1)\hat{\mathbf{k}} \qquad (2.15\text{ख})$$

ध्यान दें कि जबकि स्थिति सदिश निर्देशांक तंत्र या मूल बिंदु के चुनाव पर निर्भर करता है, विस्थापन सदिश निर्देशांक तंत्र या मूल बिंदु के चुनाव पर निर्भर नहीं करता क्योंकि यह दो सदिशों का अंतर है।

अभी तक हमने द्विविम और त्रिविम कार्तीय निर्देशांक तंत्रों में किसी सदिश के **घटकों** की अवधारणा समझाई है। अब आप स्वयं कुछ सदिशों के घटक निर्धारित करें। इसके लिए बोध प्रश्न 2 हल करें।

बोध प्रश्न 2 – सदिशों के कार्तीय घटक

क) एक गेंद को उत्तर से पूर्व दिशा में 60° के कोण पर 24 m की दूरी पर फेंका जाता है। इसके विस्थापन को x और y-अक्षों के अनुदिश इसके घटकों के योग के रूप में लिखें।

ख) सदिशों $\vec{\mathbf{a}} = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ और $\vec{\mathbf{c}} = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ के परिमाण और प्रत्येक सदिश के अनुदिश एकक सदिश $\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}$ और $\hat{\mathbf{c}}$ ज्ञात करें।

आइए, अब हम त्रिविम कार्तीय निर्देशांक तंत्र में सदिशों के घटकों के बारे में आपने जो कुछ भी सीखा है उसे सार रूप में प्रस्तुत करें।

दोहराएं

सदिश के त्रिविम कार्तीय घटक

- त्रिविम समष्टि में किसी सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ को जिसका पुच्छ बिंदु (x_1, y_1, z_1) पर और शीर्ष बिंदु (x_2, y_2, z_2) पर हो, त्रिविम कार्तीय निर्देशांक तंत्र में इस प्रकार निरूपित किया जाता है :

$$\vec{\mathbf{a}} = a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}} + a_z \hat{\mathbf{k}} \tag{2.5}$$

जहां a_x, a_y और a_z उसके निर्देशांक अक्षों के अनुदिश x, y और z घटक हैं।

- त्रिविम समष्टि में $\vec{\mathbf{a}}$ के अदिश कार्तीय घटक जिन्हें x, y और z घटक भी कहा जाता है, क्रमशः हैं

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_z = z_2 - z_1 \tag{2.6}$$

- $\vec{\mathbf{a}}$ का परिमाण है :

$$a = \sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)} \tag{2.7}$$

- $\vec{\mathbf{a}}$ की दिशा, दिक्कोज्याओं $\cos\alpha, \cos\beta$ और $\cos\gamma$ द्वारा दी जाती है जहां α, β और γ वे कोण हैं जो सदिश $\vec{\mathbf{a}}$, क्रमशः x, y और z-अक्षों से बनाता है। साथ ही,

$$a_x = (\vec{\mathbf{a}} \,.\, \hat{\mathbf{i}}) = a\cos\alpha \qquad \text{(2.8क)}$$

$$a_y = (\vec{\mathbf{a}} \,.\, \hat{\mathbf{j}}) = a\cos\beta \qquad \text{(2.8ख)}$$

$$a_z = (\vec{\mathbf{a}} \,.\, \hat{\mathbf{k}}) = a\cos\gamma \qquad \text{(2.8ग)}$$

ध्यान दें

समीकरण (2.5) में सदिश $\vec{\mathbf{a}}$, एकक सदिशों $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ और $\hat{\mathbf{k}}$ का, जो x, y और z-अक्षों के अनुदिश हैं, एक रैखिक संयोजन है। ये एकक सदिश उस त्रिविम कार्तीय निर्देशांक तंत्र के लिए **आधार सदिश** हैं। इन्हें **मानक आधार सदिश** कहते हैं। ध्यान दें कि ये सदिश एकक परिमाण वाले हैं और एक दूसरे पर लंबवत् हैं।

आइए, अब हम अदिश और सदिश गुणनफलों को घटक रूप में व्यक्त करें।

2.3 घटक रूप में अदिश और सदिश गुणनफल

आइए, पहले हम सदिशों के अदिश गुणनफल का मान निकालें।

2.3.1 घटक रूप में अदिश गुणनफल

त्रिविम कार्तीय निर्देशांक तंत्र में कोई दो सदिश लें :

$$\vec{\mathbf{a}} = (a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}) \quad \text{और} \quad \vec{\mathbf{b}} = (b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}}) \qquad \text{(2.16क)}$$

हम उनके **अदिश** या **डॉट गुणनफल** को उनके घटकों के पदों में इस तरह लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{a}} \,.\, \vec{\mathbf{b}} = (a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}) \,.\, (b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}})$$

$$= a_x\hat{\mathbf{i}} \,.\, (b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}}) + a_y\hat{\mathbf{j}} \,.\, (b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}}) + a_z\hat{\mathbf{k}} \,.\, (b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}})$$

$$= a_x b_x\, \hat{\mathbf{i}} \,.\, \hat{\mathbf{i}} + a_x b_y \hat{\mathbf{i}} \,.\, \hat{\mathbf{j}} + a_x b_z \hat{\mathbf{i}} \,.\, \hat{\mathbf{k}}$$

$$+ a_y b_x\, \hat{\mathbf{j}} \,.\, \hat{\mathbf{i}} + a_y b_y \hat{\mathbf{j}} \,.\, \hat{\mathbf{j}} + a_y b_z \hat{\mathbf{j}} \,.\, \hat{\mathbf{k}}$$

$$+ a_z b_x\, \hat{\mathbf{k}} \,.\, \hat{\mathbf{i}} + a_z b_y \hat{\mathbf{k}} \,.\, \hat{\mathbf{j}} + a_z b_z \hat{\mathbf{k}} \,.\, \hat{\mathbf{k}} \qquad (2.16\text{ख})$$

इकाई 1 के समीकरणों 1.11ग और ख से आप जानते हैं कि किसी सदिश का अपने आप से अदिश गुणनफल उसके परिमाण के वर्ग के बराबर होता है और एक-दूसरे के लंबवत् दो सदिशों का अदिश गुणनफल शून्य होता है।

अतः, $\hat{\mathbf{i}} \,.\, \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \,.\, \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \,.\, \hat{\mathbf{k}} = 1 \qquad [\because |\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = |\hat{\mathbf{k}}| = 1]$

और $\hat{\mathbf{i}} \,.\, \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}} \,.\, \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{k}} \,.\, \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{i}} \,.\, \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}} \,.\, \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \,.\, \hat{\mathbf{j}} = 0 \qquad (2.16\text{ग})$

[$\because$ $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ और $\hat{\mathbf{k}}$ एक दूसरे के लंबवत् हैं।]

समीकरण 2.16ग के परिणामों को समीकरण 2.16ख में रखने पर हमें मिलता है :

$$\vec{\mathbf{a}} \,.\, \vec{\mathbf{b}} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (2.17\text{क})$$

घटक रूप में अदिश गुणनफल

दोहराएं

दो सदिशों $\vec{\mathbf{a}} = a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}} + a_z \hat{\mathbf{k}}$ और $\vec{\mathbf{b}} = b_x \hat{\mathbf{i}} + b_y \hat{\mathbf{j}} + b_z \hat{\mathbf{k}}$ का **अदिश** या **डॉट गुणनफल** उन दोनों सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ के संगत घटकों के गुणनफल का योग होता है :

$$\vec{\mathbf{a}} \,.\, \vec{\mathbf{b}} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (2.17\text{क})$$

दो सदिशों $\vec{\mathbf{a}} = a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}}$ और $\vec{\mathbf{b}} = b_x \hat{\mathbf{i}} + b_y \hat{\mathbf{j}}$ का **अदिश गुणनफल है:**

$$\vec{\mathbf{a}} \,.\, \vec{\mathbf{b}} = a_x b_x + a_y b_y \qquad (2.17\text{ख})$$

आपने इकाई 1 में सीखा है कि किसी बल द्वारा किए गए कार्य को बल और विस्थापन के अदिश गुणनफल $W = \vec{\mathbf{F}} \,.\, \vec{\mathbf{d}}$ के रूप में व्यक्त किया जाता है। समीकरण 2.17क का प्रयोग करके आइए, हम एक उदाहरण हल करें।

उदाहरण *2.2* : सदिशों का अदिश गुणनफल

अचर बल $\mathbf{F} = (2.0\text{N})\hat{\mathbf{i}} + (3.0\text{N})\hat{\mathbf{k}}$ के अधीन बिंदु (0,1.0 m, – 1.0 m) से बिंदु (3.0 m,1.0 m, – 2.0 m) तक गतिमान किसी पिंड पर बल द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करें।

हल ■ समीकरण 2.15ख से पिंड का विस्थापन है :

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = (3.0\,\text{m} - 0\,\text{m})\hat{\mathbf{i}} + (1.0\,\text{m} - 1.0\,\text{m})\hat{\mathbf{j}} + [-2.0\,\text{m} - (-1.0\,\text{m})]\hat{\mathbf{k}}$$

$$= (3.0\,\text{m})\hat{\mathbf{i}} + (-1.0\,\text{m})\hat{\mathbf{k}}$$

अतः, बल द्वारा किया गया कार्य है :

$$W = \vec{\mathbf{F}} \,.\, \Delta\vec{\mathbf{r}} = [(2.0\text{N})\hat{\mathbf{i}} + (3.0\text{N})\hat{\mathbf{k}}].[(3.0\,\text{m})\hat{\mathbf{i}} + (-1.0\,\text{m})\hat{\mathbf{k}}]$$

समीकरण 2.17क से $\qquad W = (6.0\,\text{J}) - (3.0\,\text{J}) = 3.0\,\text{J}$

अब आप समीकरण 2.17क का प्रयोग करके बोध प्रश्न 3 हल करें।

बोध प्रश्न 3 – घटक रूप में अदिश गुणनफल

क) सदिशों $\vec{\mathbf{a}} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$ और $\vec{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$ का अदिश गुणनफल प्राप्त करें। साथ ही, इनके बीच के कोण की गणना करें।

ख) सदिश $\vec{\mathbf{a}} = 2\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ का सदिश $\vec{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}$ पर प्रक्षेप प्राप्त करें।

आइए, अब हम घटक रूप में सदिश गुणनफल का मान निकालें।

2.3.2 घटक रूप में सदिश गुणनफल

आइए, समीकरण 2.16क द्वारा दिए गए सदिश लें। हम इन दोनों सदिशों $\vec{\mathbf{a}} = (a_x\,\hat{\mathbf{i}} + a_y\,\hat{\mathbf{j}} + a_z\,\hat{\mathbf{k}})$ और $\vec{\mathbf{b}} = (b_x\,\hat{\mathbf{i}} + b_y\,\hat{\mathbf{j}} + b_z\,\hat{\mathbf{k}})$ के सदिश गुणनफल को इस तरह लिख सकते हैं :

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} &= (a_x\,\hat{\mathbf{i}} + a_y\,\hat{\mathbf{j}} + a_z\,\hat{\mathbf{k}}) \times (b_x\,\hat{\mathbf{i}} + b_y\,\hat{\mathbf{j}} + b_z\,\hat{\mathbf{k}}) \\
&= a_x\,\hat{\mathbf{i}} \times (b_x\,\hat{\mathbf{i}} + b_y\,\hat{\mathbf{j}} + b_z\,\hat{\mathbf{k}}) + a_y\,\hat{\mathbf{j}} \times (b_x\,\hat{\mathbf{i}} + b_y\,\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}}) \\
&\quad + a_z\,\hat{\mathbf{k}} \times (b_x\,\hat{\mathbf{i}} + b_y\,\hat{\mathbf{j}} + b_z\,\hat{\mathbf{k}}) \\
&= a_x\,b_x\,(\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}}) + a_x\,b_y\,(\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}) + a_x\,b_z\,(\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}}) \\
&\quad + a_y\,b_x\,(\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}}) + a_y b_y\,(\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}}) + a_y b_z\,(\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}}) \\
&\quad + a_z\,b_x\,(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}}) + a_z\,b_y\,(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}}) + a_z\,b_z\,(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}})
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

चूंकि किसी सदिश का अपने आपसे सदिश गुणनफल शून्य सदिश $\vec{\mathbf{0}}$ होता है, अतः,

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{0}} \qquad (2.19\text{क})$$

इकाई 1 के समीकरण 1.15घ की सदिश गुणनफल की परिभाषा से, हमें मिलता है :

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = |\hat{\mathbf{i}}|\,|\hat{\mathbf{j}}|\,\sin 90^\circ\,\hat{\mathbf{n}} \qquad (2.19\text{ख})$$

जहां $\hat{\mathbf{n}}$ दक्षिणहस्त नियम से एकक सदिशों $\hat{\mathbf{i}}$ और $\hat{\mathbf{j}}$ को समाविष्ट करने वाले तल की लंबवत् दिशा में एकक सदिश है। लेकिन आप जानते हैं कि दक्षिणहस्त कार्तीय निर्देशांक तंत्र में $\hat{\mathbf{i}}$ और $\hat{\mathbf{j}}$, दोनों ही के लंबवत् एकक सदिश $\hat{\mathbf{k}}$ होता है (चित्र 2.2क देखें)। इस तरह, वास्तव में $\hat{\mathbf{n}}$ सदिश $\hat{\mathbf{k}}$ ही है। साथ ही, चूंकि सदिश गुणनफल क्रमविनिमेय नहीं होता, अतः $\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{k}}$ । इस तरह, हम लिख सकते हैं कि

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}; \qquad \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}} \qquad (2.19\text{ग})$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}; \qquad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}} \qquad (2.19\text{घ})$$

और

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}; \qquad \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}} \qquad (2.19\text{च})$$

समीकरणों 2.19क से च तक को समीकरण 2.18 में रखने पर हमें मिलता है :

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = a_x\, b_x\, \vec{\mathbf{0}} + a_x\, b_y\, \hat{\mathbf{k}} + a_x\, b_z\, (-\hat{\mathbf{j}}) + a_y\, b_x\, (-\hat{\mathbf{k}}) + a_y b_y\, \vec{\mathbf{0}} + a_y\, b_z\, \hat{\mathbf{i}}$$

$$+ a_z\, b_x\, \hat{\mathbf{j}} + a_z\, b_y\, (-\hat{\mathbf{i}}) + a_z\, b_z\, \vec{\mathbf{0}} \qquad (2.20)$$

प्रत्येक एकक सदिश के सगत पदो को इकट्ठा करने पर हमें मिलता है

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = (a_y\, b_z - a_z\, b_y)\hat{\mathbf{i}} + (a_z\, b_x - a_x\, b_z)\hat{\mathbf{j}} + (a_x\, b_y - a_y\, b_x)\hat{\mathbf{k}} \qquad (2.21\text{क})$$

यदि आपने स्कूली गणित में सारणिक के बारे में पढ़ा है तो आप देख सकते हैं कि समीकरण 2.21क द्वारा दिया गया सदिश गुणनफल वास्तव में नीचे दिए गये सारणिक का प्रसार है (हाशिये पर दी गई टिप्पणी पढ़ें) :

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (2.21\text{ख})$$

आइए, अब हम सदिश गुणनफल की अवधारणा को सार रूप में प्रस्तुत करें।

समीकरण 2.21ख के सारणिक को इस तरह विस्तारित किया जा सकता है :

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{i}} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{j}} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{k}} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

ध्यान दें कि

$$\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} = a_y b_z - a_z b_y$$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} = a_x b_z - a_z b_x$$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y - a_y b_x$$

घटक रूप में सदिश गुणनफल

दोहराएं

सदिशों $\vec{\mathbf{a}} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$ और $\vec{\mathbf{b}} = b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}}$ का सदिश गुणनफल है :

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = (a_y\, b_z - a_z\, b_y)\hat{\mathbf{i}} + (a_z\, b_x - a_x\, b_z)\hat{\mathbf{j}} + (a_x\, b_y - a_y\, b_x)\hat{\mathbf{k}} \qquad (2.21\text{क})$$

इसे सारणिक के रूप में भी लिखा जा सकता है : $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$ (2.21ख)

सदिशों $\vec{\mathbf{a}} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}}$ और $\vec{\mathbf{b}} = b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}}$ का सदिश गुणनफल है :

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = (a_x b_y - a_y b_x)\hat{\mathbf{k}} \qquad (2.21\text{ग})$$

आइए, अब हम भौतिकी से उदाहरण लेकर समझें कि समीकरणों 2.21क और ख को कैसे लागू किया जाता है।

उदाहरण 2.3 : घटक रूप में सदिश गुणनफल

बिंदु (3, 2, – 1) पर लग रहे बल $\vec{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ के कारण मूलबिंदु के प्रति बल आघूर्ण की गणना करें। बल की इकाई N है और दूरी की इकाई m है।

हल ■ किसी बिंदु पर लग रहे बल $\vec{\mathbf{F}}$ का मूलबिंदु के प्रति बल आघूर्ण होता है $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$, जहां $\vec{\mathbf{r}}$ बिंदु का स्थिति सदिश है।

बिंदु (3, 2, – 1) का स्थिति सदिश है :

$$\vec{\mathbf{r}} = (3\,\text{m})\hat{\mathbf{i}} + (2\,\text{m})\hat{\mathbf{j}} + (-1\,\text{m})\hat{\mathbf{k}}$$

अतः, समीकरण 2.21ख से बल $\vec{\mathbf{F}}$ का बल आघूर्ण (Nm में) है :

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -2\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} - 14\hat{\mathbf{k}}$$

बोध प्रश्न 4 – घटक रूप में सदिश गुणनफल

क) सदिशों $\vec{a} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ से बने तल के लंबवत् एकक सदिश ज्ञात करें।

ख) उस समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसकी संलग्न भुजाएं सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{b} = 4\hat{i} + 3\hat{k}$ द्वारा दी जाती हैं।

अभी तक इस इकाई में हमने समझाया है कि सदिशों को उनके घटकों के पदों में किस तरह वियोजित किया जाता है। हमने घटकों के पदों में व्यक्त सदिशों के सदिश बीजगणित की प्रारंभिक अवधारणाओं को भी दोहराया है। उदाहरण के लिए, आपने बीजगणितीय वर्णन का प्रयोग करके सदिशों को जोड़ना और घटाना सीखा है और उनके अदिश और सदिश गुणनफलों की गणना करना सीखा है। भौतिकी में सदिश फलन बहुत महत्वपूर्ण होते हैं। भाग 2.4 में आप सदिश फलनों के बारे में सीखेंगे।

2.4 सदिश फलन

आपने स्कूली गणित में अदिश फलनों के बारे में ज़रूर पढ़ा होगा।

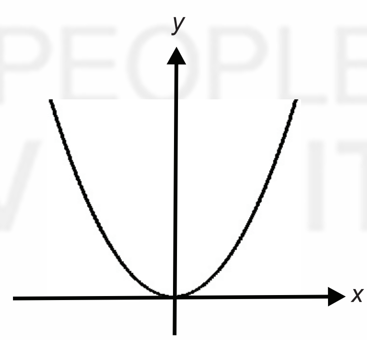
इस भाग की शुरूआत में हम अदिश फलनों के बारे में थोड़ी जानकारी देंगे। आपने स्कूल के कैलकुलस में एक **वास्तविक चर के वास्तविक मान फलन** के बारे में पढ़ा है। इसे हम $f(x)$ लिखते हैं। याद करें कि

फलन का डोमेन (domain) स्वतंत्र चर x के समस्त मानों का समुच्चय है। फलन का परास (range) निर्भर चर, यहां y, के समस्त परिणामी मानों का समुच्चय होता है।

किसी दिए गए डोमेन में x के प्रत्येक वास्तविक मान के लिए, फलन $f(x)$ अद्वितीय वास्तविक संख्या निर्दिष्ट (assign) करता है जो फलन का x पर मान है। अतः, जब फलन का निवेश (input) एक वास्तविक संख्या हो, तो इसका निर्गत (output) भी वास्तविक संख्या होती है (चित्र 2.9 देखें)।

x	$f(x) = x^2$
– 3	9
– 2	4
– 1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

(क)



(ख)

चित्र 2.9: चर x का अदिश फलन $f(x) = x^2$; क) $f(x)$ के कुछ बिन्दुओं पर मान; ख) फलन $f(x)$ का आरेख। ध्यान दें कि यह द्विविम समतल में एक वक्र (परवलय) है।

आइए, अब हम सदिश फलन की परिभाषा दें।

2.4.1 सदिश फलन की परिभाषा

आइए, इस भाग को एक सवाल से शुरू करें : एक समतल, माना xy समतल में गतिमान किसी कण की गति का वर्णन कैसे किया जाता है? इसे समझने के लिए, आइए, एक उदाहरण लें।

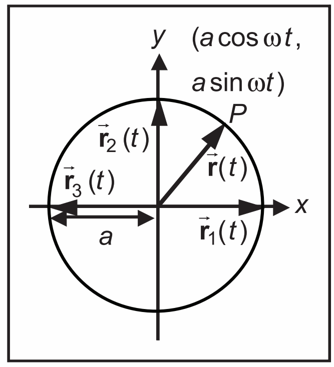
एक कण, त्रिज्या a वाले वृत्त में गतिमान है और इसके x तथा y निर्देशांक समय t के साथ इस तरह परिवर्तित होते हैं :

$$x = a \cos \omega t \tag{2.22क}$$

$$y = a \sin \omega t \tag{2.22ख}$$

किसी क्षण t पर कण का स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{r}}$ है (चित्र 2.10)। ध्यान दें कि बिन्दु P के निर्देशांक (x, y) हैं तथा ये t के साथ परिवर्तित होते हैं। यानी स्थिति सदिश भी समय के साथ बदलता है और हम इसे $\vec{\mathbf{r}}(t)$ द्वारा निरूपित करते हैं। इसे हम इस तरह लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} = (a\cos\omega t)\,\hat{\mathbf{i}} + (a\sin\omega t)\,\hat{\mathbf{j}} \tag{2.23}$$



चित्र 2.10: समीकरण 2.23 का सदिश फलन $\vec{\mathbf{r}}(t)$। स्थिति सदिश का शीर्ष कण का पथ आरेखित करता है। यहां हम यह भी कह सकते हैं कि कण का पथ त्रिज्या a का एक ऐसा वृत्त है जिसका केन्द्र मूल बिन्दु पर है। कैसे? समीकरणों 2.22क और ख से x तथा y के व्यंजकों का वर्ग लेने पर हमें यह परिणाम मिलता है :

$$x^2 + y^2 = a^2\cos^2(\omega t) + a^2\sin^2(\omega t)$$

या

$$x^2 + y^2 = a^2$$

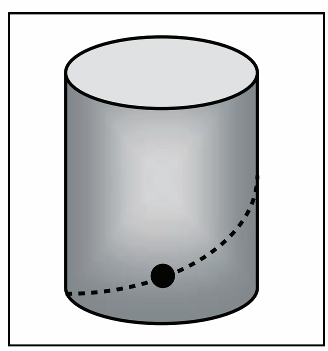
यहां $\hat{\mathbf{i}}$ और $\hat{\mathbf{j}}$ क्रमशः x और y-अक्षों के अनुदिश एकक सदिश हैं। सदिश $\vec{\mathbf{r}}(t)$ एक **सदिश फलन** का उदाहरण है। यहां $\vec{\mathbf{r}}(t)$, चर t का सदिश फलन है। इसका अर्थ है कि t के प्रत्येक मान के संगत एक सदिश $\vec{\mathbf{r}}$ का अस्तित्व होता है। स्वतंत्र चर t के समस्त संभव मानों का समुच्चय **सदिश फलन का डोमेन कहलाता है। फलन का परास (range) निर्भर चर के समस्त परिणामी मानों का समुच्चय होता है। किसी भी ऐसे फलन को जिसका परास सदिशों का समुच्चय होता है, सदिश फलन कहते हैं।**

चित्र 2.10 में हमने समीकरणों 2.22क, ख तथा 2.23 द्वारा परिभाषित सदिश $\vec{\mathbf{r}}(t)$ को तीन क्षणों $t = 0, t = \frac{\pi}{2\omega}$ और $t = \frac{\pi}{\omega}$ के लिए आरेखित किया है तथा इन्हें क्रमशः $\vec{\mathbf{r}}_1 = \vec{\mathbf{r}}(t=0)$, $\vec{\mathbf{r}}_2 = \vec{\mathbf{r}}(t = \pi/2\omega)$, और $\vec{\mathbf{r}}_3 = \vec{\mathbf{r}}(t = \pi/\omega)$ द्वारा निर्दिष्ट किया है। समय t के विभिन्न मानों के लिए सदिश $\vec{\mathbf{r}}(t)$ के शीर्ष की स्थिति बदल जाती है। जैसे-जैसे t में संतत परिवर्तन होता है, सदिश फलन का शीर्ष एक संतत वक्र अनुरेखित करता है, जो यहां एक वृत्त है (चित्र 2.10)।

अब मान लें कि कण त्रिज्या R के एक लंबवृत्तीय (right-circular) बेलन पर गतिमान है (चित्र 2.11 देखें)। इसके स्थिति सदिश में z-घटक, मान लें कि $z = t$ भी है। हम लिख सकते हैं कि

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = R\cos\omega t\,\hat{\mathbf{i}} + R\sin\omega t\,\hat{\mathbf{j}} + t\,\hat{\mathbf{k}} \tag{2.24}$$

कण द्वारा अनुरेखित **पथ** को **लंब-वृत्तीय हेलिक्स** कहते हैं। t के प्रत्येक मान के लिए हमें सदिश $\vec{\mathbf{r}}(t)$ का अलग मान मिलता है।



चित्र 2.11: लंबवृत्तीय बेलन पर गतिमान कण।

अभी तक हमने जिन दो उदाहरणों की चर्चा की है, उनमें सदिश फलन स्थिति सदिश थे। लेकिन सदिश फलन किसी भी ऐसी यादृच्छिक सदिश राशि को निरूपित कर सकता है जो एक अदिश चर पर निर्भर करती है। व्यापक तौर पर, हम एकल चर के सदिश फलन को द्विविम और त्रिविम कार्तीय निर्देशांक तंत्र में, क्रमशः, इस तरह लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = f(t)\,\hat{\mathbf{i}} + g(t)\,\hat{\mathbf{j}} \tag{2.25क}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = f(t)\,\hat{\mathbf{i}} + g(t)\,\hat{\mathbf{j}} + h(t)\,\hat{\mathbf{k}} \tag{2.25ख}$$

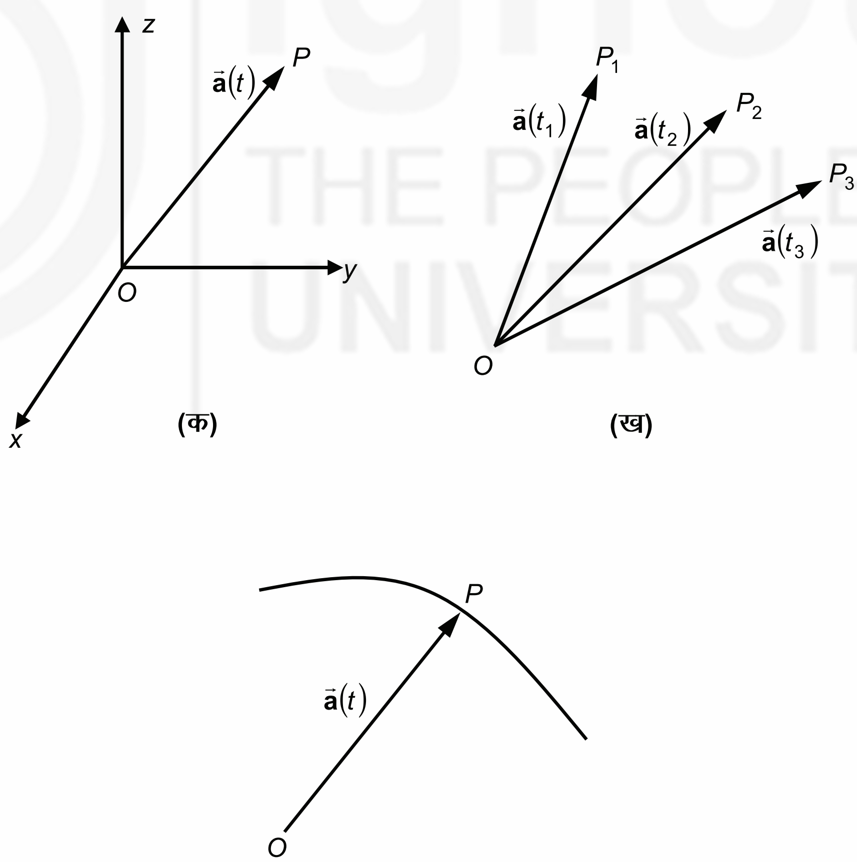
जहां $f(t), g(t)$ और $h(t)$ चर t के **एक-मानी (single-valued) अदिश फलन** हैं। सदिश फलन $\vec{\mathbf{a}}(t)$ को जानने का अर्थ है कि हमें $f(t), g(t)$ और $h(t)$ भी ज्ञात हैं।

इसका विलोम भी सत्य है, यानी अगर हमें $f(t)$, $g(t)$ और $h(t)$ ज्ञात हैं तो $\vec{\mathbf{a}}(t)$ भी ज्ञात है। इस फलन को **सदिश फलन** का नाम इसलिए दिया गया है क्योंकि $\vec{\mathbf{a}}(t)$ एक सदिश है और यह वास्तविक स्वतंत्र चर (real independent variable) t पर इस तरह निर्भर करता है कि प्रत्येक t के संगत समीकरणों 2.25क या ख द्वारा परिभाषित एक अद्वितीय सदिश $\vec{\mathbf{a}}(t)$ का अस्तित्व होता है। फलन $f(t)$, $g(t)$ और $h(t)$, $\vec{\mathbf{a}}(t)$ के **घटक फलन** कहलाते हैं।

सदिश फलन की कल्पना करने के लिए आपको उसका ज्यामितीय अर्थ समझना चाहिए।

चित्र 2.12क का अध्ययन करें। हमने सदिश फलन $\vec{\mathbf{a}}(t)$ को निरूपित करने के लिए त्रिविम कार्तीय निर्देशांक तंत्र का उपयोग किया है। ध्यान दें कि सदिश फलन $\vec{\mathbf{a}}(t)$ का आदि बिन्दु (पूंछ) O, निर्देशांक तंत्र के मूल बिन्दु से बद्ध है। t के अलग-अलग मानों के लिए इसका अंत्य बिन्दु P (शीर्ष) बदलता रहता है क्योंकि $\vec{\mathbf{a}}(t)$, चर t पर निर्भर करता है।

चित्र 2.12ख में t के तीन मानों t_1, t_2, t_3 के संगत P की तीन स्थितियां P_1, P_2, P_3 दिखाई गई हैं। चित्र 2.12ग से साफ है कि जब t में संतत परिवर्तन होता है तो बिन्दु P समष्टि में एक संतत वक्र अनुरेखित करता है। अतः, आप एक सदिश फलन $\vec{\mathbf{a}}(t)$ की t में संतत परिवर्तन होने पर एक वक्र के रूप में कल्पना कर सकते हैं। वक्र पर स्थित बिन्दु P का वर्णन स्थिति सदिश $\vec{\mathbf{a}}(t)$ द्वारा किया जाता है।



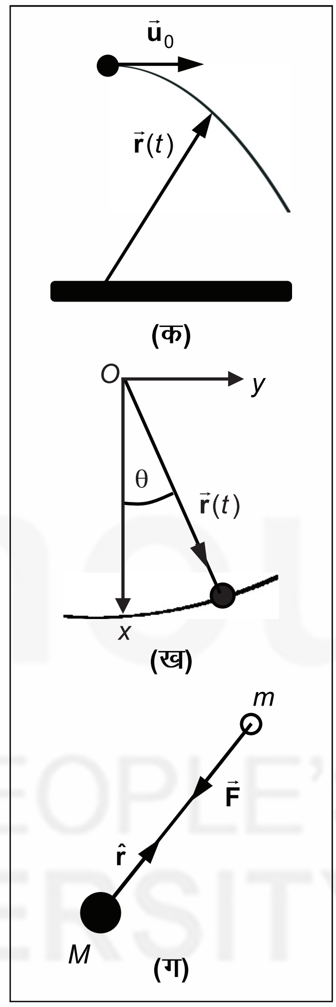
(क) (ख)

(ग)

चित्र 2.12: एक चर पर निर्भर सदिश फलन को समष्टि में एक वक्र के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

द्विविम सदिश फलन के लिए सदिश $\vec{\mathbf{a}}(t)$ के शीर्ष बिन्दु द्वारा t के सापेक्ष अनुरेखित वक्र को **समतल वक्र** (**plane curve**) कहते हैं। त्रिविम समष्टि में, सदिश $\vec{\mathbf{a}}(t)$ के शीर्ष बिन्दु द्वारा t के सापेक्ष अनुरेखित वक्र को **समष्टि वक्र** (**space curve**) कहते हैं। चित्र 2.10 में दिखाया गया वृत्त समतल वक्र का तथा चित्र 2.11 में दिखाया गया हेलिक्स समष्टि वक्र का उदाहरण है।

दूसरे शब्दों में, त्रिविम सदिश फलन को तीन अलग-अलग फलनों $x = f(t)$, $y = g(t)$ और $z = h(t)$, जो समष्टि में (x, y, z) बिन्दुओं का वर्णन करते हैं, के रूप में भी समझा जा सकता है। यहां सदिश फलन के तीन घटक फलनों के समीकरण, t के प्रत्येक मान के लिए सदिश फलन $\vec{\mathbf{a}}(t)$ के शीर्ष बिन्दु की स्थिति बताते हैं। इन समीकरणों को **प्राचलिक समीकरण** (**parametric equations**) कहते हैं तथा ये समतल वक्र या समष्टि वक्र का वर्णन करते हैं। भौतिकी में ऐसे सदिश फलनों के अनेक उदाहरण पाए जाते हैं। उदाहरण के लिए, वेग, त्वरण और बल सभी सदिश फलन हैं। क्या आप कुछ सदिश फलनों को पहचानने के लिए निम्नलिखित बोध प्रश्न हल नहीं करना चाहेंगे?



चित्र 2.13: भौतिकी में कुछ सदिश फलन ।

बोध प्रश्न 5 – सदिश फलन

निम्नलिखित फलनों में से कौन से फलन, सदिश फलन हैं?

क) प्रारंभिक क्षैतिज वेग $\vec{\mathbf{u}}_0$ से मुक्त रूप से नीचे गिर रहे गेंद का स्थिति सदिश (चित्र 2.13क देखें) :

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = u_0 t\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{2} g t^2 \hat{\mathbf{k}}$$

ख) O के सापेक्ष क्षण t पर लंबाई L वाले सरल लोलक के दोलक का स्थिति सदिश (चित्र 2.13ख) :

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = L\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + L\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}} \quad \text{जहां } \theta = \theta(t)$$

ग) 2 kg द्रव्यमान के कण पर लगाया गया एक बल : $\vec{\mathbf{F}} = 3\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$ N

घ) द्रव्यमान m के कण पर इससे दूरी r पर स्थित द्रव्यमान M के कण के कारण लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल (चित्र 2.13ग) : $\vec{\mathbf{F}} = -\dfrac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$

आइए, सदिश फलनों के बारे में आपने जो कुछ सीखा है, अब हम उसे दोहराएं।

दोहराएं

सदिश फलन

एक **सदिश-मान फलन** या **सदिश फलन** वह फलन है जिसका डोमेन वास्तविक सख्य़ाओं का एक समुच्चय होता है और परास सदिशों का समुच्चय होता है। **एकल चर** t के सदिश फलन को द्विविम एवं त्रिविम कार्तीय निर्देशांक तंत्र में क्रमशः इस तरह लिखा जा सकता है :

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = f(t)\,\hat{\mathbf{i}} + g(t)\,\hat{\mathbf{j}} \qquad \text{द्विविम तंत्र में} \qquad (2.25\text{क})$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = f(t)\,\hat{\mathbf{i}} + g(t)\,\hat{\mathbf{j}} + h(t)\,\hat{\mathbf{k}} \qquad \text{त्रिविम तंत्र में} \qquad (2.25\text{ख})$$

$f(t)$, $h(t)$ और $g(t)$ को **घटक फलन** कहते हैं।

अब आप सदिश फलन का अवकलज निकालना सीखेंगे। एक सदिश का अवकलज निकालने के लिए आपको याद रखना चाहिए कि सदिश फलन के अलग-अलग अदिश घटक फलन होते हैं।

2.4.2 सदिश फलन का अवकलज

आप जानते हैं कि अदिश फलन $y = f(t)$ का अवकलज किस तरह निकाला जाता है। याद करें कि परिभाषा से, प्रथम सिद्धान्त के अनुसार, t के सापेक्ष फलन $f(t)$ का अवकलज होता है :

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{2.26}$$

इसी तरह, परिभाषा से, t के सापेक्ष सदिश फलन $\vec{\mathbf{a}}(t)$ का अवकलज होता है :

$$\frac{d\vec{\mathbf{a}}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\mathbf{a}}(t+\Delta t) - \vec{\mathbf{a}}(t)}{\Delta t} \tag{2.27}$$

हम समीकरण 2.27 से आसानी से सदिश फलन $\vec{\mathbf{a}}(t)$ का अवकलज निकाल सकते हैं अगर हम इस सदिश फलन को इसके अदिश घटक फलनों के पदों में लिखें। हम $\vec{\mathbf{a}}(t)$ को त्रिविम कार्तीय निर्देशांक तंत्र में इसके घटक फलनों के पदों में इस तरह लिखते हैं :

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = f(t)\,\hat{\mathbf{i}} + g(t)\,\hat{\mathbf{j}} + h(t)\hat{\mathbf{k}}$$

यह समीकरण 2.25ख ही है। चूंकि $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ अचर एकक सदिश हैं, अतः, हम लिख सकते हैं

$$\frac{d\vec{\mathbf{a}}(t)}{dt} = \frac{df(t)}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dg(t)}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dh(t)}{dt}\hat{\mathbf{k}} \tag{2.28क}$$

अतः, $\dfrac{d\vec{\mathbf{a}}(t)}{dt}$ यानी सदिश $\vec{\mathbf{a}}(t)$ का अवकलज निकालने के लिए, हमें उसके अदिश घटक फलनों $f(t), g(t)$ और $h(t)$ के अवकलज ही निकालने हैं।

द्विविम सदिश $\vec{\mathbf{a}}(t) = f(t)\hat{\mathbf{i}} + g(t)\hat{\mathbf{j}}$ के अवकलज को हम इस तरह लिख सकते हैं :

$$\frac{d\vec{\mathbf{a}}(t)}{dt} = \frac{df(t)}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dg(t)}{dt}\hat{\mathbf{j}} \tag{2.28ख}$$

आइए, अब हम समीकरणों 2.28क, ख को लागू करने के लिए एक उदाहरण लें।

उदाहरण *2.4* : सदिश फलनों का अवकलन

समय के फलन के रूप में किसी कण का स्थिति सदिश है :

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = 5\cos(2t)\hat{\mathbf{i}} + 5\sin(2t)\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}$$

इसका वेग एवं त्वरण ज्ञात करें। सिद्ध करें कि इसकी चाल तथा त्वरण का परिमाण अचर हैं।

हल ■ कण का वेग $\vec{\mathbf{v}}(t)$ इसके स्थिति सदिश का प्रथम अवकलज होता है। अतः,

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d}{dt}[\vec{\mathbf{r}}(t)] = \frac{d}{dt}[5\cos(2t)\hat{\mathbf{i}} + 5\sin(2t)\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}]$$

$$= -10 \sin(2t)\hat{\mathbf{i}} + 10\cos(2t)\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

कण का त्वरण $\vec{\mathbf{a}}(t)$ ज्ञात करने के लिए हम इसके वेग को समय के सापेक्ष अवकलित करते हैं :

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \frac{d}{dt}[\vec{\mathbf{v}}(t)] = \frac{d}{dt}[-10\sin(2t)\hat{\mathbf{i}} + 10\cos(2t)\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}]$$

$$= -20\cos(2t)\hat{\mathbf{i}} - 20\sin(2t)\hat{\mathbf{j}}$$

कण की चाल, इसके वेग का परिमाण होती है। अतः,

$$|\vec{\mathbf{v}}(t)| = [(-10\sin 2t)^2 + (10\cos 2t)^2 + 1^2]^{1/2}$$

$$= [100\sin^2 2t + 100\cos^2 2t + 1]^{1/2} = \sqrt{101}$$

ध्यान दें कि कण की चाल अचर है; यह समय के साथ नहीं बदलती हालांकि कण का वेग समय के साथ बदलता है। कण के त्वरण का परिमाण है :

$$|\vec{\mathbf{a}}(t)| = [(-20\cos 2t)^2 + (-20\sin 2t)^2]^{1/2} = 20$$

यह भी अचर है।

आइए, अब हम दोहराएं कि एकल चर के द्विविम या त्रिविम सदिश फलन का अवकलन उसके घटक फलनों के पदों में कैसे किया जाता है।

सदिश फलन का अवकलज

दोहराएं

एक **एकल चर** के सदिश फलन

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = f(t)\hat{\mathbf{i}} + g(t)\hat{\mathbf{j}} + h(t)\hat{\mathbf{k}}$$

का त्रिविम में चर t के सापेक्ष अवकलज होता है :

$$\frac{d\vec{\mathbf{a}}(t)}{dt} = \frac{df(t)}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dg(t)}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dh(t)}{dt}\hat{\mathbf{k}} \quad (2.28\text{क})$$

द्विविम में सदिश फलन

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = f(t)\hat{\mathbf{i}} + g(t)\hat{\mathbf{j}}$$

का चर t के सापेक्ष अवकलज होता है :

$$\frac{d\vec{\mathbf{a}}(t)}{dt} = \frac{df(t)}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dg(t)}{dt}\hat{\mathbf{j}} \quad (2.28\text{ख})$$

अब तक आपने जो सीखा है, अब आप उस पर एक बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 6 – सदिश फलनों का अवकलन

एक कण का स्थिति सदिश है : $\vec{\mathbf{r}}(t) = (6t - t^2)\hat{\mathbf{i}} + (2t)\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}$

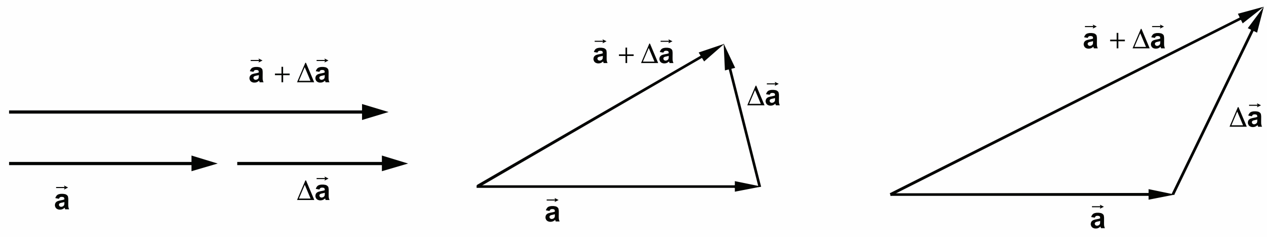
इसके वेग और त्वरण ज्ञात करें।

सदिश फलन का अवकलन करने में तीन स्थितियां पैदा हो सकती हैं। सदिश फलन का

(i) केवल **परिमाण** बदलता है, या

(ii) केवल **दिशा** बदलती है, या

(iii) **परिमाण** और **दिशा** दोनों बदलते हैं (चित्र 2.14 देखें)।



चित्र 2.14: सदिश फलन का अवकलज जब सदिश फलन का क) केवल परिमाण बदलता है; ख) केवल दिशा बदलती है; ग) परिमाण और दिशा दोनों बदलते हैं।

भौतिकी में आपको अदिश राशि और सदिश फलन के गुणनफलों, सदिश फलनों के अदिश और सदिश गुणनफलों का अवकलन करना होगा। **ध्यान दें** कि हम अदिश और सदिश गुणनफलों को कार्तीय निर्देशांक तंत्र में इनके घटकों के पदों में लिख सकते हैं। तब हमें अदिश फलनों के अवकलज ही निकालने होंगे। तब आप समीकरणों 2.28क, ख को लागू करके सदिश फलनों के अदिश और सदिश गुणनफलों के अवकलज निकाल सकते हैं। हम यहां केवल परिणाम दे रहे हैं :

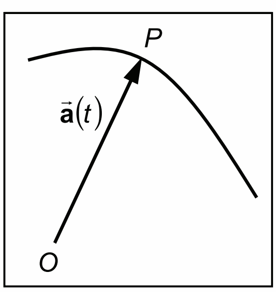
$$\frac{d}{dt}\left(s\vec{\mathbf{f}}\right) = \frac{ds}{dt}\vec{\mathbf{f}} + s\frac{d\vec{\mathbf{f}}}{dt} \tag{2.29}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}}\right) = \frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt}.\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}.\frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dt} \tag{2.30क}$$

और

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}\right) = \frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt}\times\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}\times\frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dt} \tag{2.30ख}$$

इस इकाई के अंत में हम आपको **सदिश फलन के अवकलज का अर्थ** समझाएंगे। आइए, समीकरण 2.27 पर वापस चलें। हम संक्षेप में समझा रहे हैं कि **समीकरण 2.27 का अर्थ क्या है**। नीचे बक्स में दी गई सामग्री पर आपसे परीक्षा में सवाल नहीं पूछे जायेंगे।



चित्र 2.15: समष्टि में एक वक्र के रूप में सदिश फलन।

सदिश फलन का अवकलज

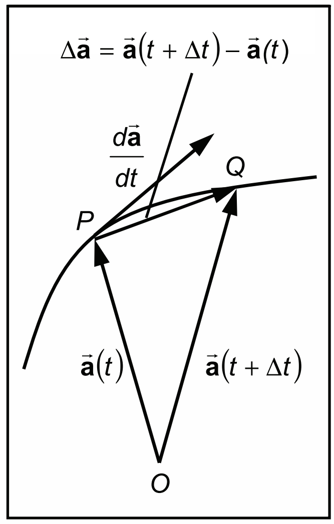
ज्यामितीय रूप में हम समीकरण 2.27 को समझें तो सदिश फलन $\vec{\mathbf{a}}(t)$ का अवकलज, फलन द्वारा निरूपित वक्र **के बिन्दु पर स्पर्शी** (tangent) **सदिश होता है**। यह चर t के साथ **सदिश फलन की परिवर्तन दर** भी व्यक्त करता है।

यह बात समझने के लिए, आइए, हम एक अदिश चर t और इसके संगत सदिश फलन $\vec{\mathbf{a}}(t)$ लें। चित्र 2.15 देखें। इसमें सदिश फलन $\vec{\mathbf{a}}(t)$ को समष्टि में एक वक्र के रूप में दिखाया गया है (जैसाकि चित्र 2.12ग में दिखाया गया है)। अब चित्र 2.16क को ध्यान से समझें।

मान लें कि चित्र 2.16 में सदिश $\overrightarrow{\mathbf{OP}}(t)$, t के किसी मान पर सदिश फलन $\vec{\mathbf{a}}(t)$ को प्रकट करता है। अब हम अदिश t में Δt की वृद्धि कर देते हैं। मान लें कि अदिश $t+\Delta t$ के संगत सदिश $\vec{\mathbf{a}}(t+\Delta t)$ है। इसे हम $\overrightarrow{\mathbf{OQ}}$ से प्रकट करते हैं। तब t में Δt परिवर्तन के संगत $\vec{\mathbf{a}}(t)$ में परिवर्तन है :

$$\Delta\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}(t+\Delta t) - \vec{\mathbf{a}}(t)$$

योग के त्रिभुज नियम से आप देख सकते हैं कि $\Delta\vec{\mathbf{a}}$ सदिश $\overrightarrow{\mathbf{PQ}}$ है। चूंकि Δt एक अदिश है, इसलिए $\frac{\Delta\vec{\mathbf{a}}}{\Delta t}$ सदिश $\overrightarrow{\mathbf{PQ}}$ की दिशा में एक सदिश है। जब $\Delta t \to 0$, तब बिन्दु Q बिन्दु P की ओर प्रवृत्त होता है और $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{a}}}{\Delta t}$ **वक्र के बिन्दु P पर स्पर्शी** (tangent) **सदिश होता है जबकि इस सीमा का अस्तित्व हो और यह शून्य न हो।**



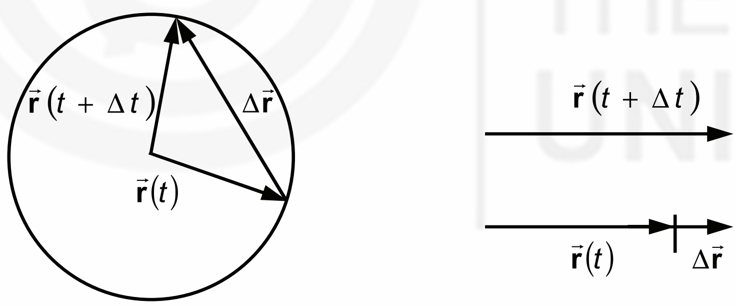
चित्र 2.16: सदिश फलन $\vec{\mathbf{a}}(t)$ और सदिश फलन $\vec{\mathbf{a}}(t+\Delta t)$ ।

t के मान में वृद्धि होने पर स्पर्शी की दिशा वही होगी जिसमें बिन्दु P गतिमान होगा। इस तरह, हम यह पाते हैं कि **अवकलज** $\frac{d\,\vec{\mathbf{a}}(t)}{dt} = \vec{\mathbf{a}}'(t)$, **स्थानिक वक्र $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}(t)$ पर स्पर्शी होता है जब कभी $\vec{\mathbf{a}}'(t)$ का अस्तित्व होता है और** $\vec{\mathbf{a}}'(t) \neq 0$ ।

अब, $\frac{\Delta\vec{\mathbf{a}}}{\Delta t}$ अंतराल Δt के दौरान t के प्रति एकक मान के संगत $\vec{\mathbf{a}}$ के परिवर्तन को व्यक्त करता है। इसलिए अवकलज $\vec{\mathbf{a}}'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{a}}}{\Delta t}$, चर t के सापेक्ष $\vec{\mathbf{a}}$ की **परिवर्तन दर (rate of change)** है।

ध्यान दें कि आम तौर पर $\Delta\vec{\mathbf{a}}$ की दिशा $\vec{\mathbf{a}}$ के अनुदिश नहीं होती। यह आम तौर पर सत्य है। उदाहरण के लिए, जब कोई कण एक परवलयिक पथ (parabolic path) के अनुदिश या दीर्घवृत्त (ellipse) या एक वृत्त के अनुदिश गतिमान होता है, तो उसके स्थिति सदिश में परिवर्तन $\Delta\vec{\mathbf{r}}$, $\vec{\mathbf{r}}$ की दिशा में नहीं होता (चित्र 2.17क)।

क्या आप इसका कोई अपवाद बता सकते हैं? हां, अगर हम कण की प्रारंभिक स्थिति को मूल बिन्दु मान लें तो सरल रैखिक गति में $\Delta\vec{\mathbf{r}}$, $\vec{\mathbf{r}}$ की दिशा में होता है (चित्र 2.17ख)।



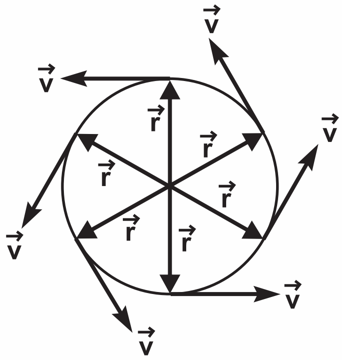
(क) (ख)

चित्र 2.17: क) वर्तुल गति में $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{r}}$ एक दिशा में नहीं हैं; ख) एक अपवाद जिसमें $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{r}}$ एक ही दिशा में हैं।

आप देख सकते हैं कि $\frac{d\vec{\mathbf{a}}(t)}{dt}$ का ज्यामितीय अर्थ, अदिश फलन $\frac{du(t)}{dt}$ के अवकलज के ज्यामितीय अर्थ के समतुल्य है।

लेकिन सदिश फलन और अदिश फलन के अवकलजों में एक महत्वपूर्ण अंतर है। क्योंकि $\vec{\mathbf{a}}$ एक सदिश है, इसलिए इसके परिमाण और दिशा दोनों बदल सकते हैं, जबकि अदिश फलन का केवल परिमाण ही बदलता है।

आइए अब हम इन अवधारणाओं को लागू करने के लिए एकसमान वर्तुल गति का उदाहरण लें।



चित्र 2.18: एकसमान वर्तुल गति में किसी कण का वेग सदैव इसके स्थिति सदिश के लम्बवत् होता है।

उदाहरण 2.5: एकसमान वर्तुल गति

समीकरण 2.30क का अनुप्रयोग किसी कण की एकसमान वर्तुल गति के विश्लेषण के लिए कीजिए।

हल ■ जब कोई कण एकसमान वर्तुल गति करता है तो उसकी स्थिति एवं वेग के परिमाण तो अचर रहते हैं लेकिन उनकी दिशाएं लगातार बदलती रहती हैं। मान लीजिए कि कण की चाल v है तथा यह त्रिज्या r के वृत्त में गतिमान है।

तब हम लिख सकते हैं:

$$\vec{\mathbf{r}}\,.\,\vec{\mathbf{r}} = r^2 = \text{अचर तथा } \vec{\mathbf{v}}\,.\,\vec{\mathbf{v}} = v^2 = \text{अचर} \qquad \text{(i)}$$

जहां $\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{v}}$ क्रमशः कण के स्थिति सदिश एवं वेग हैं। समीकरण 2.30क से हम लिख सकते हैं:

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{r}}\,.\,\vec{\mathbf{r}}) = \vec{\mathbf{r}}\,.\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} + \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}.\vec{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\left(r^2\right) = 0 \quad \text{चूंकि } r \text{ अचर है।}$$

अतः,
$$\vec{\mathbf{r}}\,.\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \vec{\mathbf{r}}\,.\,\vec{\mathbf{v}} = 0 \text{ क्योंकि } \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \vec{\mathbf{v}} \qquad \text{(ii)}$$

समीकरण (ii) हमें बताता है कि जब कोई कण एकसमान वृत्तीय गति करता है तो इसका वेग, हर समय स्थिति सदिश के लंबवत् होता है (चित्र 2.18)। आइए, इस परिणाम को कण के वेग पर लागू करें। चूंकि वेग अचर है, हम लिख सकते हैं कि:

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{v}}\,.\,\vec{\mathbf{v}}) = 2\,\vec{\mathbf{v}}\,.\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v^2\right) = 0$$

या

$$\vec{\mathbf{v}}\,.\,\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \vec{\mathbf{v}}\,.\,\vec{\mathbf{a}} = 0 \quad \left(\text{क्योंकि } \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \vec{\mathbf{a}}\right) \qquad \text{(iii)}$$

जहां $\vec{\mathbf{a}}$ कण का त्वरण है। समीकरण (iii) से पता चलता है कि **एकसमान वर्तुल गति के लिए त्वरण और वेग एक दूसरे के लम्बवत् होते हैं।** आप त्वरण की दिशा के बारे में क्या कह सकते हैं?

हम जानते हैं कि $\vec{\mathbf{r}}$ वेग $\vec{\mathbf{v}}$ पर लम्बवत् है तथा $\vec{\mathbf{v}}$ त्वरण $\vec{\mathbf{a}}$ पर लम्बवत् है।

चूंकि एकसमान वर्तुल गति एक समतल में निहित रहती है, हम कह सकते हैं कि $\vec{\mathbf{r}}$ और $\vec{\mathbf{a}}$ या तो एक दूसरे के समान्तर होंगे या असमान्तर। आइए, अब देखें कि इनमें से कौन सा विकल्प सही है। पहले हम $(\vec{\mathbf{r}}\,.\,\vec{\mathbf{v}})$ का प्रथम अवकलज ज्ञात करते हैं। चूंकि $\vec{\mathbf{r}}\,.\,\vec{\mathbf{v}} = 0$, हम लिख सकते हैं:

$$\frac{d}{dt}[\vec{\mathbf{r}}\,.\,\vec{\mathbf{v}}] = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\,.\,\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{r}}\,.\,\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \vec{\mathbf{v}}\,.\,\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{r}}\,.\,\vec{\mathbf{a}} = 0 \qquad \text{(iv)}$$

या

$$\vec{\mathbf{r}}\,.\,\vec{\mathbf{a}} + v^2 = 0 \Rightarrow \vec{\mathbf{r}}\,.\,\vec{\mathbf{a}} = -v^2 \qquad \text{(v)}$$

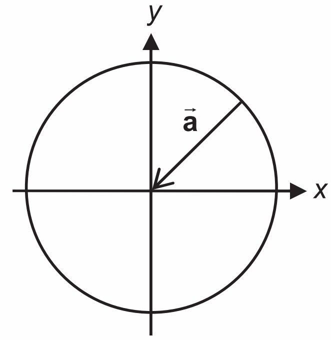
चूंकि समीकरण (v) का दक्षिण पक्ष ऋणात्मक है, इनके बीच का कोण 180° होना चाहिए तथा $\cos\theta = -1$ (समीकरण 1.10 से अदिश गुणनफल की परिभाषा याद करें)। अतः समीकरण (v) से हम लिख सकते हैं कि

$$-ar = -v^2$$

या

$$a = \frac{v^2}{r} \qquad \text{(vi)}$$

अतः, एकसमान वर्तुल गति करने वाले कण का त्वरण $\vec{\mathbf{a}}$ स्थिति सदिश के असमान्तर या उसकी विपरीत दिशा में होता है। इसका परिमाण v^2/r होता है। इसे **अभिकेन्द्र त्वरण** कहते हैं क्योंकि इसकी दिशा सदैव वृत्त के केन्द्र की ओर होती है (चित्र 2.19)।



चित्र 2.19: एकसमान वर्तुल गति में कण के त्वरण की दिशा सदैव वृत्त के केन्द्र की ओर होती है।

अब हम इस इकाई में जिन अवधारणाओं को आपने पढ़ा है, उनका सारांश देंगे।

2.5 सारांश

अवधारणा	विवरण
सदिश के द्विविम कार्तीय घटक	■ द्विविम समष्टि में किसी सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ को, जिसका पुच्छ, बिन्दु (x_1, y_1) पर हो और शीर्ष, बिन्दु (x_2, y_2) पर हो, उसके x और y घटकों के पदों में इस प्रकार लिखा जा सकता है : $$\vec{\mathbf{a}} = a_x\,\hat{\mathbf{i}} + a_y\,\hat{\mathbf{j}}$$ जहां $a_x = x_2 - x_1 = a\cos\theta$, $\quad a_y = y_2 - y_1 = a\sin\theta$ सदिश का **परिमाण** होता है $\lvert\vec{\mathbf{a}}\rvert = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ और उसकी **दिशा** कोण θ द्वारा दी जाती है जो सदिश $\vec{\mathbf{a}}$, धनात्मक x-अक्ष से बनाता है $$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right)$$
सदिश के त्रिविम कार्तीय घटक	■ त्रिविम समष्टि में किसी सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ को, जिसका पुच्छ, बिन्दु (x_1, y_1, z_1) पर हो और शीर्ष, बिन्दु (x_2, y_2, z_2) पर हो, उसके x, y और z घटकों के पदों में इस प्रकार लिखा जा सकता है: $$\vec{\mathbf{a}} = a_x\,\hat{\mathbf{i}} + a_y\,\hat{\mathbf{j}} + a_z\,\hat{\mathbf{k}}$$ जहां $a_x = x_2 - x_1$, $\quad a_y = y_2 - y_1$, $\quad a_z = z_2 - z_1$ सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ का परिमाण होता है $$a = \sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)}$$ सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ की दिशा दिक्कोज्याओं $\cos\alpha$, $\cos\beta$ और $\cos\gamma$ द्वारा निर्धारित होती है जहां α, β और γ क्रमशः सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ और x, y और z-अक्षों के बीच के कोण हैं। इस तरह, $$a_x = (\vec{\mathbf{a}}\,.\,\hat{\mathbf{i}}) = a\cos\alpha$$

$$a_y = (\vec{\mathbf{a}}\,.\,\hat{\mathbf{j}}) = a\cos\beta$$

$$a_z = (\vec{\mathbf{a}}\,.\,\hat{\mathbf{k}}) = a\cos\gamma$$

घटक रूप में अदिश गुणनफल

■ सदिशों $\vec{\mathbf{a}} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$ और $\vec{\mathbf{b}} = b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}}$ का **अदिश गुणनफल** होता है :

$$\vec{\mathbf{a}}\,.\,\vec{\mathbf{b}} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

दो सदिशों $\vec{\mathbf{a}} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}}$ और $\vec{\mathbf{b}} = b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}}$ का अदिश गुणनफल है :

$$\vec{\mathbf{a}}\,.\,\vec{\mathbf{b}} = a_x b_x + a_y b_y$$

घटक रूप में सदिश गुणनफल

■ सदिशों $\vec{\mathbf{a}} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$ और $\vec{\mathbf{b}} = b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}}$ का **सदिश गुणनफल** होता है :

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = (a_y\,b_z - a_z\,b_y)\hat{\mathbf{i}} + (a_z\,b_x - a_x\,b_z)\hat{\mathbf{j}} + (a_x\,b_y - a_y\,b_x)\hat{\mathbf{k}}$$

इसे सारणिक के रूप में इस प्रकार भी लिखा जा सकता है :

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

सदिशों $\vec{\mathbf{a}} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}}$ और $\vec{\mathbf{b}} = b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}}$ का सदिश गुणनफल है :

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = (a_x b_y - a_y b_x)\hat{\mathbf{k}}$$

सदिश फलन

■ कोई सदिश एक या एक से अधिक स्वतंत्र अदिश चरों का फलन हो सकता है। कार्तीय निर्देशांक तंत्र में **एकल चर** के **सदिश फलन** $\vec{\mathbf{a}}(t)$ को इसके घटकों के पदों में इस तरह लिख सकते हैं :

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = f(t)\hat{\mathbf{i}} + g(t)\hat{\mathbf{j}} \qquad \text{द्विविम में}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = f(t)\hat{\mathbf{i}} + g(t)\hat{\mathbf{j}} + h(t)\hat{\mathbf{k}} \qquad \text{त्रिविम में}$$

जहां $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ और $\hat{\mathbf{k}}$ कार्तीय अक्षों x, y और z के अनुदिश एकक सदिश हैं और $f(t)$, $h(t)$ और $g(t)$ **घटक फलन** हैं।

एकल चर के सापेक्ष सदिश फलन का अवकलज

■ चर t के सापेक्ष $\vec{\mathbf{a}}(t)$ का **अवकलज** इसके प्रत्येक घटक का t के सापेक्ष अलग-अलग अवकलन करने पर प्राप्त होता है :

$$\frac{d\vec{\mathbf{a}}(t)}{dt} = \frac{df(t)}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dg(t)}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dh(t)}{dt}\hat{\mathbf{k}}$$

और

$$\frac{d\vec{\mathbf{a}}(t)}{dt} = \frac{df(t)}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dg(t)}{dt}\hat{\mathbf{j}}$$

सदिश फलनों के गुणनफलों के अवकलज

■ अदिश s और सदिश फलन $\vec{\mathbf{f}}(t)$ तथा दो सदिश फलनों $\vec{\mathbf{a}}(t)$ और $\vec{\mathbf{b}}(t)$ के अदिश और सदिश गुणनफलों के अवकलज निम्नलिखित हैं :

$$\frac{d}{dt}\left(s\vec{\mathbf{f}}\right) = \frac{ds}{dt}\vec{\mathbf{f}} + s\frac{d\vec{\mathbf{f}}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}}) = \frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt}.\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}.\frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dt}$$

और
$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}) = \frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt}\times\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}\times\frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dt}$$

2.6 अंत में कुछ प्रश्न

1. दो वेग सदिशों $\vec{\mathbf{u}}$ और $\vec{\mathbf{v}}$ को जोड़ने पर उनका परिणामी है : $\vec{\mathbf{V}} = 3.0\ \text{ms}^{-1}\ \hat{\mathbf{i}} + 1.0\ \text{ms}^{-1}\ \hat{\mathbf{j}}$ । यदि $\vec{\mathbf{u}} = 1.5\ \text{ms}^{-1}\ \hat{\mathbf{i}} + 2.0\ \text{ms}^{-1}\ \hat{\mathbf{j}}$ तो $\vec{\mathbf{v}}$ की गणना करें।

2. ΔABC के क्षेत्रफल की गणना करें यदि उसके शीर्षों A, B और C के निर्देशांक क्रमशः (2, – 1, 0), (3, 2, 1) और (1, 2, – 2) हों।

3. $\vec{\mathbf{a}}$ पर $\vec{\mathbf{a}} + 2\vec{\mathbf{b}}$ का प्रक्षेप ज्ञात करें जहां $\vec{\mathbf{a}} = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ और $\vec{\mathbf{b}} = -2\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$ ।

4. परिमाण दो एकक वाले सदिश का मान ज्ञात करें जो दोनों ही सदिशों $\vec{\mathbf{a}} = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$ और $\vec{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$ के लम्बवत् हो।

5. दो सदिशों $\vec{\mathbf{a}} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ और $\vec{\mathbf{b}} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$ के लिए $(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) \times (\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}})$ का मान ज्ञात करें।

6. दो एकक सदिश ज्ञात करें जो दोनों सदिशों $\vec{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ और $\vec{\mathbf{B}} = -2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}$ के लम्बवत् हों।

7. बिन्दु (2, – 1, – 4) पर लग रहे बल $\vec{\mathbf{F}} = 3\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$ के कारण बिन्दु (1, 0, – 1) के प्रति बल आघूर्ण की गणना करें।

8. अचर x और y के मान प्राप्त करें यदि दोनों ही सदिश $\vec{\mathbf{A}} = x\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ और $\vec{\mathbf{B}} = 2\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$, सदिश $\vec{\mathbf{C}} = 4\hat{\mathbf{i}} + 9\hat{\mathbf{j}}$ के समांतर हों।

9. क्या एक ऐसा सदिश $\vec{\mathbf{A}} = x\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ संभव है जिसके लिए संबंध $(2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}) \times \vec{\mathbf{A}} = 4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 4\hat{\mathbf{k}}$ सत्य हो? समझाएं।

10. एक कण पर लग रहे बल के x और y दिशाओं में घटक क्रमशः 5N और 8N हैं। यदि कण बिन्दु (2, 6) से बिन्दु (7, 9) तक चलता है, तो बल द्वारा उस पर किये गये कार्य की गणना करें। विस्थापन, m में लें।

11. यदि $\vec{\mathbf{r}}(t) = 3t\hat{\mathbf{i}} + 2t^2\hat{\mathbf{j}} + t^3\hat{\mathbf{k}}$, तो (i) $\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}$ और (ii) $\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2}$ की गणना करें।

12. निम्नलिखित स्थिति सदिश वाले कण का वेग ज्ञात करें :

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \cos^2 t\hat{\mathbf{i}} + \sin^2 t\hat{\mathbf{j}} + \cos 2t\hat{\mathbf{k}}$$

13. द्रव्यमान m के एक पिंड का, जो एक वक्र के अनुदिश गतिमान है, स्थिति सदिश है :

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = at^2\,\hat{\mathbf{i}} + \sin bt\,\hat{\mathbf{j}} + \cos bt\,\hat{\mathbf{k}},\ 0 \le t \le 1,$$

जहां a और b अचर हैं। पिंड पर लग रहे बल की गणना करें।

14. एक वक्र को प्राचलिक समीकरणों (parametric equations) $x = 2,\ y = 3t^2 + 2,\ z = 4 - t$ द्वारा निरूपित किया जाता है। बिन्दु $t = 1$ पर इस वक्र पर एकक स्पर्शी सदिश ज्ञात करें।

15. दो सदिश फलनों $\vec{\mathbf{a}}(t) = (2t + 3)\,\hat{\mathbf{i}} + (t^2 - 2)\,\hat{\mathbf{j}} + t\,\hat{\mathbf{k}}$ और $\vec{\mathbf{b}}(t) = (4 - t)\,\hat{\mathbf{i}} + (3t^2 + 1)\,\hat{\mathbf{j}} + (2t - 1)\hat{\mathbf{k}}$ के लिए $t = 1$ पर $\vec{\mathbf{a}}(t)\,.\,\vec{\mathbf{b}}(t)$ का अवकलज ज्ञात करें।

2.7 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. समीकरण 2.1 से $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{A}}$ के लिए, $a = A = 3,\ \theta = 60^\circ$ और हमें मिलता है :

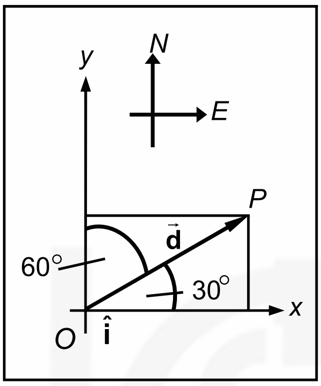
$$A_x = A\cos\theta = 3\cos 60^\circ = \frac{3}{2} \text{ और } A_y = A\sin\theta = 3\sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{B}}$ के लिए, $a = B = 4,\ \theta = 135^\circ$ और हमें मिलता है :

$$B_x = B\cos 135^\circ = \frac{-4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} \text{ और } B_y = B\sin 135^\circ = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{C}}$ के लिए, $a = C = 5,\ \theta = 210^\circ$ और हमें मिलता है :

$$C_x = C\cos 210^\circ = \frac{-5\sqrt{3}}{2} \text{ और } C_y = C\sin 210^\circ = \frac{-5}{2}$$



चित्र 2.20 : बोध प्रश्न 2क के लिए चित्र।

2. क) चित्र 2.20 देखें जिसमें $\overline{\mathbf{OP}}$ विस्थापन $\vec{\mathbf{d}}$ है। विस्थापन और x-अक्ष के बीच का कोण $\theta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ है। समीकरण 2.1 में $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{d}},\ a = d = 24\,\text{m}$ और $\theta = 30^\circ$ रखने पर $\vec{\mathbf{d}}$ के x और y घटक हैं :

$$d_x = d\cos\theta = (24\cos 30^\circ)\,\text{m} = 20.8\,\text{m} \approx 21\,\text{m}$$

$$d_y = d\sin\theta = (24\sin 30^\circ)\,\text{m} = 12\,\text{m}$$

$$\therefore\quad \vec{\mathbf{d}} = 21\,\text{m}\,\hat{\mathbf{i}} + 12\,\text{m}\,\hat{\mathbf{j}}$$

ख) हम सदिशों के परिमाण की गणना समीकरण 2.7 से इस तरह कर सकते हैं :

$$a = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{14}, \qquad b = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \text{ और}$$

$$c = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ और $\vec{\mathbf{c}}$ के अनुदिश एकक सदिशों, जो क्रमशः $\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}$ हैं, का परिकलन समीकरण 1.3ख द्वारा इस तरह किया जा सकता है :

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\vec{\mathbf{a}}}{a} = \frac{1}{\sqrt{14}}\,(3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}), \qquad \hat{\mathbf{b}} = \frac{\vec{\mathbf{b}}}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) \text{ और}$$

$$\hat{\mathbf{c}} = \frac{\vec{\mathbf{c}}}{c} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})$$

3. क) हम दोनों सदिशों का अदिश गुणनफल समीकरण 2.17क से और उन दोनों के बीच का कोण समीकरण 1.11घ से ज्ञात करेंगे। दिया है कि

$a_x = 3, a_y = 2, a_z = -1, \; b_x = 1, b_y = 1, b_z = 2$

$$\therefore \quad \vec{\mathbf{a}} \,.\, \vec{\mathbf{b}} = 3\times1 + 2\times1 + (-1)\times2 = 3$$

सदिशों के परिमाण हैं : $a = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$ और

$b = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$

$\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ के बीच का कोण θ है :

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{\mathbf{a}} \,.\, \vec{\mathbf{b}}}{ab}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{14}\,.\,\sqrt{6}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{84}}\right)$$

ख) समीकरण 1.11ज से $\vec{\mathbf{b}}$ पर $\vec{\mathbf{a}}$ का प्रक्षेप है :

$$\frac{\vec{\mathbf{a}} \,.\, \vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{b}}|} = \frac{(2\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}) \,.\, (\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}})}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = -\frac{15}{\sqrt{14}}$$

4. क) दो सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ का सदिश गुणनफल उस तल के लम्बवत् एक सदिश होता है जिसमें सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ स्थित हैं। अतः, किन्हीं दो सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ को समाविष्ट करने वाले तल के लम्बवत् एकक सदिश $\hat{\mathbf{n}}$ है : $\hat{\mathbf{n}} = \dfrac{\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}|}$

जहां $|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}|$, सदिश गुणनफल $\left(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}\right)$ का परिमाण है। समीकरण 2.21ख में $\vec{\mathbf{a}} = 4\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ और $\vec{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ रखने पर हमें मिलता है :

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -8\hat{\mathbf{i}} - 11\hat{\mathbf{j}} + 10\hat{\mathbf{k}}$$

और $\quad |\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}| = \sqrt{(-8)^2 + (-11)^2 + (10)^2} = \sqrt{285}$

$$\therefore \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{285}}(-8\hat{\mathbf{i}} - 11\hat{\mathbf{j}} + 10\hat{\mathbf{k}})$$

ख) उदाहरण 1.1 से हम जानते हैं कि भुजाओं $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ वाले समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}|$ होता है :

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 12\hat{\mathbf{k}}$$

$\therefore \quad$ क्षेत्रफल $= \left|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}\right| = \sqrt{(-9)^2 + (2)^2 + (12)^2} = \sqrt{229}$ इकाई

5. क), ख) और घ) में दिए सदिश, सदिश फलन हैं। क) में दिया गया सदिश फलन समय t पर निर्भर करता है। ख) में दिया गया सदिश फलन कोण θ पर निर्भर करता है। घ) में दिया गया सदिश फलन चर $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ के माध्यम से स्थानिक निर्देशांकों (x, y, z) पर निर्भर करता है। लेकिन ग) में दिया गया बल, सदिश फलन नहीं है क्योंकि वह अचर है।

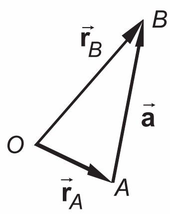
6. कण का वेग है : $\vec{\mathbf{v}}(t) = \dfrac{d}{dt}\vec{\mathbf{r}}(t) = \dfrac{d}{dt}[(6t - t^2)\,\hat{\mathbf{i}} + 2t\,\hat{\mathbf{j}} + t\,\hat{\mathbf{k}}] = (6 - 2t)\,\hat{\mathbf{i}} + 2\,\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$

   कण का त्वरण है : $\vec{\mathbf{a}}(t) = \dfrac{d}{dt}\vec{\mathbf{v}}(t) = \dfrac{d}{dt}\left[(6 - 2t)\,\hat{\mathbf{i}} + 2\,\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right] = -2\,\hat{\mathbf{i}}$

अंत में कुछ प्रश्न

आप चित्र 2.21 से देख सकते हैं कि A से B तक के सदिश यानी $\vec{\mathbf{a}}$ का मान है

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{r}}_B - \vec{\mathbf{r}}_A$$



चित्र 2.21

इसी तरह, B से C तक के सदिश यानी $\vec{\mathbf{b}}$ का मान है

$$\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{r}}_C - \vec{\mathbf{r}}_B$$

1. चूंकि $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{V}}, \quad \therefore \quad \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{V}} - \vec{\mathbf{u}}$

   दिया है कि $\quad \vec{\mathbf{u}} = 1.5\ \mathrm{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0\,\mathrm{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{j}}$ और $\vec{\mathbf{V}} = 3.0\ \mathrm{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}} + 1.0\,\mathrm{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{j}}$

   अतः, $\quad \vec{\mathbf{v}} = (3.0\,\mathrm{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}} + 1.0\,\mathrm{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{j}}) - (1.5\,\mathrm{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0\,\mathrm{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{j}})$

   $$= 1.5\,\mathrm{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{i}} - 1.0\,\mathrm{ms}^{-1}\,\hat{\mathbf{j}}$$

2. हम तीनों बिन्दुओं A, B और C के स्थिति सदिश इस तरह लिख सकते हैं :

   $$\vec{\mathbf{r}}_A = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}, \quad \vec{\mathbf{r}}_B = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} \quad \text{और} \quad \vec{\mathbf{r}}_C = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$$

   भुजा AB सदिश $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{r}}_B - \vec{\mathbf{r}}_A$ द्वारा निरूपित होती है (चित्र 2.21) और भुजा BC सदिश $\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{r}}_C - \vec{\mathbf{r}}_B$ द्वारा निरूपित होती है (हाशिये में दी गई टिप्पणी पढ़ें)। तब

   त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2}|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}|$ जहां

   $$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{r}}_B - \vec{\mathbf{r}}_A = (3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) - (2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}) = \hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

   और $\quad \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{r}}_C - \vec{\mathbf{r}}_B = (\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}) - (3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) = -2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{k}}$

   त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2}|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}|$

   $$= \frac{1}{2}|(\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) \times (-2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{k}})| = \frac{1}{2}|(-9\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}})|$$

   अतः, क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2}\sqrt{(-9)^2 + (1)^2 + 6^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{118}$ इकाई

3. मान लें कि $\vec{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{a}} + \mathbf{2}\vec{\mathbf{b}}$ । $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ के मान रखने पर हमें मिलता है :

   $$\vec{\mathbf{d}} = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} + 2(-2\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}) = -\hat{\mathbf{i}} - 6\hat{\mathbf{j}} + 9\hat{\mathbf{k}}$$

   समीकरण 1.11ज से $\vec{\mathbf{a}}$ पर $\vec{\mathbf{d}}$ का प्रक्षेप है :

   $$\frac{\vec{\mathbf{d}}\,.\,\vec{\mathbf{a}}}{a} = \frac{(-\hat{\mathbf{i}} - 6\hat{\mathbf{j}} + 9\hat{\mathbf{k}})\,.\,(3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})}{\sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{18}{\sqrt{14}}$$

4. बोध प्रश्न 4क के हल में दी गई विधि का प्रयोग करके हम दोनों सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ पर लम्बवत् एकक सदिश का व्यंजक इस तरह लिख सकते हैं :

   $$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}|} = \frac{(2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}) \times (\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}})}{|(2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}) \times (\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}})|} = \frac{2\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}}{\left|2\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}\right|} = \frac{2\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{17}}$$

   अब सदिश $\vec{\mathbf{D}}$ जिसका परिमाण दो एकक है और जो दोनों ही $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ के लम्बवत् है, होगा :

   $$\vec{\mathbf{D}} = 2\hat{\mathbf{n}} = \frac{2}{\sqrt{17}}(2\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}})$$

5. $\vec{\mathbf{a}} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ और $\vec{\mathbf{b}} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$ रखने पर :

$\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = 5\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ और $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = -\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$

समीकरण 2.21ख से सदिश गुणनफल है :

$$(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) \times (\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 5 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6\hat{\mathbf{i}} - 10\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$$

अंत के प्रश्न 5 में आप यह भी लिख सकते हैं

$$(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) \times (\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}) = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{b}} = 2(\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{a}})$$

चूंकि

$-\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{a}}$

अतः,

$$(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) \times (\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}) = 2\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

6. पहले हम $\vec{\mathbf{R}} = (\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}})$ ज्ञात करेंगे क्योंकि $\vec{\mathbf{R}}$ दोनों सदिशों $\vec{\mathbf{A}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ के लम्बवत् है।

$$\vec{\mathbf{R}} = (\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{i}}(-12) + \hat{\mathbf{j}}(-6) + \hat{\mathbf{k}}(0)$$

$$= -12\hat{\mathbf{i}} - 6\hat{\mathbf{j}}$$

$\vec{\mathbf{R}}$ के अनुदिश एकक सदिश है : $\hat{\mathbf{R}} = \dfrac{\vec{\mathbf{R}}}{|\vec{\mathbf{R}}|} = \dfrac{-12\hat{\mathbf{i}} - 6\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{144+36}} = \dfrac{-12\hat{\mathbf{i}} - 6\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{180}} = \dfrac{(-2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}})}{\sqrt{5}}$

$\vec{\mathbf{A}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$ के लम्बवत् एक और एकक सदिश होगा : $\hat{\mathbf{R}}' = -\hat{\mathbf{R}} = \dfrac{(2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})}{\sqrt{5}}$

7. बल आघूर्ण $\vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$ है और $\vec{\mathbf{r}}$, बिन्दु (1, 0, – 1) के सापेक्ष बिन्दु (2, – 1, – 4) का स्थिति सदिश है : $\vec{\mathbf{r}} = (2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - 4\hat{\mathbf{k}}) - (\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{k}}) = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}$

$\therefore \quad \vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = (\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}) \times (3\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}) = 4\hat{\mathbf{i}} - 8\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$

8. यदि $\vec{\mathbf{A}}$ और $\vec{\mathbf{B}}$, $\vec{\mathbf{C}}$ के समांतर हैं तो समीकरण 1.15क से $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{0}}$ और हमें मिलता है :

$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{C}} = (9x - 12)\hat{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{0}} \Rightarrow x = \dfrac{4}{3}$ और $\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{C}} = (18 - 4y)\hat{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{0}} \Rightarrow y = 9/2$

9. यदि दिया गया संबंध सत्य है तो सदिश $(4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 4\hat{\mathbf{k}})$ दोनों ही सदिशों $(2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}})$ और $\vec{\mathbf{A}}$ के लम्बवत् है (सदिश गुणनफल का गुण)। यदि सदिश $(4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 4\hat{\mathbf{k}})$ सदिश $(2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}})$ के लम्बवत् है तो इनका अदिश गुणनफल शून्य होना चाहिए। लेकिन $(2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}) . (4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 4\hat{\mathbf{k}}) = -17 \neq 0$ । अतः, यदि दिया गया संबंध सत्य है तो सदिश $\vec{\mathbf{A}}$ संभव नहीं है।

10. बल है $\vec{\mathbf{F}} = (5\text{N})\hat{\mathbf{i}} + (8\text{N})\hat{\mathbf{j}}$ । कण का m में विस्थापन है :

$\vec{\mathbf{r}} = (x_2 - x_1)\hat{\mathbf{i}} + (y_2 - y_1)\hat{\mathbf{j}} = (7-2)\hat{\mathbf{i}} + (9-6)\hat{\mathbf{j}} = 5\text{m}\,\hat{\mathbf{i}} + 3\text{m}\,\hat{\mathbf{j}}$

किया गया कार्य है : $\vec{\mathbf{F}} . \vec{\mathbf{r}} = (5\text{N}\,\hat{\mathbf{i}} + 8\text{N}\,\hat{\mathbf{j}}) . (5\text{m}\,\hat{\mathbf{i}} + 3\text{m}\,\hat{\mathbf{j}}) = (25 + 24)\text{J} = 49\,\text{J}$

11. समीकरण 2.28क से हमें मिलता है :

(i) $\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(3t)\hat{\mathbf{i}} + \dfrac{d}{dt}(2t^2)\hat{\mathbf{j}} + \dfrac{d}{dt}(t^3)\hat{\mathbf{k}} = 3\hat{\mathbf{i}} + 4t\,\hat{\mathbf{j}} + 3t^2\,\hat{\mathbf{k}}$ और

(ii) $\dfrac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\right) = \dfrac{d}{dt}(3)\hat{\mathbf{i}} + \dfrac{d}{dt}(4t)\hat{\mathbf{j}} + \dfrac{d}{dt}(3t^2)\hat{\mathbf{k}} = 4\,\hat{\mathbf{j}} + 6t\,\hat{\mathbf{k}}$

12. कण का वेग है : $\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\cos^2 t)\,\hat{\mathbf{i}} + \dfrac{d}{dt}(\sin^2 t)\,\hat{\mathbf{j}} + \dfrac{d}{dt}(\cos 2t)\,\hat{\mathbf{k}}$

$$= -2\cos t \sin t\,\hat{\mathbf{i}} + 2\sin t\cos t\,\hat{\mathbf{j}} - 2\sin 2t\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$= -\sin 2t\,\hat{\mathbf{i}} + \sin 2t\,\hat{\mathbf{j}} - 2\sin 2t\,\hat{\mathbf{k}} = \sin 2t\left[-\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}\right]$$

13. पिंड पर लग रहा बल है : $\vec{\mathbf{F}} = m\dfrac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2}$

समीकरण 2.28क में $\vec{\mathbf{r}} = at^2\,\hat{\mathbf{i}} + \sin bt\,\hat{\mathbf{j}} + \cos bt\,\hat{\mathbf{k}}$ रखने पर हमें मिलता है :

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = 2at\,\hat{\mathbf{i}} + b\cos bt\,\hat{\mathbf{j}} - b\sin bt\,\hat{\mathbf{k}}$$

और $$\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\right] = 2a\,\hat{\mathbf{i}} - b^2\sin bt\,\hat{\mathbf{j}} - b^2\cos bt\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\therefore \quad \vec{\mathbf{F}} = 2ma\,\hat{\mathbf{i}} - mb^2\sin bt\,\hat{\mathbf{j}} - mb^2\cos bt\,\hat{\mathbf{k}}$$

14. दिए गए प्राचलिक समीकरणों द्वारा परिभाषित वक्र को निरूपित करने वाला स्थिति सदिश फलन है :

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = 2\,\hat{\mathbf{i}} + (3t^2 + 2)\,\hat{\mathbf{j}} + (4 - t)\,\hat{\mathbf{k}}$$

किसी मान t पर अवकलज $\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}$, t के उस मान पर स्पर्शी सदिश परिभाषित करता है। अतः, स्पर्शी सदिश है :

$$\vec{\mathbf{T}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d}{dt}[2\,\hat{\mathbf{i}} + (3t^2 + 2)\,\hat{\mathbf{j}} + (4 - t)\,\hat{\mathbf{k}}] = 6t\,\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$$

$t = 1$ पर स्पर्शी सदिश है : $\vec{\mathbf{T}} = 6\,\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$

एकक स्पर्शी सदिश है : $\hat{\mathbf{T}} = \dfrac{\vec{\mathbf{T}}}{|\vec{\mathbf{T}}|} = \dfrac{6\,\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}}{|6^2 + 1^2|} = \dfrac{1}{\sqrt{37}}\,[6\,\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}]$

15. समीकरण 2.30क से हमें मिलता है :

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}}) = [(2t+3)\,\hat{\mathbf{i}} + (t^2 - 2)\,\hat{\mathbf{j}} + t\,\hat{\mathbf{k}}].\left[\frac{d}{dt}[(4-t)\,\hat{\mathbf{i}} + (3t^2+1)\,\hat{\mathbf{j}} + (2t-1)\,\hat{\mathbf{k}}]\right]$$

$$+\left(\frac{d}{dt}[(2t+3)\,\hat{\mathbf{i}} + (t^2-2)\,\hat{\mathbf{j}} + t\,\hat{\mathbf{k}}]\right).[(4-t)\,\hat{\mathbf{i}} + (3t^2+1)\,\hat{\mathbf{j}} + (2t-1)\,\hat{\mathbf{k}}]$$

$$= [(2t+3)\,\hat{\mathbf{i}} + (t^2-2)\,\hat{\mathbf{j}} + t\,\hat{\mathbf{k}}].[-\,\hat{\mathbf{i}} + 6t\,\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}]$$

$$+\ [2\,\hat{\mathbf{i}} + 2t\,\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}].[(4-t)\,\hat{\mathbf{i}} + (3t^2+1)\,\hat{\mathbf{j}} + (2t-1)\,\hat{\mathbf{k}}]$$

$t = 1$ पर $\dfrac{d}{dt}(\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}}) = (5\,\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}).(-\,\hat{\mathbf{i}} + 6\,\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}) + (2\,\hat{\mathbf{i}} + 2\,\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}).(3\hat{\mathbf{i}} + 4\,\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})$

$$= -5 - 6 + 2 + 6 + 8 + 1 = 6$$

पृथ्वी से पलायन करने के लिए एक अंतरिक्ष यान का वेग क्या होना चाहिए? उत्तर जानने के लिए, अंत में दिया प्रश्न 2 हल करें!

इकाई 3

प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणें

इकाई की रूपरेखा

अध्ययन निर्देशिका

हम आशा करते हैं कि आपने (+ 2) या ग्यारहवीं-बारहवीं कक्षा में कलन का अध्ययन किया होगा। इसलिए हम यह मान कर चलेंगे कि आप फलनों के **प्रथम कोटि** अवकलज और आंशिक अवकलज निकालना और फलनों का समाकलन करना जानते हैं। फिर भी हमने इस इकाई के **परिशिष्ट** में संक्षेप में आंशिक अवकलज निकालने का तरीका समझाया है। आपको फलनों का समाकलन करना अच्छी तरह आना चाहिए। आपने (+ 2) या ग्यारहवीं-बारहवीं कक्षा में **समाकलन** की जो **विधियां** पढ़ी हैं, उन्हें आप **दोहरा** ज़रूर **लें** और तभी आप इस इकाई को पढ़ें। इकाई को आप ध्यान से पढ़ें और इसमें दिए गए सवालों को खुद हल करें। बोध प्रश्नों को हल करने में आपको लगभग 5 से 10 मिनट का समय लगना चाहिए। इकाई के अंत में दिए गए कुछ सवाल अधिक चुनौतीपूर्ण हैं। अगर आप बोध प्रश्नों और इकाई के अंत में दिए गए प्रश्नों को हल कर लेते हैं तो आप इस इकाई की अवधारणाएं अच्छी तरह समझते हैं। हां, सवालों के जवाब पहले देखने के लालच से बचें!

"प्रकृति के नियमों की सुंदरता को लोगों को ऐसे बयान करना कि वे उसे महसूस कर सकें तब तक असंभव है जब तक कि उन्हें गणित की गहन समझ न हो। मुझे क्षमा करें पर सच यही है।"

रिचर्ड फाइनमैन

3.1 परिचय

ध्यान दें

साधारण अवकल समीकरण की **कोटि, उसमें आने वाले उच्चतम अवकलज की कोटि** होती है।

आपने स्कूली भौतिकी के पाठ्यक्रम में न्यूटन के गति के नियमों के बारे में पढ़ा है और उन्हें आसान निकायों की गति पर लागू किया है जैसेकि गुरुत्व के प्रभाव में गिर रहे कण की गति, प्रक्षेप्य (projectile) की गति और रॉकेट की गति। आप जानते हैं कि यांत्रिकी के नियमों की मदद से हम वस्तुओं की गति का अध्ययन कर सकते हैं। इसके लिए हम ऐसी **समीकरणों का उपयोग करते हैं जिनमें एक अज्ञात चर और उसके प्रथम और/या द्वितीय कोटि साधारण अवकलज होते हैं**। ऐसे समीकरण **साधारण अवकल समीकरण** कहलाते हैं। भौतिकी में साधारण अवकल समीकरणों के ऐसी हर स्थिति में अनुप्रयोग होते हैं जिनमें हम जानना चाहते हैं कि कोई भौतिक चर किसी अन्य भौतिक चर के सापेक्ष किस प्रकार बदलता है। उदाहरण के लिए, यांत्रिकी में समय के सापेक्ष वेग में परिवर्तन किस दर से होता है। अन्य उदाहरण हैं, रेडियोएक्टिव क्षय, तरल प्रवाह दर, विद्युत् परिपथ में प्रवाहित धारा का बढ़ना/घटना और यहां तक कि पर्यावरण विज्ञान में समुद्री पानी में बड़ी मात्रा में तेल मिल जाने के बाद तेल की परत की परिवर्तन दर।

ध्यान दें

आपको फलनों के प्रथम कोटि अवकलज निकालना और उनका समाकलन करना आना चाहिए। खंड के अंत में दी गई तालिका के समाकलों को आप दोहरा लें।

इस इकाई में हम पहले भाग 3.2 में संक्षेप में समझाएंगे कि साधारण अवकल समीकरणों का वर्गीकरण किस तरह किया जाता है। साथ ही, आप व्यापक हल और विशेष हल की अवधारणाएं समझेंगे। इकाई के बाकी भागों में हम प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों को हल करने की विभिन्न विधियां समझाएंगे और भौतिकी में उनके अनुप्रयोगों पर ध्यान देंगे। भाग 3.3 में आप उन प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों को हल करने की विधि सीखेंगे जिनमें चरों का पृथक्करण किया जा सकता है। यांत्रिकी में ऐसे समीकरण आम तौर पर आते हैं और इन समीकरणों को **चर पृथक्करण विधि** (method of separation of variables) या **प्रतिस्थापन विधि** (method of substitution) से हल किया जा सकता है। आप प्रथम कोटि **समघात** साधारण अवकल समीकरणों को हल करना भी सीखेंगे। भाग 3.4 में आप **यथातथ समीकरणों** (exact equations) को हल करना सीखेंगे जो ऊष्मागतिकी में अक्सर आते हैं। अंत में भाग 3.5 में हम आपको प्रथम कोटि असमघात साधारण अवकल समीकरणों (first order non-homogeneous ordinary differential equations) को समाकलन गुणक विधि से हल करना सिखाएंगे। इस विधि से LR और RC परिपथों में धारा के लिए साधारण अवकल समीकरणों को हल किया जाता है। प्रत्येक भाग में बताई गई तकनीक को लागू करके आप सवाल हल करेंगे। इकाई 4 में आप अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों को हल करना सीखेंगे।

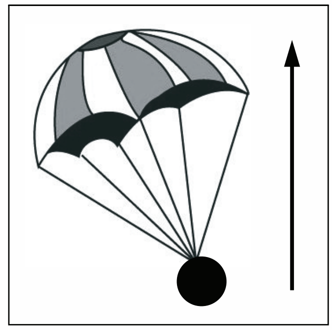
उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों की घात बता सकेंगे और उनका रैखिक या अरैखिक, समघात या असमघात समीकरणों में वर्गीकरण कर सकेंगे;
- पृथक्करणीय और यथातथ प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों को हल कर सकेंगे; और
- प्रथम कोटि असमघात साधारण अवकल समीकरणों को समाकलन गुणक विधि से हल कर सकेंगे।

3.2 साधारण अवकल समीकरणों का वर्गीकरण और हल

आइए, हम भौतिकी से साधारण अवकल समीकरणों के कुछ उदाहरण लें। क्या आपको स्कूली भौतिकी के पाठ्यक्रम में पढ़ाये गए न्यूटन के गति के नियम याद हैं? आइए, हम पृथ्वी की सतह के निकट गिर रहे द्रव्यमान m वाले कण (जैसेकि गेंद या पैराशूट) पर न्यूटन का गति का दूसरा नियम ($\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$) लागू करें। मान लें कि कण पर केवल गुरुत्व बल लग रहा है (चित्र 3.1)। तब कण का गति का समीकरण होगा



चित्र 3.1: गुरुत्व बल के अधीन गिर रहा एक कण।

$$ma = m\frac{dv}{dt} = -mg \quad \text{या} \quad \frac{dv}{dt} = -g \qquad (3.1\text{क})$$

जहां v कण की चाल है और g गुरुत्वीय त्वरण है। समीकरण 3.1क को लिखने में हमने निर्देशांक अक्ष की दिशा ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर ली है। समीकरण 3.1क से हम स्वतंत्र चर t और आश्रित चर v में संबंध प्राप्त कर सकते हैं। यह है $v = u - gt$ (हाशिए पर दी गई टिप्पणी पढ़ें)। इस समीकरण को आप स्कूली भौतिकी के पाठ्यक्रम से अच्छी तरह पहचानते हैं। आइए, हम स्कूली भौतिकी से एक और उदाहरण लें – रेडियोएक्टिव क्षय नियम (principle of radioactive decay) का। यह नियम बताता है कि जिस दर से एक रेडियोएक्टिव पदार्थ के परमाणु विघटित होते हैं, वह उस पदार्थ में मौजूद परमाणुओं की संख्या (N) के समानुपाती होती है। आप कलन से जानते हैं कि हम रेडियोएक्टिव पदार्थ के परमाणुओं की विघटन दर को $\left(-\frac{dN}{dt}\right)$ द्वारा निरूपित कर सकते हैं, जहां t समय को निरूपित करता है। यहां हमने ऋण चिन्ह इसलिए लगाया है क्योंकि t के साथ N में कमी आती जाती है। अतः, हम लिख सकते हैं कि

> आप समीकरण 3.1क के दोनों पक्षों को t के सापेक्ष समाकलित करके हल कर सकते हैं। इससे हमें मिलता है :
>
> $v(t) = -gt + c$
>
> फिर आदि प्रतिबंध $t = 0$ पर $v(0) = u$ लागू करने पर हमें मिलता है :
>
> $v = u - gt$

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad \text{या} \quad \frac{dN}{dt} + \lambda N = 0 \qquad (3.1\text{ख})$$

> समीकरण 3.1ख से मिलती जुलती समीकरण, एक बर्तन में गैस अणुओं के संघट्टन के लिए भी प्राप्त होती है।

जहां λ एक अचर है। स्कूली भौतिकी के पाठ्यक्रम में आपने सरल आवर्ती दोलन के बारे में पढ़ा है। एकविम सरल आवर्त दोलक (one-dimensional linear harmonic oscillator) का गति समीकरण होता है :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \qquad (3.1\text{ग})$$

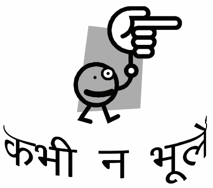
जहां m दोलक का द्रव्यमान है और k बल नियतांक (force constant) है। समीकरण 3.1ग में x से संबद्ध एक पद और समय के सापेक्ष इसका द्वितीय अवकलज है। ध्यान दें कि समीकरणों 3.1क, ख, ग में **केवल आश्रित चर के साधारण अवकलज** हैं। आइए, हम भौतिकी से एक और उदाहरण लें। मान लें कि एक विद्युत् परिपथ में अत्यणु (infinitesimal) समय dt के लिए धारा i प्रवाहित होती है। तब इस समय में प्रवाहित आवेश होगा

$$dq = i\,dt \qquad (3.1\text{घ})$$

समीकरण 3.1घ में अवकल dq और dt उपस्थित हैं। समीकरणों 3.1क से 3.1घ जैसे समीकरणों को **साधारण अवकल समीकरण** (ordinary differential equation) कहा जाता है।

उस समीकरण को, जिसमें **एक स्वतंत्र चर** के सापेक्ष एक या अधिक आश्रित चरों के अवकल या केवल साधारण अवकलज हों, **साधारण अवकल समीकरण** कहा जाता है।

अब इससे पहले कि आप समीकरणों 3.1क से घ जैसे समीकरणों को हल करना सीखें, आपको **साधारण अवकल समीकरणों का वर्गीकरण** सीखना होगा। इनका सबसे पहला वर्गीकरण **कोटि** और **घात** के आधार पर होता है। आपको निम्नलिखित परिभाषाओं को हमेशा याद रखना चाहिए।



साधारण अवकल समीकरण के कोटि और घात

साधारण अवकल समीकरण की **कोटि** उस समीकरण के **उच्चतम अवकलज की कोटि** होती है।

साधारण अवकल समीकरण का **घात,** समीकरण को इस रूप में व्यक्त कर लेने के बाद, कि किसी भी अवकलज का भिन्नात्मक या ऋणात्मक घात (fractional or negative power) न हो, समीकरण के **उच्चतम कोटि अवकलज का घात** होता है।

आप इकाई 4 में द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों का इससे मिलता-जुलता वर्गीकरण सीखेंगे।

क्या आप इन परिभाषाओं का प्रयोग करके समीकरणों 3.1क से घ की कोटि और घात बता सकते हैं? निम्नलिखित बोध प्रश्न करें।

बोध प्रश्न 1 – साधारण अवकल समीकरणों के कोटि और घात

समीकरणों 3.1क से घ के कोटि और घात लिखें।

ध्यान दें

आगे से आपको साधारण अवकल समीकरणों को देखते ही उनका वर्गीकरण करने की आदत बना लेनी चाहिए। यानी आपको उनकी कोटि और घात बता सकना चाहिए। और यह भी बता सकना चाहिए कि वे रैखिक हैं या अरैखिक। भाग 3.3, 3.5 और इकाई 4 पढ़ने के बाद आपको यह भी बता सकना चाहिए कि वे समघात हैं या असमघात।

अब हम **प्रथम कोटि और घात 1 वाले साधारण अवकल समीकरणों** पर ध्यान देंगे। ध्यान रहे कि घात 1 वाले प्रथम कोटि साधारण अवकल समीरकणों में वे ही पद होते हैं जिनमें चर और किसी चर के सापेक्ष उनके **प्रथम कोटि साधारण अवकलज** होते हैं। साथ ही प्रथम कोटि अवकलज की घात 1 होती है। भौतिकी में आम तौर पर आने वाले प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों को हल करने के लिए हमें साधारण अवकल समीकरणों का **रैखिक** (linear) या **अरैखिक** (non-linear), **समघात** या **असमघात** समीकरणों में भी वर्गीकरण करना होता है (हाशिए पर दी गई टिप्पणी पढ़ें)।

3.2.1 प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों का वर्गीकरण

इस भाग में आप प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों को **रैखिक/अरैखिक** और **समघात/असमघात** वर्गों में वर्गीकृत करना सीखेंगे। आपको प्रथम कोटि प्रथम घात साधारण अवकल समीकरण को देख कर ही यह बताना सीखना होगा कि वह रैखिक है या अरैखिक, समघात है या असमघात। तब आप यह तय कर पायेंगे कि उसे हल करने के लिए किस विधि का प्रयोग करें। हम पहले रैखिक/अरैखिक प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों की परिभाषा देंगे।

रैखिक और अरैखिक साधारण अवकल समीकरणें

एक प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण **रैखिक** होता है जब उसमें

i) अज्ञात फलन और उसके प्रथम कोटि अवकलज केवल एक घात वाले हों।

ii) अज्ञात फलन और उसके अवकलजों का कोई गुणनफल न हो या दो अथवा अधिक अवकलजों का कोई गुणनफल न हो।

iii) अज्ञात फलन या इसके किसी भी अवकलज से संबंधित कोई अबीजीय फलन न हो।

यदि कोई प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण (i) से (iii) तक कोई एक या अधिक प्रतिबंध संतुष्ट नहीं करता तो वह **अरैखिक** (non-linear) कहलाता है।

आप जांच सकते हैं कि समीकरणें 3.1क, ख और घ **रैखिक** हैं। भौतिकी में प्रायः आने वाले प्रथम कोटि **रैखिक** समीकरणों के कुछ और उदाहरण हैं :

1. $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E$ अचर E वाले LR परिपथ में धारा i के लिए (3.2क)

2. $\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{RC} = \dfrac{E}{R}$ अचर E वाले RC परिपथ में आवेश q के लिए (3.2ख)

3. $v\dfrac{dv}{dr} = -\dfrac{GM}{r^2}$ द्रव्यमान M वाले पिंड से एक कण के पलायन वेग के लिए (3.2ग)

अब आप साधारण अवकल समीकरणों का रैखिक/अरैखिक समीकरणों में वर्गीकरण करने का अभ्यास करें। इसकी परिभाषा को दोहराएं और फिर बोध प्रश्न 2 करें।

बोध प्रश्न 2 – रैखिक और अरैखिक साधारण अवकल समीकरणें

निम्नलिखित प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों का रैखिक/अरैखिक समीकरणों में वर्गीकरण करें :

क) $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv(t)$

ख) $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E\sin\omega t$

ग) $y' + (y')^2 = 0$ जहां y' अवकलज $\dfrac{dy}{dx}$ है।

प्रथम कोटि **रैखिक** साधारण अवकल समीकरणों को **समघात** (homogeneous) या **असमघात** (nonhomogeneous) समीकरणों में भी वर्गीकृत किया जा सकता है। आप इनकी परिभाषा इस इकाई के भाग 3.3.3 और 3.5 में सीखेंगे जब आप इन्हें हल करना सीखेंगे। प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों को हल करने की विधियां सीखने से पहले आपको व्यापक हल एवं विशेष हल की अवधारणाएं समझनी होंगी।

आम तौर पर किताबों में आश्रित चर को y और स्वतंत्र चर को x लिखा जाता है और हम लिखते हैं $y = y(x)$ या $y = f(x)$। लेकिन हम आश्रित चर को x और स्वतंत्र चर को y भी लिख सकते हैं और तब हम लिखते हैं $x = x(y)$ या $x = f(y)$।

3.2.2 व्यापक हल और विशेष हल

एक अवकल समीकरण के एक से अधिक हल हो सकते हैं। आम तौर पर, भौतिकी में हम पहले एक दी हुई अवकल समीकरण के सभी हल निकालते हैं। फिर हम भौतिक समस्या के लिए सार्थक हल को चुनते हैं। आपने समीकरण 3.1क के हल में देखा है कि उसके (हाशिए की टिप्पणी में दिए गए) अचर c के मान के अनुसार इस समीकरण के कई हल हो सकते हैं। आइए, अब हम एक और उदाहरण लें। इसके लिए हम अवकल समीकरण

$$y' = \sin x \tag{3.3}$$

लेते हैं। आप यह आसानी से जांच कर सकते है कि फलनों

$$y = -\cos x, \quad y = -\cos x + 5, \; y = -\cos x - 9, \quad y = -\cos x + \frac{5}{8}$$

में से प्रत्येक फलन, समीकरण 3.3 का एक हल है। आप इन्हें व्यापक तौर पर इस तरह लिख सकते हैं :

$$y = -\cos x + C \tag{3.4}$$

समीकरण 3.3

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sin x$$

का समाकलन करने पर हमें मिलता है :

$$\int dy = \int \sin x \, dx$$

या $y = -\cos x + C$

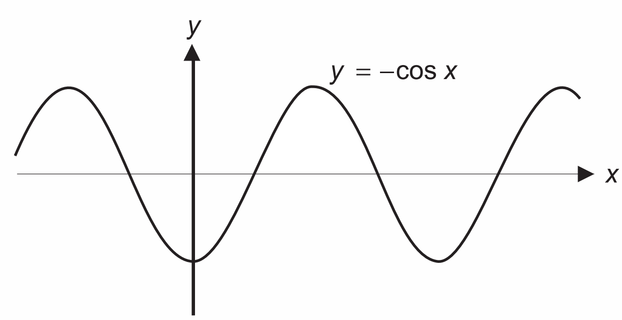
जहां C एक स्वेच्छ अचर (arbitrary constant) है। समीकरण 3.4 को समीकरण 3.3 का **व्यापक हल** (general solution) कहा जाता है क्योंकि समीकरण 3.4 से समीकरण 3.3 के कितने ही हल मिल सकते हैं।

> उस हल को जिसमें स्वेच्छ अचर होते हैं, **व्यापक हल** कहा जाता है।

ध्यान दें कि समीकरण 3.3 एक प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण है और इसके व्यापक हल (समीकरण 3.4) में एक स्वेच्छ अचर है। लेकिन एक द्वितीय कोटि अवकल समीकरण के व्यापक हल में दो स्वेच्छ अचर होते हैं (जैसाकि इकाई 4 में समझाया गया है)। इस तरह हम कह सकते हैं कि **अवकल समीकरण के हल में स्वेच्छ अचरों की संख्या अवकल समीकरण की कोटि के बराबर होती है।** आइए, अब हम समीकरण 3.4 पर यह प्रतिबंध लागू करें : $y = 0$ जब $x = 0$। तब हमें मिलता है

$$0 = 0 + C \quad \text{या} \quad C = 0 \quad \text{जिससे कि} \quad y = -\cos x \tag{3.5}$$

अतः, समीकरण 3.4 पर एक प्रतिबंध लागू करके हम C को एक विशेष मान दे सकते हैं। इस तरह प्राप्त हल को **विशेष हल** (particular solution) कहा जाता है। उदाहरण के लिए, $y = -\cos x + 2$ समीकरण 3.3 का एक विशेष हल है। हमने $C = 0$ के लिए एक विशेष हल चित्र 3.2 में दिखाया है।



चित्र 3.2: अवकल समीकरण $y' = \sin x$ का एक विशेष हल।

> यदि व्यापक हल के प्रत्येक स्वेच्छ अचर को एक निश्चित मान दिया जा सके तो हमें एक **विशेष हल** प्राप्त होता है।

यदि आपने बी.एस.सी. में गणित विषय लिया है तो आप इन अवधारणाओं को अवकल समीकरणों पर गणित के पाठ्यक्रम में और भी सटीक ढंग से सीख सकेंगे। आम तौर पर, यदि साधारण अवकल समीकरण में लगाए गए प्रतिबंध स्वतंत्र चर के **केवल एक** मान के लिए हों, तो इन्हें **आदि प्रतिबंध** (initial condition) कहा जाता है। **आदि प्रतिबंध** सहित अवकल समीकरण को **आदि-मान समस्या** (initial-value problem) कहा जाता है।

द्वितीय कोटि और उच्च कोटि साधारण अवकल समीकरणों के लिए यदि साधारण अवकल समीकरण में लगाए गए प्रतिबंध स्वतंत्र चर के **दो या अधिक मानों** के लिए हों, तो इन्हें **परिसीमा प्रतिबंध** (boundary condition) कहा जाता है। अपने **परिसीमा प्रतिबंध** सहित अवकल समीकरण को **परिसीमा-मान समस्या** (boundary-value problem) कहा जाता है (हाशिए में दी गई टिप्पणी पढ़ें)।

$y(x_0) = C_1,\ y'(x_0) = C_2$

के प्रकार के प्रतिबंध **आदि प्रतिबंध** कहलाते हैं और साधारण अवकल समीकरण सहित इसे **आदि-मान समस्या** कहा जाता है।

$y(x_0) = C_1,\ y(x_1) = C_2$

के प्रकार के प्रतिबंध **परिसीमा प्रतिबंध** कहलाते हैं और साधारण अवकल समीकरण सहित इसे **परिसीमा-मान समस्या** कहा जाता है।

अभी तक आपने पढ़ा है कि साधारण अवकल समीकरण क्या होता है और प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों का रैखिक/अरैखिक समीकरणों में वर्गीकरण कैसे किया जाता है। अब हम प्रथम कोटि रैखिक साधारण अवकल समीकरणों को हल करने की विधियां समझाएंगे। आइए, हम सबसे सरल स्थिति से यह चर्चा शुरू करें जिसमें चरों को पृथक्कृत (अलग) किया जा सकता है।

3.3 पृथक्करणीय प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणें

अनेक प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों में समीकरण को इस तरह लिखा जा सकता है कि समीकरण में उपस्थित स्वतंत्र चर, आश्रित चर और उनके फलन अलग हो जाएं। ऐसे समीकरण पृथक्करणीय समीकरण कहलाते हैं। और, तब अलग हुए भागों को समाकलित करके उस साधारण अवकल समीकरण को हल किया जा सकता है। बहुत से प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों को कोई प्रतिस्थापन करके या चर परिवर्तन करके पृथक्कृत किया जा सकता है। इस भाग में हम पृथक्करणीय समीकरणों को हल करने की विधियां समझाएंगे।

3.3.1 चर पृथक्करण विधि

आइए, हम

$$y' = f(x,y) \tag{3.6}$$

के रूप का एक व्यापक प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण लें। मान लें कि हम $f(x,y)$ को

$$f(x,y) = M(x)N(y) \tag{3.7}$$

के रूप में लिख सकते हैं। **ध्यान दें** कि $M(x)$ केवल एक चर x और $N(y)$ केवल एक चर y पर निर्भर करता है।

समीकरण 3.7 का प्रयोग करके हम समीकरण 3.6 को इस तरह लिख सकते हैं (हाशिए में दी गई टिप्पणी पढ़ें) :

$$\frac{dy}{N(y)} = M(x)dx \tag{3.8}$$

$y' = M(x)N(y)$ के रूप के **प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण को पृथक्करणीय समीकरण** (separable equation) कहा जाता है।

ध्यान दें कि समीकरण 3.8 में चर x और y और उनके फलन पृथक्कृत हैं।

समीकरण 3.8 को समाकलित करने पर हमें समीकरण 3.6 का **व्यापक हल** मिलता है:

$$\int M(x)dx - \int \frac{dy}{N(y)} = C_1 \tag{3.9}$$

जहां C_1 समाकलन का अचर है। यदि हम समीकरण 3.9 के समाकलों को हल कर सकें तो यह समीकरण, समीकरण 3.6 का अभीष्ट व्यापक हल है। ध्यान दें कि फलन $f(x,y)$, समीकरण 3.7 द्वारा दिया जाता है। आइए, अब हम कुछ उदाहरणों द्वारा इस विधि को समझें।

$y(x)$ का अवकल होता है :

$$dy = \frac{dy}{dx}dx \qquad \text{(i)}$$

हम समीकरण (i) में $y' = f(x,y)$ रखते हैं और उसे इस तरह लिखते हैं :

$$dy = f(x,y)dx \qquad \text{(ii)}$$

अब अगर

$$f(x,y) = M(x)N(y)$$

तो हम (ii) को इस तरह लिख सकते हैं :

$$dy = M(x)N(y)dx$$

इस तरह हमें समीकरण 3.8 मिलता है :

$$\frac{dy}{N(y)} = M(x)dx$$

उदाहरण *3.1* : चर पृथक्करण विधि

प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण $(y+1)y' + x = 0$ को हल करें जबकि दिया है कि $x = 0$ पर $y = 2$।

हल ■ हम इस समीकरण को समीकरण 3.6 के रूप में इस तरह लिख सकते हैं :

$$y' = -\frac{x}{y+1} \equiv f(x,y) \tag{i}$$

समीकरण (i) के $f(x,y)$ की समीकरण 3.7 से तुलना करने पर हम पाते हैं कि $M(x) = -x$ और $N(y) = \frac{1}{y+1}$। समीकरण 3.9 से हल है :

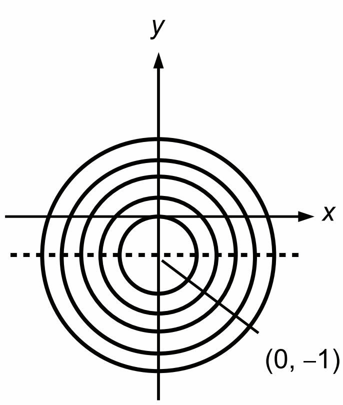
$$\int x\,dx + \int (y+1)dy = C \quad \text{या} \quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + y = C \tag{ii}$$

या
$$x^2 + y^2 + 2y = 2C \tag{iii}$$

क्या आप पहचान सके कि समीकरण (iii) किसका समीकरण है? स्कूल में पढ़ी हुई निर्देशांक ज्यामिति याद करें। आप जांच कर सकते हैं कि समीकरण (iii) संकेंद्री वृत्तों का निरूपण करता है जिनके केंद्र $(0, -1)$ पर हों और त्रिज्याएं $\sqrt{2C+1}$ हों (चित्र 3.3 देखें)। विशेष हल के लिए हम समीकरण (iii) में $x = 0$ पर $y = 2$ रखते हैं जिससे $C = 4$। इस तरह विशेष हल त्रिज्या 3 और केंद्र $(0, -1)$ वाले वृत्त का समीकरण है:

$$x^2 + y^2 + 2y = 8 \tag{iv}$$

उदाहरण 3.1 में हम $M(x) = x$, $N(y) = -\frac{1}{y+1}$ भी ले सकते हैं। आप जांच सकते हैं कि हल वही रहेगा।



चित्र 3.3: संकेंद्री वृत्त जिनके केंद्र (0, –1) **पर हैं।**

उदाहरण 3.2 : रेडियोएक्टिव क्षय / चरघातांकी क्षय

रेडियोएक्टिव क्षय को निरूपित करने वाले प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण $\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$ को हल करें।

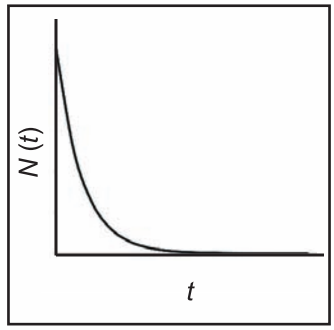
हल ■ इस समीकरण की समीकरण 3.7 से तुलना करने पर हम पाते हैं कि $M = -1$ और $N = N(t)$ । समीकरण 3.9 से हल है :

$$\int \frac{dN}{N} = -\lambda \int dt + c \quad \text{या} \quad \ln|N| = -\lambda t + \ln C \qquad \text{(i)}$$

चूंकि $N > 0$, अतः, $|N| = N$ और हल है : $N = C\exp(-\lambda t)$ (ii)

क्या आप समीकरण (ii) का अर्थ समझ सके? यह एक रेडियोएक्टिव नमूने में परमाणुओं के चरघातांकी क्षय को दर्शाता है (चित्र 3.4 देखें)। यदि $t = 0$ पर परमाणुओं का आदि मान N_0 है, तब (ii) से $C = N_0$ और विशेष हल है :

$$N = N_0 \exp(-\lambda t)$$



चित्र 3.4: चरघातांकी क्षय।

आइए, अब हम यांत्रिकी से एक उदाहरण लें – गुरुत्व के अधीन गिर रहे कण की गति का। इसे हम समीकरण 3.1क द्वारा निदर्शित कर सकते हैं। मान लें कि हमें मुक्त रूप से गिर रहे कण की गति पर वायु प्रतिरोध के प्रभाव को जानना है। ऐसे समीकरण पैराशूटधारी की गति के अध्ययन में इस्तेमाल होते हैं (चित्र 3.5)। प्रायः वायु प्रतिरोध को कण के वेग के समानुपाती लिया जाता है। न्यूटन के गति के दूसरे नियम से, कण का गति समीकरण है :

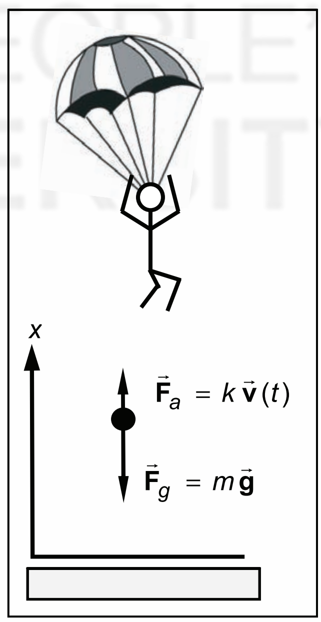
केवल गुरुत्व के अधीन गिर रहे कण को मुक्त रूप से गिर रहा कण कहते हैं।

$$m\vec{\mathbf{a}} = m\vec{\mathbf{g}} + k\,\vec{\mathbf{v}}(t)$$

यदि कण ऊर्ध्वाधरतः नीचे की ओर गिरता है तो इसका स्वरूप होता है (चित्र 3.5 देखें)

$$-ma = -m\frac{dv}{dt} = -mg + kv(t) \quad \text{या} \quad ma = m\frac{dv}{dt} = mg - kv(t)$$

आइए, हम चर पृथक्करण विधि से इस समीकरण को हल करें।



चित्र 3.5: गुरुत्व बल $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$ और वायु प्रतिरोध $\vec{\mathbf{F}}_a = k\,\vec{\mathbf{v}}(t)$ के अधीन गिर रहा कण।

उदाहरण 3.3 : गति पर वायु प्रतिरोध का प्रभाव

गुरुत्व और वायु प्रतिरोध के अधीन गिर रहे कण के लिए निम्नलिखित प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण का व्यापक हल प्राप्त करें :

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv(t) \qquad \text{(i)}$$

हल ■ हम इस समीकरण को समीकरण 3.6 के रूप में इस तरह लिख सकते हैं :

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v \qquad \text{(ii)}$$

समीकरण (iii) में हम

$y = g - \frac{k}{m}v$ रखते हैं

ताकि

$dy = -\frac{k}{m}dv$

तब समीकरण (iii) को इस तरह लिखा जा सकता है :

$\int \frac{dy}{y} = -\frac{k}{m}\int dt + C'$

इस समाकल का मान होता है :

$\ln|y| = -\frac{kt}{m} + \ln C_1$

इसका एन्टिलॉग लेने पर हम हल लिख सकते हैं

$|y| = C_1 \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)$

और $v = \frac{mg}{k} - \frac{m}{k}|y|$

समीकरण (ii) की समीकरण 3.7 से तुलना करने पर हम लिख सकते हैं $M(t) = 1$ और $N(v) = g - \frac{k}{m}v$ ।

समीकरण 3.9 से हल है :

$$\int \frac{dv}{\left(g - \frac{k}{m}v\right)} = \int dt + C_1 \qquad \text{(iii)}$$

समाकलन करने पर व्यापक हल होता है (हाशिए पर दी गई टिप्पणी पढ़ें) :

$$v(t) = \frac{mg}{k} - \frac{m}{k}C_1 \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) \qquad \text{(iv)}$$

ध्यान दें कि t के अधिक मानों पर समीकरण (iv) का दूसरा पद अत्यल्प हो जाता है और जब $t \to \infty$, तो यह शून्य की ओर प्रवृत्त होता है। तब v अचर हो जाता है और इसका मान होता है :

$$v = \frac{mg}{k} \qquad \text{(v)}$$

इस अचर वेग को **अंतिम वेग** कहते हैं। अतएव वेग के समानुपाती वायु प्रतिरोध का गुरुत्व के अधीन गिर रहे कण की गति पर यह प्रभाव होता है कि कण बृहत् समयांतराल के बाद अचर वेग प्राप्त कर लेता है।

क्या आपने उदाहरण 3.3 में ध्यान दिया कि समाकलों को आसानी से हल करने के लिए हमने समाकलन चर परिवर्तित किया है? यह प्रतिस्थापन विधि है जिसे हम अगले भाग में समझायेंगे। लेकिन उसे पढ़ने से पहले आप यह बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 3 – चर पृथक्करण विधि

क) प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण $yy' = -x$ का व्यापक हल प्राप्त करें।

ख) प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण $y' = -2xy$ का विशेष हल प्राप्त करें जबकि दिया है कि $y(0) = 3$ ।

प्रतिस्थापन विधि समझने से पहले आप चर पृथक्करण विधि को दोहरा लें।

दोहराएं

चर पृथक्करण विधि

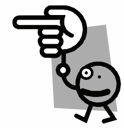
चरण 1 : प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण को इस रूप में लिखें :

$$y' = M(x)N(y)$$

तब $$\frac{dy}{N(y)} = M(x)dx$$

चरण 2 : समाकलन करके हल प्राप्त करें।

हमेशा हल की जांच करें। हल को साधारण अवकल समीकरण में रखें और **जांच करें** कि दोनों पक्ष बराबर हैं। कभी-कभी हल को अवकलित करने पर भी साधारण अवकल समीकरण मिलता है।



कभी न भूलें

3.3.2 प्रतिस्थापन विधि

कुछ साधारण अवकल समीकरणों को पहली बार देखने से ऐसा लगता है कि इनके चरों को अलग नहीं किया जा सकता। लेकिन किसी प्रतिस्थापन द्वारा हम उनके चरों का पृथक्करण कर सकते हैं। कुछ स्थितियों में हम महज समीकरण को देख कर पता लगा सकते हैं कि क्या प्रतिस्थापन करना है। आइए, एक उदाहरण द्वारा हम इस बात को समझें।

उदाहरण *3.4*: प्रतिस्थापन विधि

प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = (x+y)$ को हल करें।

हल ■ इस समीकरण में कारक $(x+y)$ के कारण ऐसा लगता है कि यह समीकरण पृथक्करणीय नहीं है। लेकिन ऐसा नहीं है। $u = x+y$ रखकर हमें मिलता है :

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \quad \text{या} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1 \qquad \text{(i)}$$

समीकरण (i) में $\frac{dy}{dx} = (x+y)$ रखने पर हमें मिलता है :

$$\frac{du}{dx} = 1 + u$$

यह समीकरण u और x में पृथक्करणीय है :

$$\frac{du}{u+1} = dx \qquad \text{(ii)}$$

समीकरण (ii) का समाकलन करने पर हमें मिलता है :

$$\ln|u+1| = x + c \qquad \text{(iii)}$$

या $\quad |u+1| = Ce^x \quad \Rightarrow \quad |y+x+1| - Ce^x = 0$

यही अभीष्ट व्यापक हल है। आप इसकी जांच कर सकते हैं।

हल की जांच करना

उदाहरण 3.4 के हल का अवकलन करने पर हमें मिलता है :

$$\frac{dy}{dx} + 1 = Ce^x$$

या $\quad \frac{dy}{dx} + 1 = y + x + 1$

या $\quad \frac{dy}{dx} = (x+y)$

जो कि दिया हुआ साधारण अवकल समीकरण ही है। अतः, हल सही है।

अब आगे पढ़ने से पहले आप उदाहरण 3.4 जैसा एक बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 4 – प्रतिस्थापन विधि

प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण $y' = (x+y)^2$ का हल प्राप्त करें।

अब हम $y' = f(y/x)$ के स्वरूप के समीकरणों को हल करने की विधि समझाएंगे जहां f, y/x का फलन है जैसेकि $(y/x)^3$, $\sin(y/x)$ आदि। ऐसे प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों को हम $y = vx$ रख कर हल कर सकते हैं। यह विधि एक विशेष प्रकार के प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों के लिए उपयुक्त है। इन्हें हम **प्रथम कोटि समघात (homogeneous) साधारण अवकल समीकरणें** कहते हैं। अब हम प्रथम कोटि **समघात** साधारण अवकल समीकरणों की परिभाषा देंगे और उन्हें हल करने की विधि समझाएंगे।

3.3.3 प्रथम कोटि समघात साधारण अवकल समीकरणें

ध्यान दें

ध्यान दें कि **द्वितीय कोटि समघात साधारण अवकल समीकरणों** की परिभाषा इससे अलग होती है। आप इकाई 4 में यह परिभाषा सीखेंगे।

आइए, पहले हम पूछें : प्रथम कोटि **समघात** साधारण अवकल समीकरण क्या होता है? प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (3.10)$$

के रूप के समीकरण को **समघात** कहा जाता है, यदि M और N **समान घात** वाले **समघात फलन** हों। अब आप पूछेंगे कि **समघात फलन** क्या होता है।

फलन $f(x, y)$ को x और y में घात n वाला **समघात फलन** कहा जाता है, यदि प्रत्येक k के लिए

$$f(kx,ky) = k^n f(x,y)$$

हो, जहां k एक वास्तविक प्राचल (real parameter) है। उदाहरण के लिए, $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ घात 2 वाला एक समघात फलन है, क्योंकि

$$f(kx,ky) = (kx)^2 + kxky + (ky)^2 = k^2(x^2 + xy + y^2) = k^2 f(x,y)$$

समघात फलनों के अन्य उदाहरण हाशिए पर दिए गए हैं। आप फलन $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2$ के बारे में क्या कह सकते हैं? क्या यह समघात फलन है? आइए, जांच करें :

$$f(kx,ky) = (kx)^2 + (ky)^2 + 2$$

यानी इसे हम k की किसी घात और फलन के गुणनफल के रूप में व्यक्त नहीं कर सकते। अतः, $f(x,y)$ **समघात नहीं है**।

फलन $f(x,y) = \sqrt{x-y}$ घात $\frac{1}{2}$ वाला एक समघात फलन है क्योंकि

$$f(kx,ky) = \sqrt{kx-ky} = \sqrt{k}\sqrt{x-y} = k^{1/2} f(x,y)$$

फलन $f(x,y) = y + \sqrt{x^2 - y^2}$ घात 1 वाला एक समघात फलन है क्योंकि

$$f(kx,ky) = ky + \sqrt{(kx)^2 - (ky)^2} = ky + k\sqrt{x^2 - y^2} = k f(x,y)$$

प्रथम कोटि समघात साधारण अवकल समीकरणों को हल करना सीखने से पहले आपको उन्हें पहचानना आना चाहिए। इसके लिए एक बोध प्रश्न करें।

बोध प्रश्न 5 – प्रथम कोटि समघात साधारण अवकल समीकरणें

निम्नलिखित समीकरणों में से समघात प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों को पहचानें :

i) $(x+y)dx + (x-y)dy = 0$, ii) $(x^2+1)dx + xy\,dy = 0$

iii) $(x+y)dx + (x^2+y)dy = 0$, iv) $(x^2+y^2)dx - xy\,dy = 0$

एक प्रथम कोटि समघात अवकल समीकरण को पहचानने का एक और तरीका भी है। हम यह जांच कर सकते हैं कि उसे ऐसे रूप में लिखा जा सकता है कि नहीं कि जिसमें y', $\frac{y}{x}$ का फलन हो :

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.11}$$

उदाहरण के लिए, हम प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण

$(2x - y)y' = (x - 3y)$ को इस रूप में लिख सकते हैं : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - 3\left(\frac{y}{x}\right)}{2 - \left(\frac{y}{x}\right)}$

अतः, यह समघात है। आप जांच सकते हैं कि प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण $xy\,y' + 4x^2 + 3y^2 = 0$ को इस तरह लिखा जा सकता है :

$$\left(\frac{y}{x}\right)y' + 4 + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0 \qquad \text{या} \qquad y' = -\frac{4 + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(\frac{y}{x}\right)}$$

अब तक आपको प्रथम कोटि समघात साधारण अवकल समीकरणों को पहचानना आ गया है। अब आप इन्हें हल करना सीखना चाहेंगे। इसके लिए, आइए, हम दोबारा समीकरणें 3.10 और 3.11 देखें। ध्यान दें कि समीकरण 3.10 में $M(x,y)$ और $N(x,y)$ समान घात, मान लें कि घात n, वाले समघात फलन हैं। आप जांच सकते हैं कि $\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$ शून्य घात वाला समघात फलन है (हाशिए पर दी गई टिप्पणी पढ़ें)। समीकरण 3.10 से हम लिख सकते हैं कि $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$

इस तरह हम कह सकते हैं कि $\dfrac{dy}{dx}$ शून्य घात का समघात फलन है। समीकरण 3.10 और समीकरण 3.11 के रूप के समीकरण प्रथम कोटि समघात साधारण अवकल समीकरण हैं और उन्हें हम $y = vx$ रख कर हल कर सकते हैं। अब हम इस विधि का एक उदाहरण देंगे।

चूंकि $M(x,y)$ और $N(x,y)$ समघात हैं, हम लिख सकते हैं :

$$\frac{M(kx,ky)}{N(kx,ky)} = \frac{k^n M(x,y)}{k^n N(x,y)} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

उदाहरण 3.5 : प्रथम कोटि समघात साधारण अवकल समीकरण

प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$ को हल करें।

हल ■ बोध प्रश्न 5 हल करते समय आपने देख लिया है कि यह प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण समघात है। आइए, हम समीकरण को इस तरह लिखें :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \tag{i}$$

अगर हम समीकरण (i) में $y = vx$ रखें तो हम उसे इस तरह लिख सकते हैं :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v} + v \tag{ii}$$

अब $y = vx$ को x के सापेक्ष अवकलित करने पर हमें मिलता है :

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \text{(iii)}$$

समीकरण (ii) से $\frac{dy}{dx}$ को समीकरण (iii) में रखने पर हमें मिलता है :

$$\frac{1}{v} + v = v + x\frac{dv}{dx} \quad \text{या} \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} \qquad \text{(iv)}$$

ध्यान दें कि समीकरण (iv) में चर v और x पृथक्कृत हैं। अब आप इसे हल कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 6 – प्रथम कोटि समघात साधारण अवकल समीकरणें

क) उदाहरण 3.5 का समीकरण (iv) हल करें।

ख) प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण $(x + y)dx - xdy = 0$ को हल करें।

अगली विधि समझने से पहले आप प्रतिस्थापन विधि और प्रथम कोटि समघात साधारण अवकल समीकरण को हल करने की विधि को दोहराएं।

दोहराएं

प्रतिस्थापन विधि

केवल देख कर प्रतिस्थापन करना

चरण 1 : प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण में देखें कि क्या किसी समुचित प्रतिस्थापन से समीकरण 3.8 जैसी पृथक्कृत समीकरण मिलती है। तब उपयुक्त प्रतिस्थापन करें।

चरण 2 : पृथक्कृत समीकरणों के दोनों पक्षों का समाकलन करें और हल ज्ञात करें।

प्रथम कोटि समघात साधारण अवकल समीकरण को हल करने की विधि

चरण 1 : समीकरण को इस रूप में लिखें : $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

चरण 2 : निर्धारित करें कि $M(x,y)$ और $N(x,y)$ समान घात के समघात फलन हैं या नहीं या जांच करें कि इसे समीकरण 3.11 के रूप में लिखा जा सकता है कि नहीं।

चरण 3 : यदि हां, तो प्रतिस्थापन $y = vx$ करके चरों को पृथक करें और हल प्राप्त करें।

अभी तक आपने चर पृथक्करण विधि और प्रतिस्थापन विधि से प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों को हल करना सीखा है। आपने यह भी सीखा है कि प्रथम कोटि समघात अवकल समीकरणों में $y = vx$ प्रतिस्थापित करके इन्हें हल किया जा सकता है। कुछ स्थितियों में प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों को पृथक्कृत नहीं किया जा सकता। ऐसे समीकरणों को हल करने के लिए हम अन्य विधियों का प्रयोग करते

हैं। अगले भाग में हम **यथातथ** समीकरण की परिभाषा देंगे। फिर हम भाग 3.5 में इसका उपयोग करके प्रथम कोटि असमघात साधारण अवकल समीकरणों को हल करना समझाएंगे जिनके भौतिकी में बहुत से अनुप्रयोग होते हैं।

3.4 प्रथम कोटि यथातथ साधारण अवकल समीकरणें

समीकरण 3.10 यानी $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ के रूप के साधारण अवकल समीकरणों को कभी-कभी इस तरह भी लिखा जा सकता है :

$$df(x,y) = 0 \quad (3.12\text{क})$$

तब इसका हल होता है :

$$f(x,y) = C, \text{ अचर} \quad (3.12\text{ख})$$

वे प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण जिन्हें समीकरण 3.12क के रूप में लिखा जा सकता है, **यथातथ समीकरण** कहलाते हैं। अब हम समझाएंगे कि यथातथ समीकरणों को कैसे पहचाना और हल किया जा सकता है। आइए, समीकरण 3.10 को फिर से लें : $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

हमें $M(x,y)$ और $N(x,y)$ पर वे प्रतिबंध प्राप्त करने हैं जिनसे हम समीकरण 3.10 को समीकरण 3.12क के रूप में लिख सकें। इसके लिए हम आंशिक अवकलन के एक परिणाम का प्रयोग करेंगे। मान लें कि एक फलन दो या अधिक चरों पर निर्भर करता है। तब हम फलन में अत्यणु परिवर्तन को उसके संपूर्ण अवकल के पदों में व्यक्त करते हैं। फलन के संपूर्ण अवकल में, स्वतंत्र चरों के सापेक्ष उसके आंशिक अवकलज होते हैं। दो चरों के फलन के आंशिक अवकलजों की गणना समझने के लिए आप पहले हाशिये पर दी गई टिप्पणी और इस इकाई का परिशिष्ट पढ़ें।

किसी फलन $f(x,y)$ का संपूर्ण अवकल df होता है :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy \quad (3.12\text{ग})$$

समीकरण 3.12ग से हम समीकरण 3.12क को ऐसे लिख सकते हैं :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy = 0 \quad (3.12\text{घ})$$

अब हम समीकरणों 3.10 और 3.12घ की तुलना करते हैं। मान लें कि एक ऐसे फलन $f(x,y)$ का अस्तित्व है जिसके लिए

$$M(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) \quad \text{और} \quad N(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) \quad (3.12\text{च})$$

जहां M और N संतत फलन हैं और इनके संतत आंशिक अवकलज हैं।

ध्यान दें

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$, x के सापेक्ष $f(x,y)$ का आंशिक अवकलज है। इसकी गणना के लिए y को **अचर** रख कर फलन $f(x,y)$ को x के सापेक्ष अवकलित करना होता है। इसी तरह, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x$, y के सापेक्ष $f(x,y)$ का आंशिक अवकलज है। इसकी गणना के लिए x को **अचर** रख कर फलन $f(x,y)$ को y के सापेक्ष अवकलित करना होता है। आंशिक अवकलजों की गणना सीखने के लिए और भाग 3.4 को आगे पढ़ने से पहले आप इस इकाई का **परिशिष्ट** पढ़ें।

तब हम समीकरण 3.10 को समीकरण 3.12च के रूप में लिख सकते हैं। इसका व्यापक हल समीकरण 3.12ख द्वारा दिया जाता है। इससे हमें प्रथम कोटि **यथातथ** साधारण अवकल समीकरण की परिभाषा मिलती है।

प्रथम कोटि यथातथ साधारण अवकल समीकरण की परिभाषा

समीकरण $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ **प्रथम कोटि यथातथ साधारण अवकल समीकरण** कहलाता है यदि दो चरों x और y के ऐसे फलन f का अस्तित्व होता है जिसके संतत आंशिक अवकलज होते हैं :

$$M(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) \quad \text{और} \quad N(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) \qquad (3.13\text{क})$$

जिससे कि $$df(x,y) = 0$$

समीकरण का व्यापक हल होता है :

$$f(x,y) = C \qquad (3.13\text{ख})$$

अब आप पूछ सकते हैं: **हम यह कैसे जांच सकते हैं कि समीकरण 3.10 के रूप का कोई समीकरण यथातथ है कि नहीं?** इसके लिए हम कलन के निम्न परिणाम का प्रयोग करते हैं :

यदि $f(x,y)$ संतत है और इसके प्रथम कोटि अवकलज भी संतत हैं, तो

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad (3.14\text{क})$$

अब हम y के सापेक्ष M का और x के सापेक्ष N का आंशिक अवकलज लेते हैं। फिर समीकरण 3.14क के परिणाम का प्रयोग करके हम लिख सकते हैं (हाशिए पर दी गई टिप्पणी पढ़ें) :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (3.14\text{ख})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

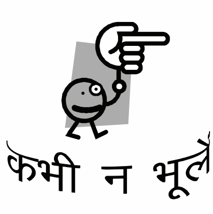
अब

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

इस तरह, हमें समीकरण 3.14ख मिलता है।

इस तरह समीकरण के यथातथ होने का परीक्षण हम नीचे दिए हुए तरीके से कर सकते हैं:



समीकरण के यथातथ होने का परीक्षण

$M dx + N dy = 0$ के रूप का प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण **यथातथ** होता है यदि और केवल यदि

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (3.15)$$

बशर्ते M और N संतत हों और उनके आंशिक अवकलज संतत हों।

यदि समीकरण 3.15 सही हो, तब समीकरण 3.10 को ऐसे लिखा जा सकता है :

$df(x,y) = 0$

और इसका हल होता है $f(x,y) = C$ [समीकरण 3.12ख या 3.13ख]

अब आप जानना चाहेंगे : **प्रथम कोटि यथातथ समीकरण को हल कैसे किया जाता है**? आइए, एक उदाहरण की मदद से समझें।

उदाहरण *3.6* : प्रथम कोटि यथातथ साधारण अवकल समीकरण

प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण $xy' + ax + y = 0$ को हल करें जहां a अचर है।

हल ■ इस समीकरण को हम समीकरण 3.10 के रूप में ऐसे लिख सकते हैं

$$(ax + y)dx + xdy = 0 \qquad \text{(i)}$$

जहां $M(x) = ax + y$ और $N(y) = x$ ।

आप यह देख सकते हैं कि

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad \text{और} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

अतः, समीकरण 3.15 संतुष्ट होता है और दिया गया समीकरण यथातथ है। अब हम y को अचर मानकर समीकरण 3.13क के पहले समीकरण का x के सापेक्ष समाकलन करते हैं। तब हमें मिलता है :

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + z(y) = \int (ax + y)dx + z(y) \qquad \text{(ii)}$$

या $$f(x,y) = \frac{ax^2}{2} + yx + z(y) \qquad \text{(iii)}$$

अब हमें (iii) में $z(y)$ ज्ञात करना है। इसके लिए हम x को अचर मान कर (iii) को y के सापेक्ष अवकलित करते हैं। फिर हम समीकरण 3.13क के दूसरे समीकरण का प्रयोग करके परिणाम को (i) के $N(y)$ के बराबर रखते हैं। इस तरह, हमें मिलता है :

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = x + \frac{\partial z}{\partial y} = x \quad \text{या} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow z(y) = C$$

जहां C अचर है। अतः, समीकरण (iii) का प्रयोग करके हम दी हुई प्रथम कोटि यथातथ साधारण अवकल समीकरण का व्यापक हल लिख सकते हैं :

$$f(x,y) = \frac{ax^2}{2} + yx + C$$

आइए, अब हम प्रथम कोटि यथातथ साधारण अवकल समीकरण को हल करने की विधि दोहराएं।

दोहराएं

यथातथ साधारण अवकल समीकरण को हल करने की विधि

चरण 1 : दिए गए समीकरण को समीकरण 3.10 के रूप में ऐसे लिखें :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

जांच कर लें कि समीकरण 3.15 संतुष्ट होता है : $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

चरण 2 : $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$ का प्रयोग करके, y को अचर रखते हुए
$f(x,y) = \int M(x,y)dx + z(y)$ का मान निकालें।

चरण 3 : फिर $z(y)$ का मान निकालने के लिए $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$ का मान निकालें। इसके लिए चरण 2 में प्राप्त $f(x,y)$ को x को अचर रखते हुए y के सापेक्ष अवकलित करें।

चरण 4 : व्यापक हल है : $f(x,y) = C$

विकल्प के तौर पर यदि $N(x,y)$ से हल करना आसान है तो निम्नलिखित चरणों के अनुसार सवाल हल करें।

चरण 5 : $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$ का प्रयोग करके, x को अचर रखते हुए
$f(x,y) = \int N(x,y)dy + g(x)$ का मान निकालें।

चरण 6 : फिर $g(x)$ का मान निकालने के लिए $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$ का मान निकालें। इसके लिए चरण 5 में प्राप्त $f(x,y)$ को y को अचर रखते हुए x के सापेक्ष अवकलित करें।

चरण 7 : व्यापक हल है : $f(x,y) = C$

ध्यान दें

M या N, से जिस भी फलन का समाकलन करना आसान है उसके मुताबिक चरण 1 से 4 या चरण 5 से 7 प्रयोग करें।

अब आप एक बोध प्रश्न हल करके इस विधि का अभ्यास करें।

बोध प्रश्न 7 – प्रथम कोटि यथातथ साधारण अवकल समीकरण

सिद्ध करें कि साधारण अवकल समीकरण $(3x^2y - 6x)dx + (x^3 + 2y)dy = 0$ यथातथ है और इसे हल करें।

अभी तक हमने प्रथम कोटि समघात और यथातथ साधारण अवकल समीकरणों को हल करना समझाया है। लेकिन भौतिकी में ऐसी बहुत ही स्थितियां होती हैं जिन्हें असमघात अवकल समीकरणों द्वारा निदर्शित किया जाता है। LR परिपथ में, जिसमें AC या DC वोल्टता स्रोत लगा है, विद्युत् धारा का बढ़ना या घटना इसका सबसे आम उदाहरण है। अतः, अब हम प्रथम कोटि रैखिक और अरैखिक असमघात साधारण अवकल समीकरणों को हल करना सिखाएंगे।

3.5 प्रथम कोटि असमघात साधारण अवकल समीकरणें

x में किसी अतंराल पर परिभाषित, निम्न रूप के साधारण अवकल समीकरण

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \tag{3.16}$$

को **प्रथम कोटि असमघात साधारण अवकल समीकरण** कहते हैं। यह रैखिक होता है अगर यह भाग 3.2.1 में दिए गए रैखिकता के प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है। अन्यथा यह अरैखिक होता है। **ध्यान दें** कि समीकरण 3.16 में $a_1(x) \neq 0$ है। आप देख सकते हैं कि समीकरण 3.16 प्रथम कोटि का है क्योंकि इसमें x के सापेक्ष y का केवल प्रथम अवकलज है। यह रैखिक होगा अगर $f(x)$ अबीजीय फलन नहीं हो। यह **असमघात** है क्योंकि इसमें केवल x का फलन है और वह शून्य नहीं है : $f(x) \neq 0$ । समीकरण 3.16 के दोनों पक्षों को $a_1(x)$ से भाग देने पर हम लिख सकते हैं :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \qquad \text{(3.17क)}$$

जहां $p(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}$ और $q(x) = \dfrac{f(x)}{a_1(x)}$ (3.17ख)

यह **प्रथम कोटि <u>रैखिक</u> असमघात साधारण अवकल समीकरण** का **मानक रूप** (standard form) है बशर्ते $q(x)$ अबीजीय फलन नहीं हो। यह $q(x)$ के स्वरूप के अनुसार अरैखिक भी हो सकता है। समीकरण 3.17क के रूप की समीकरणें **यथातथ** हो भी सकती हैं और नहीं भी। यदि ये यथातथ नहीं हों तो हम इन्हें **यथातथ** बना सकते हैं। इसके लिए हमें एक **समाकलन गुणक** (integrating factor) $v(x)$, जो कि **केवल** x पर निर्भर करता है, निकालना होता है। आइए, हम समीकरण 3.17क को इस रूप में लिखें :

$$[p(x)y - q(x)]dx + dy = 0$$

यदि फलन $v(x)$ का अस्तित्व हो, तो समीकरण

$$v(x)[py - q]dx + v(x)dy = 0 \tag{3.18}$$

को यथातथ होना चाहिए। समीकरण 3.18 यथातथ हो, इसके लिए इसे समीकरण 3.13क को संतुष्ट करना चाहिए।

$$\therefore \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}[v(py - q)] \qquad \text{(3.19क)}$$

या
$$\frac{dv}{dx} = vp \qquad \text{(3.19ख)}$$

चर पृथक्करण विधि से हमें मिलता है :

$$\frac{dv}{v} = p\,dx \qquad \text{(3.20क)}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हमें मिलता है :

$$\ln|v| = \int p(x)dx \qquad \text{(3.20ख)}$$

इस तरह, समाकलन गुणक $v(x)$ का मान है :

$$v(x) = \exp[h(x)] \qquad \text{जहां} \qquad h(x) = \int p(x)dx \qquad (3.21)$$

अब हम समीकरण 3.17क की, समीकरण 3.21 द्वारा दिए गए $v(x)$ से गुणा करते हैं जिससे हमें मिलता है :

$$e^h(y' + py) = e^h q \qquad (3.22\text{क})$$

चूंकि समीकरण 3.21 से $h' = p$, हम समीकरण 3.22क को इस रूप में लिख सकते हैं :

$$\frac{d}{dx}(ye^h) = e^h q \qquad (3.22\text{ख})$$

आप आगे पढ़ने से पहले (ye^h) को x के सापेक्ष अवकलित करके समीकरण 3.22ख को सत्यापित करना चाहेंगे। अब समीकरण 3.22ख के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हमें मिलता है :

$$ye^h = \int e^h q\, dx + C, \quad \text{जहां} \quad h = \int p(x)dx \qquad (3.22\text{ग})$$

समीकरण 3.22ग के दोनों पक्षों को e^h से भाग देने पर हमें समीकरण 3.17क के रूप के **प्रथम कोटि <u>रैखिक</u> असमघात साधारण अवकल समीकरण का व्यापक हल** मिलता है :

$$y = e^{-h}\left(\int e^h q\, dx + C\right), \quad \text{जहां} \quad h = \int p(x)dx \qquad (3.22\text{घ})$$

आइए, हम इस विधि को एक सरल उदाहरण पर लागू करें।

उदाहरण *3.7* : रैखिक असमघात साधारण अवकल समीकरण

प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण $\dfrac{dy}{dx} + axy = bx$ को हल करें।

हल ■ ध्यान दें कि यह समीकरण 3.17क के रूप का प्रथम कोटि रैखिक असमघात साधारण अवकल समीकरण है। समीकरण 3.21 से समाकलन गुणक है :

$$v(x) = \exp\left[\int ax dx\right] = e^{ax^2/2} \qquad \text{(i)}$$

समीकरण 3.22घ से प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण का व्यापक हल है :

$$y(x) = e^{-ax^2/2}\left[b\int xe^{ax^2/2}dx + C_1\right] \qquad \text{(ii)}$$

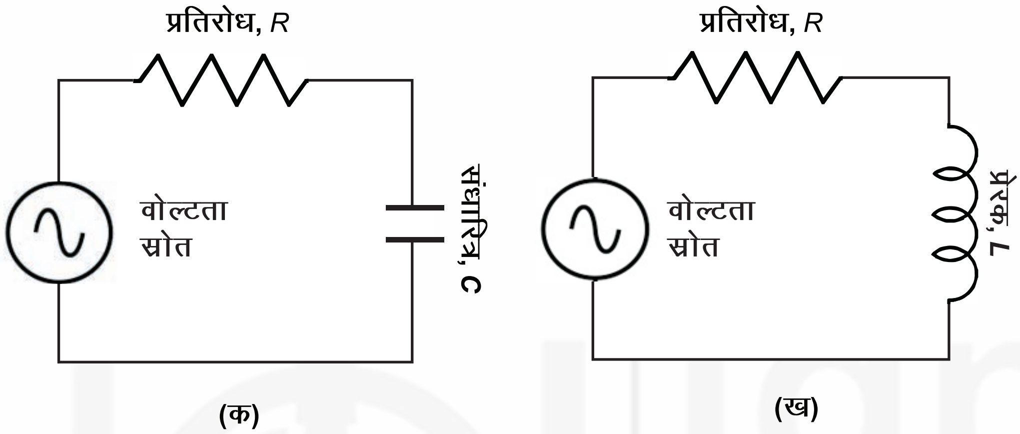
जहां C_1 एक स्वेच्छ अचर है। समीकरण (ii) के दायें पक्ष के समाकल को हल करने के लिए हम $t = \dfrac{ax^2}{2}$ रखते हैं। तब $dt = ax\,dx$ और हम (ii) में समाकल $\int xe^{ax^2/2}dx$ को ऐसे लिख सकते हैं : $\dfrac{1}{a}\int e^t\, dt = \dfrac{e^t}{a} + C_2$ । अतः, हमें व्यापक हल मिलता है :

$$y(x) = \frac{b}{a} + Ce^{-ax^2/2}, \quad \text{जहां } C \text{ अचर है।}$$

आइए, इस विधि को हम भौतिकी के एक उदाहरण पर लागू करें। आपने स्कूल की भौतिकी में श्रेणी *RC* परिपथों के बारे में पढ़ा होगा। याद करें कि एक श्रेणी *RC* परिपथ में *AC* वोल्टता स्रोत या बैटरी से एक प्रतिरोध और संधारित्र को श्रेणी में जोड़ा जाता है (चित्र 3.6क)। *RC* परिपथ के लिए आवेश में समय के साथ परिवर्तन का समीकरण होता है :

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t) \qquad (3.23\text{क})$$

जहां $E(t)$, *AC* वोल्टता स्रोत है। आम तौर पर, परिपथ में बैटरी या ज्यावक्रीय वोल्टता स्रोत लगाया जाता है। एक श्रेणी *LR* परिपथ में एक प्रेरक और प्रतिरोध को श्रेणीक्रम में एक *AC* वोल्टता स्रोत या बैटरी से जोड़ा जाता है (चित्र 3.6ख)।



चित्र 3.6: *AC* परिपथ जिनमें क) एक संधारित्र और प्रतिरोध; ख) एक प्रेरक और प्रतिरोध श्रेणी क्रम में वोल्टता स्रोत से जोड़े गए हैं। इन्हें क्रमशः श्रेणी *RC* और श्रेणी *LR* परिपथ कहते हैं।

श्रेणी *LR* परिपथ में बहने वाली धारा में समय के साथ परिवर्तन का भी ऐसा ही समीकरण मिलता है :

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t) \qquad (3.23\text{ख})$$

अब हम श्रेणी *LR* परिपथ के लिए समीकरण 3.23ख को हल करेंगे।

उदाहरण *3.8* : अरैखिक असमघात साधारण अवकल समीकरण

वोल्टता स्रोत $E\sin\omega t$ वाले एक श्रेणी *LR* परिपथ में बह रही धारा *i* का समीकरण है

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E\sin\omega t \text{ जहां } R, L \text{ और } E \text{ अचर हैं।}$$

इस साधारण अवकल समीकरण को हल करें।

हल ■ हम इस समीकरण को समीकरण 3.17क के रूप में लिखते हैं और फिर समाकलन गुणक का प्रयोग करके प्रथम कोटि असमघात साधारण अवकल समीकरण को हल करने की विधि लागू करते हैं।

खंडशः समाकलन से

$$J = \int e^{Rt/L} \sin \omega t \, dt$$

$$= e^{Rt/L}\left(-\frac{\cos \omega t}{\omega}\right)$$

$$+ \frac{R}{L\omega} \int e^{Rt/L} \cos \omega t \, dt$$

$$= -e^{Rt/L} \frac{\cos \omega t}{\omega}$$

$$+ \frac{R}{L\omega}\left[e^{Rt/L}\left(\frac{\sin \omega t}{\omega}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{R}{L\omega} \int e^{Rt/L} \sin \omega t \, dt\right]$$

या $J = -e^{Rt/L} \frac{\cos \omega t}{\omega}$

$$+ \frac{R}{L\omega} e^{Rt/L}\left(\frac{\sin \omega t}{\omega}\right)$$

$$-\left(\frac{R}{L\omega}\right)^2 J$$

सरल करने पर :

$$J = \frac{L e^{Rt/L}}{(R^2 + \omega^2 L^2)}[R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t]$$

मान लें कि

$$\cos \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

और $\sin \theta = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$

$$J = \frac{L e^{Rt/L} \sin(\omega t - \theta)}{(R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}}$$

जहां $\theta = \tan^{-1}(\omega L / R)$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L} \sin \omega t \qquad \text{(i)}$$

ध्यान दें कि यहां $p = \frac{R}{L}$ अचर है।

अतः, समीकरण 3.21 से समाकलन गुणक है :

$$v(t) = \exp\left[\int \frac{R}{L} dt\right] = e^{Rt/L}$$

समीकरण 3.22घ का उपयोग करके हम व्यापक हल लिख सकते हैं :

$$i(t) = \frac{E}{L} e^{-Rt/L}\left[\int e^{Rt/L} \sin \omega t \, dt + C\right] \qquad \text{(ii)}$$

जहां C स्वेच्छ अचर है। समीकरण (ii) का खंडशः समाकलन करने पर हमें मिलता है (समाकल के हल के लिए हाशिए पर दी गई टिप्पणी पढ़ें):

$$i = \frac{E \sin(\omega t - \theta)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

अब आप प्रथम कोटि असमघात साधारण अवकल समीकरण हल करें।

बोध प्रश्न 8 – प्रथम कोटि असमघात साधारण अवकल समीकरण

$xy' + 2y = x^3$ को हल करें।

आइए, अब हम समाकलन गुणक का प्रयोग करके प्रथम कोटि असमघात साधारण अवकल समीकरण को हल करने की विधि दोहराएं।

दोहराएं

प्रथम कोटि असमघात साधारण अवकल समीकरणों को हल करना

चरण 1 : समीकरण को मानक रूप $y' + p(x)y = q(x)$ में लिखें।

(**ध्यान दें** : y' का गुणांक 1 होना चाहिए।)

चरण 2 : $p(x)$ मालूम करें और $v(x) = \exp[\int p(x) dx]$ का परिकलन करें।

चरण 3 : समीकरण के मानक रूप को $v(x)$ से गुणा करें।

चरण 4 : परिवर्तित समीकरण के दोनों पक्षों का समाकलन करें और y के लिए हल करें।

इस इकाई में आपने जो कुछ पढ़ा है, अब हम उसका सारांश दे रहे हैं।

3.6 सारांश

अवधारणा	विवरण
साधारण अवकल समीकरण	■ उन समीकरणों को जिनमें **एक** स्वतंत्र चर के सापेक्ष एक या अधिक आश्रित चरों के साधारण अवकलज या अवकल होते हैं, **साधारण अवकल समीकरण** कहा जाता है।
प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों का वर्गीकरण	■ एक साधारण अवकल समीकरण को जिसके **उच्चतम अवकलज की कोटि** 1 होती है, **प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण** कहा जाता है। प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण का वर्गीकरण उसकी घात के आधार पर और इस आधार पर कि वह **रैखिक** है या **अरैखिक**, **समघात** है या **असमघात**, भी किया जाता है।
साधारण अवकल समीकरणों के व्यापक हल और विशेष हल	■ फलन $y = \phi(x)$ किसी अंतराल पर साधारण अवकल समीकरण का **हल** तब होता है, जब $\phi(x)$ उस अंतराल में परिभाषित और अवकलनीय हो और यह फलन ऐसा हो कि y के स्थान पर साधारण अवकल समीकरण में $\phi(x)$ प्रतिस्थापित करने पर वह एक सर्वसमिका हो जाती हो। उस हल को जिसमें स्वेच्छ अचर होते हैं, **व्यापक हल** कहा जाता है। यदि कुछ प्रतिबंधों के अधीन व्यापक हल के स्वेच्छ अचरों को निश्चित मान दिए जा सकते हों, तो यह **विशेष हल** हो जाता है। प्रतिबंधों को लागू करने की विधि के अनुसार हमें **आदि-मान समस्या** या **परिसीमा-मान समस्या** प्राप्त होती है।
प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों को हल करने की विधियां	■ **प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों** को हल करने की विधि समीकरण के वर्गीकरण पर निर्भर करती है। इस इकाई में आपने ये चार विधियां सीखी हैं : ➢ **पृथक्करणीय समीकरणें** : प्रथम कोटि अवकल समीकरण **पृथक्करणीय** होता है, यदि इसे $\frac{dy}{N(y)} = M(x)dx$ के रूप में लिखा जा सकता हो। समीकरण के दोनों पक्षों का समाकलन करके हल निकाला जाता है। साधारण अवकल समीकरण को **उचित प्रतिस्थापन** या **चर परिवर्तन** करके **पृथक्कृत** किया जा सकता है। ➢ **समघात समीकरणें** : अवकल समीकरण $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ को प्रथम कोटि का **समघात** अवकल समीकरण कहा जाता है, यदि $M(x,y)$ और $N(x,y)$ समान घात वाले **समघात फलन** हों या उसे $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ के रूप में लिखा जा सकता हो यानी y का अवकलज $\left(\frac{y}{x}\right)$ का फलन हो। तब $y = vx$ का प्रतिस्थापन करके इसे पृथक्करणीय बनाया जा सकता है। ➢ **यथातथ समीकरणें** : साधारण अवकल समीकरण $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ प्रथम कोटि का **यथातथ** अवकल समीकरण होता है, यदि $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ एक यथातथ अवकल $[df(x,y)]$ हो। जब M और N संतत होते हैं और उनके संतत आंशिक अवकलज होते हैं, तो $M\,dx + N\,dy = 0$ के यथातथ होने के लिए एक **आवश्यक** और **पर्याप्त प्रतिबंध**

होता है : $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ । तब ऐसे फलन f का अस्तित्व होता है जिसके लिए $M(x,y) = \partial f/\partial x$ और $N(x,y) = \partial f/\partial y$ । इन व्यंजकों में से किसी भी व्यंजक का समाकलन करके यथातथ साधारण अवकल समीकरण को हल करने की प्रक्रिया शुरू होती है।

- **असमघात समीकरणें** : यदि प्रथम कोटि रैखिक साधारण अवकल समीकरण को

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)$$

के रूप में लिखा जा सकता हो, जहां $\frac{dy}{dx}$ का गुणांक 1 हो तो इसे **समाकलन गुणक**

$$\exp\left[\int p(x)\,dx\right]$$

से गुणा करके यथातथ समीकरण बनाया जा सकता है। समीकरण

$$\frac{d}{dx}\left[\{\exp(\int p(x)dx\}y\right] = \{\exp(\int p(x)dx\}q(x)$$

के दोनों पक्षों का समाकलन करके हम इसे हल कर सकते हैं। अतः, व्यापक हल होता है :

$$y = e^{-h}\int e^{h} q(x)\,dx + C, \text{ जहां } h = \int p(x)\,dx$$

3.7 अंत में कुछ प्रश्न

1. निम्नलिखित प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों के व्यापक हल ज्ञात करें :

   क) $\frac{dN(t)}{dt} = Ct$, जहां C अचर है

   ख) $\frac{df(t)}{dt} = C\sqrt{f(t)}$, जहां C अचर है और $f(0) = C_0$

   ग) $\frac{dw}{dx} + 2w = 0$

   घ) $yw\frac{dw}{dy} + w^2 = 0$

   च) $(x+1)\,y + y' = 0$

2. समीकरण 3.2ग को हल करें और उस कण का पलायन वेग ज्ञात करें जिसकी $r = R$ पर आरंभिक चाल $v = v_0$ हो जहां R पृथ्वी की त्रिज्या है।

3. निम्नलिखित प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों का व्यापक हल प्राप्त करें :

   क) $(1 + \cos\theta)\,dr = r\sin\theta\,d\theta$

   ख) $(x - 2y - 1) = (x - 2y + 7)\,y'$

ग) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x-y)}{(x+y)}$

घ) $xy' + 2y = x^5$

च) $y' - 2y = 8e^x$

4. निम्नलिखित प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों को हल करें :

क) $(e^x + y - 1)dx + (3e^y + x - 7)dy = 0$

ख) $x\,dy - (y - \sqrt{x^2 + y^2})dx = 0$ जब $x = 3$ के लिए $y = 4$

5. क) एकविम सरल आवर्ती दोलक के गति के समीकरण को निम्नलिखित प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण में समानीत किया जा सकता है :

$$v\frac{dv}{dx} + \omega^2 x = 0,$$

जहां v उसका रैखिक वेग है, x, माध्य स्थिति से उसकी दूरी है और ω, उसकी कोणीय आवृत्ति है। इस प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण को हल करें और समीकरण $v = \dfrac{dx}{dt}$ का प्रयोग करके x और t का संबंध प्राप्त करें जबकि दिया है कि $x = a$ पर $v = 0$ ।

ख) श्रेणी RC परिपथ में अचर E के लिए समीकरण 3.23क को हल करें जबकि दिया है कि परिपथ में आरंभिक आवेश q_0 है। जब $E = 0$ हो तब क्या होगा?

3.8 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. समीकरण 3.1क प्रथम कोटि, प्रथम घात का साधारण अवकल समीकरण है, समीकरण 3.1ख प्रथम कोटि, प्रथम घात का साधारण अवकल समीकरण है, समीकरण 3.1ग द्वितीय कोटि, प्रथम घात का साधारण अवकल समीकरण है, और समीकरण 3.1घ प्रथम कोटि, प्रथम घात का साधारण अवकल समीकरण है।

2. क) यह एक रैखिक साधारण अवकल समीकरण है; ख) यह एक अरैखिक साधारण अवकल समीकरण है क्योंकि इसमें बीजीय फलन $\sin\omega t$ है; ग) यह भी एक अरैखिक साधारण अवकल समीकरण है क्योंकि इसमें $(y')^2$ है यानी y के प्रथम कोटि अवकलज का अपने-आप से गुणनफल है।

3. क) हम साधारण अवकल समीकरण $yy' = -x$ को इस तरह लिख सकते हैं :

$$y\,dy = -x\,dx$$

इसके दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1$$ जहां C_1 समाकलन अचर है।

अतः, इस साधारण अवकल समीकरण का व्यापक हल है

$x^2 + y^2 = C$ जहां $C = 2C_1$

ख) आदि-मान समस्या $y' = -2xy$, $y(0) = 3$ पृथक्करणीय प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण है और हम इसे इस तरह हल करेंगे :

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int x\,dx + C \quad \text{या} \quad \ln|y| = -x^2 + C$$

या $$|y| = C_1 e^{-x^2} \text{ जहां } C_1 = \ln|C|$$

आदि प्रतिबंध से हमें मिलता है $C_1 = 3$ और विशेष हल है : $y = 3e^{-x^2}$

4. हम इसे उदाहरण 3.4 की तरह हल करेंगे और साधारण अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = (x+y)^2$ में $x + y = u$ रखेंगे। फिर उदाहरण 3.4 की समीकरण (i) से हम लिख सकते हैं

$$\frac{du}{dx} = 1 + u^2 \qquad \text{(i)}$$

यह समीकरण u और x में पृथक्कृत है : $\frac{du}{u^2 + 1} = dx$ (ii)

समीकरण (ii) का समाकलन करने पर हमें मिलता है :

$$\tan^{-1} u = x + c \quad \text{या} \quad \tan^{-1}(x + y) = x + c$$

यह अभीष्ट व्यापक हल है।

5. समीकरण (i) समघात है क्योंकि समीकरण (i) के फलन $(x + y)$ और $(x - y)$ समघात हैं :

$$f(kx,ky) = (kx + ky) = k(x + y) = k\,f(x,y) \quad \text{और}$$
$$f(kx,ky) = (kx - ky) = k(x - y) = k\,f(x,y)$$

समीकरणें (ii) और (iii) समघात नहीं हैं। समीकरण (iv) समघात है क्योंकि समीकरण (iv) के फलन $(x^2 + y^2)$ और xy समघात हैं :

$$f(kx,ky) = (kx)^2 + (ky)^2 = k^2(x^2 + y^2) = k^2 f(x,y)$$

और $$f(kx,ky) = (kxky) = k^2(x\,y) = k^2 f(x,y)$$

6. क) हम उदाहरण 3.5 के समीकरण (iv) को इस तरह लिख सकते हैं :

$$v\,dv = \frac{dx}{x}$$

इसका हल है $\frac{v^2}{2} = \ln|x| + c$ या $\frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + c$

ख) आप देख सकते हैं कि यह साधारण अवकल समीकरण समघात है। अतः, हम इसे उदाहरण 3.5 की तरह हल करेंगे। तब

$\frac{dy}{dx} = \left(1+\frac{y}{x}\right)$ और हम इसमें $y = vx$ प्रतिस्थापित करेंगे। उदाहरण 3.5 के समीकरण (iii) से हम $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ इस साधारण अवकल समीकरण में रखते हैं और लिखते हैं

$v + x\frac{dv}{dx} = 1 + v$ या $x\frac{dv}{dx} = 1$ जो पृथक्करणीय है। तब

$$\int dv = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow v = \ln|x| + C \quad \text{या} \quad y = x\ln|x| + Cx$$

7. यहां $M = 3x^2y - 6x, \quad N = x^3 + 2y$ (i)

$\therefore \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2, \ \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2$ और इस तरह $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ (ii)

अतः, समीकरण यथातथ है। अब हमें दिए हुए यथातथ साधारण अवकल समीकरण को हल करना है। अतः, हम कह सकते हैं कि फलन $f(x,y)$ का अस्तित्व है जिसके लिए समीकरण 3.13क संतुष्ट होता है। अब हम प्रथम कोटि यथातथ साधारण अवकल समीकरणों को हल करने की विधि के चरण 2 और 3 या चरण 5 और 6 के अनुसार इसे हल कर सकते हैं। चरण 2 से हमें मिलता है :

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + z(y) = \int (3x^2y - 6x)dx + z(y) = x^3y - 3x^2 + z(y) \quad \text{(iii)}$$

चूंकि $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$, अतः, समीकरणों (i) और (iii) से हमें मिलता है :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + \frac{dz}{dy} = x^3 + 2y$$

$$\therefore \frac{dz}{dy} = 2y \quad \text{या} \quad z(y) = y^2 + k \quad \text{(iv)}$$

जहां k एक स्वेच्छ अचर है। इस तरह $f(x,y) = x^3y - 3x^2 + y^2 + k$

अतः, अभीष्ट हल है $f(x,y) =$ अचर

या $x^3y - 3x^2 + y^2 = C,$ जहां C एक अचर है।

8. हम दिए हुए साधारण अवकल समीकरण को इस तरह लिख सकते हैं :

$$y' + \frac{2}{x}y = x^2$$

समाकलन गुणक $= \exp\left(\int \frac{2}{x}dx\right) = \exp[2\ln|x|] = \exp\left[\ln\left|x^2\right|\right] = x^2$

अतः, हमें मिलता है $\frac{d}{dx}(x^2y) = x^4$ या $x^2y = \int x^4 dx + C$

या $x^2y - \frac{x^5}{5} = C,$ जो अभीष्ट हल है।

अंत में कुछ प्रश्न

1. क) यह एक प्रथम कोटि, प्रथम घात साधारण अवकल समीकरण है जो पृथक्करणीय है और हम इसे इस तरह समाकलन करके हल कर सकते हैं :

$$dN(t) = Ct\,dt \quad \text{या} \quad \int dN = C\int t\,dt$$

या व्यापक हल है : $N = C\dfrac{t^2}{2} + C_1$ जहां C_1 समाकलन का अचर है।

ख) यह एक प्रथम कोटि, प्रथम घात साधारण अवकल समीकरण है जो पृथक्करणीय है। हम इसे इस तरह समाकलन करके हल कर सकते हैं :

$$\frac{df(t)}{\sqrt{f(t)}} = C\,dt \quad \text{या} \quad \int \frac{df}{\sqrt{f}} = C\int dt \quad \text{या} \quad 2\sqrt{f} = Ct + C_1$$

दिया है कि $f(0) = C_0$ । इस आदि प्रतिबंध को लागू करने पर हमें मिलता है : $C_1 = 2\sqrt{C_0}$

अतः, विशेष हल है : $2\sqrt{f} = Ct + 2\sqrt{C_0}$

ग) यह एक प्रथम कोटि, प्रथम घात साधारण अवकल समीकरण है जो पृथक्करणीय है : $\dfrac{dw}{2w} + dx = 0$

हम समाकलन करके इसे इस तरह से हल कर सकते हैं :

$$\frac{1}{2}\int \frac{dw}{w} + \int dx = C, \quad \text{जहां } C \text{ समाकलन का अचर है।}$$

या $\dfrac{1}{2}\ln|w| + x = C$

$\therefore$ $|w| = Ae^{-2x}$, जहां $A = e^{2c}$

घ) यह एक प्रथम कोटि, प्रथम घात साधारण अवकल समीकरण है जो पृथक्करणीय है। हम इसे इस तरह लिख सकते हैं :

$$\frac{dw}{w} + \frac{dy}{y} = 0$$

समाकलन करने पर हमें मिलता है : $\ln|w| + \ln|y| = C$ या $\ln|w|\,|y| = C$

अधिकांश भौतिक स्थितियों में प्राचल w और y धनात्मक होते हैं। अतः, भौतिकी की समस्याओं को हल करते हुए आप पायेंगे कि इस हल को इस तरह लिखा जाता है : $\ln w + \ln y = C$ और तब व्यापक हल है : $wy = e^C$

च) यह एक प्रथम कोटि, प्रथम घात साधारण अवकल समीकरण है जो पृथक्करणीय है। हम इसे इस तरह लिख सकते हैं :

$$\frac{dy}{y} = -\,(x+1)\,dx$$

हम y को धनात्मक मान लेते हैं। तब समाकलन करने पर व्यापक हल है :

$$\ln(y) = -\left(\frac{x^2}{2} + x\right) + C_1$$

या $y = C\exp\left[-\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\right]$, जहां C अचर है।

2. समीकरण 3.2ग पृथक्करणीय है और हम इसे इस तरह लिख सकते हैं :

$$v dv = -\frac{GM}{r^2} dr$$

समाकलन करने पर हमें मिलता है : $\int v\, dv = -GM\int \frac{dr}{r^2} + C$

अतः, व्यापक हल है : $v^2 = \frac{2GM}{r} + C$

आदि प्रतिबंध $r = R$ पर $v = v_0$ को लागू करने पर हमें मिलता है :

$$C = v_0^2 - \frac{2GM}{R}$$

अतः, विशेष हल है : $v^2 = \frac{2GM}{r} + v_0^2 - \frac{2GM}{R}$

कण के पलायन के लिए r के सभी मानों के लिए $v \ge 0$ होना चाहिए। अब $v \ge 0$ तभी संभव है जबकि

$v_0^2 - \frac{2GM}{R} \ge 0 \Rightarrow v_0 \ge \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ । अब यदि $v_0^2 - \frac{2GM}{R} < 0$ हो तब व्यापक हल में r का एक ऐसा मान संभव होगा जिसके लिए $v = 0$ होगा। तब कण रुक जायेगा, v ऋणात्मक हो जायेगा और कण लौट आयेगा। v_0 का न्यूनतम मान पलायन वेग कहलाता है : $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ ।

3. क) $(1+\cos\theta)dr = r\sin\theta d\theta$ या $\frac{dr}{r} - \frac{\sin\theta d\theta}{1+\cos\theta} = 0$

या $\int\frac{dr}{r} + \int\frac{(-\sin\theta)d\theta}{1+\cos\theta} = 0$

या $\ln|r| + \ln|1+\cos\theta| = \ln|C|$ $\left[\because \frac{d}{d\theta}(1+\cos\theta) = -\sin\theta\right]$

अतः, व्यापक हल है : $r(1+\cos\theta) = C$

ख) देखकर हम बता सकते हैं कि हमें यह प्रतिस्थापन करना चाहिए : $x - 2y = v$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें मिलता है : $1 - 2\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$ या

$y' = \frac{1}{2}(1 - v')$ । मूल साधारण अवकल समीकरण में रखने पर हमें मिलता है :

$$(v-1) = \frac{(v+7)}{2}\left(1 - \frac{dv}{dx}\right) \quad \text{या} \quad \frac{dv}{dx} = 1 - \frac{2v-2}{v+7} = \frac{-v+9}{v+7}$$

चर पृथक्करण विधि लागू करने पर हमें मिलता है : $\int \frac{v+7}{v-9} dv = -\int dx + C$

या $\int \left(1 + \frac{16}{v-9}\right) dv = -\int dx + C$ या $v + 16 \ln|v-9| = -x + C$

चूंकि $v = x - 2y$, इसलिए व्यापक हल है :

$x - 2y + 16\ln|x-2y-9| = -x + C$ या $2x - 2y + 16\ln|x-2y-9| = C$

ग) यह एक प्रथम कोटि रैखिक समघात साधारण अवकल समीकरण है और इसे हम उदाहरण 3.5 की तरह $y = vx$ रख कर हल करेंगे।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-y)}{(x+y)} = \frac{1 - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}}$$

हम $y = vx$ रखते हैं ताकि $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v}{1+v}$$

या $x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v}{1+v} - v = \frac{1-2v-v^2}{1+v}$ या $\frac{dx}{x} = \frac{(1+v)dv}{1-2v-v^2}$

या $\int \frac{dx}{x} + \int \frac{(1+v)dv}{v^2+2v-1} = 0$

या $\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|u| = \ln|C|, \; u = v^2 + 2v - 1$

या $xu^{1/2} = C_1$ या $x(v^2+2v-1)^{1/2} = C_1$

$\therefore \quad (y^2 + 2yx - x^2)^{1/2} = C_1$ या $y^2 + 2yx - x^2 = C_1^2$

मान लें कि

$I = \int \frac{(1+v)dv}{v^2+2v-1}$

हम $u = v^2 + 2v - 1$ रखते हैं

$\therefore du = (2v+2)dv$

$= 2(v+1)dv$

या $I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$

$= \frac{1}{2}\ln|u|$

घ) दिए हुए साधारण अवकल समीकरण को हम इस तरह लिख सकते हैं :

$y' + \frac{2}{x}y = x^4$ । अतः,

समाकलन गुणक $= \exp\left(\int \frac{2}{x}dx\right) = \exp[2\ln|x|] = \exp\left[\ln|x^2|\right] = x^2$

अतः, $\frac{d}{dx}(x^2 y) = x^6$ या $x^2 y = \int x^6 dx + C$

अतः, $x^2 y - \frac{x^7}{7} = C$ अभीष्ट हल है।

च) आप देख सकते हैं कि दिया हुआ साधारण अवकल समीकरण $y' - 2y = 8e^x$ प्रथम कोटि रैखिक असमघात साधारण अवकल समीकरण है। यहां $p(x) = -2$ । अतः, समाकलन गुणक है

$$v(x) = \exp\left[-\int 2\,dx\right] = \exp(-2x)$$

दिए हुए साधारण अवकल समीकरण को e^{-2x} से गुणा करने पर हमें मिलता है :

$$e^{-2x}y' - 2ye^{-2x} = 8e^{-x} \quad \text{या} \quad \frac{d}{dx}(ye^{-2x}) = 8e^{-x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हमें मिलता है : $ye^{-2x} = -8e^{-x} + C$

अतः, व्यापक हल है : $y = -8e^{x} + Ce^{2x}$

4. क) साधारण अवकल समीकरण $(e^x + y - 1)dx + (3e^y + x - 7)dy = 0$ को हल करने के लिए हम जांचते हैं कि यह यथातथ है कि नहीं। यहां

$$M = e^x + y - 1, \quad N = 3e^y + x - 7$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \quad \text{अतः,} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$ और समीकरण यथातथ है।

$$\therefore \quad \frac{\partial f}{\partial x} = e^x + y - 1$$

इस समीकरण से हमें मिलता है : $f = e^x + xy - x + z(y)$

अतः, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3e^y + x - 7 = x + \dfrac{dz}{dy}$

$$\therefore \quad \frac{dz}{dy} = 3e^y - 7 \quad \text{या} \quad z(y) = 3e^y - 7y + C_1$$

अभीष्ट हल है $\quad f(x,y) = C' \quad$ या $\quad e^x + xy + 3e^y - x - 7y + C = 0$

ख) दिए हुए साधारण अवकल समीकरण $x\,dy - (y - \sqrt{x^2 + y^2})dx = 0$ को हम इस तरह लिख सकते हैं :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

आप देख सकते हैं कि यह प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण समघात है। हम इसमें $y = vx$ रखते हैं जिससे कि

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

दायां पक्ष $= \dfrac{vx - x\sqrt{1+v^2}}{x} = v - \sqrt{1+v^2}$

अतः, हमें मिलता है : $v + x\dfrac{dv}{dx} = v - \sqrt{1+v^2}$ या $\dfrac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = -\dfrac{dx}{x}$

$$\therefore \quad \int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} + \int \frac{dx}{x} = 0 \quad \text{या} \quad \ln\left|v+\sqrt{v^2+1}\right| + \ln|x| = \ln|C|$$

$$\text{या} \quad \ln\left|x\left(v+\sqrt{v^2+1}\right)\right| = \ln|C|$$

$$\therefore \quad x\left[v+\sqrt{v^2+1}\right] = C$$

यानी $y+\sqrt{y^2+x^2}=C$ अभीष्ट व्यापक हल है।

आदि प्रतिबंध $x=3$ पर $y=4$ को लागू करने पर हमें मिलता है :

$$4+\sqrt{4^2+3^2}=C \quad \text{या} \quad C=9$$

अतः, अभीष्ट विशेष हल है : $y+\sqrt{y^2+x^2}=9$

हल की जांच करना

हम व्यापक हल को इस तरह लिख सकते हैं :

$$y+\sqrt{y^2+x^2}=C \qquad \text{(i)}$$

या

$$x^2+y^2=(C-y)^2$$
$$=C^2+y^2-2Cy$$

या

$$x^2=C^2-2Cy \qquad \text{(ii)}$$

x के सापेक्ष हल को अवकलित करने पर मिलता है :

$$2x\,dx=-2C\,dy$$

या

$$dy=-\frac{x}{C}dx \qquad \text{(iii)}$$

(i) से $\sqrt{x^2+y^2}$ और (iii) से dy को साधारण अवकल समीकरण में रखने पर मिलता है :

$$x\left(-\frac{x}{C}dx\right)-dx(y-C+y)=0$$

या

$$dx\left[-\frac{x^2}{C}-2y+C\right]=0 \qquad \text{(iv)}$$

(iv) में (ii) रखने पर सर्वसमिका मिलती है। अतः, (i) दिए हुए साधारण अवकल समीकरण का हल है।

5. क) दिए हुए साधारण अवकल समीकरण $v\frac{dv}{dx}+\omega^2x=0$ को हम इस तरह लिख सकते हैं : $v\,dv+\omega^2x\,dx=0$

समाकलन करने पर हमें मिलता है : $\frac{v^2}{2}+\frac{\omega^2x^2}{2}=C$, जहां C अचर है।

या $\quad v^2+\omega^2x^2=C'$, जहां $C'=2C$

लेकिन $\frac{dx}{dt}=v=0$, जब $x=a \quad \therefore \; C'=\omega^2a^2$

$$\therefore \quad v^2=\omega^2(a^2-x^2) \quad \text{या} \quad v=\frac{dx}{dt}=\pm\omega\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\text{या} \quad \frac{dx}{\pm\sqrt{a^2-x^2}}=\omega\,dt$$

$$\therefore \quad \int\frac{dx}{\pm\sqrt{a^2-x^2}}=\omega t+\delta$$ जहां δ एक स्वेच्छ अचर है।

$$\text{या} \quad \left.\begin{array}{c}\sin^{-1}\frac{x}{a}\\ \\ \cos^{-1}\frac{x}{a}\end{array}\right|=\omega t+\delta$$

$$\text{अतः,} \quad \frac{x}{a}=\begin{array}{c}\sin(\omega t+\delta)\\ \text{या}\\ \cos(\omega t+\delta)\end{array}$$

अतः, अभीष्ट हल हैं : $x = a\sin(\omega t + \delta)$ और $x = a\cos(\omega t + \delta)$

ख) श्रेणी RC परिपथ के लिए समीकरण 3.23क यानी $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R}$ को हम उदाहरण 3.8 की तरह हल करेंगे जहां E अचर है। परिपथ में $t = 0$ पर आरंभिक आवेश q_0 है। यह समीकरण 3.17क के रूप का है। ध्यान दें कि यहां $p = \frac{1}{RC}$ अचर है। अतः, समीकरण 3.21 से समाकलन गुणक है :

$$v(t) = \exp\left[\int \frac{dt}{RC}\right] = e^{t/RC} \qquad \text{(i)}$$

समीकरण 3.22घ से, हम व्यापक हल लिख सकते हैं :

$$q(t) = e^{-t/RC}\left[\frac{E}{R}\int e^{t/RC}\,dt + C'\right] \qquad \text{(ii)}$$

जहां C' एक स्वेच्छ अचर है। (ii) का समाकलन करने पर हमें मिलता है :

$$q(t) = EC + C'e^{-t/RC}$$

आदि प्रतिबंध $t = 0$ पर $q = q_0$ को लागू करने पर हमें मिलता है :

$C' = q_0 - EC$

अतः, विशेष हल है : $q(t) = EC\,(1 - e^{-t/RC}) + q_0 e^{-t/RC}$

जब $E = 0$, तब हल है : $q(t) = q_0 e^{-t/RC}$

यहां RC को परिपथ का **समय नियतांक** कहते हैं। $t = RC$ पर संधारित्र पर $\frac{q_0}{e}$ आवेश होता है यानी $t = RC$ वह समय है जिसमें संधारित्र पर आवेश $\frac{q_0}{e}$ है या उसके आरंभिक आवेश का $\frac{1}{e}$ गुना है।

परिशिष्ट : आंशिक अवकलज

परिभाषा से, x के सापेक्ष फलन $f(x, y, z)$ का आंशिक अवकलज है :

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \quad (1)$$

फलन $\partial f/\partial x$, x के सापेक्ष फलन $f(x, y, z)$ का अवकलज होता है जबकि अन्य चरों y, z को **अचर** रखा जाता है। आप इसी तरह $\partial f/\partial y$ और $\partial f/\partial z$ ज्ञात कर सकते हैं। फलन $f(x, y, z)$ के आंशिक अवकलजों $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ से क्रमशः x, y या z-अक्षों की दिशाओं में f के परिवर्तन की दर मिलती है। इस तरह, $\frac{\partial f}{\partial x}$ समष्टि के किसी बिंदु पर x के सापेक्ष फलन f की परिवर्तन दर है। आइए, अब समझें कि **अन्य चरों को अचर रख कर** x, y और z के सापेक्ष फलन $f(x, y, z)$ के आंशिक अवकलजों की गणना कैसे की जाती है।

उदाहरण के लिए, मान लें कि $f(x,y,z) = 2x^2 y z^3$

तब $\frac{\partial f}{\partial x} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2)\right](2yz^3) = 4xyz^3$ चूंकि y और z **को अचर माना गया है।**

इसी तरह, किसी अन्य चर के सापेक्ष फलन के आंशिक अवकलजों की गणना करने के लिए बाकी के चरों को **अचर** रखा जाता है। इस तरह,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left[\frac{\partial}{\partial y}(y)\right](2x^2 z^3) = 2x^2 z^3 \quad \text{और} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \left[\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right](2x^2 y) = 6x^2 yz^2$$

अब आप स्वयं फलनों के आंशिक अवकलजों की गणना करें।

क) $f(x, y) = x^2 y^3 + \exp(x^2 y)$ के आंशिक अवकलजों $\frac{\partial f}{\partial x}$ और $\frac{\partial f}{\partial y}$ की गणना करें।

ख) $u(x, y, z) = 2x + yz - xy$ के लिए $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ और $\frac{\partial u}{\partial z}$ की गणना करें।

इनके हल हैं :

क) $$\frac{\partial f}{\partial x} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2 y^3) + \frac{\partial}{\partial x}\exp(x^2 y)\right] = \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2)\right] y^3 + 2x\exp(x^2 y)$$

$$= 2xy^3 + 2x\exp(x^2 y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left[\frac{\partial}{\partial y}(x^2 y^3) + \frac{\partial}{\partial y}\exp(x^2 y)\right] = \left[\frac{\partial}{\partial y}(y^3)\right] x^2 + \exp(x^2 y)$$

$$= 3y^2 x^2 + \exp(x^2 y)$$

ख) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x + yz - xy) = 2 - y$ चूंकि y और z को अचर माना गया है।

इसी तरह, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x + yz - xy) = z - x$ और $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(2x + yz - xy) = y$

यदि किसी झूले को लगातार धक्का न दिया जाए, तो इसे रुकने में कितना समय लगेगा? इस इकाई को पढ़ने के बाद आप ऐसे प्रश्नों को हल कर सकेंगे!

इकाई 4

अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण

इकाई की रूपरेखा

अध्ययन निर्देशिका

इस इकाई में हम भौतिकी और गणित की उन संकल्पनाओं का उपयोग करेंगे जो आपने उच्चतर-माध्यमिक (+ 2) कक्षाओं में सीखी थीं। हम यह मान कर चलेंगे कि आप रैखिक समीकरणों को हल कर सकते हैं और सारणिक, और फलनों के आंशिक अवकलजों, समाकलों के मान निकाल सकते हैं। इसके साथ-साथ आपको द्विघात समीकरण को हल करना और उसके मूल ज्ञात करना भी आना चाहिए। हमारी सलाह है कि आप अपने उच्चतर-माध्यमिक (+ 2) के गणित के पाठ्यक्रम में दी गई इन संकल्पनाओं को **दोहरा** लें। इस पाठ्यक्रम की इकाई 3 में जिन संकल्पनाओं की चर्चा की गई है, आप उन्हें भी दोहरा लें। आपको प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों को हल करना और फलनों को समाकलित करना अच्छी तरह से आना चाहिए। तभी आपको इस इकाई को पढ़ने में आनंद आएगा। इस इकाई के उद्देश्य प्राप्त करने के लिए आप इकाई में दिए गए सभी चरणों और उदाहरणों को स्वयं हल करें। पढ़ते समय हमेशा अपने पास कागज़ और पेन/पैंसिल रखें या इकाई में दिए गए हाशिए का प्रयोग करें। बाकी पाठ्यक्रम को पढ़ने से पहले आप यह ज़रूर सुनिश्चित कर लें कि आप इस इकाई में दिए गए सभी प्रश्नों को हल कर सकते हैं।

"भौतिकी का असली मकसद एक ऐसे समीकरण की खोज है जिसमें संपूर्ण ब्रह्मांड की समझ निहित हो पर फिर भी वह इतनी छोटी हो कि एक टी शर्ट पर समा जाए।"

लिऑन लेडरमैन

4.1 परिचय

इकाई 3 में आप प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों को हल करने की कई विधियां सीख चुके हैं। आपने इन विधियों को अनेक भौतिक समस्याओं पर लागू किया जैसे कि पृथ्वी के गुरुत्व के अधीन मुक्त रूप से और वायु प्रतिरोध के अधीन गिरते हुए कण की गति पर, रेडियोएक्टिव क्षय, विद्युत् परिपथों में धारा और आवेश प्रवाह के परिवर्तन आदि पर।

लेकिन अनेक भौतिक एवं जैविक निकायों के लिए हमें द्वितीय कोटि समघात साधारण अवकल समीकरणों को हल करना पड़ता है। उदाहरण के लिए, तरंग (ध्वनि और प्रकाश) संचरण के अध्ययन में ऐसे समीकरणों का प्रयोग होता है। इनका उपयोग नदियों और राजमार्गों पर पुल निर्माण के समय यांत्रिक और वैद्युत दोलनों और रेडियो/टेलीविज़न के सिग्नल संचरण के अध्ययन में भी होता है। कुछ स्थितियों में हम समीकरणों को प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों में समानीत (reduce) कर सकते हैं। इस इकाई में हम **अचर गुणांकों** वाले **द्वितीय कोटि रैखिक समघात अवकल समीकरणों** को हल करने की विधियां समझाएंगे। भाग 4.2 में आप वह मूलभूत शब्दावली (basic terminology) जानेंगे जिसकी मदद से आप ऐसे साधारण अवकल समीकरणों को पहचान सकते हैं।

ऐसे साधारण अवकल समीकरणों को आप इस पाठ्यक्रम के बाकी खंडों में विभिन्न निकायों पर लागू करेंगे। इस पाठ्यक्रम के संगत प्रयोगशाला पाठ्यक्रम में आप गतिपालक चक्र (fly wheel) की गति और क्षैतिज दंडों के अवनमन (depression) पर प्रयोग करेंगे। ऐसे निकायों पर अचर गुणांकों वाले समघात द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों को लागू किया जाता है। ऐसे ही साधारण अवकल समीकरणों को हल करने की ज़रूरत *LCR* परिपथ में धारा वृद्धि/ह्रास और सौरमंडल में ग्रहों की गति (planetary motion) आदि के अध्ययन में पड़ती है। ऐसे समीकरणों को हल करने की बुनियादी विधियों के बारे में आप भाग 4.3 में सीखेंगे।

अगले खंड में आप यांत्रिकी की संकल्पनाओं का अध्ययन करेंगे और इस खंड में सीखी हुई गणितीय तकनीकों का उपयोग करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- दिए गए साधारण अवकल समीकरण का रांसकियन परिकलित कर सकेंगे;
- अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि रैखिक, समघात साधारण अवकल समीकरणों के सहायक/अभिलक्षणिक समीकरण प्राप्त कर सकेंगे; और
- चरघातांकी फलन विधि से अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि रैखिक, समघात साधारण अवकल समीकरणों को हल कर सकेंगे।

4.2 मूलभूत शब्दावली

इकाई 3 में प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों के बारे में पढ़ते हुए आपने साधारण अवकल समीकरण की **कोटि** तथा **घात** के बारे में पढ़ा है। आपने साधारण

अवकल समीकरण के **रैखिक** या **अरैखिक** होने के प्रतिबंध के बारे में भी पढ़ा है। आप प्रथम कोटि **समघात** तथा **असमघात** साधारण अवकल समीकरणों के बारे में भी सीख चुके हैं। आइए, इस शब्दावली को द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों के लिए दोहराएं।

द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों का वर्गीकरण

- यदि साधारण अवकल समीकरण में उच्चतम अवकलज की **कोटि** 2 हो तो उसे द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण कहते हैं। द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण की **घात** उच्चतम कोटि के अवकलज की घात होती है।

- किसी साधारण अवकल समीकरण को **रैखिक** कहा जाता है यदि उसमें

  i) अज्ञात फलन तथा इसके अवकलज घात 1 के हों;

  ii) अज्ञात फलन तथा उसके अवकलजों का कोई गुणनफल और दो या दो से ज़्यादा अवकलजों का कोई गुणनफल नहीं हो; और

  iii) अज्ञात फलन तथा इसके अवकलजों के अबीजीय फलन (transcendental function) नहीं हों।

जो साधारण अवकल समीकरण उपरोक्त एक या एक से अधिक प्रतिबंधों को संतुष्ट नहीं करता वह **रैखिक नहीं** होता। वह **अरैखिक** (non-linear) कहलाता है।

अब हम द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों के कुछ और मूलभूत पदों की व्याख्या करेंगे क्योंकि आपको इन्हें भी जानना चाहिए।

किसी भी द्वितीय कोटि **रैखिक** साधारण अवकल समीकरण को इस तरह लिखा जा सकता है :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = g(x) \tag{4.1}$$

साधारणतः, एक nवीं कोटि की साधारण अवकल समीकरण के n रैखिकतः स्वतंत्र हल होते हैं। साथ ही, रैखिकतः स्वतंत्र हलों का रैखिक संयोजन भी उसका हल होता है।

फलन $g(x)$ को **प्रेरक फलन** (forcing function) कहा जाता है। $p_1(x)$ और $p_2(x)$ **गुणांक फलन** (coefficient function) कहलाते हैं। ये फलन उस अंतराल में संतत होते हैं जिसमें दिए गए समीकरण के हल का अस्तित्व होता है।

एक द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण को **समघात** कहा जाता है यदि $g(x) = 0$ हो।

इसे **असमघात** कहा जाता है यदि $g(x) \neq 0$ हो।

ध्यान दें कि $y' = \frac{dy}{dx}$
और $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$

आइए, अब हम निम्न रूप का एक **रैखिक, समघात द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण** लें :

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \tag{4.2}$$

मान लें कि y_1 और y_2 समीकरण 4.2 के रैखिकतः स्वतंत्र हल हैं (हाशिए में दी गई टिप्पणी पढ़ें)। तो इनका रैखिक संयोजन (linear combination)

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \tag{4.3}$$

दो फलनों $y_1(x)$ और $y_2(x)$ को अंतराल I पर, जिस पर दोनों फलन परिभाषित हैं, रैखिकतः स्वतंत्र तभी कहा जाता है जब हम ऐसे दो शून्येतर अचर C_1 और C_2 ज्ञात कर सकें जिनके लिए सर्वसमिका $C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0$ केवल तब संतुष्ट होती हो जब $C_1 = C_2 = 0$ ।

समीकरण 4.2 का व्यापक हल है। यहां C_1 और C_2 स्वेच्छ शून्येतर अचर हैं। यह **अध्यारोपण सिद्धांत** (principle of superposition) है।

आइए, इस संकल्पना की व्याख्या एक उदाहरण से करें। निम्नलिखित साधारण अवकल समीकरण लें :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \tag{4.4क}$$

यह अनवमंदित आवर्ती दोलक का गति समीकरण है (चित्र 4.1)। आप जांच सकते हैं कि $y_1 = \sin \omega t$ और $y_2 = \cos \omega t$ समीकरण 4.4क के हल हैं (हाशिए में दी गई टिप्पणी पढ़ें)। अतः, इस समीकरण का व्यापक हल है :

$$y(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t \tag{4.4ख}$$

चित्र 4.1: द्रव्यमान-कमानी तंत्र आवर्ती दोलक का उदाहरण है।

अब आप पूछ सकते हैं : रैखिकतः स्वतंत्र हलों का क्या अर्थ है? हम इनके रैखिकतः स्वतंत्र होने की जांच कैसे कर सकते हैं? क्या रैखिकतः स्वतंत्र हलों के रैखिक संयोजन से सदैव अलग हल प्राप्त होगा? कोई हल समुच्चय रैखिक अवकल समीकरण का व्यापक हल कब होता है? आइए, अब द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों के लिए ऐसे सभी सवालों के जवाब ढूंढें।

4.2.1 रैखिकतः स्वतंत्र हल और रांसकियन

आइए, पहले इस सवाल का जवाब दें : **रैखिकतः स्वतंत्र हलों का क्या अर्थ है**? हम कहते हैं कि दो हल y_1 और y_2 किसी अंतराल में तभी रैखिकतः स्वतंत्र होंगे जब समीकरण 4.3 में दी गई सर्वसमिका केवल तभी संतुष्ट हो जब $C_1 = C_2 = 0$ । इस बात को समझने के लिए हम C_1 और C_2 को शून्येतर मान लेते हैं। इस प्रतिबंध के अनुसार समीकरण 4.3 से हमें निम्न परिणाम प्राप्त होगा :

$$\frac{y_2}{y_1} = K, \text{ अचर} \tag{4.5}$$

$$y_1' = \omega \cos \omega t$$

और,

$$y_1'' = -\omega^2 \sin \omega t$$

$$\Rightarrow -\omega^2 \sin \omega t + \omega^2 \sin \omega t = 0$$

इसी तरह,

$$y_2' = -\omega \sin \omega t$$

$$y_2'' = -\omega^2 \cos \omega t$$

अतः,

$$-\omega^2 \cos \omega t + \omega^2 \cos \omega t = 0$$

अतः, दिए गए अंतराल में y_1 और y_2 समानुपाती होंगे। तब, परिभाषा के अनुसार, y_1 और y_2 उस अंतराल में रैखिकतः आश्रित फलन होंगे।

आइए, अब हम अगले सवाल का जवाब दें : **हम हलों के रैखिकतः स्वतंत्र होने की जांच कैसे कर सकते हैं**?

आप पढ़ चुके हैं कि y_1 और y_2 के रैखिकतः आश्रित होने का अर्थ है कि अनुपात y_2 / y_1 अचर है। इसका अर्थ है कि हल y_1 और y_2 तभी रैखिकतः स्वतंत्र होंगे जब y_2 / y_1 अचर नहीं हो। इसका यह भी अर्थ है कि इस अनुपात का अवकलज **शून्य नहीं** है :

$$\frac{y_2' y_1 - y_1' y_2}{y_1^2} \neq 0 \quad \text{या} \quad y_2' y_1 - y_1' y_2 \neq 0 \tag{4.6}$$

हम समीकरण 4.6 के बायीं ओर के पदों को सारणिक (determinant) के रूप में लिख सकते हैं। तब हम दो हलों y_1 और y_2 की रैखिक स्वतंत्रता के प्रतिबंध को इस तरह लिख सकते हैं :

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (4.7)$$

सारणिक $W(y_1, y_2)$ को दिए गए अवकल समीकरण का **रांसकी सारणिक** (**Wronski determinant**) या **रांसकियन** (**Wronskian**) कहते हैं। अतः, हम कह सकते हैं कि

> किसी अंतराल $[a, b]$ पर द्वितीय कोटि के अचर गुणांकों वाले साधारण अवकल समीकरण के दो हल y_1 और y_2 केवल तभी रैखिकतः स्वतंत्र हो सकते हैं जबकि उनका **रांसकियन** $a \le x \le b$ के लिए **शून्य नहीं** हो।

आइए, हम इस कथन की जांच एक आवर्ती दोलक के लिए करें। समीरकण 4.6 में $y_1 = \sin \omega t$ और $y_2 = \cos \omega t$ रखने पर हमें मिलता है :

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin \omega t & \cos \omega t \\ \omega \cos \omega t & -\omega \sin \omega t \end{vmatrix} = -\omega \neq 0 \qquad (4.8)$$

अतः $y_1 = \sin \omega t$ और $y_2 = \cos \omega t$ का रांसकियन शून्य नहीं है और ये हल रैखिकतः स्वतंत्र हैं। हम यह भी कह सकते हैं कि अंतराल $[a, b]$ पर y_1 और y_2 तभी **रैखिकतः आश्रित** होंगे जबकि दिए गए अंतराल में किसी $x = x_0$ के लिए उनका रांसकियन शून्य हो। इस संकल्पना को भली-भांति समझने के लिए आप एक बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 1 – रैखिक स्वतंत्रता की जांच

समीकरण $y'' + 4y = 0$ के हल $y_1 = \sin 2x$ और $y_2 = \cos 2x$ हैं। क्या ये हल रैखिकतः स्वतंत्र हैं?

आगे पढ़ने से पहले, आपने जो कुछ इस भाग में पढ़ा है, उसे दोहरा लें।

दोहराएं

द्वितीय कोटि समघात साधारण अवकल समीकरण के हलों की रैखिक स्वतंत्रता

- किसी भी द्वितीय कोटि समघात साधारण अवकल समीकरण के दो हल होते हैं, माना कि y_1 और y_2 ।
- किसी अंतराल $[a, b]$ पर हल y_1 और y_2 केवल तभी **रैखिकतः स्वतंत्र** होंगे जब उनका रांसकियन $a \le x \le b$ के लिए **शून्य नहीं** हो :

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

हम आशा करते हैं कि अब आप आवश्यक मूलभूत शब्दावली से भली-भांति परिचित हो गए हैं। अब हम समझाएंगे कि **अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि रैखिक समघात साधारण अवकल समीकरणों** को हल कैसे किया जाता है। ऐसे समीकरणों को हल करने के लिए अनेक विधियां विकसित की गई हैं। यहां हम चरघातांकी फलन (exponential function) विधि समझाएंगे।

4.3 चरघातांकी फलन विधि

हम जानते हैं कि अचर गुणांकों वाले रैखिक, समघात द्वितीय कोटि अवकल समीकरण को इस तरह लिखा जा सकता है :

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{4.9}$$

जहां a, b और c वास्तविक संख्याएं हैं। चर पृथक्करण विधि (इकाई 3, भाग 3.3.1) से आप जांच सकते हैं कि प्रथम कोटि रैखिक समघात साधारण अवकल समीकरण $y' + y = 0$ का हल निम्न रूप का चरघातांकी फलन होता है :

$$y = A\exp(-kx)$$

यहां भी हम समीकरण 4.9 का निम्न रूप का हल चुनते हैं :

$$y = A\exp(mx) \tag{4.10}$$

जहां m की विमा x की विमा का प्रतिलोम है। इससे यह सुनिश्चित होता है कि चरघातांकी फलन की घात विमाहीन है। समीकरण 4.10 को x के सापेक्ष दो बार अवकलित करने पर हमें मिलता है :

$$y' = Am\exp(mx) \tag{4.11क}$$

और $$y'' = Am^2\exp(mx) \tag{4.11ख}$$

इन परिणामों को समीकरण 4.9 में रख कर हम इसे इस तरह लिख सकते हैं :

$$(am^2 + bm + c)A\exp(mx) = 0$$

चूंकि $A\exp(mx)$ शून्येतर है, इसलिए यह समीकरण तभी संतुष्ट होगा जबकि

$$am^2 + bm + c = 0 \tag{4.12}$$

यह m में द्विघात समीकरण है तथा इसे **अभिलक्षणिक समीकरण** (characteristic equation) या **सहायक समीकरण** (auxiliary equation) कहा जाता है। इसके मूल हैं (हाशिए में दी गई टिप्पणी पढ़ें) :

> द्विघात समीकरण
> $ax^2 + bx + c = 0$
> के मूल निम्न सूत्र से ज्ञात किए जाते हैं :
> $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{और} \quad m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4.13}$$

अतः, समीकरण 4.9 के हलों को हम इस तरह लिख सकते हैं :

$$y_1(x) = A\exp(m_1 x) \tag{4.14क}$$

और $$y_2(x) = A\exp(m_2 x) \qquad (4.14ख)$$

व्यापक हल लिखने से पहले, आइए, हम इनकी रैखिक स्वतंत्रता की जांच करें। इसके लिए हम इनका रांसकियन परिकलित करते हैं :

$$W(x) = \begin{vmatrix} A\exp(m_1 x) & A\exp(m_2 x) \\ m_1 A\exp(m_1 x) & m_2 A\exp(m_2 x) \end{vmatrix}$$

$$= (m_2 - m_1) B\exp[(m_1 + m_2)x] \qquad (4.15)$$

यहां $B = A^2$ एक अन्य अचर है। अतः, यदि $m_1 \neq m_2$ हो तो $W(x) \neq 0$ और ये हल रैखिकतः स्वतंत्र होंगे। अर्थात् **यदि सहायक समीकरण के मूल भिन्न हों तो अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण के हल रैखिकतः स्वतंत्र होंगे।**

समीकरण 4.3 यानी अध्यारोपण सिद्धांत से हम कह सकते हैं कि समीकरण 4.9 का व्यापक हल इन रैखिकतः स्वतंत्र हलों का रैखिक संयोजन है। हम व्यापक हल को इस तरह लिख सकते हैं :

$$y(x) = C_1 \exp(m_1 x) + C_2 \exp(m_2 x) \qquad (4.16)$$

अचर गुणांकों C_1 और C_2 को आदि या परिसीमा प्रतिबंधों की सहायता से ज्ञात किया जाता है।

अतः, चरघातांकी फलन को हल मानने से अचर गुणांकों वाले रैखिक, समघात द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों को हल करना एक द्विघाती समीकरण के मूल निकालने भर का सवाल बन गया है।

आइए, इस विधि को एक उदाहरण की मदद से समझें।

उदाहरण *4.1* : अचर गुणांकों वाला द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण

साधारण अवकल समीकरण $y'' + 6y' - 7y = 0$ को हल करें।

हल ■ दिया गया समीकरण अचर गुणांकों वाला द्वितीय कोटि रैखिक, समघात, साधारण अवकल समीकरण है। हम इसका हल $y = A\exp(mx)$ मान लेते हैं। आप आसानी से दिखा सकते हैं कि इस साधारण अवकल समीकरण का सहायक समीकरण है :

$$m^2 + 6m - 7 = 0 \qquad (i)$$

समीकरण (i) के मूल हैं $m = 1, -7$ (हाशिए में दी गई टिप्पणी पढ़ें)। अतः, दिए गए समीकरण के दो हल हैं :

$$y_1(x) = A\exp(x) \qquad (ii)$$

और $$y_2(x) = A\exp(-7x) \qquad (iii)$$

इसका व्यापक हल है : $$y(x) = C_1\exp(x) + C_2\exp(-7x) \qquad (iv)$$

उदाहरण 4.1 के समीकरण (i) के लिए

$$m = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4\times 1\times(-7)}}{2}$$
$$= 1, -7$$

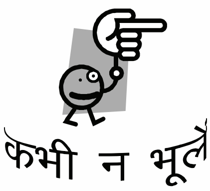
ध्यान दें कि सहायक समीकरण 4.12 के मूल निम्नवत् हो सकते हैं :

1. **वास्तविक** और **असमान**, यदि $b^2 - 4ac > 0$ या $b^2 > 4ac$
2. **वास्तविक** और **समान** यदि $b^2 - 4ac = 0$ या $b^2 = 4ac$ और
3. **सम्मिश्र संयुग्मी** यदि $b^2 - 4ac < 0$ या $b^2 < 4ac$

आइए, इन तीन स्थितियों के संगत हल प्राप्त करें।

4.3.1 वास्तविक एवं असमान मूल

असमान वास्तविक मूलों के लिए, $\exp(m_1 x)$ और $\exp(m_2 x)$ रैखिकतः स्वतंत्र होंगे तथा व्यापक हल को इस तरह लिखा जा सकता है :



सहायक समीकरण के असमान वास्तविक मूलों के लिए व्यापक हल

$$y = C_1 \exp(m_1 x) + C_2 \exp(m_2 x)$$

$$= \exp\left[-\left(\frac{bx}{2a}\right)\right][C_1 \exp(\alpha x) + C_2 \exp(-\alpha x)] \qquad (4.17)$$

जहां $$\alpha = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ध्यान दें कि नियतांकों C_1 और C_2 को आदि और परिसीमा प्रतिबंधों के अधीन ज्ञात किया जाता है। अब हम इस विधि को एक उदाहरण की मदद से समझाएंगे।

उदाहरण *4.2* : असमान वास्तविक मूल

आदि प्रतिबंधों $y(0) = 1$ और $y'(0) = 2$ के अधीन साधारण अवकल समीकरण $y'' + 3y' + 2y = 0$ को हल करें।

हल ■ आप देख सकते हैं कि दिए गए समीकरण के संगत सहायक समीकरण है :

$$m^2 + 3m + 2 = 0 \qquad \text{(i)}$$

इसके मूल $m = -1$ और $m = -2$ हैं। अतः, दिए गए समीकरण का व्यापक हल है :

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} \qquad \text{(ii)}$$

C_1 और C_2 ज्ञात करने के लिए पहले हम $x = 0$, $y = 1$ प्रतिबंध लागू करते हैं। इससे हमें मिलता है :

$$1 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = 1 - C_2 \qquad \text{(iii)}$$

और क्योंकि $y' = -C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x}$, अतः, हम लिख सकते हैं :

$$y'(0) = 2 = -C_1 - 2C_2 \qquad \text{(iv)}$$

समीकरणों (iii) और (iv) को C_1 और C_2 के लिए हल करने पर आप देखेंगे कि $C_1 = 4$ और $C_2 = -3$ । अतः, दिए गए समीकरण का अभीष्ट विशेष हल है :

$$y(x) = 4\exp(-x) - 3\exp(-2x)$$

अब अभ्यास के लिए इस विधि पर आधारित एक बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 2 – असमान वास्तविक मूल

प्रतिबंधों $y(0)=2$ और $y'(0)=2$ के लिए समीकरण $y''-5y'+6y=0$ को हल करें।

4.3.2 वास्तविक तथा समान मूल

जब दो मूल वास्तविक तथा समान होते हैं, यानी $m_1=m_2$, तो रांसकियन शून्य होता है : $W(x)=0$ । इसका अर्थ है कि e^{m_1x} और e^{m_2x} रैखिकतः आश्रित होंगे। यह किस बात की ओर संकेत करता है? इससे पता चलता है कि समीकरण 4.16 मान्य नहीं है। इसका यह भी अर्थ है कि हमारी प्रारंभिक अभिधारणा ही सही नहीं है।

अब आप पूछ सकते हैं : **हम सहायक समीकरण के समान मूलों के लिए रैखिकतः स्वतंत्र हल कैसे प्राप्त कर सकते हैं?** (हम इसे **पुनरावृत्त वास्तविक मूल की स्थिति** भी कहते हैं।)

ऐसी स्थिति में दूसरा रैखिकतः स्वतंत्र हल प्राप्त करने के लिए हम **कोटि लघुकरण विधि** (method of reduction of order) का उपयोग करते हैं।

पुनरावृत्त वास्तविक मूल

जब किसी अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण के सहायक समीकरण के दोनों मूल वास्तविक और बराबर होते हैं, तब हम द्वितीय हल का सही रूप प्राप्त करने के लिए मान लेते हैं कि

$$y_2 = u(x)\exp(mx) \qquad (4.18)$$

जहां m सहायक समीकरण 4.12 का मूल है।

आइए, अब $u(x)$ का व्यंजक प्राप्त करें। इसके लिए हम पहले समीकरण 4.18 को x के सापेक्ष दो बार अवकलित करते हैं :

$$y_2' = u'\exp(mx) + mu\exp(mx) \qquad (4.19\text{क})$$

और

$$y_2'' = u''e^{mx} + 2mu'e^{mx} + m^2ue^{mx} \qquad (4.19\text{ख})$$

इन परिणामों को समीकरण 4.9 में रखने पर हम देखते हैं कि

$$(am^2+bm+c)u(x)e^{mx} + (2ma+b)e^{mx}u' + ae^{mx}u'' = 0 \qquad (4.19\text{ग})$$

समीकरण 4.19ग का प्रथम पद समीकरण 4.12 के कारण शून्य के बराबर है और दूसरे पद में u' का गुणांक शून्य है क्योंकि $m=-b/2a$ [समीकरण 4.13 देखें]। अतः, हमें समीकरण 4.19ग का यह सरल रूप मिलता है :

$$\exp(mx)u'' = 0 \qquad (4.19\text{घ})$$

समीकरण 4.19घ को $\exp(-mx)$ से गुणा करके परिणामी व्यंजक को समाकलित करने पर हमें मिलता है :

$$u' = K \tag{4.20क}$$

जहां K स्वेच्छ समाकलन अचर है। समीकरण 4.20क को पुनः समाकलित करने पर हमें मिलता है :

$$u = Kx + C \tag{4.20ख}$$

चूंकि हम केवल दूसरा रैखिकतः स्वतंत्र हल ढूंढ़ रहे हैं, अतः हम $C = 0$ और $K = 1$ लेते हैं। अतः, हम अभीष्ट हल को इस तरह लिख सकते हैं :

$$y_2 = x\,e^{mx} = x\,e^{-bx/2a} \tag{4.21}$$

अतः, **जब सहायक समीकरण के दोनों मूल वास्तविक और बराबर होते हैं,** तब हम अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि समघात समीकरण के व्यापक हल को इस तरह लिख सकते हैं :

$$y(x) = C_1 e^{mx} + C_2 x\,e^{mx} \quad \text{जहां} \quad m = -\frac{b}{2a} \tag{4.22क}$$

$$= (C_1 + C_2 x)\exp(mx) \tag{4.22ख}$$

जहां C_1 और C_2 स्वेच्छ अचर हैं। यह जांच करने के लिए कि $e^{-bx/2a}$ और $x\,e^{-bx/2a}$ रैखिकतः स्वतंत्र है या नहीं, हम इनका रांसकियन परिकलित करते हैं :

$$W(x) = \begin{vmatrix} \exp\left(-\dfrac{bx}{2a}\right) & x\exp\left(-\dfrac{bx}{2a}\right) \\ -\dfrac{b}{2a}\exp\left(-\dfrac{bx}{2a}\right) & -\dfrac{b}{2a}\,x\exp\left(-\dfrac{bx}{2a}\right) + \exp\left(-\dfrac{bx}{2a}\right) \end{vmatrix}$$

$$= e^{-(bx/a)} > 0 \qquad a \le x \le b \text{ के लिए} \tag{4.23}$$

इससे पता चलता है कि $e^{-(bx/a)}$ और $x\,e^{-bx/2a}$ मान्य हल हैं। समीकरण 4.22क या समीकरण 4.22ख के स्वेच्छ अचर C_1 और C_2 दिए गए आदि और परिसीमा प्रतिबंधों की मदद से ज्ञात किए जा सकते हैं। अतः, हम निम्नलिखित निष्कर्ष निकाल सकते हैं :

सहायक समीकरण के वास्तविक पुनरावृत्त मूल के संगत व्यापक हल

जब अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण के संगत सहायक समीकरण के वास्तविक मूल पुनरावृत्त हों $(m_1 = m_2 = m)$ तो समीकरण का व्यापक हल होता है :

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\exp(mx) \tag{4.22ख}$$

जहां C_1 और C_2 स्वेच्छ अचर हैं।

अब आप एक बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 3 – पुनरावृत्त मूल

आदि-मान समस्या $y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 2$ और $y'(0) = 1$ को हल करें।

4.3.3 सम्मिश्र मूल

आइए, अब हम उस स्थिति पर विचार करते हैं जहां सहायक समीकरण के मूल $m = \alpha + i\beta$ के रूप के **सम्मिश्र मूल** हैं। यहां α और β वास्तविक अचर हैं। आप अपने स्कूल के गणित के पाठ्यक्रमों से याद करें कि वास्तविक बहुपद समीकरण (real polynomial equation) के सम्मिश्र मूल सदैव संयुग्मी युग्मों (conjugate pairs) में होते हैं। अर्थात्,

यदि $$m_1 = \alpha + i\beta \tag{4.24क}$$

एक मूल है तो $$m_2 = \alpha - i\beta \tag{4.24ख}$$

दूसरा मूल होगा। पहले की तरह, यहां भी हम दो रैखिकतः स्वतंत्र हलों के रैखिक संयोजन द्वारा दिए गए अवकल समीकरण का व्यापक हल लिख सकते हैं :

$$y = Ay_1 + By_2 = A\exp(m_1 x) + B\exp(m_2 x)$$

$$= Ae^{(\alpha+i\beta)x} + Be^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x}) \tag{4.25}$$

ध्यान दें कि यह हल सम्मिश्र है। अब सवाल यह है : क्या हम इसे एक वास्तविक हल के रूप में व्यक्त कर सकते हैं? इसके लिए हम **ऑयलर सूत्र** (Euler's formula) का प्रयोग करते हैं : $$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta \tag{4.26}$$

अब हम लिखते हैं :

$$y_1 = e^{m_1 x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) \tag{4.27क}$$

और $$y_2 = e^{m_2 x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) \tag{4.27ख}$$

फिर हम वास्तविक व्यापक हल को इस तरह लिख सकते हैं :

$$y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 \tag{4.27ग}$$

जहां $$Y_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x \tag{4.27घ}$$

और $$Y_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{4.27च}$$

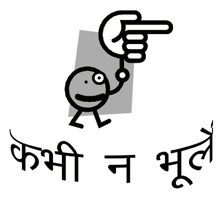
समीकरण 4.27ग में $C_1 = C\cos\phi$ और $C_2 = C\sin\phi$ लेकर हम लिख सकते हैं :

$$y = Ce^{\alpha x}\cos(\beta x - \phi) \tag{4.28}$$

जहां C और ϕ स्वेच्छ अचर हैं। इनका C_1 और C_2 से संबंध होता है :

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \text{और} \quad \tan\phi = \frac{C_2}{C_1} \tag{4.29}$$

अतः, जब सहायक समीकरण के मूल सम्मिश्र होते हैं तब द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण का व्यापक हल एक चरघातांकी फलन (exponential function) और एक त्रिकोणमितीय फलन (trigonometric function) के गुणनफल के रूप में होता है। अतः, हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि



सहायक समीकरण के सम्मिश्र मूलों के लिए व्यापक हल

यदि अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण के संगत सहायक समीकरण के सम्मिश्र मूल $\alpha \pm i\beta$ के रूप के हों, तो व्यापक हल होता है :

$$y = C e^{\alpha x} \cos(\beta x - \phi) \text{ जहां } C \text{ और } \phi \text{ स्वेच्छ अचर है।} \quad (4.28)$$

आइए, अब इस विधि को एक भौतिक निकाय, अनवमंदित कमानी-द्रव्यमान तंत्र, पर लागू करें।

उदाहरण 4.3 : अनवमंदित कमानी-द्रव्यमान तंत्र

एक अनवमंदित कमानी-द्रव्यमान तंत्र x-अक्ष के अनुदिश सरल आवर्त गति करता है (चित्र 4.1 देखें)। इसकी गति को निरूपित करने वाले अवकल समीकरण को हल करें :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{जहां} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

हल ■ इस स्थिति के लिए सहायक समीकरण है : $m^2 + \omega_0^2 = 0$

इसके सम्मिश्र मूल हैं : $m_1 = i\omega_0$ और $m_2 = -i\omega_0$

अतः, व्यापक हल को हम समीकरण 4.28 में $\alpha = 0$ लेकर इस तरह लिख सकते हैं :

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t - \phi)$$

सिद्धान्ततः कमानी-द्रव्यमान निकाय को अनिश्चित काल तक दोलन करते रहना चाहिए। लेकिन व्यवहार में अनेक कारकों की वजह से निकाय की ऊर्जा का ह्रास होता रहता है। इस कारण से दोलनों का आयाम घटने लगता है। अगले उदाहरण में हम इस भाग में समझाई गई विधि को **अवमंदित दोलक** की गति पर लागू करेंगे। लेकिन इससे पहले आप वह सब कुछ दोहरा लें जो आपने इस भाग में अब तक सीखा है।

दोहराएं

अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि अवकल समीकरणों को हल करने की चरघातांकी विधि

- सहायक/अभिलक्षणिक समीकरण और उसके मूल ज्ञात करें, माना कि m_1 और m_2 ।
- **असमान** और **वास्तविक मूलों** के लिए दो रैखिकतः स्वतंत्र हल $\exp(m_1 x)$ और $\exp(m_2 x)$ होते हैं और व्यापक हल होता है :

$$y(x) = C_1 \exp(m_1 x) + C_2 \exp(m_2 x)$$

- **वास्तविक** और **समान** मूलों के लिए दो रैखिकतः स्वतंत्र हल $\exp(mx)$ और $x\exp(mx)$ होते हैं और व्यापक हल होता है :

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\exp(mx)$$

- जब मूल **सम्मिश्र** होते हैं तो दो रैखिकतः स्वतंत्र हल $\exp(\alpha x)\sin\beta x$ और $\exp(\alpha x)\cos\beta x$ होते हैं और व्यापक हल होता है :

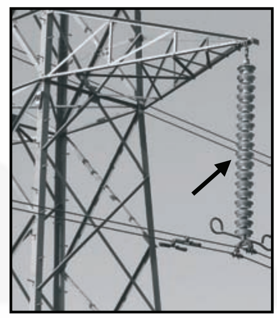
$$y(x) = \exp(\alpha x)(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x) = C\exp(\alpha x)\cos(\beta x - \phi)$$

उदाहरण *4.4* : अवमंदित कमानी-द्रव्यमान तंत्र

वायु प्रतिरोध बल के कारण अवमंदित एक कमानी-द्रव्यमान तंत्र लें (चित्र 4.2)। मान लें कि वायु प्रतिरोध बल वेग के समानुपाती है। इसकी गति का वर्णन इस अवकल समीकरण द्वारा किया जाता है :

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

जहां M द्रव्यमान है, k कमानी नियतांक और γ अवमंदन गुणांक है। इसके संगत सहायक समीकरण के मूल ज्ञात करें।



चित्र 4.2: संचरण लाइन में अवमंदित कमानी-द्रव्यमान तंत्र का उदाहरण।

हल ■ हम दिए गए गति समीकरण को इस तरह लिखते हैं :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \text{(i)}$$

जहां हमने $2b = \gamma/M$ और $\omega_0^2 = k/M$ रखा है। समीकरण (i) और समीकरण 4.9 की तुलना करके हम संगत सहायक समीकरण को इस तरह लिख सकते हैं :

$$m^2 + 2bm + \omega_0^2 = 0$$

जिसके मूल हैं : $m_1 = -b + \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$ और $m_2 = -b - \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$

ये मूल अवमंदन पर निर्भर करते हैं और दोलक की गति निर्धारित करते हैं। $(b^2 - \omega_0^2)^{1/2}$ के मान के अनुसार तीन संभावनाएं हो सकती हैं :

स्थिति 1 : यदि $b > \omega_0$ हो तो $\sqrt{b^2 - \omega_0^2}$ धनात्मक होगा और दोनों मूल **वास्तविक** एवं **असमान** होंगे।

स्थिति 2 : यदि $b = \omega_0$ हो तो $b^2 - \omega_0^2 = 0$ और दोनों मूल **वास्तविक** एवं **समान** होंगे।

स्थिति 3 : यदि $b < \omega_0$ हो तो $b^2 - \omega_0^2$ ऋणात्मक होगा और $\sqrt{b^2 - \omega_0^2}$ काल्पनिक होगा। तब हमें सम्मिश्र संयुग्मी मूल युग्म प्राप्त होंगे।

अतः, अवमंदित कमानी-द्रव्यमान निकाय के गति समीकरण को हम ऐसे लिख सकते हैं

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (4.30)$$

अब हम इसके मान्य हल ज्ञात करेंगे। यहां यह बताना महत्वपूर्ण है कि उदाहरण 4.4 के तीन मूलों के संगत हल इस पाठ्यक्रम के खंड 4 की इकाई 18 में प्रयुक्त होंगे। अतः, आप इनको ध्यानपूर्वक समझें।

स्थिति 1 : वास्तविक और असमान मूल

जब मूल **वास्तविक** और **असमान** होते हैं, तो समीकरण 4.30 का व्यापक हल होता है

$$x(t) = \exp(-bt)[C_1 \exp(\beta t) + C_2 \exp(-\beta t)] \qquad (4.31)$$

आप अवमंदित दोलनों के बारे में विस्तार से इकाई 18 में पढ़ेंगे।

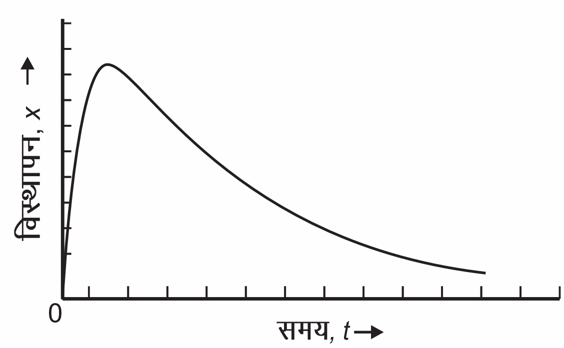
जहां $\beta = \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$ ।

यह अदोलायमान (non-oscillatory) गति को निरूपित करता है। इस तंत्र को **प्रबल अवमंदित** कहते हैं तथा ऐसी गति को **रूद्ध दोल** (dead beat) कहते हैं। ऐसे किसी भी तंत्र का विस्थापन प्रारंभिक प्रतिबंधों के प्रयोग से प्राप्त किया जाता है। ये समझने के लिए कि ऐसा किस तरह किया जाता है, हम चाहेंगे कि आप यह बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 4 – अवमंदित दोलक

एक प्रबल अवमंदित दोलक को उसकी साम्य स्थिति से अचानक विस्थापित किया जाता है जिससे कि $t = 0$ पर $x = 0$ और $\frac{d}{dt}x(0) = v_0$ हैं। इस दोलक के परिणामी विस्थापन का व्यंजक प्राप्त करें और उसकी व्याख्या करें।

बोध प्रश्न 4 को हल करने पर आपने देखा होगा कि अतिअवमंदित दोलक के विस्थापन को वर्धमान अतिपरवलियक फलन (hyperbolic function) और ह्रासमान चरघातांकी फलन (decaying exponential) निर्धारित करते हैं। इसके फलस्वरूप विस्थापन में प्रांरभ में वृद्धि होती है और उसका मान अधिकतम होता है तथा फिर वह चरघातांकी फलन की तरह घटता है (चित्र 4.3)।



चित्र 4.3 : प्रबल अवमंदित कमानी-द्रव्यमान तंत्र के लिए विस्थापन-समय आरेख।

स्थिति 2 : पुनरावृत्त वास्तविक मूल

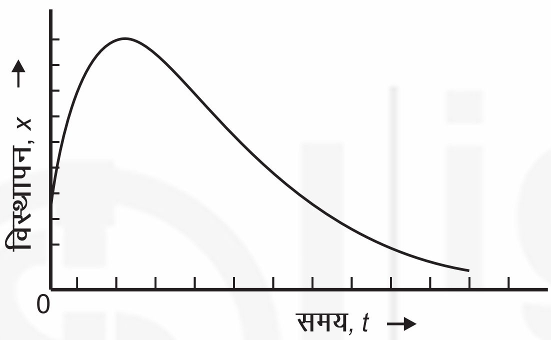
जब सहायक समीकरण के मूल वास्तविक एवं पुनरावृत्त होते हैं तो समीकरण 4.30 का व्यापक हल होता है :

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)\exp(-bt) \qquad (4.32)$$

यहां ध्यान दें कि C_1 की विमा लंबाई की और C_2 की विमा वेग की है। वास्तविक और असमान मूलों वाली स्थिति की तरह, आदि प्रतिबंधों को लागू करके इन अचरों को ज्ञात किया जा सकता है। बोध प्रश्न 4 में दिए गए आदि प्रतिबंधों के लिए आप जांच सकते हैं कि $C_1 = 0$ और $C_2 = v_0$ और तब हल होता है :

$$x(t) = v_0 t \exp(-bt) \qquad (4.33)$$

ऐसे तंत्र को **क्रांतिकतः अवमंदित (critically damped)** कहा जाता है। क्रांतिकतः अवमंदित कमानी-द्रव्यमान तंत्र का प्रारूपी आरेख चित्र 4.4 में दिखाया गया है।



चित्र 4.4: क्रांतिकतः अवमंदित कमानी-द्रव्यमान निकाय का विस्थान-समय आरेख।

स्थिति 3 : सम्मिश्र मूल

जब मूल सम्मिश्र होते हैं तो हम लिखते हैं :

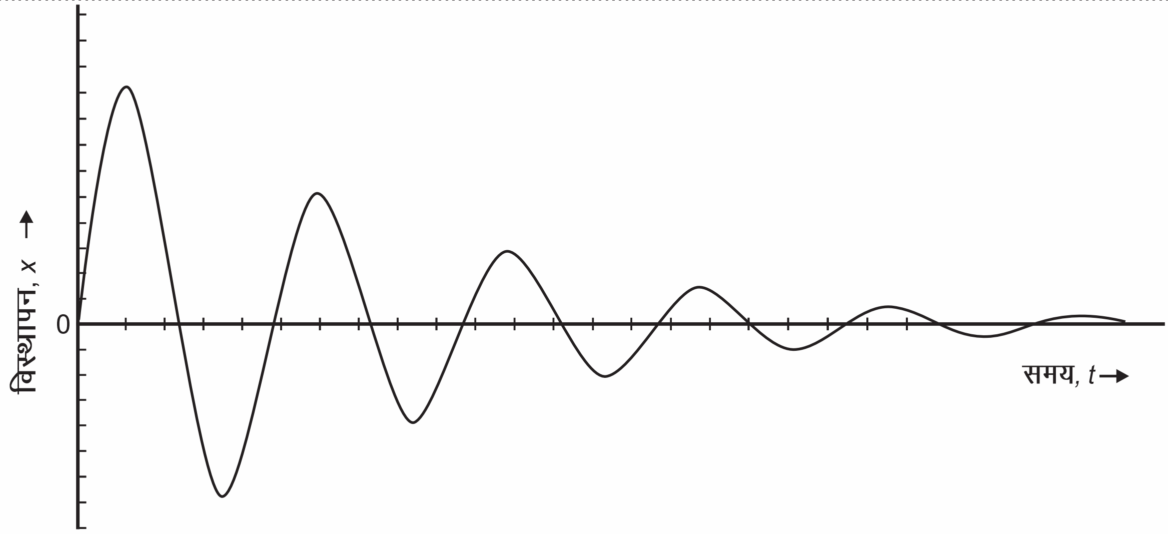
$$\sqrt{b^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-1}(\omega_0^2 - b^2)^{1/2} = i\,\omega_d$$

जहां $i = \sqrt{-1}$ और $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$ एक वास्तविक धनात्मक राशि है। अतः, समीकरण 4.28 से विस्थापन का व्यंजक होता है :

$$x(t) = C\exp(-bt)\cos(\omega_d t - \phi) \qquad (4.34)$$

जहां C और ϕ स्वेच्छ अचर हैं।

ध्यान दें कि समीकरण 4.34 एक ऐसे दोलन को निरूपित करता है जिसका आयाम, ह्रास दर b द्वारा चरघातांकी रूप से घटता है। ऐसे तंत्र को **न्यून अवमंदित** (weakly damped) तंत्र कहते हैं। न्यून अवमंदित तंत्र के विस्थापन को चित्र 4.5 में दिखाया गया है। भौतिक दृष्टि से यह सबसे महत्वपूर्ण स्थिति है।



चित्र 4.5 : न्यून अवमंदित कमानी-द्रव्यमान तंत्र के दोलन।

आइए, अब हम इस इकाई की विषयवस्तु का सारांश दें।

4.4 सारांश

अवधारणा	विवरण
रैखिकतः स्वतंत्र हल, रांसकियन	■ यदि y_1 और y_2 द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण के हल हों तो ये तभी रैखिकतः स्वतंत्र हल हो सकते हैं जब उनका रांसकियन शून्येतर हो। गणितीय भाषा में हम इसे इस तरह व्यक्त करते हैं : $$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$
अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि समघात साधारण अवकल समीकरण	■ अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि समघात साधारण अवकल समीकरण को कोटि लघुकरण तथा चरघातांकी फलन विधि द्वारा हल कर सकते हैं।
चरघातांकी फलन विधि	■ चरघातांकी फलन विधि में हल का रूप सहायक समीकरण के मूलों की प्रकृति पर निर्भर करता है : ➢ **वास्तविक** परन्तु **असमान मूलों** के लिए $\exp(m_1x)$ और $\exp(m_2x)$ के रूप में दो रैखिकतः स्वतंत्र फलन प्राप्त होते हैं और व्यापक हल होता है : $$y(x) = C_1 \exp(m_1x) + C_2 \exp(m_2x)$$ ➢ **पुनरावृत्त वास्तविक मूलों** के लिए $(m_1 = m_2 = m)$, व्यापक हल होता है : $$y(x) = (C_1 + C_2x)\exp(mx)$$ ➢ **सम्मिश्र संयुग्मी मूल युग्म** के लिए दो रैखिकतः स्वतंत्र हल $\exp(\alpha x)\sin\beta x$ और $\exp(\alpha x)\cos\beta x$ होते हैं और व्यापक हल होता है : $$y(x) = \exp(\alpha x)(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x) = C\exp(\alpha x)\cos(\beta x - \phi)$$

4.5 अंत में कुछ प्रश्न

1. निम्नलिखित द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों के व्यापक हल ज्ञात करें :

   i) $y'' + y' - 12y = 0$

   ii) $2y'' + 3y' - y = 0$

   iii) $4y'' + 12y' + 9y = 0$

   iv) $y'' - 2y' + y = 0$

   v) $y'' + 10y' + 26y = 0$

   vi) $y'' + 2y' + y = 0$

2. निम्नलिखित आदि-मान समस्याओं को हल करें :

   i) $y'' + 16y = 0; \quad y(\pi/4) = -1; \; y'(\pi/4) = 4$

   ii) $4y'' - 4y' + y = 0; \quad y(0) = 2; \; y'(0) = -1$

3. निम्नलिखित परिसीमा-मान समस्याओं को हल करें :

   i) $4y'' + y = 0; \quad y(0) = 3; \; y(\pi) = -2$

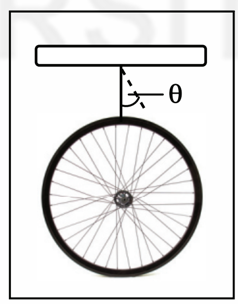
   ii) $y'' - 6y' + 9y = 0; \quad y(0) = 2; \; y(1) = 0$

4. एक श्रेणी LCR परिपथ में एक प्रेरक L, संधारित्र C और प्रतिरोध R को श्रेणी में जोड़ा जाता है। परिपथ में प्रवाहित आवेश q का समय के साथ परिवर्तन इस समीकरण से दिया जाता है : $L\dfrac{d^2q}{dt^2} + R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{C} = 0$

   इस समीकरण को हल करें और आवेश q का मान समय के फलन के रूप में ज्ञात करें।

5. एक पतले प्रत्यास्थ तार से जुड़े पहिये के मरोड़ी अनवमंदित कंपनों का समीकरण होता है : $I\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + k\theta = 0$

   जहां I पहिये के केंद्र से होकर जाने वाले अक्ष के प्रति पहिये का जड़त्व आघूर्ण है और k तार का मरोड़ी नियतांक है। कोण θ साम्य स्थिति से कोणीय विस्थापन है (चित्र 4.6)। निम्न प्रतिबंधों के अधीन समीकरण को हल करें और θ का मान समय t के फलन के रूप में ज्ञात करें : $k/I = 16\,\text{s}^{-1}$, $\theta(t=0) = 30°$, $\dot{\theta}(t=0) = 10\,\text{rad s}^{-1}$।



चित्र 4.6 : एक पहिये के मरोड़ी कंपन।

4.6 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. दिए गए समीकरण के हल हैं $\sin 2x$ और $\cos 2x$। यह जांचने के लिए कि ये फलन रैखिकतः स्वतंत्र हैं या नहीं, हमें इनका रांसकियन परिकलित करना होगा :

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix} = -2\sin^2 2x - 2\cos^2 2x \ = -2$$

चूंकि x के सभी मानों के लिए $W(x) \neq 0$, अतः, फलन $\sin 2x$ और $\cos 2x$ रैखिकतः स्वतंत्र हैं।

2. दिए गए समीकरण के संगत सहायक समीकरण है : $m^2 - 5m + 6y = 0$ (i)

समीकरण (i) के मूल 3 और 2 हैं। अतः, व्यापक हल है :

$$y(x) = C_1 \exp(3x) + C_2 \exp(2x) \quad \text{(ii)}$$

C_1 और C_2 के मान ज्ञात करने के लिए हम पहले प्रतिबंध $y(0) = 2$ का प्रयोग करते हैं। अतः,

$$C_1 + C_2 = 2 \Rightarrow C_1 = 2 - C_2 \quad \text{(iii)}$$

अब दूसरे प्रतिबंध $y'(0) = 2$ का प्रयोग करने के लिए हम समीकरण (ii) का x के सापेक्ष अवकलन करते हैं। तब

$$y'(x) = 3C_1 \exp(3x) + 2C_2 \exp(2x) \ \Rightarrow y'(0) = 2 = 3C_1 + 2C_2 \quad \text{(iv)}$$

समीकरण (iv) में समीकरण (iii) से C_1 का मान रखने पर हम देखते हैं कि

$$2 = 3(2 - C_2) + 2C_2 \ = 6 - C_2 \quad \text{यानी} \quad C_2 = 4 \quad \text{और} \quad C_1 = -2$$

अतः, अभीष्ट विशेष हल है : $y(x) = -2\exp(3x) + 4\exp(2x)$

3. दिए गए साधारण अवकल समीकरण के संगत सहायक समीकरण है :

$$m^2 + 6m + 9 = 0$$

इस समीकरण का एक पुनरावृत्त मूल $m = -3$ है। अतः, स्वीकृत व्यापक हल है :

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\exp(-3x) \quad \text{(i)}$$

प्रतिबंध $y(0) = 2$ से हमें C_1 का मान प्राप्त हो जाता है : $C_1 = 2$ (ii)

x के सापेक्ष समीकरण (i) का अवकलन करने पर हमें मिलता है :

$$\frac{dy}{dx} = C_2 \exp(-3x) - 3(C_1 + C_2 x)\exp(-3x)$$

प्रतिबंध $y'(0) = 1$ से हमें मिलता है : $C_2 - 3C_1 = 1 \Rightarrow C_2 = 7$ (iii)

अतः, विशेष हल है : $y(x) = (2 + 7x)\exp(-3x)$

4. याद करें कि समीकरण 4.31 से प्रबल अवमंदित तंत्र के लिए

$$x(t) = \exp(-bt)[C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t}] \quad \text{(i)}$$

जहां $\beta = \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$ । दिया है कि $t = 0$ पर $x = 0$ ।

$\therefore \quad 0 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = -C_2$

(i) का t के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें मिलता है :

$$\frac{dx}{dt} = \left[C_1 e^{\beta t - bt}(\beta - b) - C_2 \exp^{-\beta t - bt}(\beta + b)\right]$$

$$\therefore \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v_0 = (\beta - b)C_1 - C_2(\beta + b) = (\beta - b)C_1 + C_1(\beta + b)$$

$$= 2\beta C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{v_0}{2\beta} \quad \text{और} \quad C_2 = -\frac{v_0}{2\beta}$$

अतः, $$x(t) = \exp(-bt)\,\frac{v_0}{2\beta}[\exp(\beta t) - \exp(-\beta t)] = \frac{v_0}{\beta}\sinh\beta t\, e^{-bt}$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. i) दिए गए साधारण अवकल समीकरण का सहायक समीकरण है :

$$m^2 + m - 12 = 0$$

हम इसे इस तरह लिख सकते हैं : $(m+4)\,(m-3) = 0$

सहायक समीकरण के मूल हैं : – 4 और 3

अतः, इसका व्यापक हल है : $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{3x}$

ii) सहायक समीकरण है : $2m^2 + 3m - 1 = 0$

सहायक समीकरण के मूल हैं : $m_1 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}$, $m_2 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{4}$

अतः इसका व्यापक हल है : $y = e^{-3x/4}\left[C_1 e^{\sqrt{17}x/4} + C_2 e^{-\sqrt{17}x/4}\right]$

iii) सहायक समीकरण है : $4m^2 + 12m + 9 = 0$

इसके पुनरावृत्त और समान मूल हैं : $m_1 = -3/2 = m_2$

चूंकि मूल पुनरावृत्त और समान हैं, अतः, दिए गए साधारण अवकल समीकरण का व्यापक हल है : $y = (C_1 + C_2 x)e^{-(3/2)x}$

iv) सहायक समीकरण है : $m^2 - 2m + 1 = 0$

इसके पुनरावृत्त और समान मूल हैं : $m_1 = 1 = m_2$

दिए गए साधारण अवकल समीकरण का व्यापक हल है : $y = (C_1 + C_2 x)e^x$

v) सहायक समीकरण है : $m^2 + 10m + 26 = 0$

सहायक समीकरण के मूल हैं : $m_1 = -5 + i$, $m_2 = -5 - i$

समीकरण 4.28 से दिए गए साधारण अवकल समीकरण का व्यापक हल है :

$$y = Ce^{-5x}\cos(x - \phi)$$

vi) सहायक समीकरण है : $m^2 + 2m + 1 \Rightarrow (m+1)^2 = 0$

इसका पुनरावृत्त और समान मूल है : $m = -1$

व्यापक हल है : $y(x) = (C_1 + C_2 x)\exp(-x)$

2. i) साधारण अवकल समीकरण के संगत सहायक समीकरण है : $m^2 + 16 = 0$

सहायक समीकरण के मूल हैं : $m_1 = 4i$, $m_2 = -4i$

अतः, समीकरण 4.27ग से दिए गए समीकरण का व्यापक हल है :

$$y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x \qquad \text{(i)}$$

जहां C_1 और C_2 अचर हैं। इन्हें ज्ञात करने के लिए हम आदि प्रतिबंध लागू करते हैं। अतः,

$$y(\pi/4) = -1 \Rightarrow C_1 \cos\pi + C_2 \sin\pi = -1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1 \qquad \text{(ii)}$$

चूंकि $\sin\pi = 0$ और $\cos\pi = -1$ । साथ ही, $y'(\pi/4) = 4$

अतः, $-4C_1 \sin\pi + 4C_2 \cos\pi = 4 \Rightarrow -4C_2 = 4 \Rightarrow C_2 = -1$ (iii)

$\therefore$ हल है : $y = \cos 4x - \sin 4x$

ii) साधारण अवकल समीकरण के संगत सहायक समीकरण है :

$4m^2 - 4m + 1 = 0$ और इसके मूल हैं : $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$

अतः, दिए गए समीकरण का व्यापक हल है : $y = (C_1 + C_2 x)e^{x/2}$ (i)

आदि प्रतिबंध $y(0) = 2$ लागू करने पर हमें मिलता है : $C_1 = 2$ (ii)

समीकरण (i) को x के सापेक्ष अवकलित करने पर हमें मिलता है :

$$y'(x) = \frac{1}{2}(C_1 + C_2 x)e^{x/2} + C_2 e^{x/2} \qquad \text{(iii)}$$

आदि प्रतिबंध $y'(0) = -1$ लागू करने पर हमें मिलता है :

$$y'(0) = -1 \Rightarrow \frac{C_1}{2} + C_2 = -1 \Rightarrow C_2 = -2 \qquad \text{(iv)}$$

अतः, दिए गए समीकरण का व्यापक हल है : $y = 2(1 - x)e^{x/2}$

3. i) साधारण अवकल समीकरण के संगत सहायक समीकरण है : $4m^2 + 1 = 0$

इसके मूल हैं : $m_1 = \frac{1}{2}i$ और $m_2 = -\frac{1}{2}i$

समीकरण 4.27ग से व्यापक हल है : $y(x) = C_1 \cos\frac{x}{2} + C_2 \sin\frac{x}{2}$

$x = 0$ पर $y(x) = 3 \Rightarrow 3 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \Rightarrow C_1 = 3$ चूंकि $\sin 0 = 0$ और $\cos 0 = 1$

$x = \pi$ पर $y(x) = -2 \Rightarrow -2 = C_1 \cos(\pi/2) + C_2 \sin(\pi/2) \Rightarrow C_2 = -2$

चूंकि $\sin\pi/2 = 1$ और $\cos\pi/2 = 0$ ।

अतः, दिए गए समीकरण का विशेष हल है : $y(x) = 3\cos\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}$

ii) सहायक समीकरण है $m^2 - 6m + 9 = 0$, जिसके मूल वास्तविक और पुनरावृत्त हैं : $m_1 = m_2 = 3$

अतः, दिए गए समीकरण का व्यापक हल है : $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$

$x = 0$ पर $y(x) = 2 \Rightarrow C_1 = 2$

$x = 1$ पर $y(1) = 0 \Rightarrow 0 = (2 + C_2)e^3 \Rightarrow C_2 = -2$

अतः, दिए गए समीकरण का विशेष हल है : $y(x) = (2 - 2x)e^{3x}$

4. साधारण अवकल समीकरण को हम इस तरह लिख सकते हैं :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0$$

इसके संगत सहायक समीकरण है : $m^2 + \frac{R}{L}m + \frac{1}{LC} = 0$

इसके मूल हैं : $m_{1,2} = \dfrac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}}{2} \quad = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2L}\left[R^2 - \frac{4L}{C}\right]^{1/2}$

अतः, समीकरण 4.17 से दिए गए समीकरण का व्यापक हल है :

$$q(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}[C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}]$$

जहां $\alpha = \frac{1}{2L}\sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}$

5. साधारण अवकल समीकरण को हम इस तरह लिख सकते हैं :

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{I}\theta = 0, \quad \frac{k}{I} = 16\,\text{s}^{-1}$$

सहायक समीकरण है : $m^2 + 16 = 0 \Rightarrow m_1 = 4i, \quad m_2 = -4i$

अतः, समीकरण 4.27ग से व्यापक हल है : $\theta(t) = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t$ (i)

समीकरण (i) में $t = 0$ पर $\theta = 30° = \frac{\pi}{6}$ rad रखने पर $C_1 = \pi/6$

समीकरण (i) को t के सापेक्ष अवकलित करने पर हमें मिलता है :

$$\dot{\theta}(t) = -4C_1 \sin 4t + 4C_2 \cos 4t \quad \text{(ii)}$$

समीकरण (ii) में $t = 0$ पर $\dot{\theta}(t) = 10\,\text{rad s}^{-1}$ रखने पर $C_2 = \frac{5}{2}$

समीकरण (i) में C_1 और C_2 रखने पर हमें मिलता है :

$$\theta(t) = \frac{\pi}{6}\cos 4t + \frac{5}{2}\sin 4t$$

परिशिष्ट

कलन की बुनियादी अवधारणाएं

यांत्रिकी की पढ़ाई में कलन की अवधारणाएं इस्तेमाल की जाती हैं। इसलिए ये अवधारणाएं आपके लिए नयी नहीं हैं। पर फिर भी यहां हम अवकलज और समाकल की बुनियादी अवधारणाओं को दोहराएंगे। हम आशा करते हैं कि आपने (+ 2) या ग्यारहवीं-बारहवीं कक्षा में गणित पढ़ा है। अगर आपने बी.एस.सी. में भौतिकी, रसायन विज्ञान और गणित विषय लिए हैं तो आप कलन पर गणित का पाठ्यक्रम पढ़ेंगे। तब आपके लिए यह परिशिष्ट पढ़ना शायद उतना ज़रूरी न हो।

इस परिशिष्ट में हम फलन के अवकलज और समाकल की बुनियादी अवधारणाओं को जो इस पाठ्यक्रम में इस्तेमाल होंगी, संक्षेप में दोहराएंगे। इन अवधारणाओं को आप अच्छी तरह समझें। तब आप इस पाठ्यक्रम में दी गई भौतिकी को बेहतर समझ पाएंगे।

क1.1 अवकलज की अवधारणा

गणितीय रूप से फलन एक नियम है जो समुच्चय A में हर संख्या x को समुच्चय B में एक अद्वितीय संख्या $y = f(x)$ से सम्बंधित करता है।
आप **फलन** को y और x के बीच के समीकरण के रूप समझ सकते हैं। समीकरण में x के किसी भी मान के संगत y का सिर्फ़ एक अद्वितीय मान होगा।

अवकलज की अवधारणा भौतिकी में बहुत उपयोगी है। उदाहरण के लिए, आपने अपनी स्कूल की भौतिकी में पढ़ा है कि इसका इस्तेमाल करने से गति का वर्णन काफ़ी आसान हो जाता है। यांत्रिकी में हमें समय के साथ दूरी और विस्थापन के **परिवर्तन** का वर्णन करना होता है। साथ ही, हमें समय के साथ किसी पिंड की चाल/वेग में **परिवर्तन** का वर्णन करना होता है।

मान लें कि कोई राशि y, x के सापेक्ष बदल रही है। हम कहते हैं कि y, x का **फलन** हैं। यहां y को आश्रित चर और x को स्वतंत्र चर कहा जाता है। मसलन, तय की गयी दूरी d समय t के साथ बदलती है और हम कहते हैं कि d, t का फलन है (यहां हम फलन की शुद्ध गणितीय परिभाषा नहीं देंगे। इसे हमने हाशिये में केवल जानकारी के लिए दिया है।)

अब मान लें कि हमें यह मालूम करना है कि x में परिवर्तन होने पर कोई फलन y किस तरह बदलता है। उदाहरण के लिए, मान लें कि एक पिंड द्वारा चली गयी दूरी समय के साथ बदलती है। तब हम पिंड की चाल कैसे ज्ञात करेंगे? हम x के सापेक्ष y में परिवर्तन की दर x के सापेक्ष y का **अवकलज** निकाल कर ज्ञात कर सकते हैं। **हम किसी राशि का अवकलज कैसे प्राप्त करते हैं?**

अवकलज की गणना हम दो तरह से कर सकते हैं : एक **ज्यामितीय तरीके** से (वक्र की प्रवणता के पदों में) और दूसरे **भौतिकीय** तरीके से (**परिवर्तन की दर** के पदों में)। यहां हम दोनों तरीकों की चर्चा करेंगे। यहां हम अवकलज को भौतिकी में एक गणितीय साधन के रूप में इस्तेमाल करेंगे न कि शुद्ध गणितीय तौर पर। आइये, पहले हम अवकलज की ज्यामितीय अवधारणा पर चर्चा करें।

अवकलज की ज्यामितीय अवधारणा

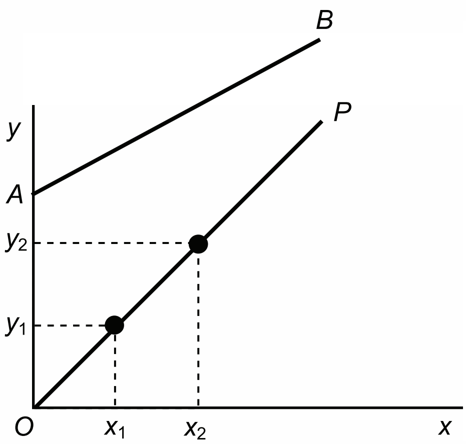
मान लें कि एक राशि y, x पर निर्भर करती है और x और y वास्तविक संख्याएं हैं। आइये, पहले हम रैखिक फलन $y = x$ का उदाहरण लें। आप इसका आरेख खींचें। यह मूल बिंदु से गुज़रने वाली एक सरल रेखा है (चित्र A1.1 में OP)। इस चित्र में हमने इस सरल रेखा को द्विविम कार्तीय निर्देशांक तंत्र में खींचा है।

अब हम जानना चाहेंगे : इस सरल रेखा की प्रवणता क्या है?

सरल रेखा की प्रवणता की गणना के लिए हम इस रेखा पर दो बिंदु चुनते हैं और उनके y-मानों में अंतर को उनके संगत x-मानों के अंतर से भाग देते हैं।

इस अभ्यास को चित्र क1.1 में भिन्न बिंदु-युग्मों के लिए करें। अब बताएं सरल रेखा $y = x$ की प्रवणता का क्या मान है? आप पाएंगे कि इसका मान 1 है। अब हम चित्र क1.1 में एक और सरल रेखा AB खींचते हैं। इसकी प्रवणता क्या है?

आप यदि हम y बनाम x का आरेख खींचें तो अवकलज, प्रत्येक बिंदु पर आरेख की प्रवणता के बराबर होता है। y और x का संबंध $y = f(x)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है, जहां, f फलन का प्रतीक है।



चित्र क1.1 : सरल रेखा की प्रवणता।

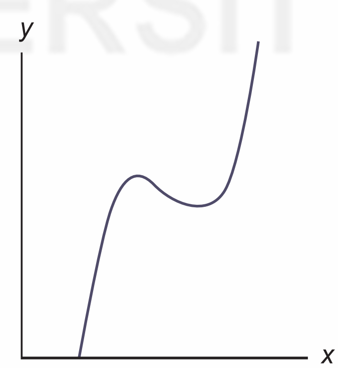
इसकी गणना आप वक्र पर कोई दो बिंदु (x_1, y_1) और (x_2, y_2) ले कर और निम्नलिखित अनुपात ज्ञात करके कर सकते हैं :

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

यहां Δy अंतर $(y_2 - y_1)$ का प्रतीक है और इसे हम ''डेल्टा y'' कहते हैं। इसी तरह Δx अंतर $(x_2 - x_1)$ का प्रतीक है और इसे हम ''डेल्टा x'' कहते हैं।

सरल रेखा की प्रवणता अनुपात $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ के बराबर है।

आपने देखा कि ''प्रवणता'' की अवधारणा रैखिक फलनों पर आसानी से लागू की जा सकती है। यह y में परिवर्तन को x में परिवर्तन से भाग देने पर प्राप्त होती है। किसी सरल रेखा की प्रवणता ज्ञात करने के लिए उस पर स्थित किन्हीं भी दो बिंदुओं को लिया जा सकता है क्योंकि **इसकी प्रवणता का मान अचर रहता है।**



चित्र क1.2 : किसी दिए हुए बिंदु पर वक्र की प्रवणता क्या होती है?

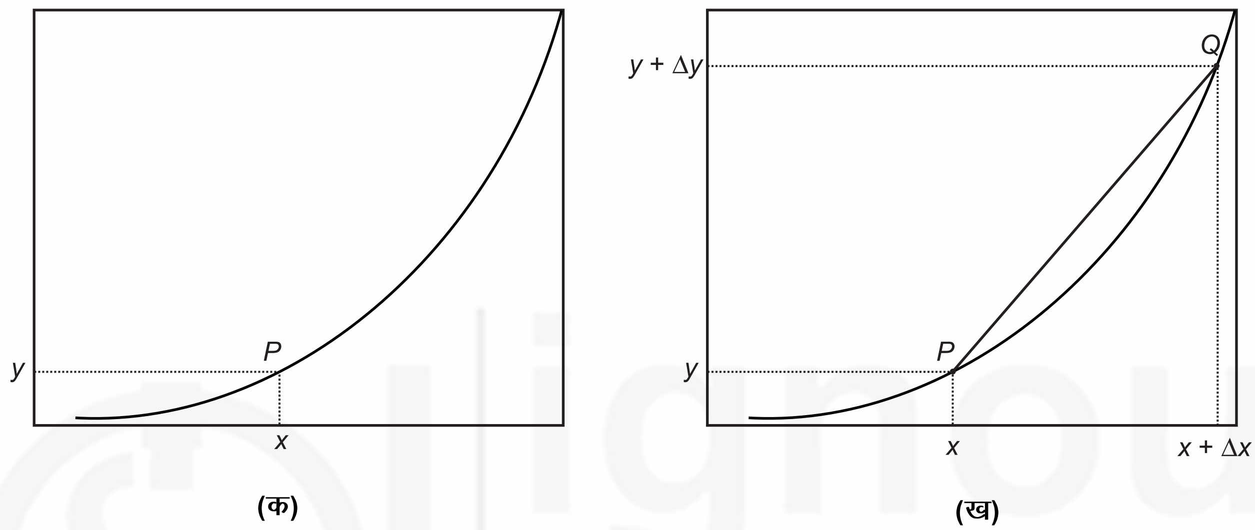
आइये, अब हम चित्र क1.2 में दिखाए गए आरेख की प्रवणता ज्ञात करें जो फलन $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3$ का आरेख है। आप देख सकते हैं कि इस आरेख की कोई एक प्रवणता नहीं है बल्कि वक्र के हर भिन्न बिंदु पर उसकी प्रवणता भिन्न है। अतः, उन फलनों के लिए जो रैखिक नहीं होते, हम किसी बिंदु विशेष पर ही उनकी प्रवणता की बात कर सकते हैं। ऐसे वक्रों की किसी दिए बिंदु पर प्रवणता कैसे प्राप्त की जाती है?

किसी बिंदु पर वक्र की प्रवणता

यह समझने के लिए कि क्या किया जाना है, आइये, हम x के किसी फलन y को लें और उस पर कोई बिंदु P लें (चित्र क1.3क)। हमें इस बिंदु P पर वक्र की प्रवणता

प्राप्त करनी है। मान लें कि बिंदु के निर्देशांक (x, y) हैं। आपने सीखा है कि प्रवणता प्राप्त करने के लिए वक्र पर कोई दो बिंदु लेकर हमें $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ का मान निकालना होता है।

चूंकि हमें वक्र के बिंदु P पर उसकी प्रवणता निकालनी है, इसलिए हमें इनमें से एक बिंदु तो (x, y) लेना चाहिए। पर हम दूसरा बिंदु कौन सा चुनें? आप कह सकते हैं कि किसी भी दूसरे बिंदु को चुनने से हमें सही जवाब नहीं मिलेगा क्योंकि हमारी दिलचस्पी उस एक बिंदु (x, y) पर प्रवणता ज्ञात करने में है। फिर भी, आइये हम एक और बिंदु Q लें जो x-अक्ष पर बिंदु P से Δx की दूरी पर है यानी इसका x निर्देशांक $x + \Delta x$ है (चित्र क1.3ख)। मान लें कि इसका y निर्देशांक $y + \Delta y$ है।



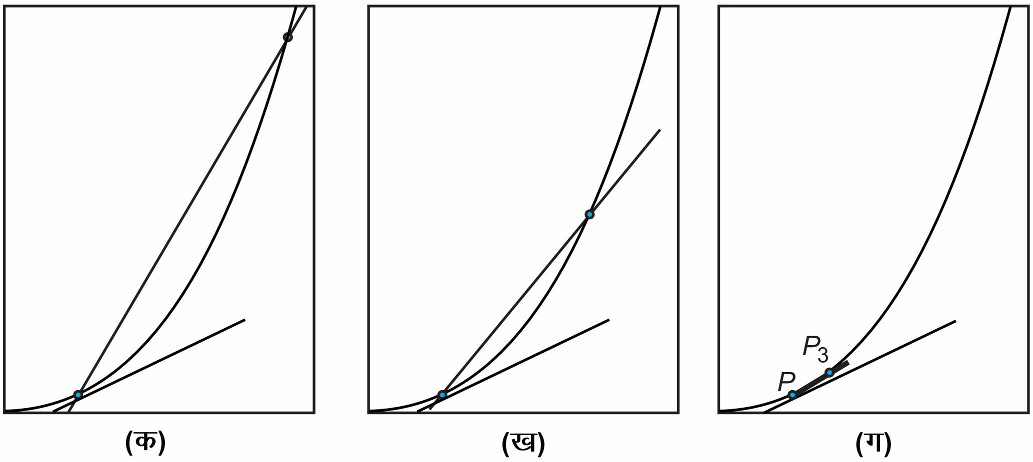
चित्र क1.3 : क) वक्र पर कोई बिंदु $P(x, y)$; ख) वक्र के बिंदु $P(x, y)$ और बिंदु $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ के बीच उसकी प्रवणता।

आइए, अब हम बिंदुओं $P(x, y)$ और $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ से **गुज़रने वाली सरल रेखा** की प्रवणता की गणना करें। इसका मान है $\Delta y/\Delta x$। आप देख सकते हैं कि यह बिंदु P पर वक्र की प्रवणता के बराबर नहीं है। अब आइये, हम बिंदु Q को बिंदु P के ज़्यादा से ज़्यादा नज़दीक ले जायें यानी Δx का मान कम से कम कर दें। ऐसा करने पर क्या होता है? चित्र क1.4 देखें।

चित्र क1.4क, ख और ग को ध्यान से देखें। ध्यान दें कि जैसे-जैसे Δx का मान कम होता जाता है, उसके संगत वक्र का वह हिस्सा एक सरल रेखा जैसा हो जाता है।

आप वक्र के किसी भी भाग को लें जिसके लिए Δx का मान बहुत कम हो। चूंकि वक्र संतत है, इसलिए Δx के बहुत छोटे मान के संगत वह वक्र लगभग एक सरल रेखा जैसा है। उदाहरण के लिए, चित्र क1.4ग में, बिंदुओं P_3 और P के बीच का हिस्सा लगभग एक सरल रेखा है।

वास्तव में, जैसे-जैसे Δx का मान कम से कम होता जाता है, बिंदुओं (x, y) और $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ को जोड़ने वाली रेखा की प्रवणता एक अचर मान की ओर अग्रसर होती है। साथ ही, वह रेखा, बिंदु P पर वक्र की स्पर्श रेखा जैसी दिखती है। इसका अर्थ यह भी है कि उस **रेखा की प्रवणता**, वक्र की उस बिंदु पर **स्पर्श रेखा की प्रवणता** की ओर अग्रसर होती है।



चित्र क1.4 : x-अक्ष पर दो बिंदुओं के बीच की दूरी को कम से कमतर करने पर वक्र का वह भाग सरल रेखा जैसा होता जाता है।

इस तरह, अगर हम Δx **का मान अत्यधिक छोटा कर दें तो**, **रेखा की प्रवणता का मान** $\Delta y/\Delta x$, उस बिंदु पर **स्पर्श रेखा की प्रवणता** के मान के अत्यधिक निकट होगा और अचर भी होगा।

अवकलज की परिभाषा हमें इसी प्रक्रिया से मिलती है। किसी दिए हुए बिंदु पर **किसी फलन के अवकलज की ज्यामितीय अवधारणा** निम्नलिखित है :

किसी बिंदु पर फलन का अवकलज

- **उस बिंदु पर फलन के वक्र की प्रवणता के बराबर होता है, और**
- **उस बिंदु पर वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता के बराबर होता है।**

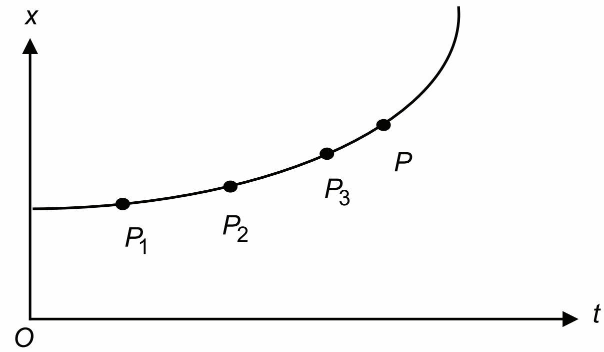
यदि अंतराल Δx का मान अत्यधिक कम रखा जाए ताकि इसका मान शून्य की ओर अग्रसर हो, तो अनुपात $\Delta y/\Delta x$ एक **अचर सीमांत मान** की ओर अग्रसर होता है, जिसे x के सापेक्ष y का **अवकलज** कहते हैं। गणितीय रूप में, हम इस परिणाम को ऐसे लिखते हैं :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta y)}{(\Delta x)} \qquad \text{(क1.1)}$$

हम कहते हैं कि x के सापेक्ष y का अवकलज, $\Delta x \to 0$ की सीमा में, अनुपात $\frac{(\Delta y)}{(\Delta x)}$ के बराबर होता है। फलन का अवकलज स्वयं एक फलन होता है क्योंकि x के प्रत्येक मान के लिए, इसका मान x पर वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता के बराबर होता है।

अवकलज की भौतिक अवधारणा

अवकलज की इस अवधारणा को सबसे पहले न्यूटन ने यांत्रिकी का सिद्धांत देते हुए प्रस्तुत किया था। आपने यांत्रिकी में दो तरह की राशियां देखी हैं : एक अचर राशियां जिनके मान नियत होते हैं, (जैसेकि एक स्थिर पिंड की स्थिति) और दूसरी चर राशियां (जैसेकि गतिमान पिंड द्वारा चली गयी दूरी जो समय के साथ-साथ बदल सकती है)। आइये, हम चित्र क1.5 में दिखाए गए पिंड की एकविम गति लें। यह चित्र दिखाता है कि गतिमान पिंड द्वारा चली गयी दूरी समय पर किस प्रकार निर्भर किरती है।



चित्र क1.5 : गतिमान पिंड का पथ जो भिन्न क्षणों पर उसकी स्थितियां दिखाता है।

यदि हम अधिक विस्तार से बताना चाहें कि पिंड कैसे गति कर रहा है, तो हमें नियमित समयांतरालों में उत्तरोत्तर क्षणों पर उसकी स्थिति की जानकारी होनी चाहिए। उदाहरण के लिए, हम 1s के नियमित समयांतरालों पर एक निर्देशांक तंत्र के सापेक्ष उसकी स्थिति बताना चाह सकते हैं। चित्र क1.5 में हम इन स्थितियों को क्रमिक रूप से बिंदुओं द्वारा दिखा सकते हैं। प्रत्येक उत्तरोत्तर बिंदु, उत्तरोत्तर क्षणों पर पिंड की स्थिति दिखाता है। मान लें कि क्षण t पर पिंड बिंदु P पर है। मान लें कि क्षणों t_1, t_2 और t_3 पर उसकी स्थितियां क्रमशः P_1, P_2 और P_3 हैं।

अब हम जानना चाहते हैं कि पिंड कितनी तेज़ी से चल रहा है। इसके लिए, हमें उसकी चाल (औसत या तात्क्षणिक) पता लगानी होगी। यह हम कैसे करेंगे? इसके लिए, स्कूल की भौतिकी से पिंड की औसत चाल की परिभाषा याद करें :

$$\textbf{औसत चाल} = \frac{\textbf{चली गई कुल दूरी}}{\textbf{लिया गया कुल समय}}$$

क्षणों t_1 और t के बीच जब पिंड बिंदु P_1 से बिंदु P तक चलता है तो उसकी औसत चाल क्या है? चित्र क1.6क से आप देख सकते हैं कि इसका मान है :

$$v_{av} = \frac{(x - x_1)}{(t - t_1)} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{(क1.2क)}$$

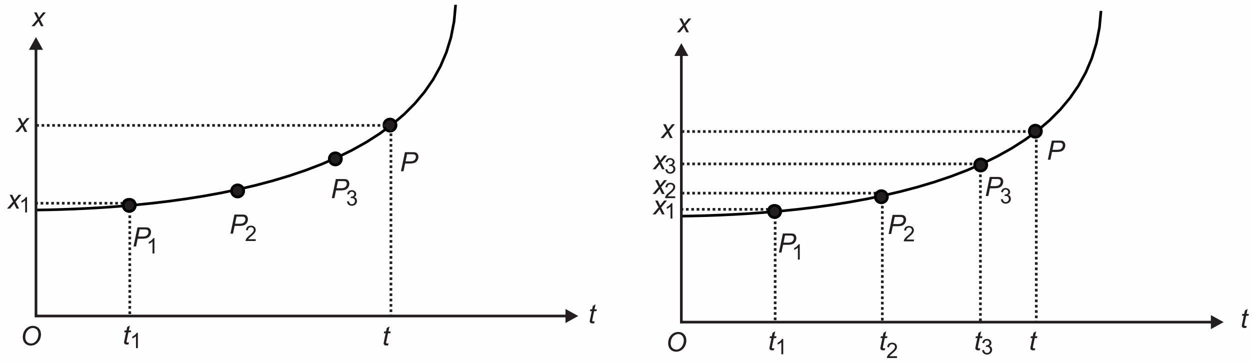
यहां दिए प्रतीक Δt को हम ''डेल्टा t '' कहते हैं और Δx को ''डेल्टा x '' कहते हैं। अब माना कि हम समयांतराल का मान कम कर देते हैं और पूछते हैं : क्षणों t_2 और t के बीच बिंदु P_2 से बिंदु P तक गति करते हुए पिंड की औसत चाल क्या है?

चित्र क1.6ख से इसका मान है :

$$v_{av} = \frac{(x - x_2)}{(t - t_2)} \qquad \text{(क1.2ख)}$$

जैसे-जैसे हम समयांतराल Δt का मान कम करते जाते हैं, हम पाते हैं कि वक्र का इसके संगत हिस्सा लगभग एक सरल रेखा जैसा है। उदाहरण के लिए, चित्र क1.6ख में बिंदुओं P_3 और P के बीच का वक्र का भाग लगभग एक सरल रेखा है। इसके संगत औसत चाल (जो अनुपात $\Delta x / \Delta t$ के बराबर है) वक्र के इस सरल रैखिक भाग के लिए अचर है।

जैसे-जैसे हम समयांतराल Δt का मान और भी कम करते जाते हैं, ताकि Δt शून्य की ओर अग्रसर हो, वैसे-वैसे औसत चाल का मान एक **अचर सीमांत मान** की ओर



(क) (ख)

चित्र क1.6 : गतिमान पिंड का पथ जो भिन्न क्षणों पर उसकी स्थितियां दिखाता है।

अग्रसर होता है, जिसे हम क्षण t पर उसकी **तात्क्षणिक चाल** कहते हैं। इस बात को गणितीय रूप में हम इस तरह लिखते हैं :

$$v_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\Delta x)}{(\Delta t)} = \frac{dx}{dt} \qquad (\text{क}1.3)$$

हम कहते हैं कि **तात्क्षणिक चाल** v_{inst}, $\Delta t \to 0$ **की सीमा में अनुपात** $\frac{(\Delta x)}{(\Delta t)}$ **के बराबर है। इसे हम समय के सापेक्ष दूरी का अवकलज भी कहते हैं। यह हमें समय के साथ दूरी की परिवर्तन दर बताता है।**

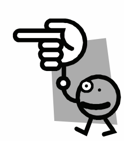
आपको इस सीमांत प्रक्रिया को अच्छी तरह समझ लेना चाहिए। आपके लिए अवकलज **के भौतिक और ज्यामितीय अर्थ को समझना बहुत ज़रूरी है।**

अवकलज का भौतिक और ज्यामितीय अर्थ

अवकलज का भौतिक अर्थ : अवकलज किसी राशि (आश्रित चर जैसेकि दूरी) का किसी दूसरी राशि (स्वतंत्र चर जैसेकि समय) के सापेक्ष परिवर्तन दर बताता है।

अवकलज का ज्यामितीय अर्थ : किसी बिंदु पर फलन का अवकलज, उस बिंदु पर फलन के वक्र की प्रवणता के बराबर होता है। वह उस बिंदु पर उस वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता के बराबर होता है।

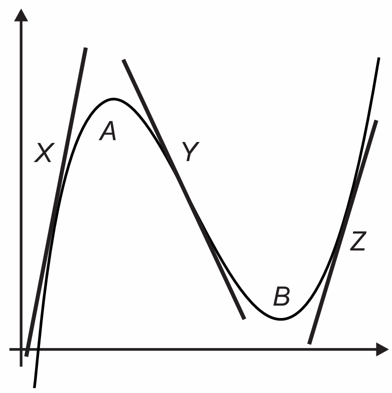
व्यंजक $\frac{dx}{dt}$ **में** dx **और** dt **क्रमशः** d **और** x **या** d **और** t **के गुणनफल नहीं हैं जैसाकि बीजगणित में होता है। संपूर्ण व्यंजक** $\frac{dx}{dt}$ **को अवकलज कहते हैं। यह** t **के सापेक्ष** x **की परितर्वन दर बताता है और बिंदु** t **पर** $x(t)$ **के वक्र की प्रवणता के बराबर होता है।**



कभी न भूलें

आपको **'अवकल'** शब्द का भी अर्थ समझना चाहिए : dx और dt क्रमशः x और t के **अवकल कहलाते हैं**। ये व्यंजक किसी राशि में हुई अत्यल्प परिवर्तन को व्यक्त करते

हैं; dx दूरी x में परिवर्तन को और dt समय t में परिवर्तन को व्यक्त करता है। भौतिकी में परिवर्तनशील निकायों के अध्ययन में अवकल और अवकलज की अवधारणा का काफ़ी इस्तेमाल होता है। ऐसे निकायों को **गतिक (dynamic) निकाय** कहते हैं। आपको इस शब्दावली को याद रखना होगा। इसलिए इन शब्दों को हम नीचे दे रहे हैं।



चित्र क1.7: बिंदु A के बायीं ओर, और बिंदु B के दायीं ओर फलन का अवकलज धनात्मक है। यह फलन के बिंदुओं A और B के बीच ऋणात्मक है और बिंदुओं A और B पर शून्य है। आरेख में दिखाये गए फलन का बिंदु A पर स्थानीय उच्चिष्ठ है और बिंदु B पर स्थानीय निम्निष्ठ है।

गतिक निकायों में परिवर्तन के लिए शब्दावली

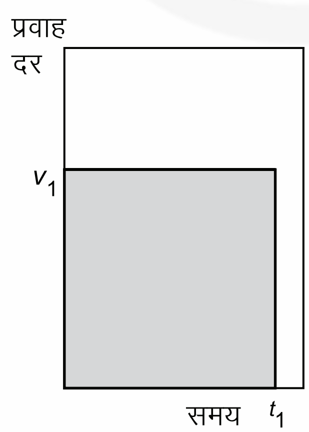
- किसी भी राशि के आगे लगा प्रतीक **डेल्टा** उसमें होने वाले **परिवर्तन** का सूचक है, उदाहरण के लिए, Δx **दूरी में परिवर्तन** का सूचक है।
- dx, x के **अवकल** का प्रतीक है यानी यह **दूरी में अत्यल्प परिवर्तन** दिखाता है;
- $\dfrac{dx}{x}$, **दूरी में भिन्नात्मक परिवर्तन** दिखाता है; और
- $\dfrac{dx}{dt}$ **समय के सापेक्ष दूरी में परिवर्तन दर है।**

आपने अभी तक जो पढ़ा है, उसके आधार पर आप नीचे दिये गए कथनों को भी समझ सकते हैं (देखें चित्र क1.7) :

- यदि किसी बिंदु पर फलन का अवकलज **धनात्मक** (प्रवणता धनात्मक) हो तो इसका अर्थ है कि उस बिंदु पर फलन बढ़ रहा है।
- यदि किसी बिंदु पर अवकलज **ऋणात्मक** (प्रवणता ऋणात्मक) हो तो इसका अर्थ है कि उस बिंदु पर फलन घट रहा है।

कभी-कभी फलन का अवकलज **शून्य** होता है। इसका अर्थ है कि उस बिंदु पर फलन का विशेष व्यवहार है। उस बिंदु पर या तो उसका एक स्थानीय उच्चिष्ठ हो सकता है, या स्थानीय निम्निष्ठ हो सकता है।

क1.2 समाकल की अवधारणा



चित्र क1.8: वक्र के नीचे के क्षेत्रफल के रूप में समाकल।

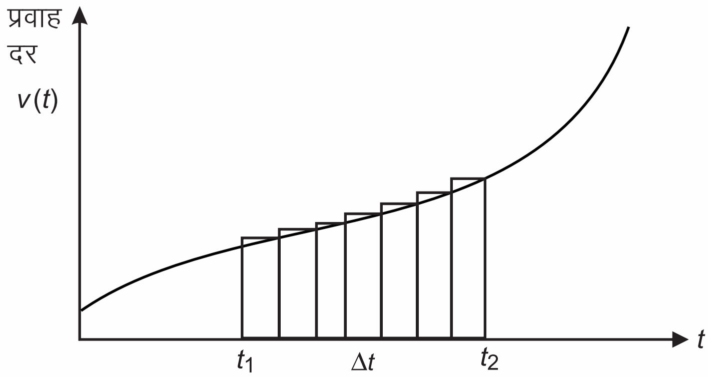
आप समाकलन की ज़रूरत को निम्नलिखित उदाहरण द्वारा समझ सकते हैं :

मान लें कि हमें एक टंकी में पानी भरना है। ऐसा हम दो तरीकों से कर सकते हैं। हम उसमें बाल्टी से पानी भर सकते हैं या फिर उसमें नल खुला छोड़ सकते हैं। नल से पानी भरने में हम टंकी में लगातार पानी डालते हैं जब तक कि वह भर नहीं जाती। यदि टंकी में भर रहे पानी के गिरने की दर अचर है और v_1 ccs^{-1} के बराबर है और टंकी को भरने में t_1 s लगते हैं तो उसके आयतन V का मान होता है :

$$V = (v_1 t_1)\text{cc} = \text{प्रवाह दर} \times \text{लिया गया समय} \qquad (\text{क}1.4)$$

मान लें कि पानी अचर दर से गिर रहा है। आइये, हम प्रवाह दर और लिए गए समय के बीच आरेख खींचे (चित्र क1.8)। तब V को हम एक आयत के क्षेत्रफल के बराबर लिख सकते हैं जिसकी चौड़ाई v_1 है और लंबाई t_1 है। यह वास्तव में प्रवाह दर बनाम समय के वक्र के नीचे का क्षेत्रफल है। लेकिन अगर प्रवाह असमान हो तो हम इस प्रकार का सरल गुणनफल नहीं इस्तेमाल कर सकते। ऐसी स्थिति में हम क्या करते हैं?

हम प्रवाह के समय को बहुत छोटे समयांतरालों की बहुत बड़ी संख्या में बांटते हैं जिनमें से हरेक की अवधि Δt होती है (जिसमें प्रवाह दर लगभग अचर हो)। तब हम प्रत्येक अंतराल में गिरने वाले पानी का आयतन ज्ञात करते हैं (प्रवाह दर $v(t) \times \Delta t$)। फिर हम सभी अंतरालों के संगत इन अल्प आयतनों को जोड़ लेते हैं (चित्र क1.9)।



चित्र क1.9: वक्र के नीचे के क्षेत्रफल के रूप में समाकल, वक्र के नीचे के क्षेत्र में गिरने वाले पानी का आयतन $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \sum v(t)\, dt$ होता है और उसका प्रतीक $\int v(t)\, dt$ होता है।

आइये, अब हम समयांतराल Δt को छोटे से छोटा करें ताकि इसका मान शून्य की ओर अग्रसर हो। ऐसा करने पर, प्रत्येक अल्प समयांराल Δt के लिए वक्र एक सरल रेखा जैसा दिखता है। तब प्रत्येक Δt के लिए वक्र के नीचे का क्षेत्रफल संगत आयत के क्षेत्रफल के बराबर होता है। तब हम **वक्र के नीचे के कुल क्षेत्रफल** को ऐसे सभी आयातों के क्षेत्रफल के योग के बराबर लिख सकते हैं जिनके लिए Δt बहुत छोटा हो या फिर शून्य की ओर अग्रसर होता हो :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum v(t) \Delta t$$

इस योग को हम फलन का समाकल $v(t)$ कहते हैं और इसके लिए निम्नलिखित प्रतीक का इस्तेमाल करते हैं :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum v(t) \Delta t = \int v(t)\, dt \qquad (\text{क}1.5)$$

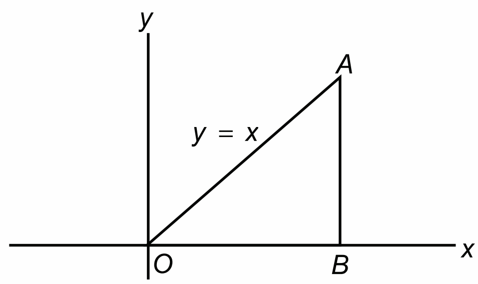
आपको यह जानकारी रोचक लगेगी कि प्रतीक $\int$ एक खींच दिया गया S है, जो जोड़ का प्रतीक होता है।

इस तरह आपने सीखा है कि **समाकलन भी एक सीमान्त प्रक्रिया है : हम बहुत बड़ी संख्या में ऐसे आयतों के क्षेत्रफलों का योग प्राप्त करते हैं जिनकी एक भुजा (जो स्वतंत्र चर द्वारा दी जाती है) बहुत छोटी होती है और जिसका मान शून्य की ओर अग्रसर होता है।**

ज्यामितीय रूप से, यह समाकल फलन के आरेख में वक्र के नीचे का क्षेत्रफल निरूपित करता है। आप इस बात को बेहतर समझ सकेंगे अगर आप कुछ परिकलन करें। चर x या t के किसी फलन के लिए, आप Δx या Δt के कई मानों के लिए इस योग की गणना करें। इस प्रक्रिया में आप इन अंतरालों को छोटे से छोटा करें। आप पाएंगे कि

> पश्चिम बंगाल के एक मशहूर साहित्यकार श्री राजशेखर बासु गणितज्ञ भी थे। वह समाकलन के प्रतीक $\int$ को हाथी की सूंड कहा करते थे।

जैसे-जैसे अंतराल का मान छोटा हाता जाता है, योग का मान किसी एक मान की ओर अग्रसर होता है जो कि वक्र के नीचे का क्षेत्रफल होता है। इनमें सबसे आसान गणना है मूल बिंदु से होकर जाने वाली सरल रखा ($y = x$) के लिए। चित्र क1.10 से आप देख सकते हैं कि क्षेत्रफल का मान $\frac{x^2}{2}$ है।



चित्र क1.10 : सरल रेखा $y = x$ के लिए वक्र के नीचे के क्षेत्रफल के रूप में समाकल : $\int_0^x x\,dx = \frac{1}{2}x^2$ ।

समाकल की अवधारणा को समझने के लिए हम समाकल को प्रति-अवकलज के रूप में भी समझ सकते हैं। अगर $F(x) = f'(x)$ फलन $f(x)$ का अवकलज हो तो $f(x)$ को हम फलन $F(x)$ का प्रति-अवकलज या समाकल कहते हैं।

इस तरह, अगर $F(x) = \frac{d}{dx}[f(x)]$ हो तब $f(x)$ को x के सापेक्ष $F(x)$ का समाकल कहा जाता है। इसका प्रतीक है

$$f(x) = \int F(x)dx + c \qquad (\text{क}1.6)$$

जहां c एक अचर है। आप यह बात भी समझ लें कि भले ही हम इस समीकरण में अचर c जोड़ दें, इसका अवकलज $F(x)$ वही रहेगा, क्योंकि अचर का अवकलज शून्य होता है। इस अचर का मान दिए हुए प्रतिबंधों से प्राप्त किया जाता है। आप इन बातों को और बेहतर समझेंगे जब आप यांत्रिकी में इनका प्रयोग करेंगे।

भौतिकी में समस्याओं को हल करते हुए आपको अलग-अलग फलनों के अवकलज और समाकल निकालने होंगे। आगे दी हुई तालिकाओं क1.1 और क1.2 में हमने कुछ आम फलनों के अवकलजों और समाकलों के मान दिए हैं।

तालिका क1.1 : सरल फलनों के अवकलज

क्र. सं.	df/dx	क्र. सं.	df/dx
1.	$\frac{d}{dx}(c) = 0, c$ अचर	10.	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2},\ x \neq 0$
2.	$\frac{d}{dx}(x) = 1$	11.	$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
3.	$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	12.	$\frac{d}{dx}[g(x) + h(x)] = \left[\frac{d}{dx}g(x)\right] + \left[\frac{d}{dx}h(x)\right]$
4.	$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	13.	$\frac{d}{dx}[f(x)\,g(x)] = \left[\frac{df}{dx}\right]g + f\left[\frac{dg}{dx}\right]$
5.	$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$	14.	$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2},\ g \neq 0$
6.	$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	15.	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
7.	$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	16.	$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$
8.	$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	17.	$\frac{d}{dx}(c^x) = c^x \ln c,\ c > 0$
9.	$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1 + x^2}$	18.	$\frac{d}{dx}\log_c x = \frac{1}{x \ln c}\quad c \neq 1,\ c > 0$

तालिका क1.2 : सरल फलनों के समाकल

क्र. सं.	समाकल	क्र. सं.	समाकल
1.	$\int a\, dx = ax + c$, a और c अचर हैं	5.	$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$, c अचर है
2.	$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, c अचर है	6.	$\int \cos x\, dx = \sin x + c$, c अचर है
3.	$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln\lvert x\rvert + c$, c अचर है	7.	$\int \tan x\, dx = \ln\lvert\sec x\rvert + c$, c अचर है
4.	$\int e^x\, dx = e^x + c$, c अचर है	8.	$\int e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$, a और c अचर हैं

भौतिक नियतांकों की तालिका

प्रतीक	राशि	मान
c	निर्वात में प्रकाश की चाल	$3.00 \times 10^{8}\ \mathrm{ms^{-1}}$
μ_0	मुक्त आकाश की चुंबकशीलता	$1.26 \times 10^{-6}\ \mathrm{NA^{-2}}$
ε_0	मुक्त आकाश की विद्युत्शीलता	$8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2 N^{-1} m^{-2}}$
$1/4\pi\varepsilon_0$		$8.99 \times 10^{9}\ \mathrm{Nm^2 C^{-2}}$
e	प्रोटॉन का आवेश	$1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$
$-e$	इलेक्ट्रॉन का आवेश	$-1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$
h	प्लांक नियतांक	$6.63 \times 10^{-34}\ \mathrm{Js}$
$\hbar$	$h / 2\pi$	$1.05 \times 10^{-34}\ \mathrm{Js}$
m_e	इलेक्ट्रॉन का विराम द्रव्यमान	$9.11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
$-e/m_e$	इलेक्ट्रॉन के आवेश और द्रव्यमान का अनुपात	$-1.76 \times 10^{11}\ \mathrm{Ckg^{-1}}$
m_p	प्रोटॉन का विराम द्रव्यमान	$1.67 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$ (1 amu)
m_n	न्यूट्रॉन का विराम द्रव्यमान	$1.68 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
a_0	बोर त्रिज्या	$5.29 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}$
N_A	आवोगाद्रो नियतांक	$6.02 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
R	सार्वत्रिक गैस नियतांक	$8.31\ \mathrm{Jmol^{-1} K^{-1}}$
k_B	बोल्ट्समान नियतांक	$1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J\,K^{-1}}$
G	सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक	$6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2 kg^{-2}}$

खगोल भौतिकीय आंकड़े

खगोलीय पिंड	द्रव्यमान (kg)	माध्य त्रिज्या (m)	पृथ्वी के केंद्र से माध्य दूरी (m)
सूर्य	1.99×10^{30}	6.96×10^{8}	1.50×10^{11}
चंद्रमा	7.35×10^{22}	1.74×10^{6}	3.84×10^{8}
पृथ्वी	5.97×10^{24}	6.37×10^{6}	0

BPHCT-131 के खंडों और इकाइयों की सूची

खंड 1 : प्रारंभिक गणितीय अवधारणाएं

इकाई 1 सदिश बीजगणित – I

इकाई 2 सदिश बीजगणित – II

इकाई 3 प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणें

इकाई 4 अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण

खंड 2 : यांत्रिकी की बुनियादी अवधारणाएं

इकाई 5 न्यूटन के गति के नियम और बल की अवधारणा

इकाई 6 न्यूटन के गति के नियमों को लागू करना

इकाई 7 गुरुत्वाकर्षण

इकाई 8 रैखिक संवेग और आवेग

इकाई 9 कार्य और गतिज ऊर्जा

इकाई 10 स्थितिज ऊर्जा और ऊर्जा का संरक्षण

खंड 3 : घूर्णी गति और बहु-कण निकाय

इकाई 11 कोणीय गति की शुद्धगतिकी

इकाई 12 घूर्णी गति की गतिकी

इकाई 13 केन्द्रीय बलों के अधीन गति

इकाई 14 बहु-कण निकायों की गतिकी

इकाई 15 बहु-कण निकायों के लिए संरक्षण नियम

खंड 4 : आवर्ती दोलन

इकाई 16 सरल आवर्त गति

इकाई 17 आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण

इकाई 18 अवमंदित दोलन

इकाई 19 तरंग गति

पाठ्यक्रम : यांत्रिकी (BPHCT-131) 4 क्रेडिट

<u>सदिश बीजगणित</u>: सदिशों का ज्यामितीय और बीजगणितीय निरूपण; सदिश बीजगणित; अदिश और सदिश गुणनफल; किसी अदिश के सापेक्ष सदिश के अवकलज।

<u>प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण</u> : समघात प्रथम कोटि अवकल समीकरण (पृथक्करणीय और रैखिक प्रथम कोटि अवकल समीकरण)।

<u>द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण</u> : अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि समघात अवकल समीकरण।

<u>गति के नियम</u> : निर्देश तंत्र; न्यूटन के गति के नियम; सरल रैखिक गति; समतल में गति; एकसमान वर्तुल गति; त्रिविमीय गति।

<u>न्यूटन के गति के नियमों के अनुप्रयोग</u> : घर्षण; तनाव; गुरुत्वाकर्षण; कमानी-द्रव्यमान निकाय – हुक का नियम; वृत्ताकार कक्षा में उपग्रह की गति और उसके अनुप्रयोग; भूतुल्यकाली कक्षाएं; भूमंडलीय स्थिति निर्धारण प्रणाली (जी पी एस) की अवधारणा; भार और भारहीनता।

<u>रैखिक संवेग और आवेग</u> : संवेग संरक्षण; आवेग; आवेग-संवेग प्रमेय; रॉकेट की गति।

<u>कार्य और ऊर्जा</u> : कार्य और ऊर्जा; ऊर्जा संरक्षण; सीधा और द्विविम संघट्टन।

<u>कोणीय गति की शुद्धगतिकी</u> : कोणीय गति की शुद्धगतिकी, कोणीय विस्थापन, कोणीय वेग और कोणीय त्वरण; व्यापक कोणीय गति।

<u>घूर्णी गति की गतिकी</u> : बल आघूर्ण; जड़त्व आघूर्ण; घूर्णी गतिज ऊर्जा; कोणीय संवेग, कोणीय संवेग संरक्षण और उसके अनुप्रयोग।

<u>केंद्रीय बल क्षेत्र के अधीन गति</u> : केंद्रीय बल क्षेत्र में कण की गति (समतल में गति, कोणीय संवेग संरक्षण, समान क्षेत्रफल नियम); केप्लर के नियम (केवल कथन)।

<u>बहु-कण निकायों की गतिकी</u> : बहु-कण निकायों की गतिकी, संहति केंद्र; असंतत द्रव्यमान बंटन के लिए संहति केंद्र निर्धारण; दृढ़ पिंड का संहति केंद्र (गुणात्मक विवरण)।

<u>संरक्षण नियम</u> : बहु-कण निकायों के लिए रैखिक संवेग, कोणीय संवेग और ऊर्जा संरक्षण।

<u>सरल आवर्त गति</u> : सरल आवर्त गति; सरल आवर्त गति का अवकल समीकरण और उसके हल; सरल आवर्त गति में गतिज ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा और कुल ऊर्जा और उनके कालिक माध्य।

<u>आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण</u> : रैखिकता और अध्यारोपण सिद्धांत, दो समान या असमान आवृत्ति वाले संरेख आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण; समान या असमान आवृत्ति वाले दो परस्पर लंबवत् आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण; लिसाजू की आकृतियाँ और उनके उपयोग।

<u>अवमंदित दोलन</u> : अवमंदित दोलन के लिए गति समीकरण और उसका हल (बिना व्युत्पत्ति के); प्रबल, क्रांतिक और दुर्बल अवमंदन के लिए हलों का गुणात्मक विवरण; अवमंदन के अभिलक्षण – लघुगणकीय अपक्षय, विश्रांति काल और गुणता कारक।

<u>तरंग गति</u> : गुणात्मक विवरण (तरंग निर्माण और संचरण; तरंग गति का वर्णन, तरंग वेग, आवृत्ति और तरंग दैर्घ्य; तरंग गति का गणितीय वर्णन)

शब्दावली

बीजीय	Algebraic	असमघात	Nonhomogeneous
कोणीय संवेग	Angular momentum	अरैखिक	Nonlinear
स्वेच्छ	Arbitrary	शून्य सदिश	Null vector, zero vector
स्वेच्छ अचर	Arbitrary constant	कोटि	Order
साहचर्य	Associative	अभिविन्यास	Orientation
सहायक समीकरण	Auxiliary equation	मूल बिंदु	Origin
अक्ष	Axis	लंबकोणीय, लांबिक	Orthogonal
आधार सदिश	Basis vector	समांतरषट्फलक	Parallelepiped
परिसीमा-मान समस्या	Boundary-value problem	समांतर चतुर्भुज नियम	Parallelogram law
कार्तीय	Cartesian	आंशिक अवकलज	Partial derivative
अभिलक्षणिक समीकरण	Characteristic equation	विशेष हल	Particular integral
क्रमविनिमेय	Commutative	लंबवत्	Perpendicular
पूरक फलन	Complementary function	छद्म	Pseudo
संमिश्र संयुग्मी मूल	Complex conjngate roots	चतुर्भुज	Quardrilateral
घटक	Component	समानेय	Reducible
निर्देशांक तंत्र	Coordinate system	दक्षिणहस्त	Right-handed
धारावाहक	Current carrying	अदिश	Scalar
वक्र	Curve	अभिदिशा	Sense
रूद्ध दोल	Dead beat	पृथक्करण	Separation
आश्रित चर	Dependent variable	हल	Solution
अवकल अवयव	Differential element	पुच्छ	Tail
अवकल समीकरण	Differential equation	चतुष्फलक	Tetrahedron
दिक्कोज्या	Direction cosine	त्रिविम	Three-dimensional
विस्थापन	Displacement	बल आघूर्ण	Torque
यथातथ अवकल समीकरण	Exact differential equation	अबीजीय फलन	Transcendental function
प्रेरक फलन	Forcing function	स्थानांतरण	Translation
व्यापक हल	General solution	त्रिभुज नियम	Triangle law
ज्यामितीय	Geometrical	त्रिक गुणनफल	Triple product
आवर्ती दोलक	Harmonic oscillator	तुच्छ हल	Trivial solution
शीर्ष	Head	अनवमंदित	Undamped
समघात	Homogeneous	अनिर्धारित	Undetermined
आदि प्रतिबंध	Initial conditions	एकक सदिश	Unit vector
आदि-मान समस्या	Initial-value problem	प्राचल विचरण	Variation of parameters
समाकलन गुणक	Integrating factor	सदिश	Vector
वामहस्त	Left handed	सदिश अवकलन	Vector differential calculus
रैखिक	Linear	सदिश फलन	Vector function
रैखिकतः आश्रित	Linearly dependent	सदिश गुणनफल	Vector product
रैखिक स्वतंत्रता	Linear independence	ऊर्ध्वाधर	Vertical
परिमाण	Magnitude	न्यून अवमंदित	Weakly damped or underdamped
असंरेखीय	Non-collinear		
अकार्तीय	Non-Cartesian		

नोट

नोट

नोट