इग्नू
जन-जन का
विश्वविद्यालय

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय
मुक्त विश्वविद्यालय
विज्ञान विद्यापीठ

BMTC-131
कलन

खंड
4

अवकल गणित के अनुप्रयोग

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति*

प्रो. रश्मि भारद्वाज
जी.जी.एस. इन्द्रप्रस्थ विश्वविद्यालय, दिल्ली

डॉ. सुनीता गुप्ता
दिल्ली विश्वविद्यालय

प्रो. अंबर हबीब
शिव नाडार विश्वविद्यालय
गौतम बुद्ध नगर

प्रो. एस. ए. कात्रे
पूणे विश्वविद्यालय

प्रो. वी. कृष्ण कुमार
एन. आई. एस. ई. आर., भुवनेश्वर

डॉ. अमित कुलश्रेष्ठ
आई. आई. एस. ई. आर., मोहाली

डॉ. अपर्ना मेहरा
आई. आई. टी., दिल्ली

प्रो. राहुल रॉय
भारतीय सांख्यिकीय संस्थान, दिल्ली

प्रो. मीना सहाय
लखनऊ विश्वविद्यालय

डॉ. शची श्रीवास्तव
दिल्ली विश्वविद्यालय

संकाय सदस्य, विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
प्रो. महेन्द्र सिंह नाथावत (निदेशक)
डॉ. दीपिका
प्रो. परवीन सिंक्लेयर
प्रो. पूर्णिमा मित्तल
श्री पवन कुमार
प्रो. सुजाता वर्मा
डॉ. सु. वेंकटरामन

* पाठ्यक्रम अभिकल्प प्रोग्राम एक्सपर्ट समिति के सुझावों व यू.जी.सी.-सी.बी.सी.एस. सांचे पर आधारित है।

खंड निर्माण दल

प्रो. अंबर हबीब (संपादक)
शिव नाडार विश्वविद्यालय
गौतम बुद्ध नगर, उ.प्र.

डॉ. दीपिका
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

पाठ्यक्रम समन्वयकर्ता: प्रो. परवीन सिंक्लेयर तथा डॉ. दीपिका

अनुवाद

डॉ. महेन्द्र शंकर (सेवानिवृत्त)
एन सी ई आर टी, नई दिल्ली

डॉ. दीपिका
विज्ञान विद्यापीठ, इं.गां.रा.मु.वि

आभार: इस खण्ड के कुछ भाग पिछले पाठ्यक्रम कलन (MTE-01) पर आधारित है।

सामग्री निर्माण

श्री राजीव गिरधर
सहायक कुलसचिव (प्रकाशन)
एम.पी.डी.डी. इग्नू

श्री हेमन्त कुमार परिदा
अनुभाग अधिकारी (प्रकाशन)
एम.पी.डी.डी. इग्नू

नवम्बर, 2019

ISBN 978-93-89200-44-7

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय के पाठ्यक्रमों के विषय में और अधिक जानकारी विश्वविद्यालय के कार्यालय मैदान गढ़ी, नई दिल्ली-110068 और इग्नू की वेबसाइट www.ignou.ac.in *से प्राप्त की जा सकती है।*

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की ओर से प्रो. महेन्द्र सिंह नाथावत, निदेशक, विज्ञान विद्यापीठ द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित।

लेज़र टाईपसेटिंग : डिज़ाईन क्रिएशन, E-mail: dzine.creations2@gmail.com

मुद्रक : आकाशदीप प्रिंटर्स, 20–अंसारी रोड, दरियागंज, नई दिल्ली–110002

खंड 4 अवकल गणित के अनुप्रयोग

खंड 3 में, आपने अवकलन की कुछ तकनीकों के बारे में सीखा था तथा बृहत प्रकार के फलनों को अवकलित किया था। इस खंड में, हम एक वक्र के विभिन्न ज्यामितीय अभिलक्षणों, जैसे उच्चिष्ठ। निम्निष्ठ, अवतलता / उत्तलता / स्पर्श रेखाएँ, अभिलम्ब, अनंतस्पर्शी, इत्यादि निकालने के लिए अवकलज का प्रयोग करेंगे। इसके लिए, हमें न केवल प्रथम अवकलज, अपितु उच्चतर कोटि के कुछ अवकलजों की भी आवश्यकता होगी।

इकाई 12 में, हम एक स्वतंत्र चर में फलनों के बीजीय संयोजनों की ऐसी सीमाएँ ज्ञात करने में प्रथम अवकलज का उपयोग करेंगे, जिनमें सीमा निकालने में $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\times\infty, 0^{\infty}$ इत्यादि प्राप्त होते हैं। ऐसे रूप अनिर्धार्य रूप कहलाते हैं।

अगली तीन इकाइयों 13, 14 और 15 में, हम स्पष्ट करेंगे कि हम एक वक्र की समीकरण दिए रहने पर उसका यर्थाथ आकार किस प्रकार ज्ञात करते हैं। आप प्रथम और द्वितीय अवकलजों द्वारा निकलने वाली सूचना की मात्रा को देख कर आश्चर्यचकित रह जाएँगे। इस सूचना का उपयोग, हम इकाई 16 में विभिन्न मानक वक्रों के अनुरेखण में करेंगे। इकाई 16 में, हम आपको यह भी बताएँगे कि कुछ अद्भुत वक्रों के गुणों का किस प्रकार उपयोग किया जाता है। हम आपसे कुछ वक्रों का स्वयं अनुरेखण करने को भी कहेंगे। अवश्य प्रयास करें तथा उन्हें उस क्रमबद्ध विधि के अनुसार अनुरेखित करें, जैसा हमने इकाई 16 में रूपरेखित किया है। हमें विश्वास है कि इस खंड के पढ़ने के बाद, आप अपने परिवेश में और प्रकृति में भी अनेक ऐसे वक्रों की उपस्थिति से अवगत हो जाएँगे।

हमने एक वीडियो प्रोग्राम 'वक्र' भी बनाया है, जो आप इस खंड का अध्ययन करने के बाद देख सकते हैं। यह प्रोग्राम आपके अध्ययन केन्द्र पर उपलब्ध है।

इस इकाइयों में प्रयुक्त चिह्नों के बारे में एक शब्द। प्रत्येक इकाई में आप प्रमेय, उदाहरण और प्रश्न पाएँगे। किसी प्रमेय की उपपत्ति का अंत दर्शाने के लिए, हम चिह्न ■ का प्रयोग करते हैं। एक उदाहरण का अंत दर्शाने के लिए, हम *** का प्रयोग करते हैं। साथ ही, एक ही इकाई के अंतर जिन समीकरणों का संदर्भ दिया जाना है, उन्हें उस इकाई में क्रमानुसार संख्या दी गई हैं, जैसे कि प्रश्न और आकृतियाँ। E1, E2 इत्यादि प्रश्न और आकृति 1, आकृति 2 इत्यादि आकृतियाँ व्यक्त करते हैं।

संकेत और प्रतीक (खंड 4 में प्रयुक्त)

खंड 1 खंड 2 और खंड 3 के संकेतनों और प्रतीकों की सूची देखिए।

इकाई 12

अनिर्धार्य रूप

इकाई की रूपरेखा — पृष्ठ संख्या

12.1 प्रस्तावना

इकाई 7 में, हम एक फलन की सीमा की चर्चा कर चुके हैं। इस इकाई में, हम सीमाओं को ज्ञात करने के लिए अवकलजों के प्रयोग वाली एक व्यापक विधि की चर्चा करेंगे। हम ऐसी सीमाओं से प्रारंभ करेंगे, जिनमें $x \to 0$ होने पर अंश और हर दोनों ही 0 की ओर अग्रसर होते हैं। इस रूप में आने वाली सीमाएँ **अनिर्धार्य रूप (indeterminate forms)** कहलाती हैं। हम ऐसे रूपों की भाग 12.2 में चर्चा करेंगे। इकाई 7 में हमारे द्वारा उपयोग किए गए तर्क कि अंश और हर में उभयनिष्ठ गुणनखंड को काट देना या ज्यामितीय उपगम (विधि) का उपयोग करना कभी-कभी ऐसी सीमाओं को हल करने के लिए उपयोगी नहीं होते। अतः, भाग 12.3 और भाग 12.4 में, हम अनिर्धार्य रूपों के मान निकालने के लिए एक क्रमबद्ध विधि का परिचय कराएँगे, जो लापिताल-नियम के रूप में जाना जाता है। लापिताल-नियम एक फ्राँसीसी गणितज्ञ लापिताल को श्रेय देते हुए नामांकित किया गया है। इस नियम में, हम सीमा ज्ञात करने के लिए, अवकलज का उपयोग करते हैं। यह इस प्रक्रिया के विपरीत है, जो अभी तक हम करते आए हैं, अर्थात् कुछ सीमाओं के परिकलन द्वारा अवकलजों के मान निकालना। हम अन्य अनिर्धार्य रूपों की चर्चा भाग 12.5 में करेंगे।

चित्र 2: लापिताल

इस इकाई में, हम देखेंगे कि अब हम एक बड़े तौर पर अनिर्धार्य रूपों की सीमाएँ ज्ञात करने में समर्थ हो गए हैं, जिन्हें हम इस इकाई से पहले निकालने में असमर्थ थे।

अब हम इस इकाई के उद्देश्यों की सूची देंगे। इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, कृपया इस सूची को पुनः पढ़ें तथा यह सुनिश्चित कर लें कि आपने ये उद्देश्य प्राप्त कर लिए हैं।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आप

- अनिर्धार्य रूपों के प्रकारों की पहचान कर पाएँगे।
- $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ का मान निकाल पाएँगे, जब $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0=\lim\limits_{x\to a}g(x)$ हो या $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty=\lim\limits_{x\to a}g(x)$ हो।
- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$ ज्ञात कर पाएँगे, जब $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty=\lim\limits_{x\to a}g(x)$ हो।
- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$ का मान निकाल पाएँगे, जब $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0=\lim\limits_{x\to a}g(x)$ हो या $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ और $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ हो या $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$ और $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, जहाँ $a\in\mathbb{R}$ है।
- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\,g(x)]$ अभिकलित कर पाएँगे, जब $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ और $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ हो।
- उपरोक्त सभी सीमाओं को प्राप्त कर पाएँगे, जब a या तो ∞ हो या $-\infty$ हो।

12.2 अनिर्धार्य रूप

इकाई 7 में, हमने अनेक सीमाओं पर विचार किया था, परंतु जान बूझकर रूपों $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},\infty-\infty$ तथा कुछ अन्य रूपों को छोड़ दिया था। इस भाग में, हम इन रूपों की चर्चा करेंगे।

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ पर विचार कीजिए, जहाँ $\lim\limits_{x\to a}f(x)\to 0$ और $\lim\limits_{x\to a}g(x)\to 0$ है। यह $\frac{0}{5}$ के रूपों की समस्याओं से अलग प्रकार की हैं, जिनमें सभी का उत्तर 0 होता है। रूप $\frac{0}{0}$ अनेक प्रकार के उत्तर प्रदान कर सकता है। इस अनिश्चितता के कारण, यह सीमा रूप $\frac{0}{0}$ **अनिर्धार्य** कहलाती है। व्यापक रूप में, कोई सीमा रूप अनिर्धार्य कहलाती है, जब एक ही रूप वाली विभिन्न समस्याओं के विभिन्न उत्तर हो सकते हैं। आप इकाई 7 के उदाहरण 22 में सीमाओं के दो अपवादों का स्मरण कर सकते हैं, जहाँ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ को स्क्वीजिंग प्रमेय (squeezing theorem) तथा असमिकाओं के कुछ विवेक पूर्ण प्रबंध कौशल के उपयोग द्वारा दर्शाया गया था और फिर सर्वसमिका $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ के उपयोग से $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$ को प्राप्त किया गया था। ये सीमाएँ इन अवकलजों की वास्तव में कुछ विशिष्ट स्थितियाँ हैं, जैसा कि निम्नलिखित द्वारा देखा जा सकता है:

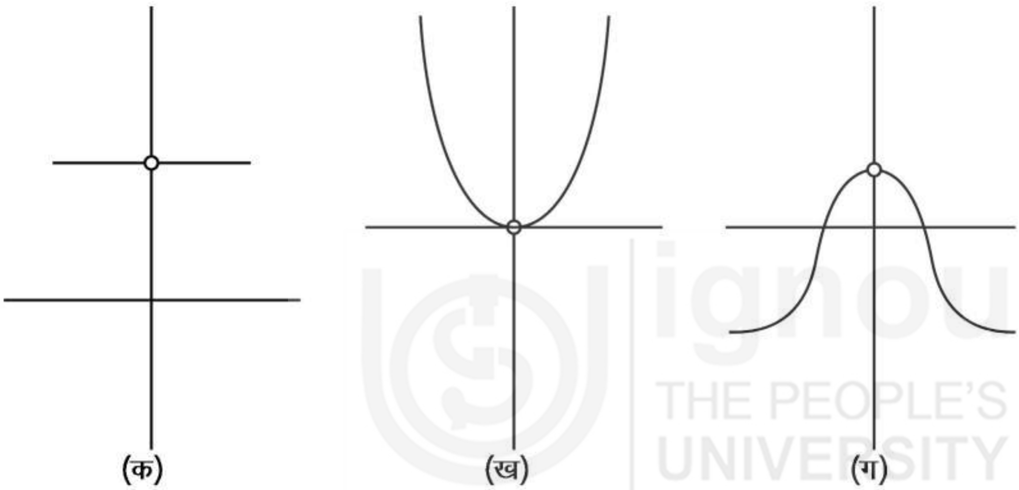
$$\frac{d}{dx}(\sin x)\Big|_{x=0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \text{ है तथा}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x)\Big|_{x=0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0 \text{ है।}$$

जो इन सीमाओं को कष्टदायी बनाता है वह तथ्य यह है कि $x \to 0$ होने पर अंश और हर दोनों 0 की ओर अग्रसर होते हैं। इसका अर्थ है कि अंश की सीमा भागफल को बहुत छोटा बना रही है तथा हर की सीमा भागफल को बहुत बड़ा बना रही है। ऐसी सीमाएँ $0/0$ के प्रकार के अनिर्धार्य रूप कहलाती हैं।

यदि $\lim_{x\to a} g(x) = 0 = \lim_{x\to a} h(x)$ है, तो $\frac{\lim_{x\to a} g(x)}{\lim_{x\to a} h(x)}, \frac{0}{0}$ के रूप का एक व्यंजक है। इस स्थिति में, हम कहते हैं कि $x = a$ पर या जब $x \to a$ है, तब $\frac{g(x)}{h(x)}$ प्रकार $\frac{0}{0}$ का एक अनिर्धार्य रूप है।

$\frac{0}{0}$ रूप के कुछ अन्य उदाहरण $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$ (चित्र 2 (क) देखिए), $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x} = 0$ (चित्र 2 (ख) देखिए), $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2$ (चित्र 2 (ग) देखिए) हैं।



चित्र 2

अन्य प्रकार के अनिर्धार्य रूप भी हैं। उदाहरणार्थ, यदि अंश की सीमा है, जो भागफल को बहुत बड़ा बना रही है तथा उसी समय हर की सीमा भी ∞ है, जो भागफल को बहुत छोटा बना देती है। ऐसे प्रकार रूप $\frac{\infty}{\infty}$ के अनिर्धार्य रूप हैं।

यदि $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty = \lim_{x\to a} h(x)$ है, तो हम कहते हैं कि $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)}$ प्रकार $\frac{\infty}{\infty}$ का $x = a$ पर एक अनिर्धार्य रूप है।

उदाहरणार्थ, $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\ln x} = \frac{\lim_{x\to\infty} e^x}{\lim_{x\to\infty}\ln x} = \frac{\infty}{\infty}$ है तथा $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{e^{-x}}\right) = \frac{\lim_{x\to-\infty} x^2}{\lim_{x\to-\infty} e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty}$ है।

$\frac{\infty}{\infty}$ के अनिर्धार्य रूप के अन्य उदाहरण $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\sqrt{x}}{x^2}, \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^3}, \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{x^2}}$ इत्यादि हैं।

आप ऐसे अन्य अनेक रूपों के बारे में सोच सकते हैं, जिनमें अंतिम उत्तर एक अकेले मान की ओर प्रवृत्त नहीं होता, अपितु उत्तर को दो अलग-अलग तथा बहुत अंतर वाले मानों की ओर खींच ले जाता है। इसी के कारण, सीमा को अनिर्धार्य रूप की सीमा कहा जाता है। अन्य प्रकार, जैसे कि $0^0, 0\times\infty, \infty^0, 1^\infty$ तथा $\infty - \infty$ भी अनिर्धार्य रूप हैं, यहाँ निम्नलिखित सारणी में, हम अनिर्धार्य रूपों के विभिन्न प्रकारों को दे रहे हैं।

अन्य प्रकार के अनिर्धार्य रूप	उदाहरण
$\infty-\infty$ **रूप :** बड़े मान को एक अन्य बड़े मान में से घटाया जाता है।	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$
1^{∞} **रूप :** आधार 1 की ओर प्रवृत्त होने वाली सीमा अनंत घातांकों के लिए अलग-अलग मान देती है, अर्थात् यदि आधार 1 से कम है, तो सीमा का मान 0 है, जबकि यदि आधार 1 से अधिक है, तो सीमा अनंत होती है।	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$
0^0 **रूप :** आधार के कारण सीमा 0 की ओर प्रवृत्त होती है तथा घातांक के कारण यह 1 की ओर प्रवृत्त होती है।	$\lim\limits_{x\to0}(e^x-1)^{1-\cos x}$
∞^0 **रूप :** सीमा बड़े आधार के कारण अनंत की ओर प्रवृत्त होती है तथा घातांक 0 के कारण 1 की ओर प्रवृत्त होती है।	$\lim\limits_{x\to\infty}(e^x)^{1/x^2}$

हम पहले कह चुके हैं तथा एक बार पुनः कह रहे हैं कि हमारे द्वारा अब तक विकसित की गई विधियाँ, हमें ऊपर वर्णित की गई अनेक स्थितियों में सीमाओं को परिकलित करने में समर्थ नहीं बना पाती हैं। आगे आने वाली चर्चा में, हम उन विधियों को बताएँगे, जो हमें ऐसी लगभग सभी स्थितियों के साथ कार्य करने में समर्थ बनाएँगी। परंतु पहले, देखिए कि क्या आप इस प्रश्न को कर पाएँगे।

E1) निम्नलिखित स्थितियों में अनिर्धार्य रूपों के प्रकारों की पहचान कीजिए:

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x^n}, n\in\mathbb{N}$

ii) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x\cos x^2}$

iii) $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{cosec} x-\frac{1}{x}\right)$

iv) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)$

v) $\lim\limits_{x\to0} x\ln|x|$

अगले भाग में, हम $\frac{0}{0}$ रूप में दिए फलनों की सीमाएँ परिकलित करने की एक सरल विधि देंगे।

12.3 रूप $\frac{0}{0}$ के लिए लापिताल-नियम

मारक्विस द लापिताल (Marquis de L' Hopital) एक फ्राँसीसी गणितज्ञ थे तथा वे जोहान्न बर्नूली (Johann Bernoulli) के विद्यार्थी थे। उन्होंने कलन पर अपनी पहली पाठ्यपुस्तक 1696 में प्रकाशित की थी। यह पुस्तक बर्नूली के व्याख्यानों पर आधारित थी तथा इसमें उस स्थिति में $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ का मान निकालने की विधि दी हुई थी, जब यह सीमा

$x = a$ पर प्रकार $\frac{0}{0}$ के एक अनिर्धार्य रूप में थी। यह परिणाम अब सर्वव्यापक रूप में लापिताल-नियम के नाम से जाना जाता है, यद्यपि इसे बर्नूली ने सिद्ध किया था। इस नियम का कथन देने से पहले, आइए एक उदाहरण को देखें।

सीमा $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{\sin x}$ पर विचार कीजिए। इसे दो अवकलजों के अनुपात के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x - e^0)/(x-0)}{(\sin x - \sin 0)/(x-0)} = \frac{\left.\frac{d}{dx}(e^x)\right|_{x=0}}{\left.\frac{d}{dx}(\sin x)\right|_{x=0}} = \frac{e^0}{\cos 0} = 1 \text{ है।}$$

इस विधि का अधिक व्यापक रूप में कथन दिया जा सकता है। मान लीजिए कि $x = a$ पर अवकलनीय फलन f और g हैं तथा $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ प्रकार $0/0$ का एक अनिर्धार्य रूप है, अर्थात् $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ और $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ है।

विशिष्ट रूप में, $x = a$ पर f और g की अवकलनीयता से तात्पर्य है कि $x = a$ पर f और g संतत हैं और इसीलिए $f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = 0$ और $g(a) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ है।

इससे आगे, क्योंकि $x = a$ पर f और g अवकलनीय हैं, इसलिए

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \text{ है, तथा } \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a) \text{ है।}$$

यदि $g'(a) \neq 0$ है, तो अनिर्धार्य रूप का मान अवकलजों के मानों के एक अनुपात के रूप में नीचे दिए अनुसार निकाला जा सकता है:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)/(x-a)}{g(x)/(x-a)} = \frac{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \qquad ....(1)$$

यदि $x = a$ पर $f'(x)$ और $g'(x)$ संतत हैं, तो समीकरण (1) में दिया परिणाम लापिताल-नियम की एक विशिष्ट स्थिति है, जो प्रकार $0/0$ के अनिर्धार्य रूप को अवकलजों से संबद्ध एक नई सीमा में बदल देती है। साथ ही, लापिताल-नियम $-\infty$ पर और $+\infty$ पर सीमाओं के लिए भी सत्य है। हम इस परिणाम का, बिना उपपत्ति दिए, निम्नलिखित प्रमेय के रूप में कथन देते हैं।

प्रमेय 1 (रूप $0/0$ के लिए लापिताल-नियम): मान लीजिए कि $x = a$ को अंतर्विष्ट करने वाले एक विवृत अंतराल पर, संभवतः $x = a$ के अतिरिक्त, f और g अवकलनीय हैं तथा $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ और $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ है। यदि $\lim_{x\to a}[f'(x)/g'(x)]$ की एक परिमित सीमा है अथवा यह सीमा $+\infty$ या $-\infty$ है, तो $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ होता है। साथ ही, यह कथन $x \to a^-, x \to a^+, x \to -\infty$, या $x \to +\infty$ होने पर भी एक सीमा की स्थिति के लिए सत्य है।

सावधानी: आप इस ओर ध्यान दे सकते हैं कि जब हम लापिताल-नियम का अनुप्रयोग करते हैं, तब हम अंश और हर को अलग-अलग अवकलित करते हैं, जो $\frac{f(x)}{g(x)}$ को अवकलित करने के समान नहीं है। आगे आने वाले उदाहरणों में, हम निम्नलिखित तीन चरणीय प्रक्रिया का प्रयोग करते हुए, लापिताल-नियम का अनुप्रयोग करते हैं:

चरण 1 : जाँच कीजिए कि $f(x)/g(x)$ की सीमा प्रकार $\frac{0}{0}$ का एक अनिर्धार्य रूप है। यदि ऐसा नहीं है, तो लापिताल-नियम का प्रयोग नहीं किया जा सकता है।

चरण 2 : f और g को अलग-अलग अवकलित कीजिए।

चरण 3 : $f'(x)/g'(x)$ की सीमा ज्ञात कीजिए। यदि यह सीमा परिमित, $+\infty$ या $-\infty$ है, तो यह $f(x)/g(x)$ की सीमा के बराबर है।

यहाँ कुछ उदाहरण हैं, जो प्रमेय 1 की उपयोगिता को स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 1 : $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^7-128}{x^3-8}$ का मान निकालिए।

हल : ध्यान दीजिए कि यह एक अनिर्धार्य रूप है, क्योंकि $f(x)=x^7-128$ और $g(x)=x^3-8$ दोनों ही 2 के इर्दगिर्द अवकलनीय हैं तथा $x\to 2$ होने पर 0 की ओर अग्रसर होते हैं।

इसलिए, हम लापिताल-नियम का अनुप्रयोग कर सकते हैं। लापिताल-नियम का अनुप्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^7-128}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{d}{dx}(x^7-128)}{\frac{d}{dx}(x^3-8)}=\lim_{x\to 2}\frac{7x^6}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{7x^4}{3}=\frac{7(2)^4}{3}=\frac{112}{3}$$

***

उदाहरण 2 : निम्नलिखित सीमाएँ ज्ञात कीजिए:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$

ii) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\frac{(x-\pi/2)^2}{\cos x}$

हल : i) मान लीजिए कि $f(x)=1-\cos x$ और $g(x)=\sin x$ है। क्योंकि $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=1-\cos 0=0$ है तथा $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$ है, इसलिए ये दोनों 0 हैं तथा $\frac{0}{0}$ रूप बनाते हैं। अतः, हम लापिताल-नियम का अनुप्रयोग कर प्राप्त कर सकते हैं:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(1-\cos x)}{\frac{d}{dx}(\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{0+\sin x}{\cos x}=\frac{\sin 0}{\cos 0}=\frac{0}{1}=0$$

ii) क्योंकि $\lim\limits_{x\to\pi/2}(x-\pi/2)^2=0$ और $\lim\limits_{x\to\pi/2}\cos x=0$ है, इसलिए यह सीमा $\frac{0}{0}$ रूप में है। हम लापिताल-नियम का अनुप्रयोग कर सकते हैं। हम प्राप्त करते हैं:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(x-\pi/2)^2}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{d}{dx}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\frac{d}{dx}(\cos x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2(x-\pi/2)}{-\sin x}=\frac{2(0)}{-1}=0$$

***

उदाहरण 3 : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sec x}$ का मान निकालिए।

हल : आपको सदैव यह याद रखना चाहिए कि आपको लापिताल-नियम का अनुप्रयोग करने से पहले यह जाँच करनी है कि आपके पास सीमा का एक अनिर्धार्य रूप है। यह सीमा है:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sec x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)}{\lim\limits_{x\to 0}\sec x}=\frac{0}{1}=0$$

चेतावनी : यदि आप बिना सोचे-समझे उदाहरण 3 में लापिताल-नियम का अनुप्रयोग करते हैं, तो आपको **गलत** उत्तर प्राप्त होगा:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sec x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sec x\tan x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sec x}=\frac{1}{1}=1$$

यह उत्तर **गलत** है। क्यों?

यदि हम $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sec x}$ ज्ञात करते हैं, तो हमें अनिर्धार्य रूप नहीं प्राप्त होता है। अतः, लापिताल-नियम का अनुप्रयोग नहीं किया जा सकता है।

***

उदाहरण 4: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}$ ज्ञात कीजिए।

हलः $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ ज्ञात करने के लिए, हम पहले यह ध्यान देते हैं कि $x\to 0$ होने पर, $\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ रूप $\frac{0}{0}$ में है। परंतु यहाँ लापिताल-नियम का अनुप्रयोग नहीं हो सकता है, क्योंकि $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{\frac{d}{dx}(\sin x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\cos\frac{1}{x}+2x\sin\frac{1}{x}}{\cos x}$ का अस्तित्व नहीं है। हम यह कैसे सुनिश्चित कर सकते हैं कि इस सीमा का अस्तित्व नहीं है? ध्यान दीजिए कि यदि $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ का अस्तित्व है, तो $\lim\limits_{x\to 0}\left[2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right]$ का अस्तित्व होगा तथा इसके फलस्वरूप $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ का अस्तित्व होगा, जो सत्य नहीं है। जब $x\to 0$ है, तब $\cos\frac{1}{x}$, -1 और 1 के बीच दोलन करता है तथा किसी सीमा की ओर प्रवृत्त नहीं होता है। परंतु, हम फिर भी $x\to 0$ होने पर $\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ की सीमा का मान निकाल सकते हैं।

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}$$

$$=0$$

हमें प्राप्त है: $\left|\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}\right|<\left|\frac{x^2}{\sin x}\right|=\left|\frac{x}{\sin x}\right||x|$ [क्योंकि $\left|h\sin\frac{1}{h}\right|\le|h|\to 0$]

क्योंकि $\frac{x}{\sin x}\to 1$ है, जब $x\to 0$ है, इससे निष्कर्ष निकलता है कि $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}x.\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=0$ है और इसलिए $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}=0$ है।

***

अगला उदाहरण यह दर्शाता है कि लापिताल-नियम $\left(\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$ केवल उन्हीं भागफलों के लिए ही अनुप्रयोग किया जा सकता है, जो दिए हुए बिंदु पर प्रकार $\frac{0}{0}$ के अनिर्धार्य रूप में होते हैं।

उदाहरण 5: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 x}$ ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए कि $f(x)=x^2$ और $g(x)=\sin^2 x$ है। यह स्पष्ट है कि $x=0$ पर $\dfrac{x^2}{\sin^2 x}$ रूप $\dfrac{0}{0}$ में है। अब,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2\sin x.\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}\cos x}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\lim\limits_{x\to 0}\cos x}$$

$=1$ है।

इसलिए, प्रमेय 1 के प्रयोग से, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 x}=1$ है।

आप इस ओर ध्यान दे सकते हैं कि यहाँ $g'(0)=0$ है, परंतु $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ का अस्तित्व है।

***

अब, हम कुछ ऐसे उदाहरणों को स्पष्ट करेंगे, जहाँ लापिताल-नियम का अनुप्रयोग एक पक्षीय सीमाओं के लिए किया जाता है।

उदाहरण 6: $\lim\limits_{x\to\pi/2^-}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ ज्ञात कीजिए।

हल: यह स्पष्ट है कि $\lim\limits_{x\to\pi/2^-}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ रूप $\dfrac{0}{0}$ में है।

फलन $1-\sin x$ और $\cos x$ अवकलनीय हैं।

अतः, यहाँ हम लापिताल-नियम का अनुप्रयोग कर सकते हैं। इस प्रकार,

$$\lim_{x\to\pi/2^-}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\pi/2^-}\frac{-\cos x}{-\sin x}=\frac{\cos\pi/2}{\sin\pi/2}=0 \text{ है।}$$

***

उदाहरण 7: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln x}{x-\sqrt{x}}$ ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $f(x)=\ln x$ और $g(x)=x-\sqrt{x}$ है। स्पष्टतः, $f(x)$ और $g(x)$ अवकलनीय हैं तथा $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=0=\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)$ है। साथ ही, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1/x}{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}}=2$ है।

इस प्रकार, लापिताल-नियम से हमें $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln x}{x-\sqrt{x}}=2$ प्राप्त होती है।

***

उदाहरण 8: $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\tan x}{x^2}$ का मान निकालिए।

हल: अंश और हर में से प्रत्येक की सीमा 0 है। अतः, यह सीमा प्रकार $\dfrac{0}{0}$ का एक अनिर्धार्य रूप है। लापिताल-नियम के अनुप्रयोग से हमें प्राप्त होता है:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan x}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sec^2 x}{2x}=-\infty$$

***

आइए अब रूप $\frac{0}{0}$ के कुछ ऐसे उदाहरणों की चर्चा करें, जिनमें $x\to\infty$ या $x\to-\infty$ है तथा लापिताल-नियम का अनुप्रयोग होता है।

उदाहरण 9: $\lim_{x\to\infty}\frac{\tan(3/x)}{\sin(1/x)}$ का मान निकालिए।

हल: मान लीजिए कि $f(x)=\tan\frac{3}{x}$ और $g(x)=\sin\frac{1}{x}$ है। तब, $x\to\infty$ होने पर, $\frac{f(x)}{g(x)}$ प्रकार $\frac{0}{0}$ का एक अनिर्धार्य रूप है। स्पष्टतः, सभी $x\neq 0$ के लिए, $f(x)$ और $g(x)$ अवकलनीय है तथा $\lim_{x\to\infty}\frac{(-3/x^2)\sec^2(3/x)}{(-1/x^2)\cos(1/x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\sec^2(3/x)}{\cos(1/x)}=3$ है।

इस प्रकार, ∞ पर रूप $\frac{0}{0}$ के लिए लापिताल-नियम का अनुप्रयोग किया जा सकता है

तथा इसीलिए $\lim_{x\to\infty}\frac{\tan(3/x)}{\sin(1/x)}=3$ है।

***

उदाहरण 10: $\lim_{x\to-\infty}x\sin\frac{5}{x}$ का मान निकालिए।

हल: मान लीजिए कि $f(x)=\sin\frac{5}{x}$ और $g(x)=\frac{1}{x}$ है। तब, $-\infty$ पर $\frac{f(x)}{g(x)}$ रूप $\frac{0}{0}$ का है तथा

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(-5/x)^2\cos(5/x)}{-1/x^2}=5 \text{ है।}$$

अतः, $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin(5/x)}{1/x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=5$ है।

***

अब, प्रयास कीजिए तथा प्रमेय 1 का अनुप्रयोग करते हुए, निम्नलिखित प्रश्नों में सीमाओं के मान निकालिए।

E2) निम्नलिखित सीमाएँ ज्ञात कीजिए।

i) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sin x}$ ii) $\lim_{x\to 0}\frac{x^4-1}{x^2-6x+5}$

iii) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\sin x^2}$ iv) $\lim_{x\to 1/2}\frac{2x^2-9x+4}{\cos\pi x}$

v) $\lim_{x\to\alpha}\frac{x^m-\alpha^m}{x^n-\alpha^n},\ \alpha>0$ vi) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{4x}$

vii) $\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln\sin x}{1-\sin x}$ viii) $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x}$

ix) $\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{x-\pi/4}$ x) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x^2-4}$

E3) निम्नलिखित सीमाओं के मान निकालिए:

i) $\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}$

ii) $\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin x}{1-\cos x}$

E4) निम्नलिखित सीमाओं के मान निकालिए:

i) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{-4/3}}{\sin(1/x)}$ ii) $\lim_{x\to\infty} x\tan^{-1}(1/x)$

iii) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin(1/x)}{e^{1/x}-1}$ iv) $\lim_{x\to\infty} x(e^{1/x}-1)$

ऐसी भी स्थितियाँ हैं, जहाँ हमें लापिताल-नियम के अनुप्रयोग की बार-बार आवश्यकता पड़ती है। एक उदाहरण के तौर पर, फलनों $f(x)=1-\cos x$ और $g(x)=x^2$ पर विचार कीजिए, जो $\mathbb{R}$ पर अवकलनीय हैं। आइए $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ का मान निकालने का प्रयास करें। यहाँ $f'(x)=\sin x$ और $g'(x)=2x$ है तथा जब $x\to 0$ है, तब पुनः $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ प्रकार $\frac{0}{0}$ का एक अनिर्धार्य रूप है। परंतु अब आइए अपना ध्यान फलनों $f'(x)$ और $g'(x)$ की ओर आकर्षित करें। हम पाते हैं कि फलन $f'(x)$ और $g'(x)$ भी अवकलनीय फलन हैं तथा $f''(x)=\cos x$ और $g''(x)=2$ है। स्पष्टतः, $\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\frac{1}{2}$ है। इसका अर्थ है कि हम $x=0$ पर $f'(x)$ और $g'(x)$ के भागफल में लापिताल-नियम का अनुप्रयोग कर सकते हैं तथा $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\frac{1}{2}$ प्राप्त कर सकते हैं।

अब क्योंकि $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{1}{2}$ है, इसलिए $\frac{f(x)}{g(x)}$ में लापिताल-नियम के अनुप्रयोग से,

हम $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{1}{2}$ प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार, हम $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$ लिख सकते हैं।

हमारे सम्मुख इसी प्रकार की स्थितियाँ प्रायः आती हैं, जहाँ लापिताल-नियम का बार-बार अनुप्रयोम हमें वाँछित सीमाओं के मान निकालने में समर्थ बनाता है। अब हम इस व्यापक परिणाम का निम्नलिखित प्रमेय के रूप में कथन देते हैं।

प्रमेय 2 : मान लीजिए कि $f(x)$ और $g(x)$ ऐसे दो वास्तविक-मान फलन हैं कि किसी $n\in\mathbb{N}$ के लिए, $\lim_{x\to a} f^{(k)}(x)=0=\lim_{x\to a} g^{(k)}(x),\ 0\le k\le n-1$ है। यदि $\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ का अस्तित्व है (∞ या $-\infty$ के बराबर हो सकता है), तो

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ होता है।

[यहाँ $f^{(0)}=f, g^{(0)}=g$ है तथा $1\le k\le n-1$ के लिए, $f^{(k)}$ फलन f का k की कोटि का अवकलज व्यक्त करता है।]

अब हम टिप्पणियों के रूप में कुछ व्यापक प्रेक्षण दे रहे हैं।

टिप्पणी 1 : ध्यान दीजिए कि यदि किसी n के लिए, $\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ का अस्तित्व नहीं है तथा $\lim_{x\to a} f^{(k)}(x)=0=\lim_{x\to a}, g^{(k)}(x),\ 0\le k\le n-1$ है, तो लापिताल-नियम के उपयोग से $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ का मान नहीं निकाला जा सकता है।

टिप्पणी 2 : अब हम एक पक्षीय सीमाओं के लिए लापिताल-नियम का कथन दे सकते

हैं। मान लीजिए कि $f(x)$ और $g(x)$ ऐसे दो वास्तविक-मान फलन हैं कि किसी $n \in \mathbb{N}$ के लिए, $\lim_{x\to a^+} f^{(k)}(x) = 0 = \lim_{x\to a^+} g^{(k)}(x),\ 0 \le k \le n-1$ है।

यदि $\lim_{x\to a^+} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ का अस्तित्व है (+∞ या −∞ के बराबर हो सकता है), तो

$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ होता है।

यदि हम a^+ के स्थान पर, जहाँ भी यह प्रकट होता है a^- रखें, तो हमें वाम पक्ष सीमा के लिए कथन प्राप्त हो जाता है।

उपरोक्त चर्चा को स्पष्ट करने के लिए, अब हम उदाहरण देते हैं।

उदाहरण 11 : $\lim_{x\to 1} \frac{x^5 - 5x + 4}{x^3 - x^2 - x + 1}$ का मान निकालिए।

हल : यदि हम $f(x) = x^5 - 5x + 4$ तथा $g(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ लें, तो

$\lim_{x\to 1} f(x) = 0 = \lim_{x\to 1} g(x)$ है।

$\lim_{x\to 1} f'(x) = \lim_{x\to 1}(5x^4 - 5) = 0$

$\lim_{x\to 1} g'(x) = \lim_{x\to 1}(3x^2 - 2x - 1) = 0$

$\lim_{x\to 1} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{20x^3}{6x-2} = 5$ है।

अतः, प्रमेय 2, अर्थात् लापिताल-नियम के बार-बार उपयोग द्वारा, हम

$\lim_{x\to 1} \frac{x^5 - 5x + 4}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{5x^4 - 5}{3x^2 - 2x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{20x^3}{6x-2} = 5$ प्राप्त करते हैं।

***

उदाहरण 12 : $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{1 - \cos x}$ का मान निकालिए।

हल : यदि $f(x) = e^{3x} - 3x - 1$ है तथा $g(x) = 1 - \cos x$ है, तो

$f'(x) = 3e^{3x} - 3$ है तथा $g'(x) = \sin x$ है। साथ ही,

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f'(x) = 0$ है और $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} g'(x) = 0$ है।

अतः, $\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{9e^{3x}}{\cos x} = 9$ है, जो यह दर्शाती है कि $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{1 - \cos x} = 9$ है।

***

उदाहरण 13 : $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ का मान निकालिए।

हल : यह प्रकार $0/0$ का एक अनिर्धार्य रूप है तथा इसमें एक बार लापिताल-नियम के अनुप्रयोग से हम ज्ञात करते हैं कि $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$ है।

यह अभी भी प्रकार $0/0$ का एक अनिर्धार्य रूप है। इसलिए, लापिताल-नियम का एक बार फिर अनुप्रयोग किया जा सकता है तथा हम

$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-(-\sin x)}{6x} = \frac{1}{6} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6}(1) = \frac{1}{6}$ प्राप्त करते हैं।

***

ऐसा भी हो सकता है कि एक सीमा के लिए, लापिताल-नियम का अनुप्रयोग करने पर, यह विधि सीमा हल करने की सर्वोत्तम विधि नहीं हो, जैसा कि निम्नलिखित उदाहरण द्वारा स्पष्ट होगाः

उदाहरण 14 : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\sin 4x}{x^3\cos x}$ का मान निकालिए।

हल : यह सीमा $0/0$ के रूप की है, परंतु लापिताल-नियम का सीधा अनुप्रयोग एक वास्तविक अव्यवस्थित स्थिति में पहुँचा देता है (प्रयास कीजिए)। इसके स्थान पर, हम सर्वप्रथम सीमाओं के गुणनफल नियम के प्रयोग द्वारा दी हुई सीमा अभिकलित करते हैं तथा उसके बाद लापिताल-नियम के दो सरल अनुप्रयोग करते हैं। विशिष्ट रूप से, सीमाओं के गुणनफल नियम का प्रयोग करते हुए (यह कल्पना करते हुए कि सीमाओं का अस्तित्व है), हम प्राप्त करते हैं:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\sin 4x}{x^3\cos x}=\left[\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\right]\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}\right]\left[\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right]$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}\right]\left[\lim_{x\to 0}\frac{4\cos x}{1}\right]\left[\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)(4)(1)=2$$

***

अब देखिए कि क्या आप इन प्रश्नों को हल कर सकते हैं।

E5) निम्नलिखित सीमाओं के मान निकालिए:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\tan^{-1}x)^2}{\ln(1+x^2)}$ v) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-3x}{x^3}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\tan^{-1}x}{x-\sin x}$ vi) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin^2 x}$ vii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

iv) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 x-x^2}{x^2\tan^2 x}$

E6) k के वे मान ज्ञात कीजिए, जिनके लिए निम्नलिखित सीमाएँ परिमित हैं तथा इनसे सीमा का मान निकालिए:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sinh 2x+k\sin 2x}{x^3}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+ke^{-x}-2x}{1-\cos x}$

E7) दर्शाइए कि $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin 1/x}{5\tan x}=0$ है। यह भी दर्शाइए कि इस सीमा का मान लापिताल-नियम का प्रयोग करते हुए नहीं निकाला जा सकता है।

इस भाग में, हम देख चुके हैं कि लापिताल-नियम द्वारा $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ का मान किस प्रकार निकाला जाता है, जब $x=a$ पर $\frac{f(x)}{g(x)}$ रूप $\frac{0}{0}$ में है। अब, हम $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ का मान निकालने के लिए उस नियम का अध्ययन करेंगे, जब $x=a$ पर $\frac{f(x)}{g(x)}$ रूप $\frac{\infty}{\infty}$ में है।

12.4 रूप $\frac{\infty}{\infty}$ के लिए लापिताल-नियम

$x \to \infty$ होने पर $\frac{e^x}{x^n}$ की सीमा पर विचार कीजिए। जैसा कि आप देख सकते हैं, यह रूप $\frac{\infty}{\infty}$ की है। जब $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to a} g(x)$ है, तब $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ का मान निकालने के लिए, हमें पिछले भाग में सिद्ध किए हुए परिणामों जैसे ही परिणाम प्राप्त हैं। यहाँ हम इन परिणामों के, बिना उपपत्ति दिए, कथन दे रहे हैं और फिर उन्हें स्पष्ट कर रहे हैं।

प्रमेय 3 (रूप $\frac{\infty}{\infty}$ के लिए लापिताल-नियम) : मान लीजिए कि $x = a$ को अंतर्विष्ट करने वाले एक विवृत अंतराल पर, संभवतः $x = a$ के अतिरिक्त, f और g अवकलनीय फलन हैं तथा यह कि $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ है और $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ है।

यदि $\lim_{x\to a}[f'(x)/g'(x)]$ की एक परिमित सीमा है अथवा यह सीमा $+\infty$ या $-\infty$ है, तो

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ होता है।

साथ ही, यह कथन $x \to a^-, x \to a^+, x \to -\infty$ या $x \to +\infty$ की स्थिति के लिए भी सत्य है।

प्रमेय 2 में, हमने यह भी देखा था कि किस प्रकार लापिताल-नियम का बार-बार उपयोग वाँछित सीमा का मान निकालने में हमारी सहायता करता है। हम अब प्रकार $\frac{\infty}{\infty}$ के अनिर्धार्य रूपों के लिए एक अनुरूप परिणाम का कथन देते हैं।

प्रमेय 4 : मान लीजिए कि $f(x)$ और $g(x)$ ऐसे दो वास्तविक-मान फलन हैं।

i) $\lim_{x\to a} f^{(k)}(x) = \pm\infty = \lim_{x\to a} g^{(k)}(x)$ है, जहाँ $0 \le k \le n-1$, n एक प्राकृत संख्या और a कोई भी $x \to a$ वास्तविक संख्या, ∞ या $-\infty$ है तथा

ii) यदि $\lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ का अस्तित्व है, जो अपरिमित (अनंत) भी हो सकती है, तो

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ होता है।

यहाँ आपको एक अन्य बिंदु ध्यान में रखना चाहिए।

यदि $0 \le k \le n$ के लिए $\frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}$ एक अनिर्धार्य रूप है तथा $x \to a$ होने पर $\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ किसी सीमा की ओर प्रवृत्त होने में असफल रहता है, तो इसका अर्थ यह नहीं है कि $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ का अस्तित्व नहीं है। इसका केवल यह अर्थ है कि हम लापिताल-नियम का अनुप्रयोग नहीं कर सकते हैं तथा यह कि विचाराधीन सीमा के अस्तित्व के होने या नहीं होने को स्थापित करने के लिए, हमें एक अलग प्रक्रिया को अपनाना पड़ेगा।

हम इस बिंदु तथा विभिन्न अन्य बिंदुओं को कुछ उदाहरणों की सहायता से उजागर करेंगे। इनका ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए। ये संबद्ध संकल्पनाओं की बेहतर समझ प्राप्त करने में आपकी सहायता करेंगे।

उदाहरण 15 : दर्शाइए कि $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty, n\geq 1$ है।

हल : मान लीजिए कि $f(x)=e^x, g(x)=x^n, n\geq 1$ है। तब, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ है। यदि $n=1$ है, तो $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}=\infty$ है तथा इसीलिए लापिताल-नियम द्वारा $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty$ है।

यदि $n>1$ है, तो यह स्पष्ट है कि $\lim\limits_{x\to\infty} f^{(k)}(x)=\infty=\lim\limits_{x\to\infty} g^{(k)}(x), 0\leq k\leq n$ है तथा $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{n!}=\infty$ है।

इसके फलस्वरूप, सभी $n\geq 1$ के लिए, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty$ है।

***

उदाहरण 16 : $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0, n>0$ ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $f(x)=\ln x, g(x)=x^n, n>0$ है। फलन $f(x)$ और $g(x)$ प्रमेय 3 की आवश्यकताओं को संतुष्ट करते हैं।

इसलिए, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1/x}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{nx^n}=0$ है।

***

उदाहरण 17 : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\tan 2x}{\ln\tan x}=1$ का मान निकालिए।

हल : मान लीजिए कि $f(x)=\ln\tan 2x$ और $g(x)=\ln\tan x$ है। तब,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ है तथा $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{4\operatorname{cosec}4x}{2\operatorname{cosec}2x}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\cos 2x}=1 \text{ है।}$$

इसलिए, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\tan 2x}{\ln\tan x}=1$ है।

यहाँ, हम $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\tan 2x}{\ln\tan x}$ की बात नहीं कर सकते हैं, क्योंकि $x<0$ के लिए $\tan 2x$ और $\tan x$ ऋणात्मक हैं और इसीलिए हम उनके लघुगणक नहीं ले सकते हैं। और यह भी देखेंगे कि $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\infty=\lim\limits_{x\to 0^+} g'(x)$ है, परंतु $x\to 0^+$ होने पर, $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ एक अनिर्धार्य रूप नहीं है।

***

उदाहरण 18 : सीमा $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^n}{x}$ ज्ञात कीजिए, जहाँ n एक पूर्णांक है और $n\geq 0$ है।

हल : $n=0$ के लिए परिणाम स्पष्ट है। $n=1$ के लिए, परिणाम को उदाहरण 16 में सिद्ध किया गया है। मान लीजिए कि $f(x)=(\ln x)^n$ और $g(x)=x$ है। तब, $x>0$ के लिए, फलन $f(x)$ और $g(x)$ अवकलनीय हैं तथा $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ है। अतः, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n(\ln x)^{n-1}}{x}$ है, जबकि प्रतिबंध यह है कि दाएँ-पक्ष-सीमा (right hand side limit) का अस्तित्व हो। $(\ln x)^n$ और x के स्थान पर फलनों $(\ln x)^{n-1}$

और x पर विचार करने पर, हम $\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^n}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(\ln x)^{n-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)(\ln x)^{n-2}}{x}$ प्राप्त करते हैं, जबकि प्रतिबंध यह है कि दाएँ-पक्ष सीमा का अस्तित्व हो। इस प्रक्रिया की n बार पुनरावर्ती करने पर, हम $\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^n}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{x}=0$ प्राप्त करते हैं।

***

उदाहरण 19 : $\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^m}{x^n}, m>0, n>0$ का मान निकालिए, जब $m>0, n>0$ और m एक पूर्णांक है।

हल : मान लीजिए कि $f(x)=(\ln x)^m$ और $g(x)=x^n$ है। तब, $x>0$ के लिए, f(x) और g(x) अवकलनीय हैं तथा $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty=\lim_{x\to\infty}g(x)$ है।

अतः, $\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^m}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{m(\ln x)^{m-1}}{nx^n}$ है, जबकि प्रतिबंध यह है कि दक्षिण-पक्ष सीमा का अस्तित्व हो। $(\ln x)^{m-1}$ और x^n के स्थान पर क्रमशः फलनों $(\ln x)^m$ और x^n पर विचार करने पर, हम $\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^m}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{m(m-1)(\ln x)^{m-2}}{n^2x^n}$ प्राप्त करते हैं, जबकि प्रतिबंध यह है कि दक्षिण-पक्ष सीमा का अस्तित्व हो। इस प्रकार, उपरोक्त प्रक्रिया की पुनरावर्ती करने पर, हम $\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^m}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{m!}{n^m}.\frac{1}{x^n}=0$ प्राप्त करते हैं।

***

उदाहरण 20 : मान लीजिए कि $P(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_0$ और $Q(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0$ वास्तविक गुणांकों वाले दो बहुपद हैं, जबकि $a_m\neq 0, b_n\neq 0$ है। $\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$ का मान निकालिए।

हल : आइए उस स्थिति को लें, जब $m=n$ है।

यदि $0\le k\le m$, $\lim_{x\to\infty}P^{(k)}(x)$ है, तो $\lim_{x\to\infty}P^{(k)}(x)$ और $\lim_{x\to\infty}Q^{(k)}(x)$ अपरिमित हैं तथा

$\lim_{x\to\infty}\frac{P^{(m)}(x)}{Q^{(m)}(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_m m!}{b_m m!}=\frac{a_m}{b_m}$ है।

अतः, प्रमेय 4 से, $\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f^{(m)}(x)}{g^{(m)}(x)}=\frac{a_m}{b_m}$ है।

अब, मान लीजिए कि $m<n$ है।

पुनः, $0\le k\le m$ के लिए, $\lim_{x\to\infty}P^{(k)}(x)$ और $\lim_{x\to\infty}Q^{(k)}(x)$ अपरिमित हैं

तथा $\lim_{x\to\infty}\frac{P^{(m)}(x)}{Q^{(m)}(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{m!\,a_m}{\sum_{r=m}^{n}b_r\, r(r-1)\ldots(r-m+1)x^{r-m}}=0$ है।

इस प्रकार, $\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{P^{(m)}(x)}{Q^{(m)}(x)}=0$ है।

अब, जब $m>n$ है, तब यह स्पष्ट है कि

$\lim_{x\to\infty}P^{(k)}(x)$ और $\lim_{x\to\infty}Q^{(k)}(x), 0\le k<n$ के लिए, परिमित है तथा

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P^{(n)}(x)}{Q^{(n)}(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sum_{r=n}^{m}a_r r(r-1)\ldots(r-n+1)x^{r-n}}{n!\,b_n}$$

$=\pm\infty$ है, जो इस पर निर्भर करता है कि $\frac{a_m}{b_n}>0$ है या <0 है।

इस प्रकार, $\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{P^{(n)}(x)}{Q^{(n)}(x)}=\infty$ है या $-\infty$ है, जो इसके अनुसार है कि $\frac{a_m}{b_n}>0$ है या <0 है।

अतः,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\frac{a_m}{b_n}, \text{ यदि } m=n\\ 0, \text{ यदि } m<n\\ \pm\infty, \text{ यदि } m>n, \text{ है जो इसके अनुसार है कि } \frac{a_m}{b_n} \text{ घनात्मक है}\\ \text{ या ऋणात्मक है।}\end{cases}$$

***

उदाहरण 21 : $\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+5x^2+4x+6}{5x^4+6x+7}$ का मान निकालिए।

हल : लापिताल-नियम का बार-बार अनुप्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+5x^2+4x+6}{5x^4+6x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{21x^2+10x+4}{20x^3+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{42x+10}{60x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{42}{120x}=0$$

वैकल्पिक रूप से, हम सीमाओं के बीजगणित का उपयोग करते हुए, उपरोक्त सीमा को नीचे दर्शाए अनुसार एक बहुत सरल विधि से ज्ञात कर सकते हैं:

$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+5x^2+4x+6}{5x^4+6x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{7+5/x+4/x^2+6/x^3}{5x+6/x^2+7/x^3}=0$ है, जब $x\to\infty$ है। तब $1/x\to 0$ है।

***

अगले उदाहरण में, आप एक स्थिति देखेंगे, जहाँ लापिताल-नियम का उपयोग नहीं हो सकता है।

उदाहरण 22 : $\lim_{x\to\infty}\frac{2x\sin x}{1+x^2}$ का मान निकालिए।

हल : क्या इस सीमा का मान निकालने के लिए, हम लापिताल-नियम का अनुप्रयोग कर सकते हैं? नहीं। लापिताल-नियम का अनुप्रयोग नहीं किया जा सकता, क्योंकि $\lim_{x\to\infty}2x\sin x$ का अस्तित्व नहीं है। परंतु, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x\sin x}{1+x^2}=0$ है, क्योंकि $\left|\frac{2x\sin x}{1+x^2}\right|\le\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|$ है तथा $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x^2}=0$ है।

***

अब हम एक ऐसा उदाहरण देते हैं, जहाँ लापिताल-नियम का अनुप्रयोग हो सकता है, इससे कोई परिणाम प्राप्त नहीं होता है। परंतु ऐसी स्थितियाँ बहुत दुर्लभ हैं।

उदाहरण 23 : $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ का मान निकालिए।

हल : आइए देखें कि $x \to \infty$ होने पर, इसकी सीमा का मान निकालने के लिए लापिताल-नियम का अनुप्रयोग करने पर क्या होता है। हम $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ प्राप्त करते हैं।

दायाँ पक्ष पुनः $\frac{\infty}{\infty}$ रूप में है। परंतु यदि हम इसका मान निकालने के लिए, लापिताल-नियम का अनुप्रयोग करें, तो हम वहीं पहुँच जाते हैं, जहाँ से हमने प्रारंभ किया था। इस प्रकार, इस स्थिति में, लापिताल-नियम का अनुप्रयोग करना व्यर्थ है। परंतु फिर भी हम नीचे दर्शाए अनुसार सीमा का मान निकाल सकते हैं।

$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1$ है, क्योंकि $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ है।

***

उदाहरण 24 : $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x+1}{3x^2+5x-2}$ का मान निकालिए।

हल : हम $(1/x^2)$ द्वारा गुणा और भाग करके इस सीमा को अभिकलित कर सकते थे। इसके स्थान पर, हम देखते हैं कि यह $\frac{\infty}{\infty}$ रूप की है और हम लापिताल-नियम का अनुप्रयोग करते हैं:

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x+1}{3x^2+5x-2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x-3}{6x+5} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ है।

***

उदाहरण 25 : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\cos x}$ का मान निकालिए।

हल : यह सीमा अनिर्धार्य रूप $\frac{\infty}{\infty}$ की है। यदि आप लापिताल-नियम का अनुप्रयोग करने का प्रयास करें, तो आप पाएँगे कि $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\cos x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos x}{1+\sin x}$ है।

दाएँ पक्ष की सीमा का अस्तित्व नहीं है, क्योंकि $x \to +\infty$ होने पर $\sin x$ और $\cos x$ दोनों –1 और 1 के बीच दोलन करते हैं। याद कीजिए कि लापिताल-नियम का केवल तभी अनुप्रयोग होता है, जब $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ हो या $\pm\infty$ हो। इसका अर्थ यह नहीं है कि प्रारंभिक व्यंजक की सीमा का अस्तित्व नहीं है या यह कि हम इसे ज्ञात नहीं कर सकते हैं। इसका केवल यह अर्थ है कि हम लापिताल-नियम का अनुप्रयोग नहीं कर सकते हैं। इस सीमा को ज्ञात करने के लिए, अंश और हर में से एक गुणनखंड x को बाहर निकालिए तथा नीचे दर्शाए अनुसार आगे बढ़िए:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\cos x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1-\frac{\cos x}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\cos x}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1 \text{ है।}$$

***

उपरोक्त उदाहरणों का अध्ययन करने के बाद, आपको इन प्रश्नों को हल करने में कोई कठिनाई नहीं होगी।

E8) निम्नलिखित सीमाओं के मान निकालिए:

i) $\lim_{x\to\infty}\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0}{e^x}$ जहाँ $a_i \in \mathbb{R}, \forall\, i = 0, 1, \ldots, m$ है।

ii) $\lim\limits_{x\to(\pi/2)} \frac{-\tan x}{\ln \cos x}$

iii) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \frac{\tan 3x}{\tan x}$

iv) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^6 + \ln x}{2x^6 + 5x^4 + 1}$

v) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^8 + 5x^7 + 6x^3 + 1}{3x^8 + 5x^7 + 5x + 1}$

E9) दर्शाइए कि $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} = 1$ है तथा इसे निकालने के लिए लापिताल-नियम का उपयोग नहीं किया जा सकता है।

E10) निम्नलिखित सीमाओं के मान निकालिए तथा दर्शाइए कि प्रत्येक स्थिति में लापिताल-नियम का उपयोग नहीं किया जा सकता है:

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 - \sin x^2}{x^2}$

ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x - \cos x}{x}$

iii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{|\sin x| + |\cos x|}{x}$

iv) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x \sin x + \cos x}{x^2}$

अगले भाग में, हम अन्य अनिर्धार्य रूपों की चर्चा करेंगे।

12.5 अन्य अनिर्धार्य रूप

अभी तक, हमने प्रकार $\frac{0}{0}$ और $\frac{\infty}{\infty}$ के अनिर्धार्य रूपों की चर्चा की है। परंतु केवल ये ही संभावनाएँ नहीं हैं। व्यापक रूप में, $\frac{f(x)}{g(x)}, f(x)\cdot g(x), f(x)^{g(x)}, f(x)-g(x), f(x)+g(x)$ में से किसी एक के रूप के व्यंजक की सीमा एक अनिर्धार्य रूप कहलाती है, यदि इनमें से किसी भी फलन $f(x)$ और $g(x)$ की सीमाएँ संपूर्ण व्यंजक की सीमा पर विरोधी प्रभाव डालती हैं। उदाहरणार्थ, सीमा $\lim\limits_{x\to0^+} x \ln x$ प्रकार $0\cdot\infty$ का एक अनिर्धार्य रूप है, क्योंकि प्रथम गुणनखंड की सीमा 0 है तथा दूसरे गुणनखंड की सीमा $-\infty$ है तथा ये दोनों सीमाएँ गुणनफल पर विरोधी प्रभाव डालती हैं। दूसरी ओर, सीमा $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{x}(1-x^2)]$ एक अनिर्धार्य रूप नहीं है, क्योंकि प्रथम गुणनखंड की सीमा $+\infty$ है और दूसरे गुणनखंड की सीमा $-\infty$ है तथा ये दोनों प्रभाव साथ मिल कर कार्य करते हैं और गुणनफल की सीमा $-\infty$ प्रदान करते हैं।

सावधानी : यह तर्क देने के बारे में सोचा जा सकता है कि प्रकार $0\cdot\infty$ के एक अनिर्धार्य रूप का मान $\frac{\infty}{\infty}$ है, क्योंकि "किसी भी राशि का शून्य गुना शून्य होता है"। परंतु यह असत्य है, क्योंकि $0\cdot\infty$ संख्याओं का एक गुणनफल नहीं है, अपितु सीमाओं के बारे केवल एक कथन है। उदाहरण के लिए निम्नलिखित सीमाएँ $0\cdot\infty$ के रूप की हैं:

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\frac{1}{x}=1,\ \lim_{x\to 0^+} x^2\cdot\frac{1}{x}=0,\ \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}=+\infty$$

इस प्रकार $0\cdot\infty$ के अनिर्धार्य रूपों का मान, कभी-कभी इस गुणनफल को एक अनुपात के रूप में लिख कर और फिर प्रकार $\frac{0}{0}$ या $\frac{\infty}{\infty}$ के अनिर्धार्य रूपों के लिए लापिताल-नियम का अनुप्रयोग करते हुए, निकाला जा सकता है।

यदि आप निम्नलिखित उदाहरणों का अध्ययन कर लेंगे, तो आप उपरोक्त बातों को स्पष्ट रूप से समझ पाएँगे।

उदाहरण 26 : $\lim_{x\to 1}\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln x$ का मान निकालिए।

हल : ध्यान दीजिए कि $x=1$ पर $\tan\frac{\pi x}{2}\ln x$ एक $0\cdot\infty$ के रूप का है। अब, हम इसे $\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln x=\frac{\sin(\pi x/2)}{\cos(\pi x/2)}\ln x$ लिखते हैं।

हम जानते हैं कि $\lim_{x\to 1}\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)=1$ है। इसलिए, आइए $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\cos(\pi x/2)}$ ज्ञात करने का प्रयास करें।

अब, $x=1$ पर, $\frac{\ln x}{\cos(\pi x/2)}$ रूप $\frac{0}{0}$ का है। अतः, लापिताल-नियम द्वारा,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\cos(\pi x/2)}=\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{-\sin(\pi x/2).\,\pi/2}=-\frac{2}{\pi} \text{ है।}$$

इस प्रकार, $\lim_{x\to 1}\left(\tan\frac{\pi x}{2}\right)\ln x=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x/2)\ln x}{\cos(\pi x/2)}$

$$=\lim_{x\to 1}\sin\frac{\pi x}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\cos(\pi x/2)}=1.\left(-\frac{2}{\pi}\right)=-\frac{2}{\pi} \text{ है।}$$

***

उदाहरण 27 : $\lim_{x\to\infty}x^p e^{-qx}$ ज्ञात कीजिए, जहाँ p और q धनात्मक पूर्णांक हैं।

हल : हम $\lim_{x\to\infty}x^p e^{-qx}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{e^{qx}}$ लिख सकते हैं।

अब, $\frac{x^p}{e^{qx}}$ प्रकार $\frac{\infty}{\infty}$ का एक अनिर्धार्य रूप है, जिसके लिए लापिताल-नियम का उपयोग किया जा सकता है। इस प्रकार, हम प्राप्त करते हैं:

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{e^{qx}}=\lim_{x\to\infty}\frac{p!}{q^p e^{qx}}=0$ जिससे $\lim_{x\to\infty}x^p e^{-qx}=0$ है।

***

उदाहरण 28 : $\lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$ का मान निकालिए।

हल : यह सीमा रूप $0\cdot\infty$ की है, क्योंकि $\lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0$ है तथा

$\lim_{x\to(\pi/2)^-}\tan x=+\infty$ है।

$\tan x=\frac{1}{\cot x}$ लिखिए, जिससे प्राप्त होता है:

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x=\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cot x} \qquad \left[\text{रूप } \frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{1}{-\text{cosec}^2 x}$$

$$= \lim_{x \to (\pi/2)^-} (-\sin^2 x) = -1$$

***

अब, हम एक अन्य अनिर्धार्य रूप की चर्चा करेंगे। एक सीमा समस्या, जो हमें $(+\infty)-(+\infty), (-\infty)-(-\infty), (+\infty)+(-\infty), (-\infty)+(+\infty)$ में से किसी एक व्यंजक तक पहुँचाती है, प्रकार $\infty-\infty$ का एक अनिर्धार्य रूप कहलाती है। ऐसी सीमाएँ अनिर्धार्य हैं, क्योंकि दोनों पद व्यंजक पर विरोधी प्रभाव डालते हैं: एक इसे धनात्मक दिशा में धकेलता है तथा दूसरा इसे ऋणात्मक दिशा में धकेलता है। $(+\infty)+(+\infty)$, $(+\infty)-(-\infty)$, $(-\infty)+(-\infty)$, $(-\infty)-(+\infty)$ अनिर्धार्य नहीं हैं, क्योंकि दोनों पद साथ मिल कर कार्य करते हैं।

प्रकार $\infty-\infty$ के अनिर्धार्य रूपों का मान, कभी-कभी पदों को संयोजित करके तथा प्रकार $\frac{0}{0}$ या $\frac{\infty}{\infty}$ का एक अनिर्धार्य रूप प्राप्त करने के लिए परिणाम में प्रबंध कौशल का उपयोग करते हुए, निकाला जा सकता है, जैसा कि आप निम्नलिखित उदाहरणों में देखेंगे।

उदाहरण 29 : सीमा $\lim_{x \to 0}\left(\text{cosec}\, x - \frac{1}{x}\right)$ का मान निकालिए।

हल : स्पष्टतः, यह फलन प्रकार $\infty-\infty$ का है।

हम $\text{cosec}\, x - \frac{1}{x} = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x}$ लिख सकते हैं, जिससे दायाँ पक्ष $x = 0$ पर $\frac{0}{0}$ रूप का है, जिसके लिए लापिताल-नियम का उपयोग किया जा सकता है।

इस प्रकार, $\lim_{x \to 0}\left(\text{cosec}\, x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \quad \text{[लापिताल-नियम द्वारा]}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2\cos x - x \sin x} \quad \text{[लापिताल-नियम द्वारा]}$$

$$= \frac{\lim_{x \to 0} \sin x}{\lim_{x \to 0}(2\cos x - x \sin x)} = \frac{0}{2} = 0 \text{ है।}$$

***

उदाहरण 30 : $\lim_{x \to (\pi/2)^-}\left[\sec x - \frac{1}{(1 - \sin x)}\right]$ ज्ञात कीजिए।

हल : अब, $\sec x - \frac{1}{1 - \sin x} = \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{1 - \sin x} = \frac{1 - \sin x - \cos x}{\cos x(1 - \sin x)}$ है तथा दायाँ पक्ष $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ होने पर, $\frac{0}{0}$ रूप का है, जिसके लिए लापिताल-नियम का उपयोग किया जा सकता है। इस प्रकार,

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-}\left(\sec x - \frac{1}{1 - \sin x}\right) = \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{1 - \sin x - \cos x}{\cos x - \sin x \cos x}$$

$$= \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{-\cos x + \sin x}{-\sin x - \cos 2x} \quad \text{[लापिताल-नियम द्वारा]}$$

$$= \lim_{x\to(\pi/2)^-}(-\cos x+\sin x).\lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(\frac{1}{-\sin x-\cos 2x}\right)$$

$= 1\ .\ \infty = \infty$ है।

***

उदाहरण 31 : $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right]$ का मान निकालिए।

हल : हम $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\right]$ लिखते हैं।

अब, दाएँ पक्ष की सीमा को निकालने के लिए, लापिताल-नियम का अनुप्रयोग किया जा सकता है। अतः,

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1/(1+x)^2}{2}\right]=\frac{1}{2} \text{ है।}$$

***

आइए अब $\lim f(x)^{g(x)}$ के रूप की सीमाओं की चर्चा करें, जो प्रकार $0^0, \infty^0$ और 1^∞ के अनिर्धार्य रूप प्रदान करते हैं। उदाहरणार्थ, सीमा $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x}$, जिसका मान हम जानते हैं कि e है (इकाई 7 का स्मरण कीजिए), प्रकार 1^∞ का एक अनिर्धार्य रूप है। यह अनिर्धार्य है, क्योंकि व्यंजक $1+x$ और $1/x$ दो विरोधी प्रभाव डालते हैं पहला 1 की ओर अग्रसर होता है, जो व्यंजक को 1 की ओर चलाता है तथा दूसरा $+\infty$ की ओर अग्रसर होता है, जो व्यंजक को $+\infty$ की ओर चलाता है

प्रकारों $0^0, \infty^0$ और 1^∞ के अनिर्धार्य रूपों के मानों को कभी-कभी, पहले एक आश्रित चर $y=f(x)^{g(x)}$ को प्रविष्ट करके और फिर $\ln y$ की सीमा को, $\lim \ln y = \lim[\ln(f(x)^{g(x)})] = \lim[g(x)\ln f(x)]$ के रूप में व्यक्त करके, परिकलित करते हुए, निकाला जा सकता है एक बार $\ln y$ की सीमा ज्ञात हो जाने पर, स्वयं $y=f(x)^{g(x)}$ की सीमा सामान्यतः एक विधि द्वारा प्राप्त की जा सकती है, जिसे हम अगले उदाहरण में स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 32 : $\lim_{x\to 1^+} x^{1/(x-1)}$ का मान निकालिए।

हल : स्पष्टतः, जब $x\to 1^+$ है, तब $x^{1/(x-1)}$ प्रकार 1^∞ का एक अनिर्धार्य रूप है। मान लीजिए कि $y=x^{1/(x-1)}$ है। तब, $\ln y=\frac{1}{x-1}\ln x$ है।

अब, $x\to 1^+$ होने पर, $\frac{\ln x}{x-1}$ रूप $\frac{0}{0}$ में है और इसके लिए लापिताल-नियम का उपयोग किया जा सकता है।

इसलिए $\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1/x}{1}=1$ है।

अतः, $\lim_{x\to 1^+} x^{1/(x-1)}=\lim_{x\to 1^+} e^{\ln y}=e^{\lim_{x\to 1^+}\ln y}=e^0=1$ है।

***

उदाहरण 33 : $\lim_{x\to 0^+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$ का मान निकालिए।

हल : मान लीजिए कि $y=\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$ है, जिससे $x\to 0^+$ होने पर y रूप ∞^0 में है।

तब, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to 0^+} y = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y}$ (2)

परंतु, $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)}{1/x}$

अब, $x\to 0^+$ होने पर, $\frac{\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)}{1/x}$ रूप $\frac{0}{0}$ में है। इसलिए, लापिताल-नियम द्वारा प्राप्त होता है: $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{\ln(1/x)}\cdot\frac{-1}{x^2}}{-1/x^2} = 0$

इसे समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर, हम

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x = e^0 = 1$ प्राप्त करते हैं।

***

उदाहरण 34 : $\lim\limits_{x\to\pi/2^-}(\cos x)^{\cos x}$ का मान निकालिए।

हल : मान लीजिए कि $y=(\cos x)^{\cos x}$, $0<x<\pi/2$ है। तब,

$\ln y = \cos x \ln\cos x = \frac{\ln\cos x}{\sec x}$ है और इसलिए लापिताल-नियम के अनुप्रयोग द्वारा,

हम $\lim\limits_{x\to\pi/2^-}\ln y = \lim\limits_{x\to\pi/2^-}\frac{\ln\cos x}{\sec x} = \lim\limits_{x\to\pi/2^-}\frac{-\tan x}{\sec x\tan x} = 0$ प्राप्त करते हैं। इस प्रकार,

$\lim\limits_{x\to\pi/2^-}(\cos x)^{\cos x} = e^{\lim\limits_{x\to\pi/2^-}\ln y} = e^0 = 1$ है।

***

उदाहरण 35 : दर्शाइए कि $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ है।

हल : ध्यान दीजिए कि यह सीमा निस्संदेह अनिर्धार्य रूप 1^∞ की है। मान लीजिए कि $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ है।

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\ln L = \ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \qquad [\ln x \text{ संतत है}]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \qquad [\text{लघुगणक के गुणधर्मो द्वारा}]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ रूप}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} \qquad [\text{लापिताल-नियम द्वारा}]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$ [सरल करने पर]

$$= \frac{1}{1+0} = 1$$

इस प्रकार, $\ln L = 1$ और $L = e^1 = e$ है।

***

उदाहरण 36 : $\lim_{x\to0^+} x^{\sin x}$ ज्ञात कीजिए।

हल : यह एक 0^0 अनिर्धार्य रूप है। हम लघुगणक के गुणों का प्रयोग करते हुए प्रारंभ करते हैं।

मान लीजिए कि $L = \lim_{x\to0^+} x^{\sin x}$ है।

इसलिए, $\ln L = \ln \lim_{x\to0^+} \ln x^{\sin x}$

$$= \lim_{x\to0^+} \ln x^{\sin x}$$ [$\ln x$ संतत है]

$$= \lim_{x\to0^+} (\sin x)\ln x$$ [$0.\infty$ रूप]

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x}$$ $\left[\frac{\infty}{\infty} \text{ रूप}\right]$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{1/x}{-\operatorname{cosec} x \cot x}$$ [नियम द्वारा]

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{-\sin^2 x}{x\cos x}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= (1)(0) = 0$$

इस प्रकार, $L = e^0 = 1$ है।

***

उदाहरण 37 : $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$ ज्ञात कीजिए।

हल : यह अनिर्धार्य रूप ∞^0 की एक सीमा है।

यदि $L = \lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$ है तो, $\ln L = \ln \lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln x$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$$ $\left[\frac{\infty}{\infty} \text{ रूप}\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1}$$ [नियम द्वारा]

$= 0$ है।

इस प्रकार, हम $\ln L = 0$ प्राप्त करते हैं। अतः, $L = e^0 = 1$ है।

***

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E11) निम्नलिखित मान निकालिए

i) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

iii) $\lim\limits_{x\to \pi/4} (1-\tan x)\sec 2x$

E12) निम्नलिखित सीमाओं के मान निकालिए:

i) $\lim\limits_{x\to \pi/2^-} (\sec x - \tan x)$

ii) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

E13) निम्नलिखित सीमाओं के मान निकालिए। प्रत्येक स्थिति में, पहले आपको अनिर्धार्य रूप के प्रकार की पहचान करनी है तथा फिर प्रक्रिया के बारे में निर्णय लेना है।

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{1/x}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos x)^{1/x^2}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

iv) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\tan x)^{\sin 2x}$

v) $\lim\limits_{x\to (\pi/2)^+} (\tan x)^{\sin 2x}$

E14) दर्शाइए कि $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$ है।

इससे हम इस इकाई के अंत तक पहुँच गए हैं। इसमें जो हमने किया है, आइए उसका सारांश दें।

12.6 सारांश

इस इकाई में, हमने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ के रूप की सीमा, जहाँ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ और $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ या तो दोनों 0 हैं या दोनों ∞ हैं। ऐसी सीमाएँ क्रमशः $\frac{0}{0}$ अनिर्धार्य रूप और $\frac{\infty}{\infty}$ अनिर्धार्य रूप कहलाती हैं।

2. अन्य अनिर्धार्य रूप $0^\infty, \infty-\infty, 0.\infty$ इत्यादि हैं।

3. ऐसे अनिर्धार्य रूपों के मान निकालने के लिए एक नियम, जो लापिताल-नियम कहलाता है तथा जो मान निकालने को $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, के अभिकलन से जोड़ता है, यदि सीमा का अस्तित्व है।

4. हमने अनिर्धार्य रूपों के प्रकारों $\infty - \infty, 1^{\infty}, 0^{\infty}$ और 0^0 को रूपों $\frac{0}{0}$ या $\frac{\infty}{\infty}$ में बदलने का वर्णन किया है।

12.7 हल / उत्तर

E1) i) $\frac{\infty}{\infty}$

ii) $\frac{0}{0}$

iii) $\infty - \infty$

iv) $\frac{0}{0}$

v) $0 \times -\infty$

E2) i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x} = \frac{1-1}{1} = 0$ है।

ii) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 6x + 5}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x - 5} = \frac{4}{-4} = -1$ है।

iii) लापिताल-नियम द्वारा,

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{\sin x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos x}{2x \cos x^2}$ है।

अब, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos x}{2x\cos x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{\cos x^2} = 1$ है।

अतः, वाँछित सीमा 1 है।

iv) $7/\pi$

v) $\left(\frac{m}{n}\right)\alpha^{m-n}$

vi) 1

vii) -1

viii) $\ln 3/2$

ix) $\sqrt{2}$

x) $1/8$

E3) i) $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln x = \ln 1 = 0$ है तथा $\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1) = 0$ है।

लापिताल-नियम के अनुसार,

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1/x}{1}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1$ है।

ii) $\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$

यहाँ $x\to\pi^-$ होने पर $\sin x\to 0$ है, परंतु $x\to\pi^-$ होने पर $(1-\cos x)$ की सीमा 0 की ओर अग्रसर नहीं होती है।

$\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{\sin x}{1-\cos x}=\dfrac{0}{1-(-1)}=0$ है।

E4) i) यह सीमा $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{\frac{4}{3}}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ रूप $\dfrac{0}{0}$ में है। अतः, लापिताल-नियम का अनुप्रयोग किया जा सकता है।

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{-4/3}}{\sin(1/x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-4}{3}x^{-7/3}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{3}x^{-1/3}}{\cos(1/x)}$$

$$=\frac{0}{1}=0 \text{ है।}$$

ii) 1

iii) 1

iv) 1

E5) i) 1

ii) 2

iii) दी हुई सीमा $\dfrac{0}{0}$ रूप की है। इस प्रकार, हम लापिताल-नियम का अनुप्रयोग कर सकते हैं।

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x^2}{x^4}\ \frac{x^2}{\sin^2 x}\right)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x^2}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x^2}{x^2}\right)=\frac{1}{2} \text{ है।}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^4}.\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)=\frac{1}{2} \text{ है।}$$

लापिताल-नियम के सीधे अनुप्रयोग से भी यही परिणाम प्राप्त होगा।

iv) दी हुई सीमा $\dfrac{0}{0}$ रूप की है। इस प्रकार, हम लापिताल-नियम का अनुप्रयोग कर सकते हैं।

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan^2 x-x^2}{x^2\tan^2 x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan^2 x-x}{x^4}.\frac{x^2}{\tan^2 x}\right)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan^2 x-x^2}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{2\tan x\sec^2 x-2x}{4x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sec^4 x + 2\sec^2 x\tan^2 x - 1}{6x^2} = \frac{1}{3} \text{ है।}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sec^4 x - 1}{6x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{3\sec^4 x\tan x}{12x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\sec^4 x.\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3} \text{ है।}$$

तथा $\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan^2 x}{6x^2} = \frac{1}{3}$ है।

v) $-\frac{9}{2}$

vi) $\frac{1}{4}$

vii) 2

E6) i) $k = -1$ है तथा सीमा $\frac{8}{3}$ है।

ii) $k = -1$ है तथा सीमा 0 है।

E7) $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin 1/x}{5\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{5\frac{\tan x}{x}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}}{5\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}}$$

$= \frac{0}{5}$, क्योंकि $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$ है तथा क्योंकि $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$ है।

$= 0$

लापिताल-नियम का उपयोग नहीं किया जा सकता, क्योंकि $\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{5\sec^2 x}$ का अस्तित्व नहीं है, क्योंकि $\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$ का अस्तित्व नहीं है।

E8) i) $\lim_{x\to\infty}\frac{a_m x^m + \cdots + a_0}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{m!\,a_m}{e^x} = 0$

ii) ∞

iii) लापिताल-नियम द्वारा

$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan 3x}{\tan x} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{3\sec^2 3x}{\sec^2 x}$ जो पुनः $\frac{\infty}{\infty}$ के रूप का है। इसे $\frac{0}{0}$ रूप में बदल कर सरलता से ज्ञात किया जा सकता है।

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{3\sec^2 3x}{\sec^2 x} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{3\cos^2 x}{\cos^2 3x}$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{-6\cos x \sin x}{-6\cos 3x \sin 3x}$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin 2x}{\sin 6x}$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{2\cos 2x}{6\cos 6x} = \frac{1}{3}$$

iv) $\frac{1}{2}$

v) $\frac{2}{3}$

E9) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$ है।

क्योंकि $\sin x$ और $\cos x$ परिबद्ध फलन हैं तथा $x \to \infty$ होने पर $\frac{1}{x} \to 0$ है।

आप देख सकते हैं कि दी हुई सीमा $\frac{\infty}{\infty}$ रूप की है। अतः, लापिताल-नियम का उपयोग किया जा सकता है। परंतु लापिताल-नियम के अनुप्रयोग के बाद, हम अवकलज लेते हैं, तब हमें $\frac{1+\cos x}{1-\sin x}$ प्राप्त हो जाता है, जिसकी कोई सीमा नहीं है।

E10) i) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 - \sin x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-\frac{\sin x^2}{x^2}}{1} = 1,$

क्योंकि $\sin x^2$ परिबद्ध है तथा $x \to \infty$ होने पर $\frac{1}{x^2} \to 0$ है।

ii) 1 है। (i) में दिए गए तर्क जैसे ही समान तर्क द्वारा लापिताल-नियम का उपयोग नहीं किया जा सकता है।

iii) 0 है। लापिताल-नियम का उपयोग नहीं किया जा सकता, क्योंकि $x \to \infty$ होने पर $\frac{f(x)}{g(x)}$ एक अनिर्धार्य रूप नहीं है।

iv) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x}{x^2} = 0$ है।

लापिताल-नियम का उपयोग नहीं किया जा सकता, क्योंकि $\lim\limits_{x\to\infty}(x\sin x + \cos x)$ का अस्तित्व नहीं है।

E11) i) $0\cdot\infty$ रूप है।

$$\lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin 1/x}{1/x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \cos\frac{1}{x} = 1 \text{ है।}$$

ii) गुणनखंड x की सीमा 0 है तथा गुणनखंड $\ln x$ की सीमा $-\infty$ है। इसलिए दी गई समस्या प्रकार $0\cdot\infty$ का एक अनिर्धार्य रूप है। इस पर कार्य करने की ही संभव विधियाँ हैं। हम सीमा को पुनः $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$ या $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{1/\ln x}$ के रूप में लिख सकते हैं।

पहला प्रकार $\frac{\infty}{\infty}$ का एक अनिर्धार्य रूप है तथा दूसरा प्रकार $0/0$ का एक अनिर्धार्य रूप है। परंतु पहला रूप प्राथमिक प्रारंभिक विकल्प है, क्योंकि $1/x$ का अकलज $1/\ln x$ के अवकलज की तुलना में कम जटिल है। इस विकल्प से,

$\lim_{x\to0^+} x\ln x = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to0^+}(-x) = 0$ प्राप्त होता है।

iii) दी गई समस्या प्रकार $0\cdot\infty$ का एक अनिर्धार्य रूप है। हम इसे प्रकार $0/0$ के एक अनिर्धार्य रूप में बदलेंगे।

$$\lim_{x\to\pi/4}(1-\tan x)\sec 2x = \lim_{x\to\pi/4}\frac{1-\tan x}{1/\sec 2x} = \lim_{x\to\pi/4}\frac{1-\tan x}{\cos 2x}$$

$$= \lim_{x\to\pi/4}\frac{-\sec^2 x}{-2\sin 2x} = \frac{-2}{-2} = 1 \text{ है।}$$

E12) i) $\lim_{x\to(\pi/2)^-}(\sec x - \tan x)$

$$= \lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(\frac{-\cos x}{-\sin x}\right)$$

$= 0$ है।

लापिताल-नियम का अनुप्रयोग न्यायसंगत है, क्योंकि $x\to(\pi/2)^-$ होने पर, $1-\sin x\to0$ है तथा $\cos x\to0$ है।

ii) वर्तमान स्थिति में, यह रूप $\infty-\infty$ का है, क्योंकि दाएँ से $x\to0$ होने पर $\frac{1}{x}\to+\infty$ और $\frac{1}{\sin x}\to+\infty$ है। परंतु कुछ बीजगणित का उपयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं कि

$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to0^+}\frac{\sin x - x}{x\sin x}$ है।

यह सीमा अब रूप $0/0$ की है। अतः, लापिताल-नियम की परिकल्पना संतुष्ट हो जाती है। इस प्रकार,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \lim_{x\to0^+}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}$$

यह पुनः रूप $\frac{0}{0}$ है। अतः, $\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x - x}{x\sin x}$

$= \lim_{x\to0^+}\frac{-\sin x}{\cos x + x(-\sin x) + \cos x} = \frac{0}{2} = 0$ है।

E13) i) 1^∞ रूप है। यदि $y=(1+x)^{1/x}$ है, तो $\ln y = \frac{\ln(1+x)}{x}$ रूप $\frac{0}{0}$ में है।

$\therefore\ \lim_{x\to0^+}\ln y = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+x} = 1$ है।

$\therefore\ \lim_{x\to0^+}(1+x)^{1/x} = \lim_{x\to0^+} y = e^1 = e$ है।

ii) 1^{∞} रूप है। यदि $y = \cos x^{1/x^2}$ है, तो $\ln y = \frac{\ln \cos x}{x^2}$ है, जो $x \to 0$ होने पर $\frac{0}{0}$ रूप में है।

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} \ln y = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\tan x}{2x} = -\frac{1}{2}$ है।

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ है।

iii) 0^0 रूप है। यदि $y = x^x$ है, तो $\ln y = x \ln x$ है, जो $x \to 0^+$ होने पर $0(-\infty)$ रूप का है।

$$\therefore \lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -x = 0 \text{ है।}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$$

iv) 0^0 रूप है। $\lim\limits_{x\to 0^+} (\tan x)^{\sin 2x} = 1$ है।

v) ∞^0 रूप है। यदि $y = (\tan x)^{\sin 2x}$ है, तो $\ln y = \sin 2x \ln \tan x$ है।

$$\therefore \lim_{x\to \pi/2^-} \ln y = \lim_{x\to \pi/2^-} \frac{\ln \tan x}{\operatorname{cosec} 2x}$$

$$= \lim_{x\to \pi/2^-} \frac{\frac{1}{\tan x}\sec^2 x}{2\operatorname{cosec} 2x \cot 2x}$$

$$= \lim_{x\to \pi/2^-} \frac{\frac{2}{\sin 2x}}{\frac{-2\cos 2x}{\sin^2 2x}}$$

$$= \lim_{x\to \pi/2^-} \frac{-\sin 2x}{\cos 2x} = 0 \text{ है।}$$

$$\therefore \lim_{x\to \pi/2^-} (\tan x)^{\sin 2x} = e^0 = 1 \text{ है।}$$

E14) हम आश्रित चर $y = (1+x)^{1/x}$ की प्रविष्टि करके प्रारंभ करते हैं तथा दोनों पक्षों के प्राकृतिक लघुगणक लेते हैं।

$$\ln y = \ln(1+x)^{1/x} = \frac{1}{x}\ln(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

इस प्रकार, $\lim\limits_{x\to 0} \ln y = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ है, जो प्रकार $\frac{0}{0}$ का एक अनिर्धार्य रूप है। अतः, लापिताल-नियम द्वारा $\lim\limits_{x\to 0} \ln y = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1/(1+x)}{1} = 1$ है। क्योंकि हमने दर्शाया है कि $x \to 0$ होने पर $\ln y \to 1$ है, इसलिए चरघातांकीय फलन के सांतत्य से यह निष्कर्ष निकलता है कि $x \to 0$ होने पर $e^{\ln y} \to e^1$ है तथा इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि $x \to 0$ होने पर $y \to e$ है। इस प्रकार, $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$ है।

इकाई 13

उतार और चढ़ाव

इकाई की रूपरेखा **पृष्ठ संख्या**

13.1 प्रस्तावना

कलन के लक्ष्यों में से एक मुख्य लक्ष्य विभिन्न फलनों के व्यवहार का अन्वेषण करना है। इस अन्वेषण के एक भाग के रूप में, हम समस्याओं के एक ऐसे बड़े वर्ग के हल करने के लिए आधारशिला रखेंगे, जिनमें किसी फलन का अधिकतम या न्यूनतम मान ज्ञात करना होता है, यदि उसका अस्तित्व हो। ऐसी समस्याएँ **इष्टतमीकरण समस्याएँ (Optimisation problems)** कहलाती हैं। उदाहरणार्थ, मधुमक्खी के छत्तों में षट्भुजाकार कोष होते हैं, क्योंकि यह आकार मधुमक्खियों को सीलिंग (बंद) करने के लिए न्यूनतम मोम का प्रयोग करते हुए शहद की एक निश्चित मात्रा संचरित करने में समर्थ बनाता है, तेल की बूंदें जल के पृष्ठ पर संयुक्त हो जाती हैं जिससे कुल पृष्ठ तनाव न्यूनतम हो जाता है तथा इस न्यूनतम पृष्ठ तनाव के कारण जल की एक बूँद गोलाकार होती है।

भागों 13.2 और 13.3 में, हम विभिन्न फलनों को अधिकतम या न्यूनतम करने की समस्या को हल करने के लिए एक महत्वपूर्ण तकनीक की चर्चा करेंगे। जैसा कि आप शीघ्र ही देखेंगे कि इस तकनीक में अवकलजों का प्रयोग संबद्ध होता है। भाग 13.4 में, हम यह

ज्ञात करने के लिए कि एक दिए हुए अंतराल में कोई फलन वर्धमान है या ह्रासमान है या कुछ भी नहीं है अवकलजों का अनुप्रयोग करेंगे।

भागों 13.5 और 13.6 में, हम क्रमशः प्रथम अवकलज परीक्षण और द्वितीय अवकलज परीक्षण का प्रयोग करते हुए, अवकलजों के अन्य अनुप्रयोगों को देखेंगे। भाग 13.7 में, हम रोल-प्रमेय और लग्रांज माध्य मान प्रमेय की चर्चा करेंगे, जिनकी हमारे कलन के अध्ययन में एक बहुत महत्वपूर्ण भूमिका है।

अब हम इस इकाई के उद्देश्यों की सूची देंगे। इस इकाई का अध्ययन करने के बाद कृपया इस सूची को पुनः पढ़ें तथा यह सूनिश्चित कर लें कि आपने ये उद्देश्य प्राप्त कर लिए हैं।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आप

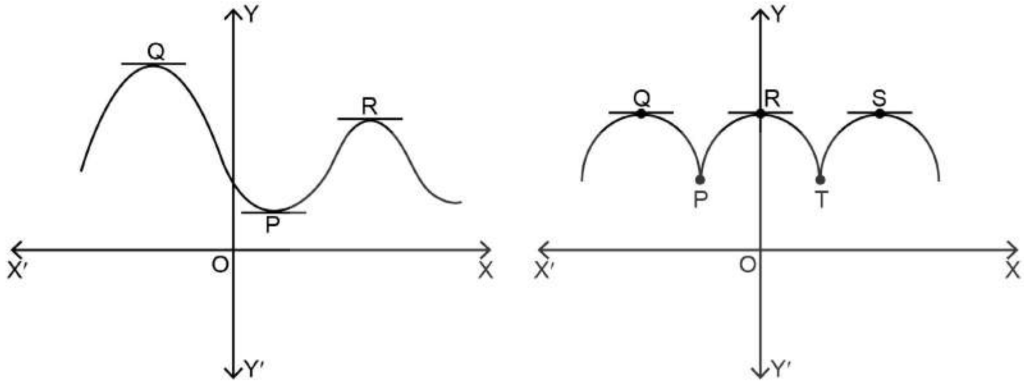
- कुछ फलनों के अधिकतम और न्यूनतम मान प्राप्त कर पाएँगे, यदि उनका अस्तित्व है।
- उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ का वास्तविक जीवन से संबंधित स्थितियों में अनुप्रयोग कर पाएँगे।
- रोल-प्रमेय और लग्रांज माध्य-मान प्रमेय के कथन देकर उनका अनुप्रयोग कर पाएँगे।
- एक फलन के अवकलजों को प्रयोग करते हुए, यह ज्ञात कर पाएँगे कि वह फलन एकदिष्ट है या नहीं।

13.2 सापेक्ष चरम मान

इस भाग में, हम एक फलन के आलेख पर ऊँचे और नीचे बिंदुओं को ज्ञात करने के लिए विधियों की चर्चा करेंगे। यदि हम किसी फलन f के लेखाचित्र की पहाड़ियों और खाड़ियों सहित एक द्विविमीय पर्वत-श्रृंखला के रूप में कल्पना करें, तो पहाड़ियों की चोटियाँ **सापेक्ष उच्चिष्ठ (relative maxima)** तथा खाड़ियों के निचले तले **सापेक्ष निम्निष्ठ (relative minima)** कहलाते हैं। सापेक्ष उच्चिष्ठ और सापेक्ष निम्निष्ठ अपनी निकटतम समीपता में क्रमशः ऊँचे और नीचे बिंदु होते हैं, जैसा कि चित्र 1 में दर्शाया गया है। उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ दोनों मिलकर **चरम मान (extrema,** जो **extremum** का बहुवचन है) कहलाते हैं।

चित्र 1: पहाड़ियाँ और खाड़ियाँ

एक संतत फलन के चरम मान या तो अंतराल के अंत-बिंदुओं पर या फिर उन बिंदुओं पर होते हैं, जहाँ लेखाचित्र का एक शिखर या एक तल (बिंदु जहाँ आलेख निकटवर्ती बिंदुओं की तुलना में ऊँचा या नीचा) होता है। उदाहरणार्थ, चित्र 2 (क) और चित्र 2 (ख) में, फलन f के शिखर (peaks) Q, R, और S पर हैं तथा तल P और T पर हैं। ऐसे ही शिखरों और तलों को हम **सापेक्ष चरम मान** कहते हैं।



चित्र 2: फलनों के लेखाचित्रों में दर्शाए शिखर और तल

अतः, आइए अपने द्वारा प्रयोग किए गए पदों को औपचारिक रूप से परिभाषित करें।

परिभाषाएँ : किसी बिंदु x_0 पर एक फलन f का **सापेक्ष उच्चिष्ठ** है, यदि x_0 को अंतर्विष्ट करने वाले एक विवृत अंतराल (open interval) में सभी x के लिए $f(x_0) \geq f(x)$ हो। इसी प्रकार, x_0 पर f का सापेक्ष निम्निष्ठ होना कहा जाता है, यदि x_0 को अंतर्विष्ट करने वाले एक विवृत अंतराल में सभी x के लिए $f(x_0) \leq f(x)$ हो। सापेक्ष उच्चिष्ठ और सापेक्ष निम्निष्ठ **सापेक्ष चरम मान** कहलाते हैं।

आगे, हम सापेक्ष चरम मान ज्ञात करने के लिए एक प्रक्रिया सूत्रित करेंगे। चित्र 2 (क) पर दृष्टि करने पर, हम देखते हैं कि यहाँ बिंदुओं P, Q और R पर क्षैतिज स्पर्श रेखाएँ हैं, अर्थात् P, Q और R पर अवकलज शून्य है, जबकि चित्र 2 (ख) में बिंदु P पर अवकलज का अस्तित्व नहीं है। इससे सुझाव मिलता है कि सापेक्ष, चरम मान या तो वहाँ होता है जहाँ अवकलज शून्य हो या फिर वहाँ होता है जहाँ अवकलज का अस्तित्व नहीं है। वह बिंदु, जिस पर $f'=0$ है या f' का अस्तित्व नहीं है, को विशिष्ट नाम दिया जाता है, जिसे हम नीचे परिभाषित कर रहे हैं।

परिभाषा : यदि x_0 पर f परिभाषित है तथा या तो $f'(x_0)=0$ हो या फिर $f'(x_0)$ का अस्तित्व नहीं हो, तो संख्या x_0 फलन f की **क्रान्तिक संख्या (critical number)** कहलाती है तथा f के लेखाचित्र पर बिंदु $P(x_0, f(x_0))$ एक **क्रान्तिक बिंदु** कहलाता है। आप इस ओर ध्यान दे सकते हैं कि यदि $f(x_0)$ परिभाषित नहीं है, तो x_0 एक क्रान्तिक संख्या नहीं हो सकती है।

आइए इसे अब निम्नलिखित उदाहरण में समझें।

उदाहरण 1: $f(x)=5x^3-24x^2-21x+23$ द्वारा परिभाषित फलन f के लिए क्रान्तिक बिंदु ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $f(x)=5x^3-24x^2-21x+23$ है। तब, x के सभी मानों के लिए, $f'(x)=15x^2-48x-21$ परिभाषित है।

अब, $f'(x)=0$ से $15x^2-48x-21=0$ अर्थात्

$3(5x-7)(3x+1)=0$ है।

हल करने पर, हम $x=\frac{7}{5},-\frac{1}{3}$ प्राप्त करते हैं।

अतः, क्रान्तिक संख्याएँ $\frac{7}{5}$ और $-\frac{1}{3}$ हैं।

इसके अनुसार $f\left(\frac{7}{5}\right)=-\frac{1003}{25}$ और $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{733}{27}$ है।

इस प्रकार क्रांतिक बिंदु $\left(\frac{7}{5},\frac{-1003}{25}\right)$ और $\left(-\frac{1}{3},\frac{733}{27}\right)$ हैं।

***

उदाहरण 2: $f(x)=\frac{e^{2x}}{x-5}$ द्वारा परिभाषित फलन f के क्रांतिक बिंदु ज्ञात कीजिए।

हल : ध्यान दीजिए कि 5 के अतिरिक्त $\mathbb{R}$ के लिए f परिभाषित है।

यहाँ, $f'(x)=\frac{2(x-5)e^{2x}-e^{2x}(1)}{(x-5)^2}=\frac{e^{2x}(2x-11)}{(x-5)^2}$ (ध्यान दीजिए कि $x\neq 5$ है)

$x=5$ पर अवकलज परिभाषित नहीं है तथा $x=5$ पर f भी परिभाषित नहीं है। इसलिए, $x=5$ एक क्रान्तिक संख्या नहीं है।

जब, $f'(x)=0$ है, तब $\frac{e^{2x}(2x-11)}{(x-5)^2}=0$ अर्थात्, $x=\frac{11}{2}$ प्राप्त होता है, जो केवल एक क्रान्तिक संख्या है, क्योंकि $e^{2x}>0$ होता है, जो कभी शून्य नहीं हो सकता। इस प्रकार, क्रान्तिक बिंदु $\left(\frac{11}{2},f\left(\frac{11}{2}\right)\right)$, या $\left(\frac{11}{2},2e^{11}\right)$ है।

***

उदाहरण 3 : $f(x)=(x-2)^2(x+1)$ द्वारा परिभाषित फलन f के लिए, क्रान्तिक संख्याएँ और क्रान्तिक बिन्दु ज्ञात कीजिए। इन बिंदुओं को f के लेखाचित्र पर भी दर्शाइए।

हल : दिया हुआ फलन f एक बहुपद फलन है तथा हम जानते हैं कि यह सभी x के लिए संतत होता है और इसके अवकलज का अस्तित्व है। इसलिए, हम समीकरण $f'(x)=0$ का प्रयोग करते हुए, क्रान्तिक संख्याएँ ज्ञात करते हैं। हमें प्राप्त होता है:

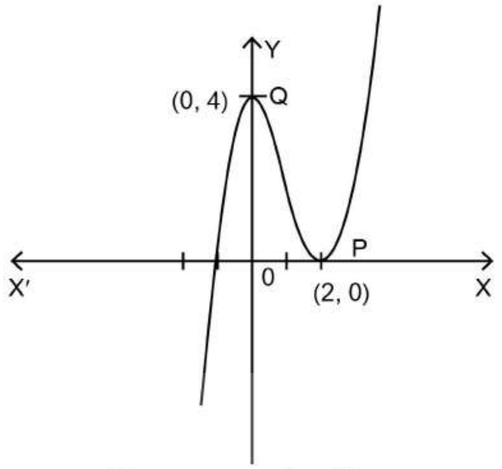
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (x-2)^2(1)+2(x-2)(1)(x+1)\\
&= (x-2)[(x-2)+2(x+1)]\\
&= 3x(x-2)
\end{aligned}
$$

क्रान्तिक संख्याएँ $x=0,2$ हैं। क्रान्तिक बिंदु ज्ञात करने के लिए, हमें प्रत्येक क्रान्तिक संख्या के लिए, y-निर्देशांक ज्ञात करने की आवश्यकता है।

$f(0)=(0-2)^2(0+1)=4$

और $f(2)=(2-2)^2(2+1)=0$ है

इस प्रकार, क्रान्तिक बिंदु $(0,4)$ और $(2,0)$ हैं। $f(x)=(x-2)^2(x+1)$ का लेखाचित्र चित्र 3 में दर्शाया गया है, जिसमें बिंदु P और Q क्रान्तिक बिंदु हैं।



चित्र 3: f का लेखाचित्र

आप प्रेक्षित कर सकते हैं कि किस प्रकार क्रान्तिक बिंदुओं पर सापेक्ष चरम मान प्रकट हो रहे हैं। चित्र 3 में आप देख सकते हैं कि सापेक्ष चरम मान लेखाचित्र के केवल उन्हीं बिंदुओं पर आ रहे हैं, जहाँ कोई क्षैतिज स्पर्श रेखा है।

***

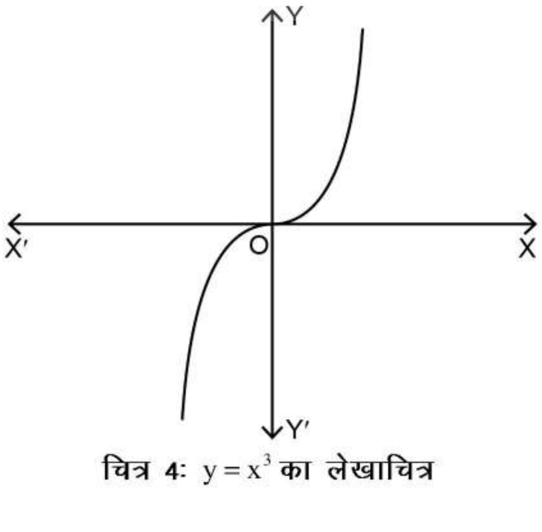
उपरोक्त उदाहरणों में, आप क्रांतिक बिंदुओं को प्राप्त कर चुके हैं। नीचे दी गयी प्रमेय में आप देखेंगे कि किस प्रकार इन्हें सापेक्ष चरममान निकालने के लिए प्रयोग किया जाता है।

प्रमेय 1 (क्रान्तिक संख्या प्रमेय) : यदि किसी संतत फलन f के प्राँत में किसी बिंदु x_0 पर उसका सापेक्ष चरम मान होता है, तो x_0 को अवश्य ही उस फलन f की एक क्रान्तिक संख्या होनी चाहिए।

हम यहाँ इस प्रमेय की उपपत्ति नहीं दे रहे हैं। परंतु आइए इसका एक अनुप्रयोग देखें।

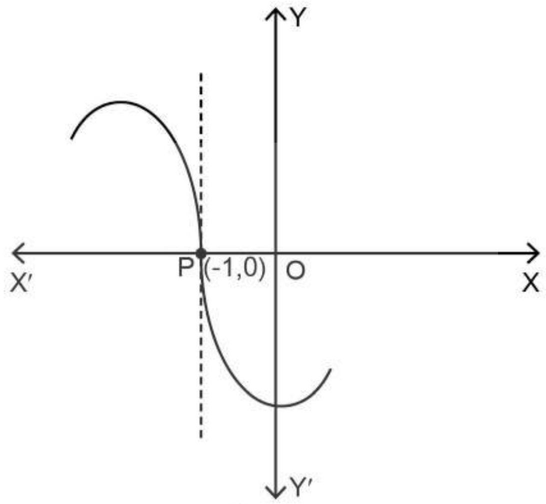
अब, प्रमेय 1 यह कहती है कि एक संतत फलन f का सापेक्ष चरम मान केवल एक क्रान्तिक संख्या पर ही हो सकता है, परंतु यह नहीं कहती कि एक सापेक्ष चरम मान को प्रत्येक क्रान्तिक संख्या पर अवश्य होना चाहिए।

उदाहरणार्थ, यदि $f(x)=x^3$ है, तो $f'(x)=3x^2$ और $f'(0)=0$ है। इसलिए 0 एक क्रान्तिक संख्या है। परंतु f के लेखाचित्र में $x_0=0$ पर कोई सापेक्ष चरम मान नहीं है, क्योंकि लेखाचित्र $x<0$ के लिए तथा साथ ही $x>0$ के लिए ऊपर की ओर चढ़ रहा है, जैसा कि चित्र 4 में दर्शाया गया है। इस प्रकार, $f(x)=x^3$ के लेखाचित्र का $x_0=0$ पर कोई सापेक्ष चरम मान नहीं है, यद्यपि $f'(0)=0$ है।



चित्र 4: $y=x^3$ का लेखाचित्र

इसी प्रकार, किसी संतत फलन g के लिए यह भी बहुत कुछ संभव है कि उसका बिंदु x_0 पर कोई सापेक्ष चरम मान नहीं हो, जहाँ $g'(x_0)$ का अस्तित्व नहीं है। चित्र 5 एक फलन के लेखाचित्र को दर्शाती है, जिसके लिए बिंदु P पर स्पर्श रेखा का अस्तित्व नहीं है। अतः, यद्यपि $g'(-1)$ का कोई अस्तित्व नहीं है, फिर भी $x_0 = -1$ पर कोई सापेक्ष चरम मान नहीं है।



चित्र 5

अतः, हम कह सकते हैं कि क्रान्तिक संख्या प्रमेय एक आवश्यक प्रतिबंध ही है। आइए इसे निम्नलिखित उदाहरण में देखें:

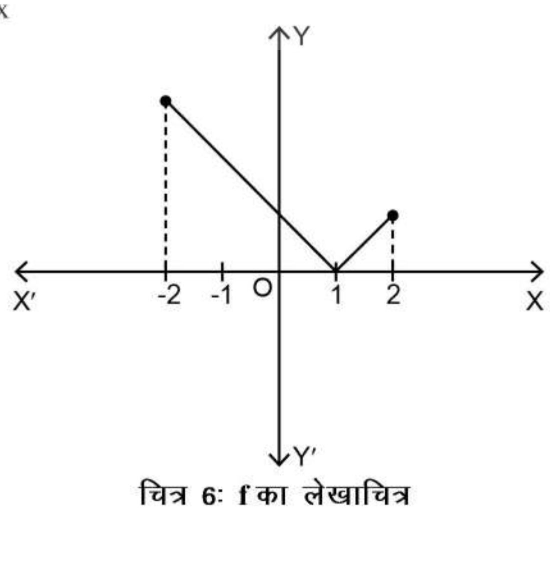
उदाहरण 4: अंतराल $]-2,2[$ पर $f(x) = |x-1|$ द्वारा परिभाषित फलन f के लिए क्रान्तिक संख्याएँ, यदि कोई है, ज्ञात कीजिए।

हल: चित्र 6, f के लेखाचित्र को दर्शाता है। यदि $x > 1$ है, तो $f(x) = x-1$ और $f'(x) = 1$ है। परंतु, यदि $x < 1$ है, तो $f(x) = -(x-1)$ और $f'(x) = -1$ है। इसलिए, $]-2,2[$ पर न तो $f'(x) = 0$ है तथा न ही इसका अस्तित्व नहीं है, यदि $x < 1$ और $x > 1$ है। अब, हमें इसकी जाँच करने की आवश्यकता है कि $x = 1$ पर क्या होता है।

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1-1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x| - |0|}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$



चित्र 6: **f** का लेखाचित्र

हम बाईं और दाईं सीमाओं पर विचार करते हैं:

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

तथा $$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

क्योंकि ये समान नहीं हैं, इसलिए इस सीमा का अस्तित्व नहीं है तथा इस प्रकार $x = 1$ पर फलन f अवकलनीय नहीं है। क्योंकि $f(1)$ परिभाषित है तथा $f(1) \le f(x) \forall x \in]-2, 2[$ है, इसलिए केवल 1 ही एक क्रान्तिक संख्या है, जिस पर f का एक सापेक्ष उच्चिष्ठ है। चित्र 6 भी इसकी पुष्टि करता है।

***

अब, निम्नलिखित प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E1) f के सापेक्ष उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ ज्ञात कीजिए, जहाँ f को इस प्रकार परिभाषित किया गया है:

(i) $f(x) = 2$, सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए

(ii) $f(x) = x$, सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए

(iii) $f(x) = x, 0 < x < 4$ के लिए

(iv) $f(x) = x^2$, सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए

(v) $f(x) = \sqrt{x}$, सभी $x \in [9, 25]$ के लिए

(vi) $[-4, 4]$, पर $f(x) = |x - 3|$ के लिए

(vii) $[1, 3]$, पर $f(x) = \dfrac{\ln \sqrt{x}}{x}$

(viii) $[0, 2]$ पर $f(x) = x e^{-x}$

(ix) $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ पर $f(x) = \sin^2 x + \cos x$

(x) $[-1, 1]$, पर $f(x) = |x|$

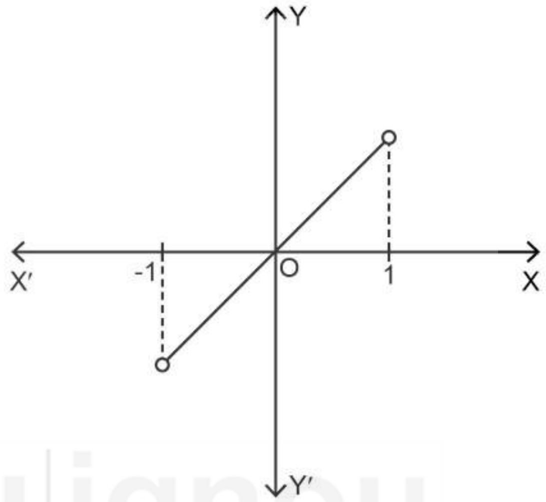
अभी तक, हमारा ध्यान एक विवृत अंतराल के इर्द-गिर्द चरम बिंदुओं (अर्थात् समीप के बिंदुओं) पर फलन के मानों तक ही रहा था। इस प्रकार, उच्चिष्ठ–निम्निष्ठ की संकल्पना आवश्यक रूप से एक स्थानीय परिघटना है। वैश्विक रूप अथवा अन्य स्थान पर क्या होता है? आइए अब इसकी निम्नलिखित भाग में चर्चा करें।

13.3 निरपेक्ष चरम मान

अभी तक, हम चरम मानों की चर्चा कर चुके हैं। चित्र 1 में, सबसे ऊँची चोटी और सबसे गहरी खाड़ी के अस्तित्व हैं। यदि हम किसी फलन के अधिकतम और न्यूनतम मानों को ज्ञात करने की बात करते हैं, तो हम सबसे ऊँचे बिंदु और सबसे निचले बिंदु ज्ञात करते हैं। फलन के ये अधिकतम और न्यूनतम मान निरपेक्ष चरम मान हैं, जो निम्नलिखित परिभाषा में दिए हैं:

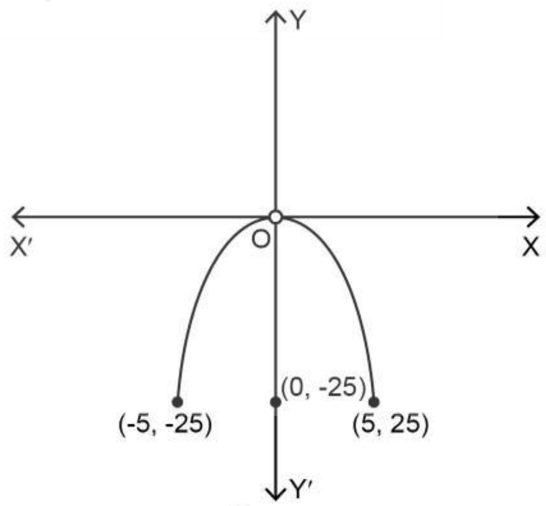
परिभाषा : यदि संख्या x_0 को अंतर्विष्ट करने वाले एक अंतराल में f एक फलन परिभाषित है तो अंतराल I में $f(x_0)$ फलन f का एक **निरपेक्ष उच्चिष्ठ (absolute maximum)** होता है, यदि I में सभी x के लिए $f(x_0) \ge f(x)$ हो। इसी प्रकार, I पर $f(x_0)$ फलन f का **निरपेक्ष निम्निष्ठ (Absolute minimum)** होता है, यदि I में सभी x के लिए $f(x_0) \le f(x)$ हो। यदि संदर्भ स्पष्ट हो, तो कभी-कभी हम शब्द 'निरपेक्ष' को छोड़ देते

हैं तथा केवल पदों उच्चिष्ठ और/या निम्निष्ठ का ही प्रयोग करते हैं। अंतराल I पर f के निरपेक्ष उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मिलकर **चरम मान** या **निरपेक्ष चरम मान** कहलाते हैं। एक निरपेक्ष उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ को कभी-कभी **वैश्विक उच्चिष्ठ (global maximum)** या **वैश्विक निम्निष्ठ (global minimum)** भी कहते हैं। एक दिए हुए अंतराल पर किसी फलन के चरम मानों का होना आवश्यक नहीं है। उदाहरणार्थ, विवृत अंतराल $]-1,1[$ पर संतत फलन $f(x)=x$ का न तो कोई उच्चिष्ठ है और न ही कोई निम्निष्ठ है, जैसा कि चित्र 7 में दर्शाया गया है। इसका कारण यह है कि ऐसे किसी x_0 का अस्तित्व नहीं है, जिसके लिए या तो सभी $x \in]-1,1[$ के लिए $f(x_0) \geq f(x)$ हो या फिर $f(x_0) \leq f(x)$ हो।



चित्र 7: $]-1,1[$ पर $f(x)=x$ का आलेख

$f(x)=\begin{cases}-x^2, & x \neq 0 \text{ के लिए} \\ -25, & x=0 \text{ के लिए}\end{cases}$ द्वारा परिभाषित असंतत फलन संवृत अंतराल $[-5,5]$ में एक निम्निष्ठ रखता है, परंतु उच्चिष्ठ नहीं रखता है, जैसा कि चित्र 8 में दर्शाया गया है।

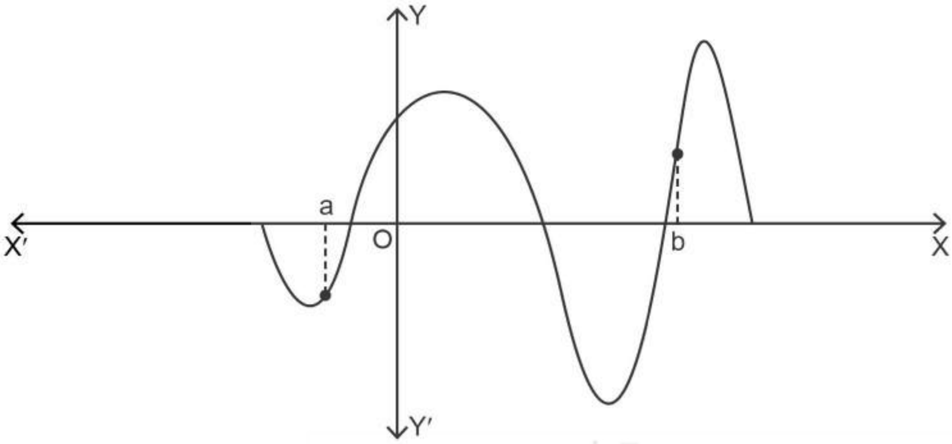


चित्र 8

इस आलेख से यह तथ्य स्पष्ट होता है कि एक फलन एक से अधिक बिंदुओं पर निरपेक्ष चरम मान ग्रहण कर सकता है। इस स्थिति में, बिंदुओं $(-5, -25)$, $(0, -25)$ और $(5, -25)$ पर निम्निष्ठ हो रहा है। यदि कोई फलन f संतत है तथा अंतराल I संवृत और परिबद्ध है, तो यह दर्शाया जा सकता है कि एक निरपेक्ष उच्चिष्ठ और एक निरपेक्ष निम्निष्ठ दोनों को अवश्य ही होना चाहिए। यह परिणाम उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ ज्ञात करने में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है तथा यह चरम मान प्रमेय कहलाती है, जिसे नीचे दिया जा रहा है।

प्रमेय 2 (चरम मान प्रमेय) : किसी भी संवृत अंतराल [a, b] पर एक संतत फलन के एक निरपेक्ष उच्चिष्ठ और एक निम्निष्ठ दोनों ही होते हैं।

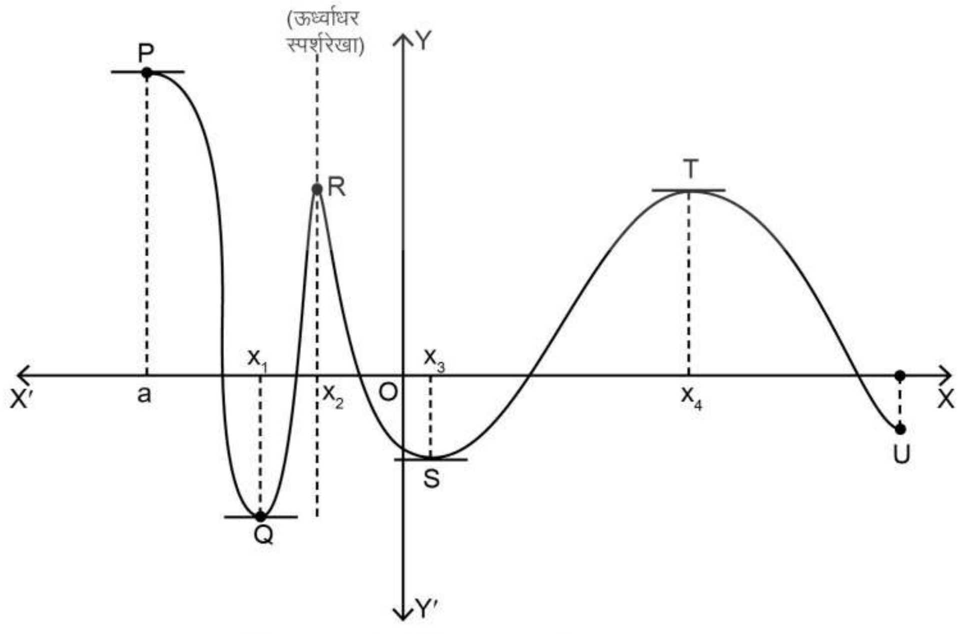
हम इस प्रमेय की उपपत्ति नहीं दे रहे हैं, परंतु इसकी एक ज्यामितीय व्याख्या दे रहे हैं, जिसे चित्र 9 में दर्शाया गया है। यदि एक संतत फलन f की कोई चोटी नहीं है तो यह अपने प्रांत में या तो पूरा वर्धमान होगा या ह्रासमान होगा। इस स्थिति में उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ [a, b] के अंतिम बिंदुओं पर होंगे। यदि इसकी चोटियाँ हैं, तो उच्चिष्ठ एक उच्चतम चोटी या अंतिम बिंदु पर होगा।



चित्र 9 : एक संवृत अंतराल में एक संतत फलन की चोटी या गहराइयाँ

यदि एक संवृत अंतराल में f असंतत है या अंतराल संवृत नहीं है, तो आप यह निष्कर्ष नहीं निकाल सकते कि f के सबसे बड़े और सबसे छोटे दोनों मान होंगे। कभी-कभी चरम मान तब भी होते हैं, जब उपरोक्त प्रमेय के प्रतिबंध संतुष्ट नहीं होते हैं, यदि प्रतिबंध लागू हों, तो चरम मानों का अस्तित्व होता है।

आप इस ओर ध्यान दे सकते हैं कि एक फलन का उच्चिष्ठ उसके आलेख के सबसे ऊँचे बिंदु पर होता है तथा निम्निष्ठ सबसे निचले बिंदु पर होता है। उदाहरणार्थ, फलन f पर विचार कीजिए, जिसका आलेख चित्र 10 में दर्शाया गया है।



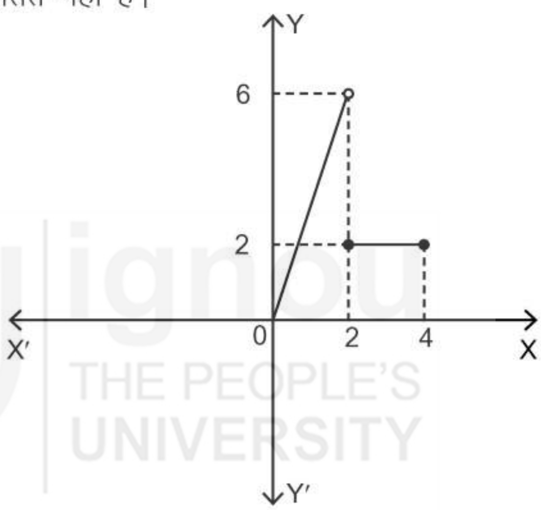
चित्र 10 : [a,b] पर एक संतत फलन

आलेख पर सबसे ऊँचा बिंदु बाएँ अंत-बिंदु, अर्थात् P पर है तथा सबसे निचला बिंदु Q पर है। इस प्रकार, निरपेक्ष उच्चिष्ठ $f(a)$ है तथा निरपेक्ष निम्निष्ठ $f(x_1)$ है।

यहाँ उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ के अस्तित्व, जो चरम मान प्रमेय द्वारा वाँछनीय हैं, प्रत्यक्ष रूप से देखे जा सकते हैं, परंतु कभी ऐसा भी समय होता है जब ऐसा प्रतीत होता है कि चरम मान प्रमेय असफल है। आइए एक अन्य स्थिति को स्पष्ट करें, जहाँ आपको यह देखने की आवश्यकता है कि चरम मान प्रमेय के कौन से प्रतिबंध संतुष्ट नहीं हो रहे हैं।

उदाहरण 5 : $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{यदि } 0 \le x < 2 \\ 2, & \text{यदि } 2 \le x \le 4 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन f के लिए, चरम मान प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

हल : चित्र 11 से, आप देख सकते हैं कि फलन f का कोई उच्चिष्ठ नहीं है। यह 6 से कम परंतु स्वेच्छिक रूप से उसके निकट सभी मान ग्रहण करता है। परंतु यह कभी मान 6 तक नहीं पहुँचता है। यह फलन चरम मान प्रमेय का अंतर्विरोध नहीं करता, क्योंकि [0, 4] पर f संतत नहीं है।

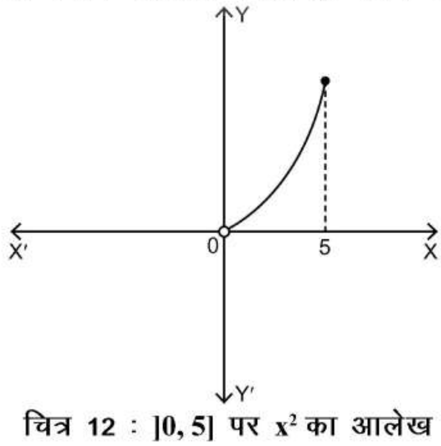


चित्र 11: f का आलेख

***

उदाहरण 6 : अंतराल $f = 0 < x \le 5$ पर $f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित फलन f के लिए चरम मान प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

हल : चित्र 12 दर्शाता है कि जब 0 की ओर x अग्रसर होता है, तब फलन f के मान स्वेच्छिक रूप से कम होते जाते हैं, $f(x)$ मान 0 पर कभी भी नहीं पहुँचता है। इसलिए, f का कोई निम्निष्ठ नहीं है। अंतराल]0, 5] पर फलन f संतत है, परंतु चरम मान प्रमेय का अंतर्विरोध नहीं होता है, क्योंकि अंतराल केवल एक सिरे पर संवृत है।



चित्र 12 :]0, 5] पर x^2 का आलेख

***

अब, हम निम्नलिखित चरणों में $[a, b]$ पर एक संतत फलन f के निरपेक्ष चरम मान ज्ञात करने की प्रक्रिया दे रहे हैं:

- $f'(x)=0$ या $f'(x)$ का अस्तित्व नहीं है, का प्रयोग करते हुए, $[a, b]$ पर f की सभी क्रान्तिक संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
- f के मान इन क्रान्तिक संख्याओं पर तथा साथ ही अंतराल के अंत-बिंदुओं पर निकालिए।
- इन सभी मानों में, f का सबसे बड़ा मान $[a, b]$ पर f का निरपेक्ष उच्चिष्ठ है तथा f का सबसे छोटा मान $[a, b]$ पर f का निरपेक्ष निम्निष्ठ है।

आइए इसे निम्नलिखित उदाहरणों की सहायता से समझें।

उदाहरण 7 : $[-3,3]$ पर $f(x)=x^4-8x^2+5$ द्वारा परिभाषित फलन f के निरपेक्ष चरम मान ज्ञात कीजिए। इन मानों को f के आलेख पर दर्शाइए।

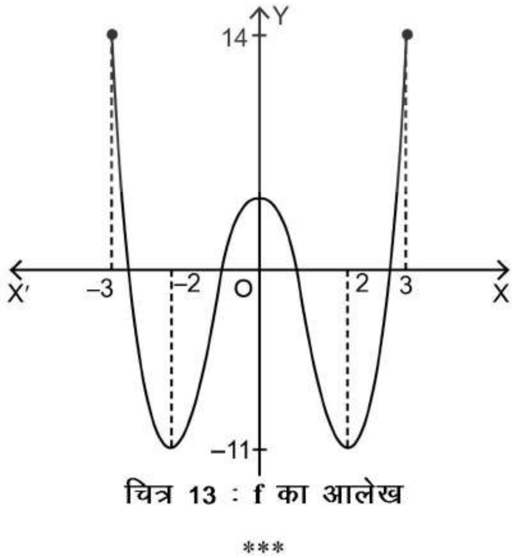
हल : यहाँ, f एक बहुपद फलन है और यह संवृत अंतराल $[-3, 3]$ पर संतत है। प्रमेय 2 हमें बताती है कि इस अंतराल पर एक निरपेक्ष उच्चिष्ठ और एक निरपेक्ष निम्निष्ठ अवश्य ही होना चाहिए।

इसके लिए, हम इसे अवकलित करते हैं तथा क्रान्तिक संख्याएँ ज्ञात करते हैं।
$f'(x)=4x^3-8(2x)=4x(x^2-4)=4x(x-2)(x+2)$ है।

इस प्रकार क्रान्तिक संख्याएँ $x=0, 2$ और -2 हैं।

अब, आइए इस फलन के मान अंतराल के अंत-बिंदुओं पर तथा क्रान्तिक संख्याओं पर ज्ञात करें। हम $f(3)=14$ तथा $f(-3)=14, f(0)=5, f(2)=-11,$ तथा $f(-2)=-11$ प्राप्त करते हैं।

हम कह सकते हैं कि f का निरपेक्ष उच्चिष्ठ $x=3$ और $x=-3$ पर है तथा यह निरपेक्ष उच्चिष्ठ मान $f(3)=f(-3)=14$ है। साथ ही, f का निरपेक्ष निम्निष्ठ $x=2$ और $x=-2$ पर है तथा यह निरपेक्ष निम्निष्ठ मान $f(2)=f(-2)=-11$ है। f का आलेख चित्र 13 में दर्शाया गया है। अतः, यहाँ चार निरपेक्ष चरम मान हैं।



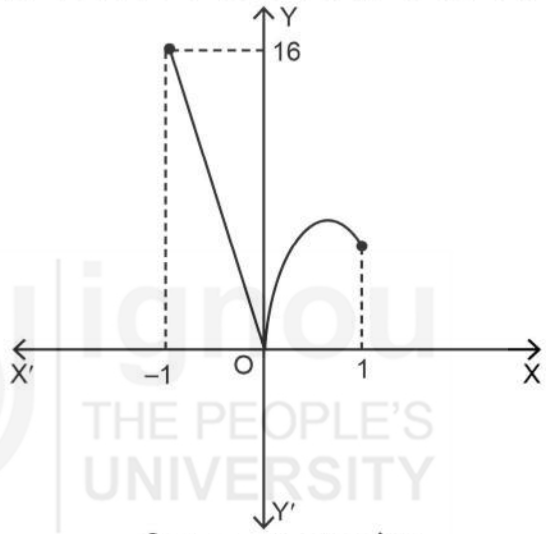
चित्र 13 : f का आलेख

***

अब, एक निम्नलिखित उदाहरण में हम निरपेक्ष चरम मान ज्ञात करेंगे, जब अवकलज का अस्तित्व नहीं है।

उदाहरण 8 : अंतराल $[-1, 1]$ पर $f(x) = 2x^{2/3}(5-3x)$ द्वारा परिभाषित फलन f के निरपेक्ष चरम मान ज्ञात कीजिए। इन मानों को f के आलेख पर दर्शाइए।

हल : अवकलज ज्ञात करने के लिए, हम फलन को पुनः इस रूप में लिखते हैं: $f(x) = 10x^{2/3} - 6x^{5/3}$, तब $f'(x) = \frac{20}{3}x^{-1/3} - 10x^{2/3} = \frac{10}{3}x^{-1/3}(2-3x)$ है। हम $f'(x) = 0$ को हल करके क्रान्तिक संख्याएँ ज्ञात करते हैं। इससे $x = 2/3$ प्राप्त होता है। यद्यपि f(0) का अस्तित्व है, हम ध्यान देते हैं कि $x = 0$ पर $f'(x)$ का अस्तित्व नहीं है। इस प्रकार, क्रान्तिक संख्याएँ $x = 0$ और $x = 2/3$ हैं। अब, अंत-बिंदुओं पर तथा क्रान्तिक संख्याओं पर फलन के मान ज्ञात करने पर, हम $f(-1) = 16$, $f(1) = 4$, $f(0) = 0$, $f(2/3) = 2^{5/3} \cdot 3^{1/3} \approx 4.579$ प्राप्त करते हैं। यह स्पष्ट है कि f का निरपेक्ष उच्चिष्ठ $x = -1$ पर होता है और यह $f(-1) = 16$ है तथा f का निरपेक्ष निम्निष्ठ $x = 0$ पर होता है और यह $f(0) = 0$ है। f का आलेख चित्र 14 में दर्शाया गया है, जो इन मानों को संतुष्ट करता है।



चित्र 14 : f का आलेख

***

अब, अगला उदाहरण एक त्रिकोणमितीय फलन के निरपेक्ष चरम मान ज्ञात करने के लिए है।

उदाहरण 9 : अंतराल $[0, \pi]$ पर $f(x) = -x - 2\cos x - \frac{1}{2}(\cos^2 x + \sin x)$ द्वारा परिभाषित फलन f के निरपेक्ष चरम मान ज्ञात कीजिए।

हल : क्रान्तिक संख्याएँ ज्ञात करने के लिए, हम $f'(x)$ ज्ञात करने से प्रारंभ करते हैं।

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 + 2\sin x + \frac{1}{2}(2\cos x \sin x - \cos x) \\ &= \frac{1}{2}(-2 + 4\sin x + 2\cos x \sin x - \cos x) \\ &= \frac{1}{2}[2(\sin x)(\cos x + 2) - (\cos x + 2)] \\ &= \frac{1}{2}[(\cos x + 2)(2\sin x - 1)] \end{aligned}$$

क्योंकि $[0, \pi]$ पर गुणनखंड $(\cos x + 2)$ कभी भी शून्य नहीं होता है, इसलिए निष्कर्ष निकलता है कि $f'(x) = 0$ केवल तभी है, जब $2\sin x - 1 = 0$ है, अर्थात् $[0, \pi]$ में जब $x = \frac{\pi}{6}$ या $\frac{5\pi}{6}$ है।

अब, आइए अंत-बिंदुओं और क्रान्तिक संख्याओं पर, फलन के मान निकालें। हम $f(0)=\frac{-5}{2}, f(\pi)=-\pi+\frac{3}{2}\approx-1.641, f(\pi/6)\approx-2.881$ तथा $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)\approx-1.511$ है।

f का निरपेक्ष उच्चिष्ठ $x=\frac{5\pi}{6}$ पर है तथा f का निरपेक्ष निम्निष्ठ $x=\frac{\pi}{6}$ पर है। तथा f के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान क्रमशः -1.511 और -2.881 हैं।

***

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने के प्रयास कीजिए।

E2) निम्नलिखित की क्रान्तिक संख्याएँ ज्ञात कीजिए:

i) $f(x)=2\sqrt{x}\,(6-x)$ $\mathbb{R}$ के लिए

ii) $\left[\frac{-1}{2},1\right]$ पर $f(x)=x^3$

iii) $[1, 3]$ पर $f(x)=\frac{\ln\sqrt{x}}{x}$

iv) $[0, \pi/2]$ पर $f(x)=\sin^2 x+\cos x$

E3) E2) में दिए फलनों के लिए क्रान्तिक बिंदु ज्ञात कीजिए, यदि उनका अस्तित्व है।

E4) निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित प्रत्येक फलन f के निरपेक्ष चरम मान ज्ञात कीजिए:

i) $f(x)=(x-5)(x-3)\,\forall\, x\in[-4,4]$

ii) $f(x)=x^3+13x^2+5x+7\,\forall\, x\in[-10,10]$

iii) $f(x)=\sin x+3\,\forall\, x\in\mathbb{R}$

iv) $f(x)=2|x|\,\forall\, x\in[-1,1]$

v) $f(x)=|x|+2\,\forall\, x\in[-2,2]$

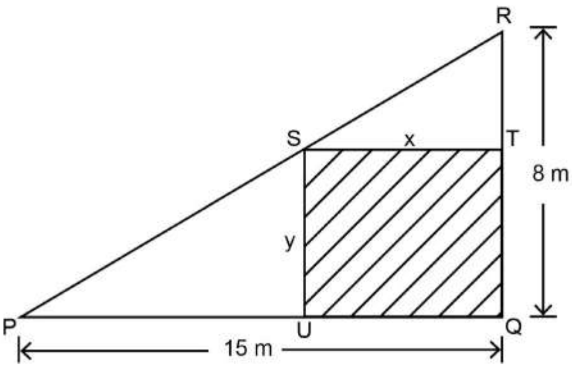
vi) $f(x)=|x|+|x-1|\,\forall\, x\in[-5,5]$

vii) $f(x)=x+\frac{1}{x}\,\forall\, x>0$

अपने कुछ अगले उदाहरणों में, हम अधिकीकरण या अल्पीकरण से संबंधित अनुप्रयोगों की जाँच करेंगे।

उदाहरण 10 : किसी आयताकार खेल के मैदान में बाड़ लगाई जानी है। इस खेल के मैदान का अधिकतम क्षेत्रफल क्या है, यदि इसे लांबिक भुजाओं 8m और 15m वाले समकोणीय त्रिभुजाकार भूखंड में ठीक प्रकार से समावेशित करना है?

हल : चित्र 15 एक समकोणीय त्रिभुजाकार भूखंड दर्शाती है, जिसकी लांबिक भुजाएँ 8m और 15m हैं। मान लीजिए x और y इसके अंतर्गत बने आयताकार खेल के मैदान की लंबाई और चौड़ाई को व्यक्त करते हैं। आयत का क्षेत्रफल $A=xy$ है।



चित्र 15 : एक आयत का क्षेत्रफल

फलन A दो चरों वाला है तथा वह विधि, जिसकी चर्चा हमने यहाँ की है, एक चर वाले फलनों पर ही कार्य करती है। इसलिए, सर्वप्रथम हम A को एक अकेले चर वाले फलन के रूप में व्यक्त करते हैं। ऐसा करने के लिए, हमें समकोण त्रिभुजाकार भूखंड के दिए हुए प्रतिबंधों से या तो y के पदों में x को या x के पदों में y को प्रतिस्थापित करने की आवश्यकता है। क्योंकि ΔSTR के समरूप ΔPQR है, इसलिए इन त्रिभुजों की भुजाएँ समानुपातिक हैं। अतः, हम प्राप्त करते हैं: $\frac{8-y}{8}=\frac{x}{15}$, जो $y=8-\frac{8x}{15}$ देता है। इसलिए, A को $A(x)=x\left(8-\frac{8}{15}\right)x=8x-\frac{8}{15}x^2$ के रूप में पुनः लिखा जा सकता है। फलन A का प्राँत $0\le x\le 15$ है। A के लिए क्रान्तिक संख्याएँ ऐसे मान हैं, ताकि $A'(x)=0$ है (क्योंकि सभी x के लिए $A'(x)$ का अस्तित्व है। क्योंकि $A'(x)=8-\frac{16}{15}x$ है, इसलिए मात्र एक क्रान्तिक संख्या $x=\frac{15}{2}$ है। अब, हम $A(x)$ के मान अंत-बिंदुओं और क्रान्तिक संख्याओं पर निकालते हैं। हम $A(15)=0, A(0)=0, A\left(\frac{15}{2}\right)=30$ प्राप्त करते हैं। क्षेत्रफल अधिकतम है, जब $x=\frac{15}{2}m$ है। यह $y=8-\frac{8}{15}\times\frac{15}{2}=4m$ प्रदान करता है। इस प्रकार, त्रिभुजाकार भूखंड में बनाए जा सकने वाला आयताकार खेल का मैदान भुजाओं 15m और 8m के अनुदिश क्रमशः विमाओं $\frac{15}{2}m$ और 4m वाला एक आयत है। आयताकार खेल के मैदान का अधिकतम क्षेत्रफल $30m^2$ है।

***

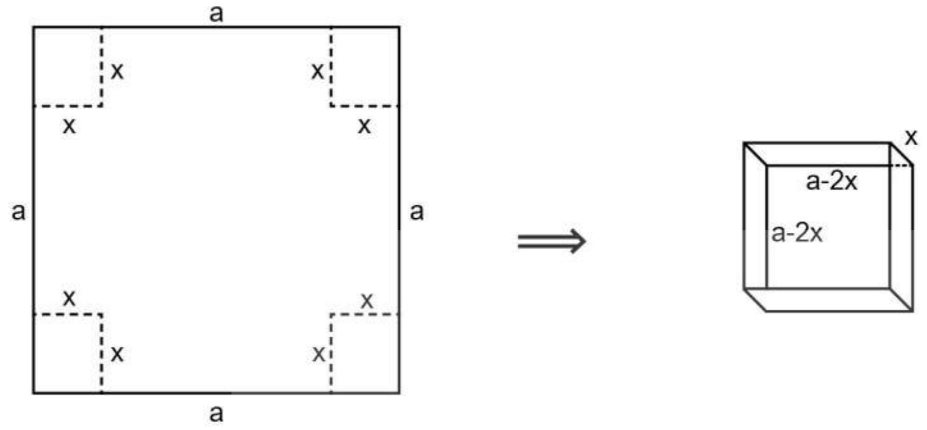
उदाहरण 11: लंबाई a cm वाली एक वर्गाकार टीन की चादर से ऊपर से खुला एक घनाभाकार डिब्बा बनाया जाना है। इसके लिए, चादर के प्रत्येक कोने से वर्ग काटे जाते हैं तथा फिर चादर के किनारों को ऊपर की ओर मोड़ कर डिब्बे की भुजाएँ बनाई जाती हैं। इस डिब्बे की ऊँचाई क्या होनी चाहिए, ताकि उसका आयतन अधिकतम (उच्चिष्ठ) हो?

हल : चित्र 16 वर्गाकार चादर तथा उसमें से कटे कोनों को दर्शाती है। मान लीजिए कि कोनों पर काटे गए वर्गों की भुजा x है। तब, डिब्बा x cm गहरा, (a–2x) cm लंबा और (a–2x) cm चौड़ा होगा।

$V(x)=x(a-2x)(a-2x)$ इस डिब्बे का आयतन है तथा इसी राशि को अधिकतम किया जाना है। प्राँत ज्ञात करने के लिए, हम ध्यान देते हैं कि सभी विमाएँ ऋणेतर होनी

***

चाहिए। अतः, $x \ge 0, a-2x \ge 0$ या $(x \le a/2)$ है। इससे अर्थ निकलता है कि फलन V का प्राँत $\left[0, \frac{a}{2}\right]$ है।



चित्र 16 : भुजा a का वर्ग

क्रान्तिक संख्याएँ ज्ञात करने के लिए (प्राँत में प्रत्येक स्थान पर अवकलज परिभाषित है। हम वे मान ज्ञात करते हैं, जिनके लिए अवकलज 0 है। यहाँ $V'(x) = (a-2x)(a-2x-4x) = 0 \Rightarrow x = a/2, a/6$ है। क्रान्तिक संख्याओं तथा अंत-बिंदुओं पर $V(x)$ का मान निकालने पर, हम $V(0) = 0, V(a/2) = 0$ और $V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27}$ प्राप्त करते हैं।

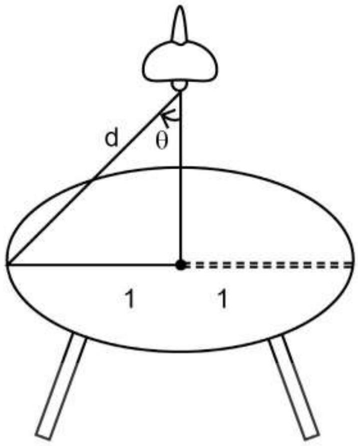
इस प्रकार, अधिकतम आयतन वाला डिब्बा तब होगा, जब $x = \frac{a}{6}$ हो। इस प्रकार के डिब्बे की विमाएँ $\frac{2a}{3}, \frac{2a}{3}, \frac{a}{6}$ हैं। अतः डिब्बे की ऊँचाई $\frac{a}{6}$ cm होगी।

***

आपने उदाहरण 11 में ध्यान दिया होगा कि हमें इसकी जाँच नहीं करनी पड़ी कि क्रान्तिक बिंदु एक अधिकतम है या एक न्यूनतम है, परंतु हमें ज्ञात था कि यह अधिकतम है क्योंकि अंतराल $[0, a/2]$ पर संतत फलन V ऋणेतर है तथा निस्संदेह अंत-बिंदुओं पर शून्य है। क्योंकि इनके बीच में केवल एक ही क्रान्तिक संख्या $x = \frac{a}{6}$ है, इसलिए इसे अधिकतम (उच्चिष्ठ) मान प्रदान करना चाहिए। इसी प्रकार का विवेचन अनेक उदाहरणों में भी प्रयोग किया जा सकता है।

निम्नलिखित उदाहरण में, हम यह देखेंगे कि किस प्रकार एक गोल मेज के केन्द्र के ठीक ऊपर एक लैंप की ऊँचाई को समायोजित करके उसके प्रकाश को अधिकतम किया जाता है।

उदाहरण 12 : एक लैंप त्रिज्या 1 m वाली एक गोल मेज के केन्द्र के ठीक ऊपर लटका हुआ है तथा इसकी ऊँचाई को समायोजित किया जा सकता है। इस मेज के किनारे पर प्रकाश I कोण θ के कोसाइन (cosine) के अनुक्रमानुपाती है तथा दूरी d के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती है, जहाँ θ और d को चित्र 17 में दर्शाया गया है। मेज के किनारे पर प्रकाश को अधिकतम करने के लिए, लैंप को मेज के कितने निकट होना चाहिए?



चित्र 17

'∝' को समानुपातिकता के चिह्न के रूप में प्रयुक्त किया जाता है।

हल : प्रश्न के अनुसार, $I \propto \cos\theta$ और $I \propto \frac{1}{d^2}$ है।

अतः, हम प्राप्त करते हैं: $I = \frac{k\cos\theta}{d^2}$ जहाँ k समानुपातिकता का एक (धनात्मक) अचर है।

पुनः, यहाँ I दो चरों θ और d का फलन है। हम θ के पदों में d को प्रतिस्थापित करेंगे। चित्र 17 से, $\sin\theta = \frac{1}{d}$ या $d = \frac{1}{\sin\theta}$ है।

अतः, $I = k\cos\theta\left[\frac{1}{(1/\sin\theta)^2}\right] = k\cos\theta\sin^2\theta$ है, जहाँ θ का मान केवल 0 से π/2 तक विचरण कर सकता है। इसलिए, हमें फलन का निरपेक्ष उच्चिष्ठ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ पर ज्ञात करने की आवश्यकता है। आइए अब I को θ के सापेक्ष अवकलित करें, जिससे प्राप्त होता है:

$$I'(\theta) = k[\cos\theta(2\sin\theta\cos\theta) + \sin^2\theta(-\sin\theta)]$$

$$= k(2\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$$

$$= k\sin\theta(2\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$I'(\theta) = 0$ है, जब या तो $\sin\theta = 0$ हो या फिर $2\cos^2\theta - \sin^2\theta = 0$ हों। यदि $\sin\theta = 0$ है, तो इसका अर्थ है कि $\theta = 0$ (क्योंकि $\sin\theta = 0$) है तथा यदि $2\cos^2\theta - \sin^2\theta = 0$ है, तो $\tan^2\theta = 2$ है और $\theta = \tan^{-1}\sqrt{2}$ है जबकि हम tanθ के अन्य मानों को छोड़ देते हैं क्योंकि $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में tanθ धनात्मक है। अतः, क्रान्तिक संख्याएँ 0 और $\tan^{-1}\sqrt{2}$ हैं। अंत-बिंदु और क्रान्तिक संख्याओं पर $I(\theta)$ का मान निकालने पर, हम

$$I(0) = k(\cos 0)(\sin^2 0) = 0,\ I\left(\frac{\pi}{2}\right) = k\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\left(\sin^2\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$I(\tan^{-1}\sqrt{2}) \approx I(0.9553) \approx k(\cos 0.9553)(\sin^2 0.9553) \approx 0.3856k$ प्राप्त करते हैं।

साथ ही, चित्र 17 से, ऊँचाई $= \frac{1}{\tan\theta}$ है।

क्योंकि जब I को अधिकतम किया जाता है, तब $\tan\theta = \sqrt{2}$ है, इसलिए वाँछित ऊँचाई $= \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7075\text{m}$ है।

अतः, प्रकाश को अधिकतम करने के लिए, लैंप को मेज के केन्द्र से लगभग 0.7075m की ऊँचाई पर रखना चाहिए।

***

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E5) एक निर्माता यह आकलन करता है कि जब एक विशेष वस्तु की x इकाइयों का प्रति माह उत्पादन किया जाए, तब कुल लागत (हजार रुपयों में) $C(x)=\frac{1}{8}x^2+4x+200$ आएगी तथा सभी इकाइयों को $p(x)=(49-x)$ रुपए प्रति इकाई के मूल्य पर बेचा जा सकता है, जहाँ $0 \le x \le 49$ है। अधिकतम लाभ के संगत मूल्य निर्धारित कीजिए।

E6) मान लीजिए कि आपके पास एक संपत्ति है, जिसका अब से t वर्षों बाद बाजार मूल्य $V(t)=10000e^{\sqrt{t}}$ द्वारा निदर्शन किया जाता है। यदि प्रचलित चक्रवृद्धि ब्याज की दर 8% वार्षिक है, तो इस संपत्ति को कब बेचना चाहिए?

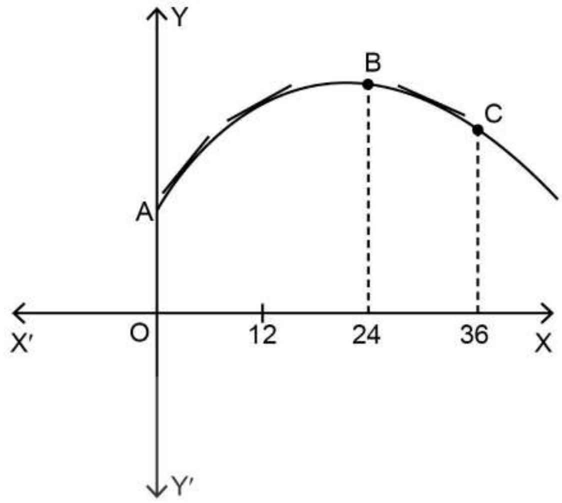
E7) मान लीजिए कि शरीर में अंतरमासपेशीय एक दवाई का इंजेक्शन देने में समय t पर रक्त की सांद्रता को $C(t)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। एक अध्ययन में, यह प्रेक्षित किया जाता है कि इस सांद्रता का निदर्शन $C(t)=\frac{k}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt}), t \ge 0$ द्वारा किया जा सकता है, जहाँ a, b ($b > a$ के साथ) और k धनात्मक अचर हैं, जो दवाई पर निर्भर है। किस समय पर सबसे अधिक सांद्रता होगी? सांद्रता का क्या होगी, जब $t \to +\infty$ होगा?

अभी तक, हमने एक चरम बिंदु के अस्तित्व के लिए आवश्यक प्रतिबंध की ही चर्चा की है। हम यह भी देख चुके हैं कि यह प्रतिबंध पर्याप्त नहीं है। अगर भाग में, हम दर्शाएँगे कि किस प्रकार अवकलजों का उपयोग यह ज्ञात करने में किया जाता है कि फलन वर्धमान है या ह्रासमान है तथा इससे अगले भाग में चरम बिंदुओं के अस्तित्व के लिए पर्याप्त प्रतिबंधों को प्रदान करेंगे।

13.4 वर्धमान और ह्रासमान फलन

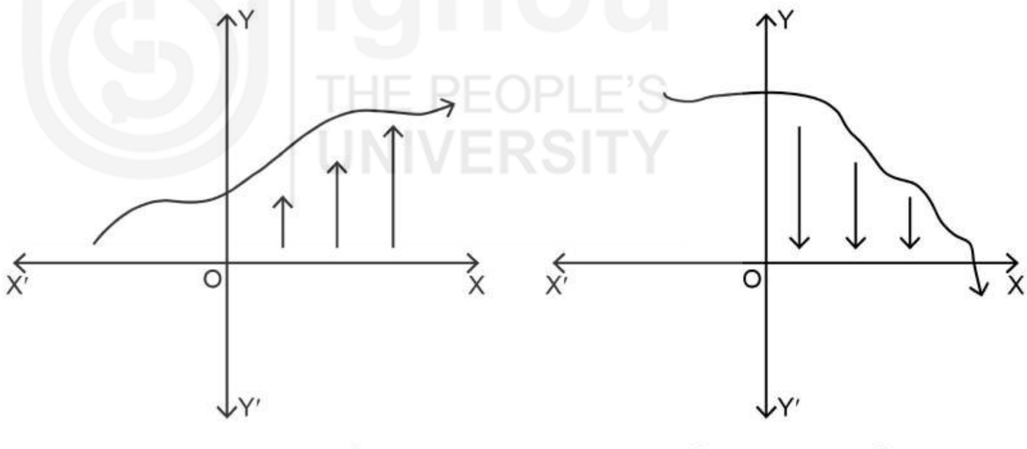
इस भाग में, हम देखेंगे कि किस प्रकार अवकलज f' से संबंधित सूचना को f के आलेख का आकार निर्धारित करने में उपयोग किया जा सकता है। हम यह दर्शाने से प्रारंभ करते हैं कि किस प्रकार f' का चिह्न इससे संबंधित है कि f का आलेख ऊपर चढ़ता हुआ है या नीचे गिरता हुआ है, अर्थात् f वर्धमान है या ह्रासमान है, जिसका आप इकाई 6 में अध्ययन कर चुके हैं, परंतु अंतर यह है कि यहाँ हम एक फलन की एकदिष्टता की पहचान के लिए अवकलजों का उपयोग कर रहे हैं।

आइए एक उदाहरण से प्रारंभ करें। एक विशेष प्रजाति की जनसंख्या को समय t (महीनों में) के एक फलन f के रूप में विचार कीजिए, जैसाकि चित्र 18 में दर्शाया गया है। ध्यान दीजिए कि $t=0$ और $t=24$ के बीच में, जनसंख्या की माप में वृद्धि हो रही है। यह आलेख एक फलन f निरूपित करता है, तो हम कहेंगे कि अंतराल $[0, 24]$ में f वर्धमान है। इसी प्रकार, हम कहते हैं कि अंतराल $[24, 36]$ में, यह ह्रासमान है।



चित्र 18

चित्र 18 में, A और B के बीच में वक्र की स्पर्श रेखाओं की प्रवणताएँ धनात्मक हैं और इसीलिए $f'(t) > 0$ है। परंतु B और C के बीच में, वक्र की स्पर्श रेखाओं की प्रवणताएँ ऋणात्मक हैं और इसीलिए $f'(t) < 0$ है। इस प्रकार, ऐसा प्रतीत होता है कि f में वृद्धि होती है, जब f' धनात्मक है तथा f में कमी होती है, जब f' ऋणात्मक है। हम यह भी कह सकते हैं कि फलन f का आलेख ऊपर चढ़ता हुआ है, जब $f' > 0$ है (चित्र 19 (क) देखिए) तथा नीचे गिरता हुआ है, जब $f' < 0$ है (चित्र 19 (ख) देखिए)।



(क) चढ़ता हुआ आलेख (ख) गिरता हुआ आलेख

चित्र 19

यह हमें इस प्रमेय पर पहुँचाता है:

प्रमेय 3 : मान लीजिए कि f विवृत अंतराल $]a,b[$ पर अवकलनीय है। यदि $]a,b[$ है, पर $f'(x) > 0$ है, तो $]a,b[$ पर f वर्धमान होता है। यदि $]a,b[$ पर $f'(x) < 0$ है, तो $]a,b[$ पर f ह्रासमान होता है।

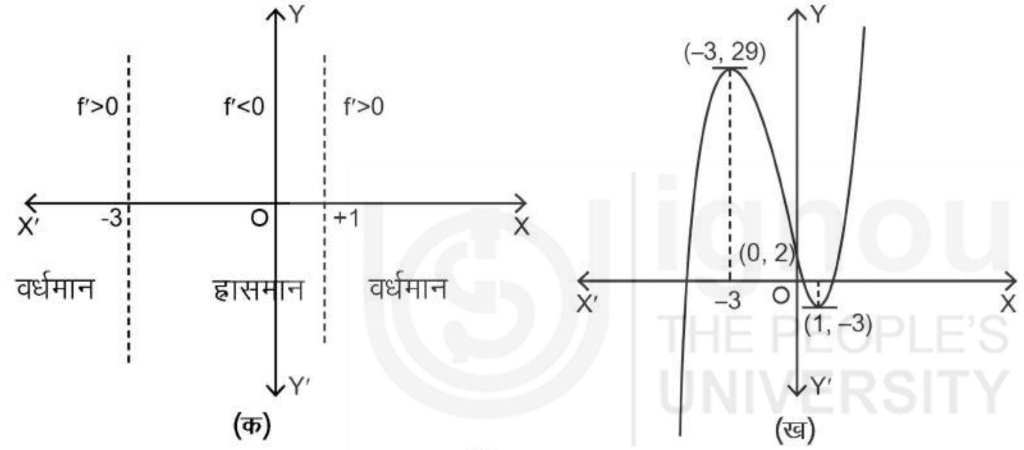
अब हम इस प्रमेय का निम्नलिखित उदाहरणों में यह ज्ञात करने में अनुप्रयोग करेंगे कि कोई फलन वर्धमान है या ह्रासमान है:

उदाहरण 13: निर्धारित कीजिए कि $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$ द्वारा परिभाषित फलन f कहाँ वर्धमान है तथा कहाँ ह्रासमान है। साथ ही, f और f' के आलेखों की तुलना भी कीजिए।

हल : $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$ दिया है। हम इसे x के सापेक्ष अवकलित करते हैं तथा प्राप्त करते हैं:

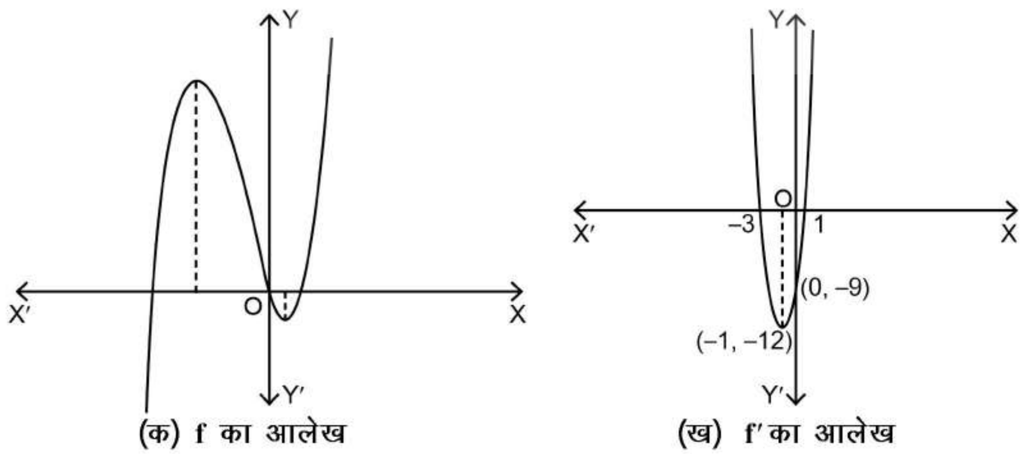
$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x-1)(x+3)$$

यह ज्ञात करने के लिए कि f वर्धमान है या ह्रासमान है, हमें यह ज्ञात करना होगा कि कहाँ $f'(x) > 0$ है और कहाँ $f'(x) < 0$ है। यह f' के दोनों गुणनखंडों के चिह्नों पर निर्भर करता है, जो $(x-1)$ और $(x+3)$ हैं। हम वास्तविक संख्या रेखा को ऐसे अंतरालों में विभाजित करते हैं, जिनके अंत-बिंदु क्रान्तिक संख्याएँ -3 और 1 हैं, जैसाकि चित्र 20 (क) में दर्शाया गया है। तब, हम इन अंतरालों में f' के चिह्न ज्ञात करते हैं तथा अंत में प्रत्येक अंतराल को इसके अनुसार वर्धमान या ह्रासमान अंकित करते हैं कि अवकलज क्रमशः धनात्मक है या ऋणात्मक है। इसे चित्र 20 (ख) में दर्शाया गया है। जब $x < -3$ है, तब f' के दोनों खंड ऋणात्मक हैं, और $f' > 0$ है। इस के लिए, फलन f वर्धमान है। इसी प्रकार, जब $-3 < x < 1$ है, तो $(x-1)$ ऋणात्मक है और $(x+3)$ धनात्मक हैं, इसलिए $f' < 0$ है और f ह्रासमान है। जब $x > 1$ तो $(x-1)$ और $(x+3)$ दोनों धनात्मक हैं इसलिए f वर्धमान है।



चित्र 20

f और f' के आलेख क्रमशः चित्र 21 (क) और चित्र 21 (ख) में दर्शाए गए हैं। यह स्पष्ट है कि जब $f'(x) > 0$ है, तब f का आलेख चढ़ता हुआ है। यह तब होता है, जब $x < -3$ है और जब $x > 1$ है। जब f का आलेख गिरता हुआ है ($-3 < x < 1$ के लिए), हम $f'(x) < 0$ प्राप्त करते हैं और इसलिए f' का आलेख x-अक्ष के नीचे है। f की क्रान्तिक संख्याएँ वहाँ हैं जहाँ $f'(x) = 0$ है, अर्थात् $x = -3$ और $x = 1$ पर। इसीलिए, ये f' के आलेख के x-अंतः खंड हैं।



चित्र 21

***

अब निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E8) ज्ञात कीजिए कि $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ द्वारा परिभाषित फलन f कहाँ वर्धमान है और कहाँ ह्रासमान है।

E9) वे उप-अंतराल ज्ञात कीजिए जिन पर f वर्धमान या ह्रासमान हैः

i) $f(x) = \sin x + \cos x$, $[0, 2\pi]$ पर

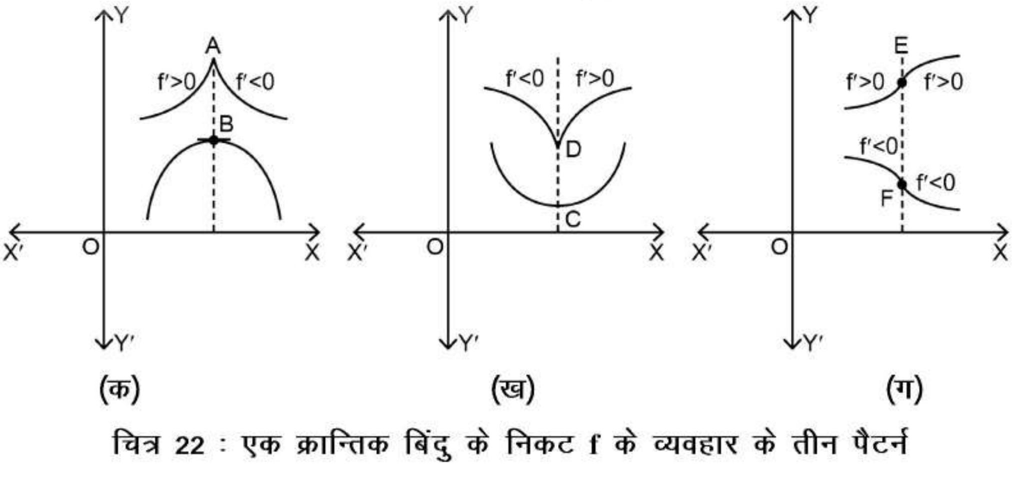
ii) $\mathbb{R}$ पर $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

iii) $\mathbb{R}$ पर $f(x) = x^2 - x - \ln x$

चरम मानों पर वापस जाने पर, आप देख चुके हैं कि यदि किसी बिंदु पर f का एक उच्चिष्ठ या एक निम्निष्ठ है, तो वह बिंदु f की एक क्रान्तिक संख्या होनी चाहिए। परंतु प्रत्येक क्रान्तिक संख्या एक उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ प्रदान नहीं करती है। इसलिए, क्या कोई ऐसी जाँच है जो हमें बताए कि एक क्रान्तिक संख्या पर f का एक उच्चिष्ठ या एक निम्निष्ठ है या नहीं? आइए इसके बारे में अगले भाग में देखें।

13.5 प्रथम अवकलज जाँच

प्रत्येक सापेक्ष चरम मान एक क्रान्तिक बिंदु होता है। परंतु, जैसा कि आपने भाग 13.3 में देखा था कि एक संतत फलन का प्रत्येक क्रान्तिक बिंदु आवश्यक रूप से एक सापेक्ष चरम मान नहीं होता। चित्र 22 (क) के आलेख पर दृष्टिपात करने पर, आप A पर एक उच्चिष्ठ देख सकते हैं। अब, इसके बाद किसी बिंदु पर अवकलज पर विचार कीजिए। आप क्या देखते हैं? यदि एक क्रान्तिक संख्या के तुरंत बाईं ओर अवकलज धनात्मक है तथा तुरंत दाईं ओर ऋणात्मक है, तो आलेख वर्धमान से ह्रासमान में बदल जाता है तथा क्रान्तिक बिंदु को एक सापेक्ष उच्चिष्ठ होना चाहिए, जैसा चित्र 22 (क) में दर्शाया गया है। यदि अवकलज क्रान्तिक संख्या के तुरंत बाईं ओर ऋणात्मक है तथा तुरंत दाईं ओर धनात्मक है, तो आलेख ह्रासमान से वर्धमान में बदल जाता है तथा क्रान्तिक बिंदु एक सापेक्ष निम्निष्ठ है, जैसा कि चित्र 22 (ख) में दर्शाया गया है। परंतु, यदि क्रान्तिक संख्या के तुरंत दोनों ओर अवकलज समान रहता है, तो यह न तो सापेक्ष उच्चिष्ठ है और न ही एक सापेक्ष निम्निष्ठ, जैसाकि चित्र 22 (ग) में दर्शाया गया है।



चित्र 22 : एक क्रान्तिक बिंदु के निकट f के व्यवहार के तीन पैटर्न

सापेक्ष चरम मानों को ज्ञात करने में, प्रथम अवकलज जाँच का अनुप्रयोग करने के लिए, निम्नलिखित चरणों का अनुसरण किया जाता है:

1. सर्वप्रथम, एक संतत फलन f की सभी क्रान्तिक संख्याएँ ज्ञात कीजिए। अर्थात् ऐसी सभी संख्याएँ ज्ञात कीजिए कि $f(x_0)$ परिभाषित हो तथा या तो $f'(x_0)=0$ हो या फिर $f'(x_0)$ का अस्तित्व नहीं हो।

2. सारणी 1 में दिए अनुसार, प्रत्येक क्रान्तिक बिंदु $(x_0,f(x_0))$ का वर्गीकरण कीजिए।

सारणी 1

बिंदु	बिंदु की प्रकृति	प्रेक्षण
$(x_0,f(x_0))$	सापेक्ष उच्चिष्ठ	x_0 के बाईं ओर एक विवृत अंतराल $]a,x_0[$ में सभी x के लिए, $f'(x)>0$ है (आलेख चढ़ता हुआ) तथा x_0 के दाईं ओर एक विवृत अंतराल $]x_0,b[$ में सभी x के लिए, $f'(x)<0$ है (आलेख गिरता हुआ)।
$(x_0,f(x_0))$	सापेक्ष निम्निष्ठ	x_0 के बाईं ओर एक विवृत अंतराल $]a,x_0[$ में सभी x के लिए, $f'(x)<0$ है (आलेख गिरता हुआ) तथा x_0 के दाईं ओर एक विवृत अंतराल $]x_0,b[$ में सभी x के लिए, $f'(x)>0$ है (आलेख चढ़ता हुआ)।
$(x_0,f(x_0))$	एक चरम मान नहीं	x_0 के प्रत्येक ओर विवृत अंतरालों $]a,x_0[$ और $]x_0,b[$ में सभी x के लिए, $f'(x)$ का समान चिह्न है।

मान लीजिए कि हम इस प्रथम अवकलज जाँच को बहुपद $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$ के लिए अनुप्रयोग करते हैं। हम प्राप्त करते हैं कि इस फलन की क्रान्तिक संख्याएँ–3 और 1 हैं तथा यह कि f वर्धमान है, जब $x<-3$ और $x>1$ है और ह्रासमान है, जब $-3<x<1$ है। प्रथम–अवकलज जाँच हमें यह बताती है कि –3 पर एक सापेक्ष उच्चिष्ठ है तथा 1 पर एक सापेक्ष निम्निष्ठ है। इसे समझने के लिए, आइए कुछ और उदाहरण हल करें।

उदाहरण 14: $0 \le x \le 2\pi$ के लिए, $f(x) = x - 2\sin x$ की सभी क्रान्तिक संख्याएँ ज्ञात कीजिए तथा निर्धारित कीजिए कि प्रत्येक एक सापेक्ष उच्चिष्ठ के संगत है, एक निम्निष्ठ के संगत है या किसी के संगत नहीं है। f का आलेख खींचिए।

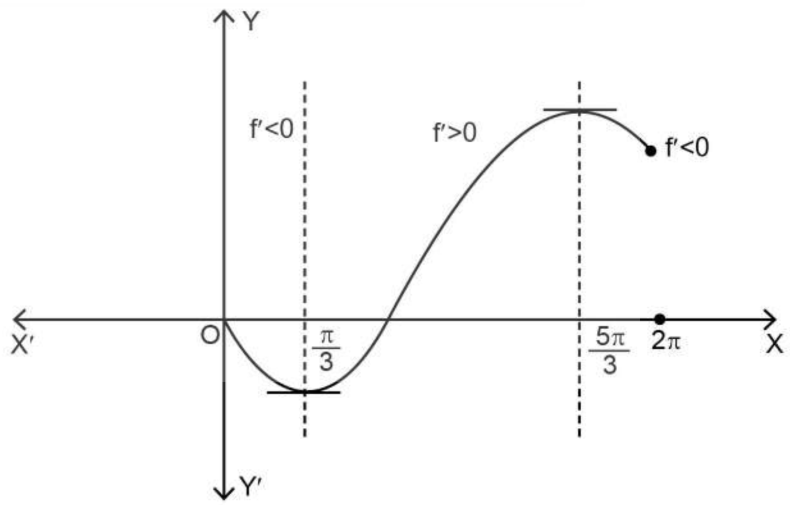
हल : $f(x) = x - 2\sin x$ है। x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम $f'(x) = 1 - 2\cos x$ प्राप्त करते हैं, जिसका सभी x के लिए अस्तित्व है। क्रान्तिक संख्याएँ केवल तभी प्रकट होती हैं, जब $f'(x) = 0$ है, अर्थात् जब $\cos x = \frac{1}{2}$ है। हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं कि अंतराल $[0, 2\pi]$ में $f(x)$ के लिए, क्रान्तिक संख्याएँ $\frac{\pi}{3}$ और $\frac{5\pi}{3}$ हैं।

आगे, हम $f'(x)$ के चिह्न की जाँच करते हैं, जो सारणी 2 में दी गई है।

सारणी 2

अंतराल	$f'(x)$	f
$0 < x < \frac{\pi}{3}$	ऋणात्मक	ह्रासमान
$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$	धनात्मक	वर्धमान
$\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$	ऋणात्मक	ह्रासमान

प्रथम-अवकलज जाँच के अनुसार, हम कह सकते हैं कि f' का चिह्न $x = \frac{\pi}{3}$ पर –ive से +ive बदल रहा है, इसलिए $\frac{\pi}{3}$ पर एक सापेक्ष निम्निष्ठ है। इसी प्रकार, $x = \frac{5\pi}{3}$, पर f' का चिह्न +ive से –ive बदल रहा है इसलिए $x = \frac{5\pi}{3}$ पर एक सापेक्ष उच्चिष्ठ है। f का आलेख चित्र 23 में दर्शाया गया है।



चित्र 23: f का आलेख

***

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E10) प्रथम–अवकलज जाँच का अनुप्रयोग करते हुए, निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक के सभी संभव चरम मान ज्ञात कीजिएः

i) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$, सभी $x \in [0, 3]$ के लिए

ii) $f(x) = 2x^4 + 8x^3 - 4x^2 - 24x + 15$, सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए

iii) $f(x) = (x-1)^2(x+1)$, सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए

iv) $[0, 6]$ पर $f(x) = x\sqrt{6-x}$

v) $[-1, 1]$ पर $f(x) = e^{-x^2}$

E11) $[0, 2\pi]$ पर $f(x) = x + 2\sin x$ द्वारा परिभाषित फलन f के स्थानीय उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

आप इकाई 11 का स्मरण करें जिसमें हमने द्वितीय अवकलजों की चर्चा की।

द्वितीय अवकलज के अनुप्रयोगों में से एक उच्चिष्ठ (अधिकतम) और निम्निष्ठ (न्यूनतम) मानों के लिए जाँच करना है। हम अगले भाग में, द्वितीय अवकलज जाँच की चर्चा करेंगे।

13.6 द्वितीय-अवकलज जाँच

अब हम एक अन्य प्रतिबंध का अन्वेषण करते हैं जो, यदि संतुष्ट हो जाए तो, $f'(x)$ के चिह्न की जाँच करने की आवश्यकता को समाप्त कर देती है, जैसा कि प्रथम–अवकलज जाँच में थी। यह प्रतिबंध न केवल पर्याप्त अपितु बहुत उपयोगी भी है।

सापेक्ष चरम मानों के लिए द्वितीय-अवकलज जाँच

मान लीजिए कि f एक ऐसा फलन है कि $f'(x_0) = 0$ है तथा x_0 को अंतर्विष्ट करने वाले विवृत अंतराल में द्वितीय अवकलज का अस्तित्व है।

यदि $f''(x_0) > 0$ हो, तो $x = x_0$ पर एक सापेक्ष निम्निष्ठ होता है।

यदि $f''(x_0) < 0$ हो, तो $x = x_0$ पर एक सापेक्ष उच्चिष्ठ होता है।

टिप्पणी : आपने इस ओर अवश्य ध्यान दिया होगा कि यह जाँच उस स्थिति के बारे में कुछ नहीं कहती, जब $f''(x_0)$ शून्य है। ऐसी स्थिति में, फलन उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ हो सकता है या नहीं भी हो सकता है, जैसाकि निम्नलिखित उदाहरण दर्शाते हैं।

i) $f(x) = -x^4$ सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए

यहाँ $f'(0) = 0 = f''(x)$ है, परंतु इस फलन का 0 पर उच्चिष्ठ है। (चित्र 24 (क) देखिए)।

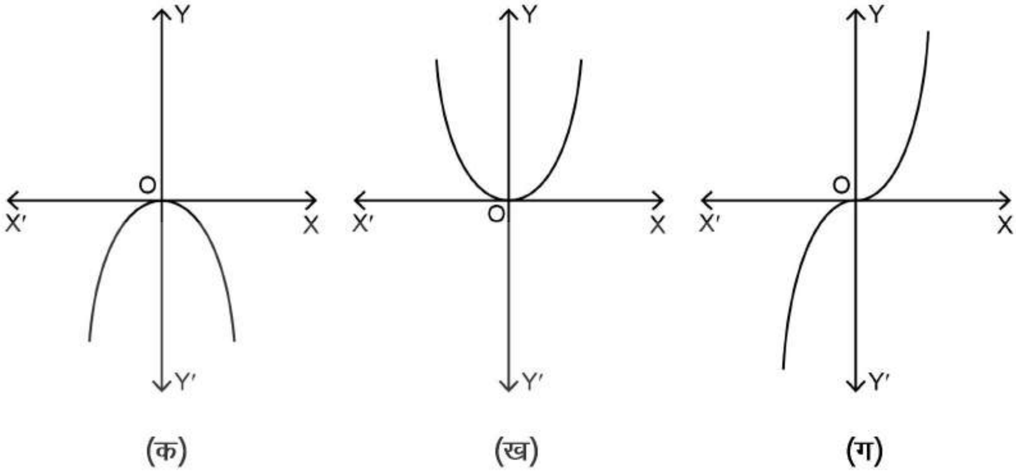
ii) $f(x) = x^4$ सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए

यहाँ $f'(0) = 0 = f''(0) = 0$ है, परंतु इस फलन का 0 पर निम्निष्ठ है। (चित्र 24 (ख) देखिए)।

iii) $f(x) = x^3$, सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए

यहाँ $f'(0) = 0 = f''(0)$ है, परंतु इस फलन का 0 पर न तो कोई उच्चिष्ठ और न ही कोई निम्निष्ठ है। (चित्र 24 (ग) देखिए)।

इस प्रकार, प्रथम-अवकलज जाँच की निश्चित रूप से कुछ विशेषता है।



चित्र 24

***

आइए, इस द्वितिय अवकलज परीक्षण का प्रयोग निम्नलिखित उदाहरणों में करें:

उदाहरण 15: सभी $x \neq 0$ के लिए, $f(x) = 2x + \frac{3}{x}$ द्वारा परिभाषित फलन f के, प्रथम-अवकलज और द्वितीय अवकलज जाँचों का उपयोग करते हुए, चरम मान ज्ञात कीजिए। यहाँ प्रक्रिया की सरलता के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

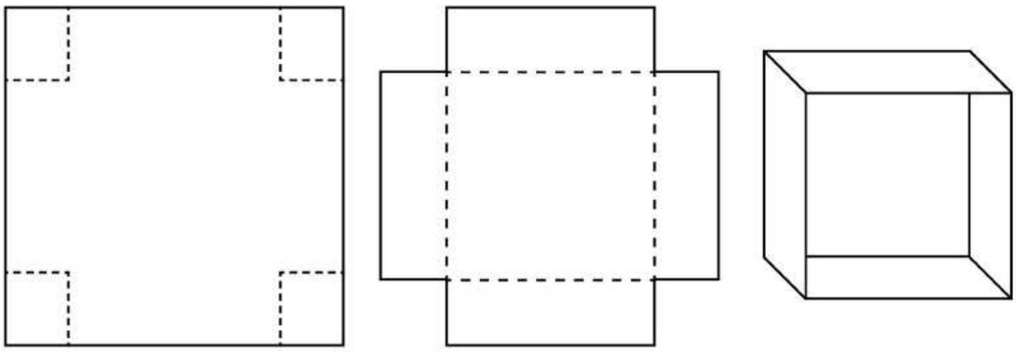
हल : यहाँ, $f'(x) = 2 - 3/x^2$ है और इसलिए $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3/2}$ है। प्रथम अवकलज जाँच का प्रयोग करके हम कह सकते हैं कि f' का चिह्न $x = \sqrt{3/2}$ पर –ive से +ive में बदल रहा है, इसलिए f का एक निम्निष्ठ है और निम्निष्ठ मान $2\sqrt{6}$ है। इसी प्रकार $x = -\sqrt{3/2})$ पर f' चिह्न +ive से –ive में बदल रहा है, इसलिए f का एक उच्चिष्ठ है और उच्चिष्ठ मान $-2\sqrt{6}$ है। साथ ही, $f''(x) = 6x^{-3}$ है। इसका अर्थ $f''(\sqrt{3/2}) > 0$ और $f''(-\sqrt{3/2}) < 0$ है, इसलिए द्वितीय-अवकलज जाँच से यह निष्कर्ष निकलता है कि $\sqrt{3/2}$ पर f का एक उच्चिष्ठ है तथा $-\sqrt{3/2}$ पर f का एक निम्निष्ठ है। निम्निष्ठ मान $f(\sqrt{3/2}) = 2\sqrt{6}$ है तथा उच्चिष्ठ मान $f(-\sqrt{3/2}) = -2\sqrt{6}$ है।

कभी-कभी, द्वितीय-अवकलज जाँच अनिर्णायक रहती है, जब $f''(x_0) = 0$ हो। दूसरे शब्दों में, ऐसे एक बिंदु पर एक उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ हो भी सकता है या इनमें से कोई भी नहीं हो। द्वितीय-अवकलज जाँच तब भी असफल रहता है, जब $f''(x_0)$ का अस्तित्व नहीं होता। ऐसी स्थितियों में, प्रथम-अवकलज जाँच का ही प्रयोग किया जाना चाहिए। आप इस अगले उदाहरण में देख सकते हैं कि यद्यपि दोनों जाँचों का अनुप्रयोग हो सकता है, प्रथम-अवकलज जाँच उपयोग की दृष्टि से सरल है।

***

उदाहरण 16: भुजा 24 cm वाले एक वर्गाकार कागज के प्रत्येक कोने से मान लीजिए कि हम x cm भुजा वाला एक वर्ग हटा लेते हैं तथा एक खुला घनाभाकार डिब्बा बनाने के लिए, किनारों को ऊपर की ओर मोड़ते हैं। डिब्बे की अधिकतम धारिता होने के लिए x का मान ज्ञात कीजिए।

हल : स्पष्टतः, बनाए जाने वाले डिब्बे के लिए, $0 \le x \le 12$ है। साथ ही, इस प्रकार बने डिब्बे की विमाएँ $(24-2x), (24-2x)$ और x हैं (चित्र 25 देखिए)।



चित्र 25

आयतन $f(x)$ निम्नलिखित द्वारा दिया जाने वाला x का एक फलन है:

$$f(x) = (24-2x)^2 x,\ 0 \le x \le 12$$

$$= 4x^3 - 96x^2 + 24^2 x \text{ है।}$$

$$f'(x) = 12x^2 - 192x + 24^2 = 12(x-4)(x-12)$$

अब, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 12$ या $x = 4$ है।

यहाँ, $f''(x) = 24x - 192$ है तथा $f''(4) = 96 - 192 < 0$ है और $f''(12) = 288 - 192 > 0$ है।

अतः, $x = 4$ फलन f का एक उच्चिष्ठ बिंदु है। f का अधिकतम मान $f(4)$ (अर्थात् डिब्बे की अधिकतम धारिता) $1024\ cm^3$ है। क्या आप इससे आश्चर्यचकित हैं कि अधिकतम धारिता के लिए डिब्बा एक घन क्यों नहीं है? परंतु यदि यह एक घन हुआ होता, तो भुजा 8 cm वाले चार वर्ग (हटाया हुआ भाग) नष्ट हो गए होते, जबकि अब केवल 4 cm भुजा वाले चार वर्ग ही हटाए गए हैं। हटाई गई सामग्री तथा एक घन के संभवतः निकट डिब्बा बनाने के बीच में एक समझौता होना चाहिए।

***

यहाँ आपके हल करने के लिए, कुछ प्रश्न हैं।

E12) निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन के लिए चरम बिंदु ज्ञात कीजिए। द्वितीय, अवकलज जाँच का प्रयोग करते हुए, इंगित कीजिए इनमें से कौन अधिकतम हैं, कौन न्यूनतम हैं तथा कौन कुछ भी नहीं है। साथ ही, f के चरम मान भी ज्ञात कीजिए।

i) $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) = -x^3,\ x \in \mathbb{R}$

iii) $f(x) = 3x^2 + 7x + 1,\ x \in \mathbb{R}$

iv) $f(x) = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \cdots + a_n x^{2n}$, जहाँ $x \in \mathbb{R}$ है तथा प्रत्येक a_i धनात्मक है।

v) $f(x) = x/(x^2+1),\ 0 < x < \infty$

E13) दर्शाइए कि f का $\pi/3$ एक क्रान्तिक बिंदु है, जहाँ $f(x) = \sin x(1+\cos x),\ x \in \mathbb{R}$ है। क्या इस बिंदु का f का एक उच्चिष्ठ या एक निम्निष्ठ है?

E14) दर्शाइए कि एक वृत्त के अंतर्गत खींचा जा सकने वाला अधिकतम क्षेत्रफल वाला आयत एक वर्ग होता है।

E15) रीना एक नेम-प्लेट बनवाना चाहती है जिसपर क्षेत्रफल ''बराबर है 48 cm^2 प्रदर्शित हो, ऊपर और नीचे के किनारों के अनुदिश 2 cm मोटी एक-एक सफेद पट्टी हो तथा शेष दोनों किनारों के अनुदिश 1 cm मोटी एक-एक पट्टी हो। इस प्लेट की विमाएँ क्या होनी चाहिए ताकि प्लेट का कुल क्षेत्रफल न्यूनतम हो?

अगले भाग में, हम रोल–प्रमेय और लग्रांज माध्य मान प्रमेय की चर्चा करेंगे।

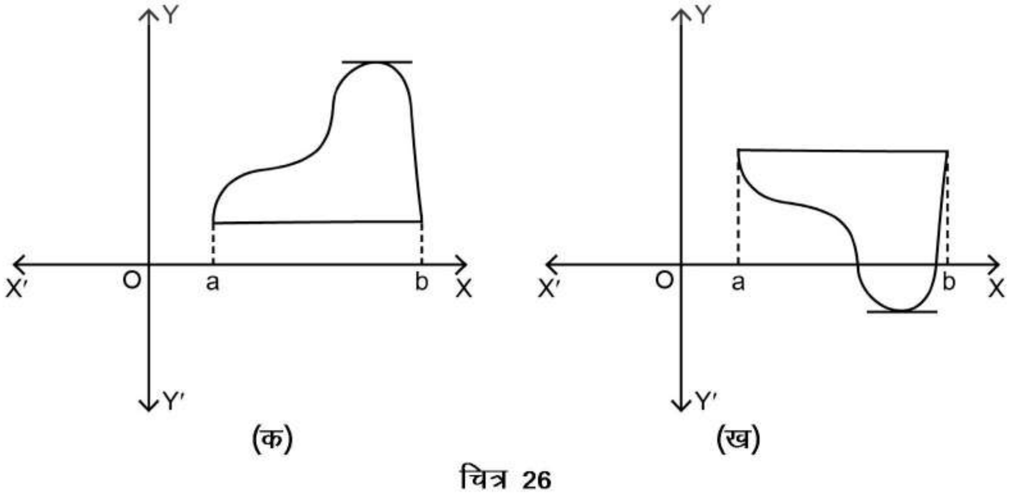
13.7 माध्य मान प्रमेय

आइए एक उदाहरण से प्रारंभ करें। उदाहरणार्थ, यदि किसी वाहन की माध्य चाल 60 kmph थी तो उसकी क्षणिक चाल हमेशा 60 से अधिक नहीं हो सकती है और तब माध्य भी 60 से अधिक होगा। इसी प्रकार क्षणिक चाल 60 से हमेशा कम नहीं होगी। इस प्रकार, कम से कम एक बिंदु पर क्षणिक चाल 60 भी होगी। यह माध्य मान परिणाम कहलाता है। क्योंकि यह वास्तविक मान और मध्य मान में संबंध स्थापित करता है। इस भाग में, हम माध्य मान प्रमेयों का अध्ययन करेंगे। ये प्रमेय न केवल कैलकुलस अपितु गणित की अन्य शाखाओं जैसे कि संख्यात्मक विश्लेषण (Numerical Analysis) में अन्य प्रमेयों को सिद्ध करने के लिए भी बहुत लाभदायक साधन का कार्य करती हैं। इनका महत्व इनकी बृहत अनुप्रयोगिता तथा प्रचुर उपयोगिता में निहित है।

13.7.1 रोल-प्रमेय

पहले हम रोल-प्रमेय (Rolle's Theorem) पर विचार करते हैं, जो लग्रांज माध्य मान प्रमेय (Lagrange's mean value theorem) की एक विशिष्ट स्थिति है। हम इन प्रमेयों की उपपत्तियाँ देने का यहाँ प्रयत्न नहीं करेंगे, परंतु आप इससे सहमत होंगे कि ये दोनों सहजात्मक रूप से स्पष्ट हैं। हम इनकी ज्यामितीय सार्थकता की चर्चा करेंगे तथा कुछ उदाहरणों की सहायता से इनकी उपयोगिता को स्पष्ट करेंगे।

रोल-प्रमेय वास्तव में रोल ने सिद्ध नहीं की थी। उसने इसका एक टिप्पणी के रूप में केवल कथन दिया था। वस्तुतः, माइकल रोल (1652-1719) न्यूटन और लेबनिज द्वारा ज्ञात नए सिद्धांत का एक आलोचक के रूप में जाना जाता था। तब, यह एक व्यंगात्मक बात है कि इस सिद्धांत की सबसे अधिक महत्वपूर्ण प्रमेयों में से एक को उसी के नाम पर जाना जाता है। आइए अब देखें यह प्रमेय क्या है?



चित्र 26

चित्र 26 (क) व चित्र 26 (ख) में, हम संवृत अंतराल [a, b] पर परिभाषित दो संतत फलनों के आलेख देख रहे हैं। यहाँ हम इन दोनों के कुछ उभयनिष्ठ अभिलक्षणों को प्रेक्षित करते हैं, जिन्हें सारणी 3 के रूप में दिया गया है।

सारणी 3

क्रम सं.	रफ कथन	परिशुद्ध कथन
1.	वक्र बिना भंग या रिक्तता के खींची जाती है।	[a, b] पर फलन f संतत है।
2.	वक्र में कोई कोने नहीं हैं।	विवृत अंतराल]a, b[में फलन अवकलनीय है।
3.	वक्र के दो अंत-बिंदु एक ही क्षैतिज रेखा पर स्थित हैं।	$f(a) = f(b)$ है
4.	किसी बिंदु पर वक्र की एक क्षैतिज स्पर्श रेखा है (बिंदुकित रेखा के रूप में खींची हुई है)।	]a, b[में किसी c पर $f'(c) = 0$ है।

दोनों अंत-बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा को इस रूप में अधिकल्पित किया जा सकता है कि वह सदैव क्षैतिज रखी जाए तथा वक्र को स्थिर रखा जाए। तब, बिंदुकित रेखा द्वारा दर्शाई एक स्थिति है, जहाँ यह वक्र को स्पर्श करती है। यह हमें विश्वास दिलाती है कि प्रथम तीन गुणों को संतुष्ट करने वाले सभी फलनों के लिए चौथा गुण भी लागू हो रहा है। यही बात रोल-प्रमेय भी बताती है।

प्रमेय 4 (रोल-प्रमेय) : मान लीजिए कि f एक फलन है, जो संवृत अंतराल [a, b] में संतत है तथा विवृत अंतराल]a, b[में अवकलनीय है। साथ ही, मान लीजिए कि $f(a) = f(b)$ है। तब,]a, b[में कोई c होता है ताकि $f'(c) = 0$ हो।

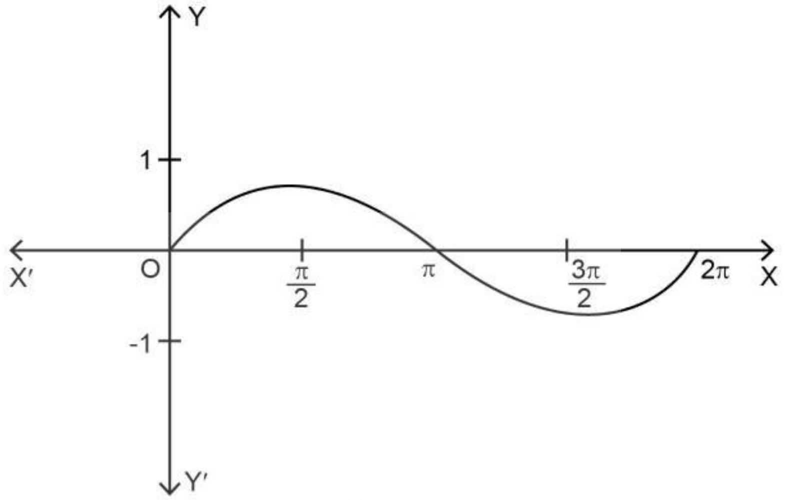
उदाहरणार्थ, यदि कोई रेलगाड़ी एक सीधे ट्रैक पर 1 बजे सायं और 5 बजे सायं ठीक एक जगह पर है तो या तो गाड़ी 1 PM और 5 PM के बीच में किसी समय पर चल नहीं रही थी, या उसी स्थान पर वापस आने के लिए उसे किसी बिंदु पर रुकने और उल्टी दिशा में चलने की आवश्यकता पड़ी होगी। यहाँ, मान लीजिए कि समय t पर रेलगाड़ी की स्थिति $f(t)$ है। यदि $f(1) = f(5)$ है, तो वह रेलगाड़ी $t = 1$ और $t = 5$ दोनों पर एक ही स्थान पर है। रोल-प्रमेय यह कहती है कि 1 और 5 के बीच में कहीं अवकलज शून्य होना चाहिए। अब इस प्रमेय को स्पष्ट करने के लिए, हम एक उदाहरण देते हैं।

उदाहरण 17 : अंतराल $[0, 2\pi]$ पर $f(x) = \sin x$ पर विचार कीजिए। जाँच कीजिए कि रोल-प्रमेय का सत्यापन हो जाता है।

हल : $[0, 2\pi]$ पर $f(x) = \sin x$ द्वारा दिए जाना वाला फलन f संतत है तथा $]0, 2\pi[$ पर अवकलनीय भी है। इस प्रकार रोल-प्रमेय की सभी परिकल्पनाएँ यहाँ संतुष्ट हो रही हैं।

अब, $f(0) = 0 = f(2\pi)$ है।

अतः, रोल-प्रमेय के अनुसार, $]0, 2\pi[$ में ऐसे c का अस्तित्व होना चाहिए कि $f'(c) = 0$ हो। यहाँ, $f'(x) = \cos x$ और $f'(c) = \cos c$ है। क्या हम ऐसा अवयव c ज्ञात कर सकते हैं कि $\cos c = 0$ हो? हाँ, वास्तव में, $]0, 2\pi[$ में दो ऐसे बिंदु c हैं और ये $\pi/2$ और $3\pi/2$ हैं।



चित्र 27

$\pi/2$ पर, फलन $\sin x$ अपना अधिकतम मान प्राप्त करता है। $3\pi/2$ पर, फलन $\sin x$ अपना न्यूनतम मान प्राप्त करता है। परंतु ये दोनों अंतराल $]0, 2\pi[$ में स्थित हैं। चित्र 27 भी इसका सत्यापन करता है।

***

रोल-प्रमेय यह दृढ़तापूर्वक कहती है कि $]a, b[$ में न्यूनतम एक ऐसा c है कि $f'(c) = 0$ हो। उदाहरण 17 हमें दर्शाता है कि $]a, b[$ में एक से अधिक ऐसे बिंदु हो सकते हैं जिनपर $f'(x) = 0$ हो।

रोल-प्रमेय में, $[a, b]$ पर एक फलन f को ये तीन प्रतिबंध संतुष्ट करने होते हैं:

i) $[a, b]$ पर f संतत है।

ii) $]a, b[$ पर f अवकलनीय है।

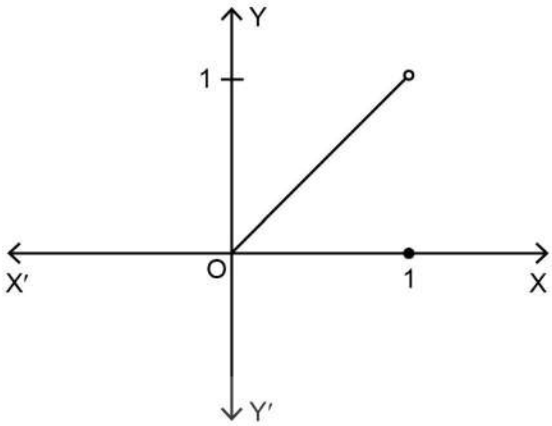
iii) $f(a) = f(b)$ है।

अब, हम कुछ उदाहरणों की सहायता से यह देखेंगे कि इन प्रतिबंधों में से प्रत्येक आवश्यक है। हम इनमें से किसी भी एक को छोड़ नहीं सकते तथा फिर भी प्रमेय सिद्ध करें।

उदाहरण 18: जाँच कीजिए कि क्या $[0, 1]$ पर $f(x) = x - [x] = x$ का भिन्न वाला भाग द्वारा परिभाषित फलन f रोल-प्रमेय का सत्यापन करता है।

हल: इसे $f(x) = \begin{cases} x, \text{ यदि } 0 \le x < 1 \\ 0, \text{ यदि } x = 1 \end{cases}$ के रूप में भी पुनः लिखा जा सकता है।

यहाँ, $f(0) = f(1) = 0$ है। विवृत अंतराल $]0, 1[$ में f अवकलनीय है। इस प्रकार, रोल-प्रमेय के तीन प्रतिबंधों में से दो f द्वारा संतुष्ट हो गए हैं। $]0, 1[$ के प्रत्येक बिंदु पर f का अवकलज 1 है। $]0, 1[$ में कोई ऐसा बिंदु नहीं है, जहाँ अवकलज शून्य है। इस उदाहरण में रोल-प्रमेय को क्या होता है? स्पष्ट है, इसका निष्कर्ष यहाँ सत्य नहीं है। f का आलेख चित्र 28 में दर्शाया गया है।



चित्र 28: f का आलेख

इसका कारण यह है कि संवृत अंतराल $[0, 1]$ में f संतत नहीं है, क्योंकि 1 पर यह संतत रहने में असफल रहता है।

***

अगले उदाहरण में, हम देखते हैं कि $]a, b[$ में अवकलनीय की परिकल्पना को छोड़ा नहीं जा सकता।

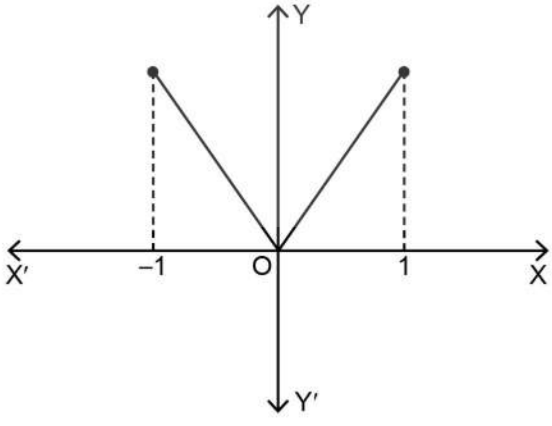
उदाहरण 19: $[-1, 1]$ पर $f(x) = |x|$ द्वारा परिभाषित फलन f पर विचार कीजिए तथा जाँच कीजिए कि रोल-प्रमेय लागू होती है या नहीं।

हल : $]-1, 1[$ में ऐसा कोई c नहीं है कि $f'(c) = 0$ हो। वास्तविक अभिकलन दर्शाता है कि

$$f' = \begin{cases} -1, & \text{यदि } -1 < x < 0 \\ 1, & \text{यदि } 0 < x < 1 \\ \text{अस्तित्व नहीं है, यदि } x = 0 \end{cases}$$

$[-1, 1]$ पर f संतत है। साथ ही, $f(-1) = f(1)$ है।

परंतु $]-1, 1[$ में f अवकलनीय नहीं है। इसलिए रोल-प्रमेय नही लागू होती है। चित्र 29, f का आलेख दर्शाता है।



चित्र 29: f का आलेख

***

हमारा अगला उदाहरण दर्शाता है कि रोल-प्रमेय में परिकल्पना $f(a) = f(b)$ आवश्यक है।

उदाहरण 20: $[0, 1]$ पर $f(x) = x^3$ के लिए रोल-प्रमेय की जाँच कीजिए।

हल : $[0, 1]$ पर f संतत है तथा $]0, 1[$ में अवकलनीय है। परंतु $f(0) \neq f(1)$ है।

इस स्थिति में, $f'(x) = 3x^2 \neq 0$ है किसी $x \in]0, 1[$ के लिए

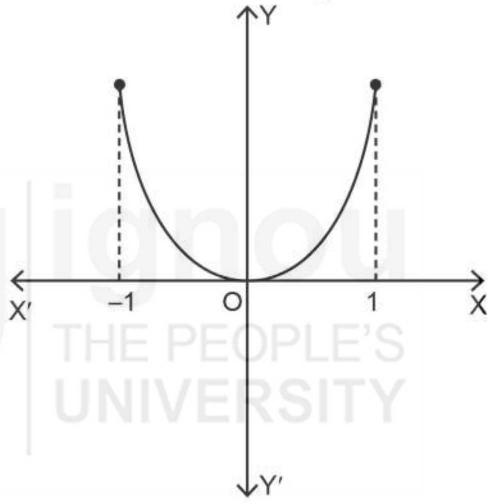
इस प्रकार, हम देखते हैं कि जब $f(a) \neq f(b)$ है, तो रोल-प्रमेय के निष्कर्ष लागू नहीं हो सकते हैं।

***

अंत में, हम एक ऐसा उदाहरण देते हैं, जहाँ रोल-प्रमेय का अनुप्रयोग है तथा एक अद्वितीय c प्रदान करता है।

उदाहरण 21: $[-1, 1]$ पर $f(x) = x^2$ पर विचार कीजिए। रोल-प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $[-1, 1]$ पर $f(x) = x^2$ है। तब, $f'(x) = 2x$ है। यहाँ रोल-प्रमेय के सभी तीनों प्रतिबंध संतुष्ट हो जाते हैं। यहाँ केवल एक c, अर्थात् $c = 0$ ऐसा है कि $f(c) = 0$ है। चित्र 30 संगत आलेख को दर्शाता है।



चित्र 30: f का आलेख

***

अब आप इन प्रश्नों को हल कर पाएँगे।

E16) क्या निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन में रोल-प्रमेय का अनुप्रयोग किया जा सकता है? अनुप्रयोग हो सकने की स्थिति में, c ज्ञात कीजिए।

i) अंतराल $[0, \pi]$ पर $y = \sin^2 x$

ii) $[-2, 2]$ पर $f(x) = x^2 + 1$

iii) $[0, 1]$ पर $f(x) = x^3 + x$

iv) $[0, \pi/2]$ पर $f(x) = \sin x + \cos x$

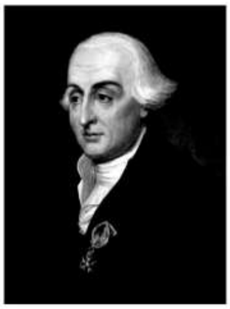
v) $[0, 2\pi]$ पर $f(x) = \sin x - \cos x$

E17) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ द्वारा दिए जाने वाले फलन f पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि $f(-1) = f(4)$ है। -1 और 4 के बीच में एक बिंदु c ऐसा ज्ञात कीजिए कि c पर f का अवकलज शून्य हो जाए। क्या यह बिंदु -1 और 4 का मध्य-बिंदु है?

E18) मान लीजिए कि $f(x) = ax^2 + bx + c$ एक दिया हुआ फलन है। यदि p और q दो वास्तविक संख्याएँ ऐसी हैं कि $f(p) = f(q)$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $f'\left[\frac{p+q}{2}\right] = 0$ है।

E19) वक्र $y = ax^2 + bx + c$ पर विचार कीजिए। मान लीजिए कि x_0 एक ऐसी अद्वितीय वास्तविक संख्या है कि इस वक्र की (x_0, y_0) पर स्पर्श रेखा क्षैतिज है। सिद्ध कीजिए कि अंतराल $[x, \infty[$ पर फलन y एकैकी है।

E20) मान लीजिए कि $\mathbb{R}$ का I एक विवृत अंतराल है। मान लीजिए कि $f: I \to \mathbb{R}$ एक ऐसा अवकलनीय फलन है कि I पर f शून्य नहीं होता है। सिद्ध कीजिए कि I पर f एकैकी है।



चित्र 31: लग्रांज

अब, हम माध्य मान प्रमेय की चर्चा करेंगे। इसे अठारहवीं शताब्दी के एक प्रचंड गणितज्ञ जोसेफ लोयिस लग्रांज (Joseph Louit Langrange) ने सिद्ध किया था।

13.7.2 लग्रांज माध्य मान प्रमेय

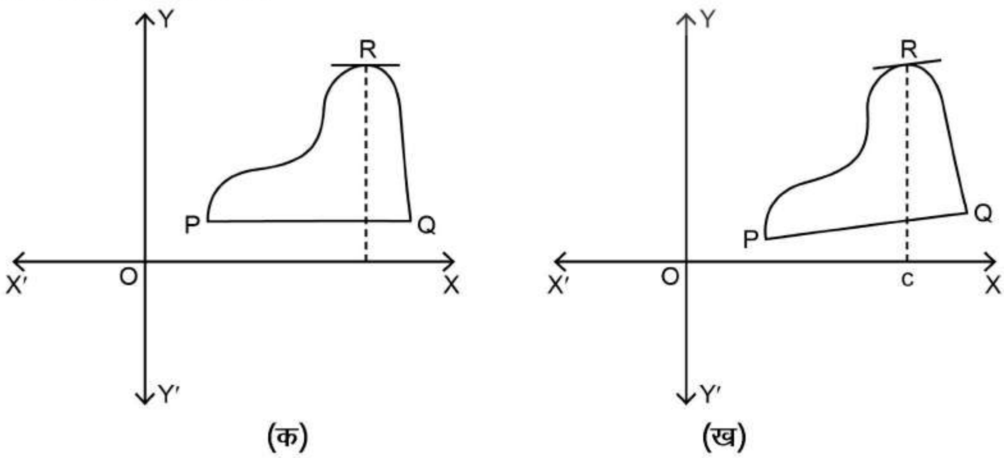
हम पहले ही बता चुके हैं कि रोल-प्रमेय माध्य मान प्रमेय की एक विशिष्ट स्थिति ही है। आइए निम्नलिखित रूप में रोल-प्रमेय के कथन का स्मरण करें।

मान लीजिए कि संवृत अंतराल [a, b] पर संतत तथा विवृत अंतराल]a, b[पर अवकलनीय f एक फलन है। समतल में f का आलेख एक वक्र है। यदि इस वक्र के अंत-बिंदु एक ही क्षैतिज रेखा पर स्थित हैं। (अर्थात् $f(a) = f(b)$ है), तो वक्र पर एक बिंदु c ऐसा होता है कि जिस पर वक्र की स्पर्श रेखा क्षैतिज रेखा है ($f'(c) = 0$ है)।

अंतिम वाक्य को पुनः इस प्रकार कहा जा सकता है:

यदि इस वक्र के अंत-बिंदु एक ही क्षैतिज रेखा पर स्थित हों, तो उस वक्र पर एक बिंदु ऐसा होता है, जहाँ वक्र की स्पर्श रेखा अंत-बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा के समांतर होती है।

माध्य मान प्रमेय इसी निष्कर्ष पर, वक्र के अंत-बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा की क्षैतिजता की परिकल्पना के बिना ही, बल देते हुए कथन देती है। चित्र 32 इस अंतर को स्पष्ट करता है। यहाँ P और Q वक्र के अंत-बिंदु हैं। चित्र 32 (क) में, रेखा PQ क्षैतिज है, परंतु चित्र 32 (ख) में नहीं है। परंतु दोनों ही स्थितियों में, वक्र पर स्थित बिंदु R का यह गुण है कि R पर वक्र की स्पर्श रेखा, रेखा PQ के समांतर है। R का x-निर्देशांक संख्या c है।



चित्र 32

चित्र 32 (क) रोल-प्रमेय को स्पष्ट करती है, जबकि चित्र 32 (ख) लग्रांज माध्य मान प्रमेय को स्पष्ट करती है।

वक्र के दोनों अंत-बिंदु $(a, f(a))$ और $(b, f(b))$ हैं। इन दोनों बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता $[f(b)-f(a)]/(b-a)$ है। इस रेखा के समांतर किसी भी रेखा की प्रवणता भी यही होगी। इसलिए, माध्य मान प्रमेय का निष्कर्ष है कि किसी $a<c<b$ के लिए $f'(c)=[f(b)-f(a)]/(b-a)$ होता है। इसका कारण यह है कि हम पहले से ही जानते हैं कि $(c, f(c))$ पर वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता $f'(c)$ है। अब हम इस प्रमेय के परिशुद्ध कथन को देने के लिए तैयार हैं।

प्रमेय 5 (लग्रांज माध्य मान प्रमेय) : मान लीजिए कि एक संवृत अंतराल $[a, b]$ में f एक संतत फलन है। मान लीजिए कि विवृत अंतराल $]a, b[$ में f अवकलनीय है। तब, विवृत अंतराल $]a, b[$ में एक बिंदु c ऐसा होता है कि $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ है।

रोल-प्रमेय में तीन परिकल्पनाएँ हैं, जो हैं एक सांतत्य परिकल्पना, एक अवकलनीयता परिकल्पना और परिकल्पना $f(a)=f(b)$ है।

माध्य मान प्रमेय में केवल दो परिकल्पनाएँ हैं। ये रोल-प्रमेय की प्रथम दो परिकल्पनाओं के समान ही हैं।

मान लीजिए कि माध्य मान प्रमेय की दोनों परिकल्पनाओं के अतिरिक्त $f(a)=f(b)$ भी सत्य है। तब, माध्य मान प्रमेय से क्या प्राप्त होता है? यह कहती है कि किसी $a<c<b$ के लिए,

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ परन्तु } f(b)-f(a)=0 \text{ है।}$$

अतः, किसी $a<c<b$ के लिए हम $f'(c)=0$ प्राप्त करते हैं।

यह वही है, जो रोल-प्रमेय का निष्कर्ष है। यह हमारे इस तर्क को सिद्ध करता है कि रोल-प्रमेय को माध्य मान प्रमेय से निगमित किया जा सकता है। परंतु यह माध्य मान प्रमेय नाम क्यों है? यहाँ माध्य मान क्या है?

f का प्रारंभिक मान $f(a)$ है तथा f का अंतिम मान $f(b)$ है।

अतः, f के मान में हुआ कुल परिवर्तन $f(b)-f(a)$ है। यह परिवर्तन तब हुआ है, जब x-निर्देशांक में परिवर्तन a से b हुआ है। प्रांत में हुए परिवर्तन $(b-a)$ के लिए f के मान में परिवर्तन $f(b)-f(a)$ हुआ है। इसलिए, माध्य मान, अर्थात् परिवर्तन की दर का औसत मान $[f(b)-f(a)]/(b-a)$ है। माध्य मान प्रमेय यह बल देकर कहती है कि f के परिवर्तन-दर का यह औसत मान अवकलज f' द्वारा किसी बिंदु c पर ग्रहण किया जाता है।

हम इसी बात को एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट करेंगे। समय a से समय b तक चल रही एक कार पर विचार कीजिए। मान लीजिए कि समय t पर इस कार की स्थिति $f(t)$ है तब, इस कार की औसत चाल दूरी / समय $=[f(b)-f(a)]/(b-a)$ है।

माध्य मान प्रमेय के अनुसार, कार के स्पीडमापक (speedometer) द्वारा इस $[f(b)-f(a)]/(b-a)$ को a और b के बीच में किसी समय पर दर्शाया गया होगा। उदाहरणार्थ, यदि कार ने दो घंटे में 100 km की दूरी तय की होगी, तो समय के किसी बिंदु पर उसकी चाल 50 km/h रही होगी (जो दो घंटों के दौरान उसकी औसत चाल है)।

अब, आइए निम्नलिखित उदाहरणों में देखें कि इस प्रमेय का सत्यापन किस प्रकार करते हैं।

उदाहरण 22: अंतराल $[1, 2]$ पर फलन $f(x) = x^2 - 2x$ के लिए लंग्राज माध्य मान प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

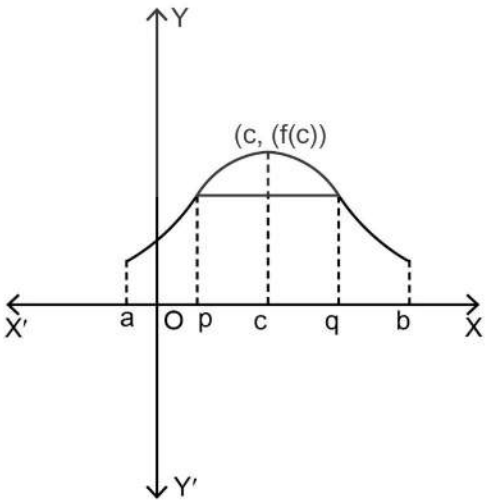
हल: यह एक बहुपद फलन है। अतः, यह $[1, 2]$ पर संतत है तथा $]1, 2[$ पर अवकलनीय है। यहाँ $a = 1, b = 2, f(a) = 1 - 2 = -1,$
$f(b) = 2^2 - 2 \times 2 = 0$ है तथा $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{0 - (-1)}{2 - 1} = 1$ है।

हम इसकी जाँच करना चाहते हैं कि किसी c के लिए, ताकि $1 < c < 2$ हो, $f'(c) = 1$ है या नहीं।

अब, $f'(x) = 2x - 2$ है। x के किस मान के लिए यह 1 होगा?

अब, $2x - 2 = 1$ जब $x = 3/2$ है तथा $3/2 \in]1, 2[$ है। इस प्रकार, हम देखते हैं कि $f'(3/2) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$ है।

अब, फलन $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ पर विचार कीजिए, जो माध्य मान प्रमेय की परिकल्पनाओं को संतुष्ट करता है। मान लीजिए कि p और q कोई ऐसे दो बिंदु हैं कि $a \le p < q \le b$ हैं। क्या p और q के बीच कोई ऐसा c है कि $f'(c) = [f(q) - f(p)]/(q - p)$ है? इसका उत्तर देने के लिए, अंतराल $[p, q]$ में f के प्रतिबंध पर विचार कीजिए। यह माध्य मान प्रमेय की परिकल्पनाओं को संतुष्ट करता है। अतः, ऐसे एक बिंदु c का अस्तित्व है। इस परिणाम का ज्यामितीय व्याख्या इस प्रकार की जा सकती है: $(p, f(p))$ और $(q, f(q))$ वक्र $y = f(x)$ पर दो बिंदु हैं। इनको मिलाने वाली रेखा इस वक्र की एक जीवा कहलाती है तथा $\frac{f(q) - f(p)}{(q - p)}$ इस जीवा की प्रवणता है। जो हमने दर्शाया है वह यह है कि इस जीवा की प्रवणता वही है जो बिंदु $(c, f(c))$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता है। इसका अर्थ है कि $(c, f(c))$ पर स्पर्श रेखा जीवा के समांतर है (चित्र 33 देखिए)। इस प्रकार, वक्र की किसी भी जीवा के लिए, वक्र पर एक ऐसा बिंदु है, जहाँ पर स्पर्श रेखा जीवा के समांतर है।



चित्र 33

***

उदाहरण 23: i) $]-\pi/4, \pi/4[$ में ऐसा बिंदु c ज्ञात कीजिए कि $(c, f(c))$ पर $f(x) = \cos x$ की स्पर्श रेखा $(-\pi/4, f(-\pi/4))$ और $(\pi/4, f(\pi/4))$ को मिलाने वाली जीवा के समांतर हो।

ii) हम आगे यह भी सिद्ध करेंगे कि इसी c के लिए, वक्र $g(x) = \cos x + x^2 + x$ की $(c, g(c))$ पर स्पर्श रेखा $(-\pi/4, g(-\pi/4))$ और $(\pi/4, g(\pi/4))$ को मिलाने वाली जीवा के समांतर है।

हल: i) $(-\pi/4, f(-\pi/4))$ और $(\pi/4, f(\pi/4))$ को मिलाने वाली जीवा की प्रवणता

$$\frac{f(\pi/4) - f(-\pi/4)}{\pi/4 - (-\pi/4)} = \frac{1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}}{\pi/2} = 0 \text{ है।}$$

अतः, हमें ऐसा c चाहिए कि $f'(c) = 0$ हो। हमे $f'(x) = -\sin x$ प्राप्त है। $]-\pi/4, \pi/4[$ में केवल एक बिंदु $c = 0$ है, जहाँ यह (अर्थात् $f'(x)$) शून्य होता है। वक्र पर संगत बिंदु $(0, f(0)) = (0, 1)$ है।

ii) $g(-\pi/4) = (1/\sqrt{2}) + (\pi^2/16) - (\pi/4)$

$g(\pi/4) = (1/\sqrt{2}) + (\pi^2/16) + (\pi/4)$

$((-\pi/4), g(-\pi/4))$ और $(\pi/4, g(\pi/4))$ को मिलाने वाली जीवा की प्रवणता

$$\frac{g(\pi/4) - g(-\pi/4)}{\pi/4 - (-\pi/4)} = \frac{(\pi/4) + (\pi/4)}{(\pi/4) + (\pi/4)} = 1 \text{ है।}$$

जब $c = 0$ है, तब हम सिद्ध करना चाहते हैं कि $(c, g(c))$ पर वक्र $g(x)$ की स्पर्श रेखा की प्रवणता भी 1 है। दूसरे शब्दों में, हमें यह सिद्ध करना चाहिए कि $g'(0) = 1$ है। अब, $g'(x) = -\sin x + 2x + 1$ है।

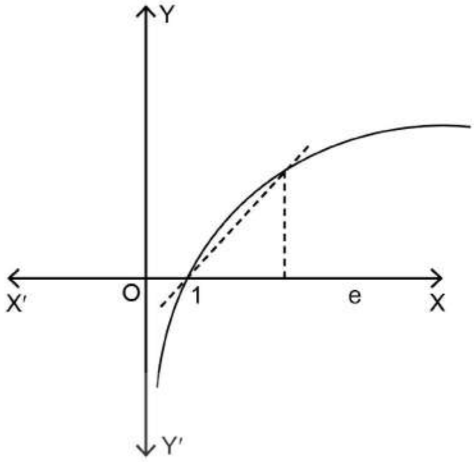
$\therefore\ g'(0) = -0 + 0 + 1 = 1$ है।

इससे सिद्ध हो जाता है कि $]-\pi/4, \pi/4[$ पर दोनों ही फलनों $f(x)$ और $g(x)$ के लिए, एक ही बिंदु c ऐसा है कि, जहाँ माध्य मान प्रमेय का निष्कर्ष लागू होता है।

***

उदाहरण 24: वक्र $y = \ln x$ के लिए, वक्र पर एक बिंदु ऐसा ज्ञात कीजिए कि बिंदुओं $(1, 0)$ और $(e, 1)$ को मिलाने वाली जीवा के समांतर स्पर्श रेखा है।

हल: क्योंकि $\ln 1 = 0$ और $\ln e = 1$ है, इसलिए ये दोनों बिंदु $(1, 0)$ और $(e, 1)$ वक्र $y = \ln x$ पर स्थित हैं। इस फलन को संवृत अंतराल $[1, e]$ पर विचार कीजिए। (चित्र 34 देखिए)। यह वहाँ संतत है। यह $]1, e[$ पर अवकलनीय भी है। इसलिए माध्य मान प्रमेय द्वारा, 1 और e के बीच में एक बिंदु c ऐसा है कि $(c, \ln c)$ पर स्पर्श रेखा $(1, 0)$ और $(e, 1)$ को मिलाने वाली जीवा के समांतर है। हमें इसी बिंदु को ज्ञात करना है। अब, $y' = 1/x$ है। c पर इसका मान $1/c$ है।



चित्र 34

वाँछित बिंदु निम्नलिखित द्वारा दिया जाता है:

$$\frac{1}{c} = \frac{\ln e - \ln 1}{e-1} = \frac{1-0}{e-1} = \frac{1}{e-1}$$

$\therefore \; c = e - 1$ है।

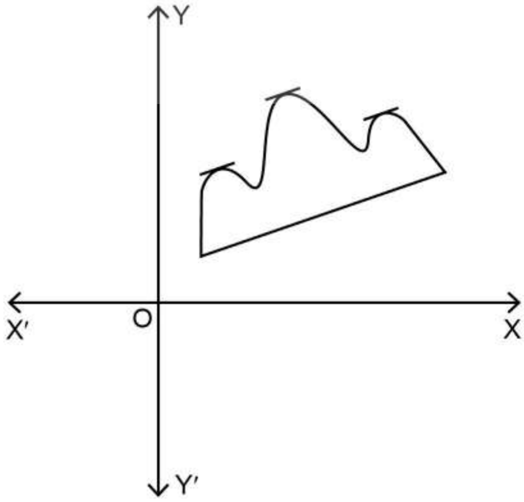
अतः, वक्र पर वाँछित बिंदु $(e-1, \ln(e-1))$ है।

***

टिप्पणी: मान लीजिए $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ माध्य मान प्रमेय की परिकल्पनाओं को संतुष्ट करता है। तब, ऐसा $\theta, 0<\theta<1$ है, ताकि $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a+\theta(b-a))$ है।

यह इसलिए है क्योंकि a और b के बीच में कोई भी बिंदु किसी $0<\theta<1$ के लिए $a+\theta(b-a)$ के रूप का है। ध्यान दीजिए कि $a = a + 0(b-a)$ तथा $b = a + 1(b-a)$ है।

रोल-प्रमेय की स्थिति की तरह, किसी फलन द्वारा, जो संवृत अंतराल में प्रत्येक बिंदु पर संतत है तथा विवृत अंतराल में प्रत्येक बिंदु पर अवकलनीय है, निरूपित वक्र (चित्र 35 देखिए) पर एक से अधिक ऐसे बिंदु हो सकते हैं, जिन पर स्पर्श रेखाएँ उस वक्र के अंत-बिंदुओं को मिलाने वाली जीवा के समांतर हों।



चित्र 35

रोल-प्रमेय और लग्रांज माध्य मान प्रमेय दोनों ही अस्तित्व प्रमेय हैं। ये हमें बताती हैं कि न्यूनतम एक ऐसे बिंदु का अस्तित्व है, जहाँ स्पर्श रेखा अंत-बिंदुओं को मिलाने वाली जीवा के समांतर है। परंतु ये हमें यह नहीं बताती कि ऐसे कितने बिंदु हैं और न ही यह कि इन बिंदुओं को किस प्रकार ज्ञात किया जाता है।

उदाहरण के लिए, $[0, 5\pi]$ पर फलन $f(x) = x^3 - \sin x$ पर विचार कीजिए। यह माध्य मान प्रमेय के प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है। इसलिए, न्यूनतम एक मान c ऐसा है कि $3c^2 - \cos c = 25\pi^2$ है। माध्य मान प्रमेय हमें यह सुनिश्चित कराती है कि समीकरण $3x^2 - \cos x = 25\pi^2$ का न्यूनतम एक हल c है। परंतु यह हमें c का मान या मानों को ज्ञात करने में समर्थ नहीं बनाती है। आप संख्यात्मक विश्लेषण के कोर्स में ऐसी समीकरणों को हल करने की विधियों का अध्ययन कर सकते हैं।

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए:

E21) निम्नलिखित अंतरालों पर, $f(x) = x^2 + 1$ के लिए माध्य मान प्रमेय का सत्यापन कीजिए:

i) $[-1, 1]$ ii) $[-1, 2]$

E22) अंतराल $[0, 2]$ पर निम्नलिखित फलनों के लिए, माध्य मान प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

i) $f(x) = \sin \pi x$ ii) $f(x) = 2x^2 + 3$

E23) i) मान लीजिए कि $[0, 1]$ पर $f(x) = x^3$ है। $]0, 1[$ में माध्य मान प्रमेय की तरह ही एक बिंदु c ज्ञात कीजिए।

ii) मान लीजिए कि $[-1, 0]$ पर $f(x) = x^3$ है। $]-1, 0[$ में माध्य मान प्रमेय की तरह ही एक बिंदु c ज्ञात कीजिए।

iii) मान लीजिए कि $[-1, 1]$ पर $f(x) = x^3$ है। दर्शाइए कि $]-1,1[$ में ऐसे दो बिंदु c हैं कि $f'(c) = \dfrac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)}$ है।

E24) मान लीजिए कि $[a, b]$ पर माध्य मान प्रमेय की परिकल्पनाओं को संतुष्ट करने वाला एक फलन f है। मान लीजिए कि माध्य मान प्रमेय द्वारा सुनिश्चित कोई बिंदु c है। सिद्ध कीजिए कि $[a, b]$ में सभी x के लिए, यदि $g_1(x) = f(x) + 1$ और $g_2(x) = f(x) + x$ है, तो यही बिंदु c, $\dfrac{g_1(b) - g_1(a)}{b - a} = g_1'(c)$ और $\dfrac{g_2(b) - g_2(a)}{b - a} = g_2'(c)$ को भी संतुष्ट करता है।

E25) निम्नलिखित बिंदुओं से होकर जाने वाली वक्र $y = x^n$ की जीवा के समांतर किस बिंदु पर वक्र की स्पर्श रेखा है?

i) $(0, 0)$ और $(2, 2^n)$ ii) $(0, 0)$ और $(1, 1)$

इससे हम इस इकाई के अंत पर पहुँच जाते हैं। आइए उन सभी का सारांश दें जो हमने इस इकाई में किया है।

13.8 सारांश

इस इकाई में, हमने निम्नलिखित बिंदुओं पर चर्चा की है:

1. यह कहा जाता है कि किसी फलन f का उसके प्राँत के एक बिंदु x_0 पर उच्चिष्ठ (अधिकतम) / निम्निष्ठ या (न्यूनतम) मान हैं, यदि प्राँत में सभी x के लिए $f(x) \le f(x_0)/f(x) \ge f(x_0)$ हो। उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान फलन के चरम मान कहलाते हैं।

2. यदि किसी फलन f के अवकलज का x_0 पर अस्तित्व नहीं है या वह शून्य के बराबर है, तो x_0 एक चरम बिंदु नहीं हो सकता है।

3. किसी फलन के लिए क्रान्तिक बिंदु वे बिंदु हैं, जहाँ या तो अवकलज का अस्तित्व नहीं हो या उसका मान शून्य हो। क्रान्तिक बिंदु एक चरम बिंदु होने में असफल रह सकता है।

4. $x = x_0$ किसी फलन का एक चरम मान होने के लिए एक पर्याप्त प्रतिबंध यह है कि x_0 पर f संतत हो तथा x_0 से होकर जाने पर f′ का चिह्न बदल जाता है। यदि यह बदलाव (परिवर्तन) धनात्मक से ऋणात्मक हो, तो x_0 एक उच्चिष्ठ बिंदु होता है। अन्य घटना के लिए, x_0 निम्निष्ठ बिंदु होता है। यह जाँच प्रथम-अवकलज जाँच कहलाती है।

5. द्वितीय-अवकलज जाँचः चरम बिंदुओं के अस्तित्व के लिए, एक अन्य पर्याप्त प्रतिबंध यह कहता है कि यदि $f'(x_0) = 0$ है, तो $f''(x_0) > 0$ का अर्थ है कि $x = x_0$ पर f का एक निम्निष्ठ है तथा $f''(x_0) < 0$ यह सुनिश्चित करता है कि x_0 पर f का एक उच्चिष्ठ मान है।

6. रोल-प्रमेय में, यदि $[a, b]$ पर कोई फलन f संतत है, $]a, b[$ पर अवकलनीय है तथा $f(a) = f(b)$ है, तो $]a, b[$ में कोई c ऐसा होता है कि $f'(c) = 0$ हो।

7. लग्रांज माध्य मान प्रमेय में, यदि $[a, b]$ पर कोई फलन f संतत है तथा $]a, b[$ पर अवकलनीय है, तो विवृत अंतराल $]a, b[$ में एक ऐसा बिंदु c होता है कि $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)}$ हो।

13.9 हल / उत्तर

E1) i) $\mathbb{R}$ के सभी बिंदु उच्चिष्ठ हैं और निम्निष्ठ भी हैं।

ii) $\mathbb{R}$ पर कोई उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ नहीं।

iii) $]0, 4[$ पर कोई उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ नहीं।

iv) $0 \in \mathbb{R}$ पर निम्निष्ठ है। कोई उच्चिष्ठ नहीं।

v) $x = 4$ निम्निष्ठ है, $x = 25$ उच्चिष्ठ है।

vi) $x = 3$ पर निम्निष्ठ, $x = -4$ पर उच्चिष्ठ

vii) $x = 1$ पर निम्निष्ठ, $x = e$ पर उच्चिष्ठ

viii) $x = 1$ पर उच्चिष्ठ, $x = 0$ पर निम्निष्ठ

ix) $x = \frac{\pi}{3}$ पर उच्चिष्ठ है।

x) $x = 0$ पर निम्निष्ठ, $x = 1$ और $x = -1$ पर उच्चिष्ठ हैं।

E2) i) $f(x) = 2\sqrt{x}(6 - x)$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{x}}(6 - x) + 2\sqrt{x}(-1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}(6 - x) - 2\sqrt{x} = \frac{6}{\sqrt{x}} - 3\sqrt{x} = \frac{6 - 3x}{\sqrt{2}}$$

$f'(x) = 0$ से $x = 2$ प्राप्त होता है तथा $f'(x)$ का अस्तित्व नहीं है से $x = 0$ प्राप्त होता है। इस प्रकार, $x = 0, 2$ क्रान्तिक संख्याएँ हैं।

ii) $f'(x) = 3x^2$ है। यहां $x = 0$ ही केवल एक क्रान्तिक संख्या है।

iii) $f'(x) = \dfrac{1 - 2\ln\sqrt{x}}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = e$ है तथा $f'(x)$ का अस्तित्व नहीं है $\Rightarrow x = 0$ है। क्रान्तिक संख्या e है, क्योंकि $0 \notin [1,3]$

iv) $f'(x) = 0$

$\Rightarrow \sin x = 0$ या $\cos x = 1/2$

$\Rightarrow x = 0, \pi/3$ क्रान्तिक संख्याएँ हैं।

E3) i) $(0,0), (2, 8\sqrt{2})$ क्रान्तिक बिंदु हैं।

ii) $x = 0$ एक क्रान्तिक संख्या है, परंतु कोई क्रान्तिक बिंदु नहीं, क्योंकि $x = 0$ पर कोई सापेक्ष चरम मान नहीं है।

iii) केवल एक ही क्रान्तिक बिंदु $\left(e, \dfrac{1}{2e}\right)$ है।

iv) $(0,1)$ और $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5}{4}\right)$ क्रान्तिक बिंदु हैं।

E4) i) $f'(x) = (x - 3) + (x - 5) = 2x - 8$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 4$

$\therefore x = 4$ एक क्रान्तिक संख्या है।

अब $f(-4) = 63, f(4) = -1$ है। इस प्रकार f का $x = -4$ पर निरपेक्ष उच्चिष्ठ और $x = 4$ पर निरपेक्ष निम्निष्ठ है। उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान क्रमशः 63 और -1 हैं।

ii) $f'(x) = 3x^2 + 26x + 5 = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{3}(-13 \pm \sqrt{154}) = -0.197, -8.47$

$f(-10) = 257$

$f(10) = 2357$

$f(-0.197) \approx 6.512$

$f(-8.47) \approx 289.636$

इस प्रकार, $x = 10$ पर उच्चिष्ठ और $x = -0.197$ पर निम्निष्ठ है।

iii) $x = (2n + 1)\pi/2, n \in \mathbb{Z}$ पर निरपेक्ष उच्चिष्ठ और $x = n\pi\ n \in \mathbb{Z}$ पर निरपेक्ष निम्निष्ठ मान है।

iv) $x = 1, -1$ पर निरपेक्ष उच्चिष्ठ और $x = 0$ पर निरपेक्ष निम्निष्ठ है।

v) $x = -2, 2$ पर निरपेक्ष उच्चिष्ठ और $x = 0$ पर निरपेक्ष निम्निष्ठ है।

vi) सभी बिंदु x जिनके लिए $0 \le x < 1$ है, क्रान्तिक बिंदु हैं, क्योंकि फलन को निम्नलिखित रूप में परिभाषित किया गया है:

$$f(x) = \begin{cases} 1-2x, & \text{यदि } -5 \le x \le 0 \\ 1, & \text{यदि } 0 < x \le 1 \\ 2x-1, & \text{यदि } -1 < x \le 5 \end{cases}$$

$f'(x) = 0$ यदि $0 < x < 1$ है तथा $x = 0$ और $x = 1$ पर f अवकलनीय नहीं है।

$x = -5$ पर निरपेक्ष उच्चिष्ठ है और $0 \le x \le 1$ पर निरपेक्ष निम्निष्ठ है।

vii) $x = 1$ पर निरपेक्ष निम्निष्ठ है और निरपेक्ष उच्चिष्ठ नहीं प्राप्त किया जा सकता है क्योंकि अंतराल संवृत नहीं है।

E5) उपांत (सीमांत) लागत $C'(x) = \frac{1}{4}x + 4$ है।

राजस्व $R(x) = x\,p(x) = x(49-x) = 49x - x^2$ है।

उपांत राजस्व $R'(x) = 49 - 2x$ है। लाभ अधिकतम होगा, जब $R'(x) = C'(x)$ हो। इस प्रकार, हम $49 - 2x = \frac{1}{4}x + 4$ और $x = 20$ प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार, अधिकतम लाभ का संगत मूल्य $p(20) = 49 - 20 =$ ₹29 है।

E6) t वर्षों में संपत्ति के वर्तमान मूल्य का फलन $P(t) = V(t)e^{-rt}$ द्वारा निदर्शन किया जाता है, जहाँ r वार्षिक ब्याज दर है तथा t वर्षों में समय है। इस प्रकार,

$$P(t) = 10000e^{\sqrt{t}}e^{-0.08t} = 10000e^{(\sqrt{t}-0.08t)}$$

P(t) को t के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$P'(t) = 10000e^{(\sqrt{t}-0.08t)}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}} - 0.08\right)$$

$P'(t) = 0$, जब $\frac{1}{2\sqrt{t}} - 0.08 = 0$ है या

$t \approx 39.06$ वर्ष है। इस प्रकार संपत्ति को 39 वर्षों तक रख कर फिर बेचा जाना चाहिए।

E7) चरम स्थिति ज्ञात करने के लिए, हम $C'(t) = 0$ को हल करते हैं।

$$C'(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{k}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})\right]$$

$$= \frac{k}{b-a}[(-a)e^{-at} - (-b)e^{-bt}] = \frac{k}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$$

हम देखते हैं कि $C'(t) = 0$ है, जब $be^{-bt} = ae^{-at}$ है, जो

$\frac{b}{a} = e^{bt}e^{-at} = e^{bt-at}$ प्रदान करता है।

अर्थात् $bt - at = \ln\frac{b}{a}$ और $t = \frac{1}{b-a}\ln\frac{b}{a}$ है।

यह देखने के लिए कि जब $t \to +\infty$ है, तब सांद्रता का क्या होता है, हम सीमा अभिकलित करते हैं:

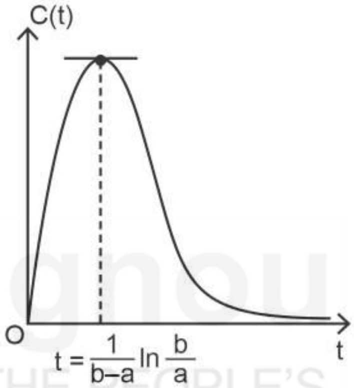
$$\lim_{t\to+\infty} C(t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{k}{b-a}[e^{-at} - e^{-bt}]$$

$$= \frac{k}{b-a}\left[\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^{at}} - \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^{bt}}\right]$$

$$= \frac{k}{b-a}[0-0] = 0 \text{ है।}$$

यह हमें बताता है कि रक्त में दवाई जितने लंबे समय तक रहेगी उतने ही 0 के निकट सांद्रता रहेगी। C (t) का आलेख चित्र 36 में दर्शाया गया है।

सहजात्मक रूप से, हम हेंज़ (Heinz) सांद्रता फलन के प्रारंभ होने की 0 से प्रत्याशा करेंगे, अधिकतम तक वृद्धि होगी और फिर धीरे-धीरे एक परिमित समय 0 तक हो जाएगा। चित्र 36 इंगित करती है कि C (t) में ये अभिलक्षण नहीं हैं, क्योंकि यह परिमित समय में 0 पर सरलता से वापस नहीं आ पाती है। इससे सुझाव मिलता है कि रेंज निदर्श (model) का अधिक विश्वस्त् रूप से दवाई का इंजेक्शन दिए जाने के ठीक बाद वाले समय पर अनुप्रयोग किया जा सकता है।



चित्र 36 : C (t) का आलेख

E8) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$$

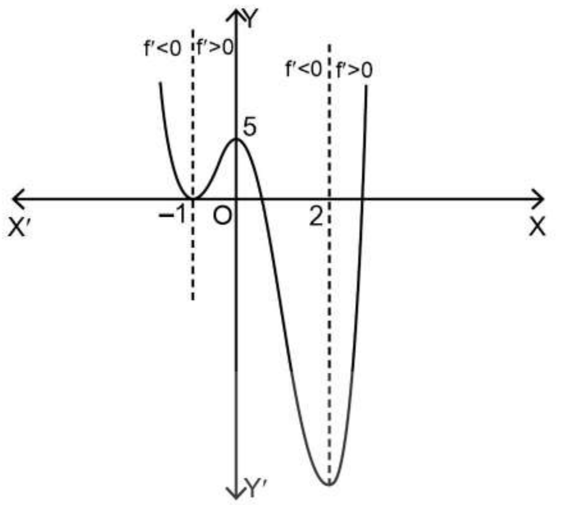
$$= 12x(x+1)(x-2)$$

हम वास्तविक संख्या रेखा को ऐसे अंतरालों में विभाजित करते हैं जिनके अंत-बिंदु क्रान्तिक संख्याएँ –1, 0 और 2 हैं, जैसा कि सारणी 4 में दिया है।

सारणी 4

अंतराल	12x	x + 1	x – 2	f′(x)	f
$x < -1$	ऋणात्मक	ऋणात्मक	ऋणात्मक	ऋणात्मक	$]-\infty, -1[$ पर ह्रासमान
$-1 < x < 0$	ऋणात्मक	धनात्मक	ऋणात्मक	धनात्मक	$]-1, 0[$ पर वर्धमान
$0 < x < 2$	धनात्मक	धनात्मक	ऋणात्मक	ऋणात्मक	$]0, 2[$ पर ह्रासमान
$x > 2$	धनात्मक	धनात्मक	धनात्मक	धनात्मक	$]2, \infty[$ पर वर्धमान

इसका आलेख चित्र 37 में दर्शाया गया है। जो सारणी 4 के आखिरी स्तम्भ में दिये गए f की एकदिष्टता को सत्यापित करता है।



चित्र 37

E9) i) $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ और $\left]\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right[$ पर वर्धमान

$\left]\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[$ पर ह्रासमान

ii) $\left]-\frac{1}{3}\ln 2, \infty\right[$ पर वर्धमान

$\left]-\infty, -\frac{1}{3}\ln 2\right[$ पर ह्रासमान

iii) $]1, \infty[$ पर वर्धमान

$]0, 1[$ पर ह्रासमान

E10) i) $x = 1$ पर अधिकतम, $x = 3$ पर न्यूनतम है तथा अधिकतम और न्यूनतम मान क्रमशः 0 और -28 हैं। $x = 0$ एक चरम मान नहीं है, क्योंकि 0 का एक प्रतिवेश है, जिसमें 0 के दोनों ओर $f'(x)$ का एक ही चिह्न है।

ii) $x = 1, x = -3$ पर न्यूनतम है।

$x = -1$ पर अधिकतम है।

चरम मान -3 और 29 हैं।

iii) $x = 1$ पर न्यूनतम, $x = -1/3$ पर अधिकतम। चरम मान 0 और $32/27$ हैं।

iv) $x = 4$ पर उच्चिष्ठ तथा अधिकतम मान $4\sqrt{2}$ है।

v) $x = 0$ पर उच्चिष्ठ तथा अधिकतम मान 1 है।

E11) $f(x) = x + 2\sin x$

$f'(x) = 1 + 2\cos x$

$f'(x) = 0$ प्रदान करता है $\cos x = \frac{-1}{2}$। इस समीकरण के हल $\frac{2\pi}{3}$ और $\frac{4\pi}{3}$ हैं।

सारणी 5

अंतराल	$f'(x)$	f की एकदिष्टता
$0<x<\frac{2\pi}{3}$	धनात्मक	वर्धमान
$\frac{2\pi}{3}<x<\frac{4\pi}{3}$	ऋणात्मक	ह्रासमान
$\frac{4\pi}{3}<x<2\pi$	धनात्मक	वर्धमान

सारणी 5 से यह स्पष्ट है कि $\frac{2\pi}{3}$ पर $f'(x)$ का चिह्न धनात्मक से ऋणात्मक में बदल जाता है तथा प्रथम अवकलज हमें बताता है कि $\frac{2\pi}{3}$ पर एक स्थानीय उच्चिष्ठ है। साथ ही, अधिकतम मान $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}\approx 3.83$ है। इसी प्रकार, $\frac{4\pi}{3}$ पर $f'(x)$ का चिह्न ऋणात्मक से धनात्मक में बदल जाता है, इसलिए f का $\frac{4\pi}{3}$ पर एक स्थानीय निम्निष्ठ है तथा न्यूनतम मान $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\approx 2.46$ है।

E12) i) $x=0$, निम्निष्ठ बिंदु, चरम मान $=0$

ii) कोई चरम बिंदु नहीं है।

iii) $x=-7/6$ निम्निष्ठ बिंदु, और न्यूनतम मान $-37/12$ है।

iv) $f'(x)=xg(x)$ है, जहाँ x^2 में $g(x)$ एक बहुपद है, जिसमें सभी गुणांक धनात्मक हैं। अतः, $g(x)>0$ है, सभी $x\neq 0$ के लिए। अतः, f का एकमात्र चरम बिंदु $x=0$ है। स्पष्ट है, $f(0)=a_0$ और $f(x)>a_0$ है, $x\neq 0$ है। अतः, $x=0$ एक निम्निष्ठ है न्यूनतम मान a_0 है।

v) $g(x)=\frac{1}{f(x)}=x+\frac{1}{x}$ है। g के चरम बिंदु $x=\pm 1$ हैं, जिनमें $x=1$ पर निम्निष्ठ और $x=-1$ पर उच्चिष्ठ है। इस प्रकार f के चरम मान $=\pm 1/2$ है।

E13) $f'(x)=\cos x(1+\cos x)+\sin x(-\sin x)$

$=\cos x+\cos 2x=0$

$f'(x)=0\Rightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0$

$\Rightarrow(\cos x+1)(2\cos x-1)=0$

$\Rightarrow \cos x=-1,\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$ एक क्रांतिक संख्या है।

इस प्रकार $x=\frac{\pi}{3}$ पर फलन उच्चिष्ठ है।

E14) यदि अंतर्गत आयत की भुजाएँ a और b हैं, तो

$a^2+b^2=d^2\Rightarrow b=\sqrt{d^2-a^2}$ है।

क्षेत्रफल $=A=ab=a\sqrt{d^2-a^2}$

$A'=0$ यदि $a=d/\sqrt{2}$ है।

$a=d/\sqrt{2}$ के लिए, $A''<0\Rightarrow a=d/\sqrt{2}$ एक उच्चिष्ठ है।

$a=d/\sqrt{2}\Rightarrow b=d/\sqrt{2}\Rightarrow$ आयत एक वर्ग है।

E15) मान लीजिए कि प्रदर्शन भुजाओं a cm और b cm का एक आयत है। तब, नेम प्लेट की विमाएँ $(a+2)$ cm और $(b+4)$ cm हैं।

$ab = 48 \Rightarrow b = 48/a$ है।

$A = (a+2)(b+4) = (a+2)(48/a+4)$

$\frac{dA}{da} = 4 - \frac{96}{a^2} = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{96}{4} = 24 \Rightarrow a = 2\sqrt{6}$ है।

$\Rightarrow b = 4\sqrt{6}$ है।

$\frac{d^2A}{da^2} = \frac{198}{a^3} > 0,\ a = 2\sqrt{6}$ के लिए $\Rightarrow$ यह एक निम्निष्ठ है।

प्लेट की विमाएँ हैं: $2(1+\sqrt{6}), 4(1+\sqrt{6})$

E16) i) हाँ; $y_1 = 2\sin x\cos x = \sin 2x = 0$, यदि $x = \pi/2 \in [0, \pi]$

ii) हाँ; $f'(x) = 2x = 0$, यदि $x = 0 \in [-2, 2]$

iii) नहीं; $f'(x) = 3x^2 + 1 \neq 0, x \in [0, 1]$ के लिए। क्योंकि $f(0) \neq f(1)$ है, इसलिए रोल-प्रमेय लागू नहीं होती।

iv) हाँ; $f'(x) = \cos x - \sin x = 0$, यदि $x = \pi/4 \in [0, \pi/2]$

v) हाँ; $f'(x) = \cos x + \sin x = 0$, यदि $x = \frac{3}{4}\pi$ या $\frac{7}{4}\pi \in [0, 2\pi]$

E17) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ है। $[-1, 4]$ पर f संतत है तथा $]-1, 4[$ पर अवकलनीय है।

$f(-1) = 6 = f(4)$ है।

$f'(c) = 2c - 3 = 0$ से $c = \frac{3}{2} \in]-1, 4[$ प्राप्त होता है।

रोल-प्रमेय का सत्यापन हो जाता है।

E18) $ap^2 + bp + c = aq^2 + bq + c \Rightarrow ap^2 + bp - aq^2 + bq = 0$

$\Rightarrow a(p^2 - q^2) + b(p - q) = 0$

$\Rightarrow a(p+q) + b = 0$ (क्योंकि $p \neq q$ है)

$f'(x) = 2ax + b$

$f'\left(\frac{p+q}{2}\right) = a(p+q) + b = 0$ है।

E19) मान लीजिए कि $[x_0, \infty[$ पर $f(x)$ एकैकी नहीं है।

$\Rightarrow\ p, q \in [x_0, \infty[$ है, ताकि $p \neq q$ है और $f(p) = f(q)$ है।

$f'\left(\frac{p+q}{2}\right) = 0$ है (E18) द्वारा)

$\frac{p+q}{2} = x_0$ है, क्योंकि $f'(x_0) = 0$ के साथ x_0 ही अद्वितीय बिंदु है। इसलिए, या तो $p < x_0$ है या फिर $q < x_0$ है, क्योंकि p और q दोनों x_0 के बराबर नहीं हो सकते हैं। यह एक अतर्विरोध है, जो हमने $p, q \in [x_0, \infty[$ लिया है।

E20) मान लीजिए कि $p, q \in I$ है, ताकि $p \neq q$ और $f(p) = f(q)$ है। यदि $p < q$ है, तो हम $[p, q] \subset I$ प्राप्त करते हैं। $[p, q]$ पर f अवकलनीय है तथा $f(p) = f(q)$ है। इस प्रकार, $[p, q]$ पर f रोल-प्रमेय के प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है।

$\Rightarrow\ f'(x_0) = 0$, किसी $x_0 \in [p, q] \subset I$ के लिए।

परंतु यह एक अतर्विरोध है।

अतः, f एकैकी है।

E21) i) $f(-1)=2=f(1) \Rightarrow \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=0$

$f'(x)=2x=0$, यदि $x=0$ है।

$\therefore \exists\, 0 \in [-1,1]$ ताकि $f'(0)=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}$

ii) इसी प्रकार आप इस भाग को स्वयं करना चाहेंगे।

E22) i) $f(0)=0=f(2)$ है।

$f'(x)=\pi\cos\pi x \Rightarrow f'(1/2)=0$ है।

ii) $f(0)=3, f(2)=11 \Rightarrow \frac{f(2)-f(0)}{2-0}=4$ है।

$f'(x)=4x \Rightarrow f'(1)=4$

$\exists\, 1 \in [0,2]$ ताकि $f'(1)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}$ है।

E23) i) $f(0)=0, f(1)=1 \Rightarrow \frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$ है।

$f'(x)=3x^2=1 \Rightarrow x=1/\sqrt{3} \in [0,1]$ है

$\therefore c=1/\sqrt{3}$ है।

ii) $f(-1)=-1, f(0)=0 \Rightarrow \frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=1$ है।

$f'(x)=3x^2=1 \Rightarrow x=-1/\sqrt{3} \in [-1,0]$ है।

$\therefore c=-1/\sqrt{3}$ है।

iii) $\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=1$ है।

$c=1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}$, $[-1,1]$ में वो बिंदु ऐसे हैं, ताकि

$f'(c)=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}$ है।

E24) $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=1$ है।

$\frac{g_1(b)-g_1(a)}{b-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)=g_1'(c)$ है।

$\frac{g_2(b)-g_2(a)}{b-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}+1=f'(c)+1=g_2'(c)$ है।

E25) i) $y_1=nx^{n-1}$ है। $(0,0)$ और $(2,2^n)$ को मिलाने वाली जीवा प्रवणता

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=2^{n-1}$ है।

$nx^{n-1}=2^{n-1} \Rightarrow x^{n-1}=\frac{2^{n-1}}{n} \Rightarrow x=\frac{2}{n^{1/(n-1)}}$

बिंदुः $\left(\frac{2}{n^{1/(n-1)}}, \frac{2^n}{n^{n/(n-1)}}\right)$

ii) $(0,0)$ और $(1,1)$ को मिलाने वाली जीवा की प्रवणता 1 है।

$\therefore nx^{n-1}=1 \Rightarrow x^{n-1}=1/n \Rightarrow x=\frac{1}{n^{1/(n-1)}}$ है।

बिंदुः $\left(\frac{1}{n^{1/(n-1)}}, \frac{1}{n^{n/(n-1)}}\right)$

इकाई 14

वक्रता

इकाई की रूपरेखा पृष्ठ संख्या

14.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में, हमने फलनों के कुछ ज्यामितीय अभिलक्षणों, जैसे उच्चिष्ठ, निम्निष्ठ, वर्धमान या ह्रासमान, इत्यादि की चर्चा की थी। हम इस चर्चा को भाग 14.2 में यह ज्ञात करने के लिए जारी रखेंगे कि द्वितीय अवकलज f'' फलन f के बारे में क्या कहता है। हमने कलन का अध्ययन दो समस्याओं को देकर प्रारंभ किया था। इनमें से एक किसी दिए हुए बिंदु पर एक वक्र की स्पर्श रेखा ज्ञात करने की थी। इकाई 9 में, हम देख चुके हैं कि इस समस्या का हल अवकलन के विकास में एक साधक था। अब अवकलन की विभिन्न तकनीकों का अध्ययन करने के बाद, हम एक बार फिर इस समस्या को लेते हैं। स्पर्श रेखाओं और अभिलंबों का अध्ययन हम भाग 14.3 में करेंगे।

यदि दो वक्र किसी बिंदु पर प्रतिच्छेद करते हैं, तो दोनों वक्रों की इस बिंदु पर स्पर्श रेखाएँ एक कोण बनाती हैं। यह कोण दोनों वक्रों के प्रतिच्छेदन का कोण कहा जाता है, जिसकी चर्चा भाग 14.4 में करेंगे। तब क्या होता है, जब वक्र इस बिंदु से होकर दो या अधिक बार जाता है। ऐसे बिंदु, जहाँ वक्र विभिन्न व्यवहार दर्शाता है, सामान्य बिंदु नहीं है। ये विचित्र बिंदु कहलाते हैं, जिनका अध्ययन हम भाग 14.5 में करेंगे। आप देखेंगे कि ये सभी तथ्य बहुत उपयोगी सिद्ध होंगे, जब आप इकाई 16 में वक्र अनुरेखण का कार्य करेंगे।

अब हम इस इकाई के उद्देश्यों की सूची देंगे। इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, कृपया इन्हें पुनः पढ़ें तथा सुनिश्चित कर लें कि अपने ये उद्देश्य प्राप्त कर लिए हैं।

उद्देश्य

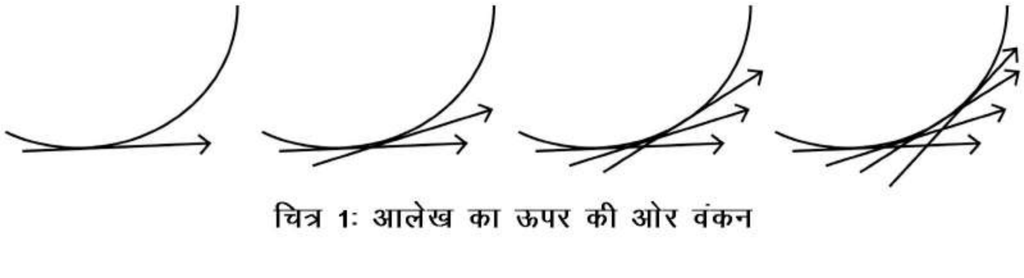
इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आप

- निर्धारित कर पाएँगे कि एक दिया हुआ फलन एक दिए हुए अंतराल में अवतल है या उत्तल है या इनमें से कोई भी नहीं है।
- किसी वक्र के नतिपरिवर्तन बिंदु और उसकी वक्रता ज्ञात कर पाएँगे।
- एक दिए हुए बिंदु पर एक वक्र की स्पर्श रेखा और अभिलंब के समीकरण ज्ञात कर पाएँगे।
- एक दिए हुए बिंदु पर वक्रों के प्रतिच्छेदन का कोण परिकलित कर पाएँगे।
- एक विचित्र बिंदु परिभाषित और उसकी पहचान कर पाएँगे।

इकाई 13 में अध्ययन किए गए वर्धमान और ह्रासमान फलनों का स्मरण करें। वहाँ, आपको एक आलेख के चित्रीयकरण के आधार पर यह धारणा प्राप्त हो गई थी कि वह आलेख वर्धमान है या ह्रासमान है। कभी-कभी किसी आलेख का चढ़ना या गिरना उस आलेख का संपूर्ण चित्रण नहीं करता। यह उस आलेख का केवल आंशिक चित्रण ही करता है। आलेख का एक अधिक स्पष्ट चित्रण प्राप्त करने के लिए, हम अगले भाग में फलन की अवकलता (concavity) और उत्तलता (convoxity) की चर्चा, द्वितीय अवकलज का प्रयोग करते हुए, करेंगे।

14.2 अवतलता

इस भाग में, हम एक फलन f के आलेख का बेहतर चित्रण प्राप्त करने के लिए, द्वितीय अवकलज का प्रयोग करेंगे। आइए एक उदाहरण से प्रारंभ करें। $f(x) = x^2 + 6$ द्वारा परिभाषित एक फलन f पर विचार कीजिए। हम $f'(x) = 2x$ और $f''(x) = 2$ प्राप्त करते हैं। ध्यान दीजिए कि $f'(-1) = -2$ है तथा $f''(-1) = 2$ है। यहाँ -1 के समीप सभी x के लिए $f'' > 0$ है। क्योंकि $f'(-1) = -2 < 0$ है, इसलिए हम कह सकते हैं कि -1 पर -2 की दर से f ह्रासमान है। -1 के दाईं ओर वाले x के लिए $f'(x)$, $f'(-1)$ से बड़ा है, क्योंकि $f''(-1)$ धनात्मक है। अर्थात् $f'(-1)$ से $f'(x)$ कम ऋणात्मक है। x के और अधिक दाईं होने पर भी, $f'(x)$ अभी भी कम ऋणात्मक रहता है। यदि हम यह जारी रखें, तो ऐसी कोई प्रवणता $f'(x)$ हो सकती है, जो धनात्मक हो जाएगी। चित्र 1 में, -1 से प्रारंभ होने वाला तीर दर्शाता है कि प्रवणता $f'(x)$ में कमी हो रही है।



चित्र 1: आलेख का ऊपर की ओर वंकन

हम कह सकते हैं कि जब $f''(a)>0$ है, तब बिंदु a के निकट f का आलेख ऊपर की ओर मुड़ता है, चाहे $f'(a)<0$ हो या $f'(a)>0$ हो। दूसरी ओर, जब $f''(a)<0$ है, तब बिंदु a के निकट f का आलेख नीचे की ओर मुड़ता है। किसी आलेख का वंकन (bending) व्यवहार उसकी अवतलता (concavity) कहलाता है। यह हमें निम्नलिखित परिभाषा पर पहुँचाता है।

परिभाषा : जब एक अंतराल I में जीवा आलेख के ऊपर स्थित होती है, तब आलेख ऊपर की ओर अवतल होता है तथा जब यह आलेख के नीचे स्थित होती है, तब आलेख अंतराल I में नीचे की ओर अवतल होता है।

चित्र 2 (क) और 2 (ख) क्रमशः इसे दर्शाती है।

(क) ऊपर की और अवतल **(ख) नीचे की और अवतल**

चित्र 2

हम यह भी कह सकते हैं कि यदि f अंतराल I पर दो बार अवकलनीय है तथा उस अंतराल में f′ वर्धमान है, तो I पर f का आलेख ऊपर की ओर अवतल होता है। यदि I पर f′ ह्रासमान होता है, तो I पर f का आलेख नीचे की ओर अवतल होता है।

हम जानते हैं कि स्पर्श रेखा की प्रवणता अवकलज के माध्यम से अभिकलित की जाती है। अतः, उपरोक्त चर्चा के आधार पर हम निष्कर्ष निकालते हैं कि एक फलन f का आलेख ऊपर की ओर अवतल होता है, यदि f′ निरंतर (strictly) वर्धमान हो तथा फलन f का आलेख नीचे की ओर अवतल होता है, यदि f′ निरंतर ह्रासमान हो। इसे आगे यह भी कहा जा सकता है कि यदि f′ वर्धमान है, तो $(f')'>0$ है (इकाई 13 से याद कीजिए), जिसका अर्थ है कि f का आलेख ऊपर की ओर अवतल होता है जहाँ द्वितीय अवकलज f″ असमिका $f''>0$ को संतुष्ट करता है। इस प्रकार, आलेख नीचे की ओर अवतल होता है, जहाँ $f''<0$ होता है।

हम इस प्रेक्षण का प्रयोग किसी फलन के आलेख की अवतलता की जाँच करने में कर सकते हैं, जो निम्नलिखित हैः

अवतलता जाँचः

i) यदि I पर सभी x के लिए $f''(x)>0$ है, तो f का आलेख ऊपर की ओर अवतल होता है।

ii) यदि I पर सभी x के लिए $f''(x)<0$ तो f का आलेख नीचे की ओर अवतल होता है।

आप इस ओर यह ध्यान दे सकते हैं कि एक फलन ऊपर की ओर अवतल और

वर्धमान या ऊपर की ओर अवतल और ह्रासमान या नीचे की ओर अवतल और वर्धमान या नीचे की ओर अवतल और ह्रासमान या ऊपर की ओर/नीचे की ओर अवतल परंतु न तो वर्धमान और न ही ह्रासमान, जैसा कि $y = x^2$ है, हो सकता है। अर्थात् अवतलता और वर्धमान। ह्रासमान स्वतंत्र हैं। कुछ पुस्तकें ऊपर की ओर अवतल के लिए ''नीचे की ओर उत्तल (convex downward)" तथा नीचे की ओर अवतल के लिए ''ऊपर की ओर उत्तल (convex upward)'' पद प्रयोग करते हैं। कभी-कभी, हम शब्दों ऊपर की ओर और नीचे की ओर को छोड़ देते हैं तथा केवल शब्द **अवतल** (**नीचे की ओर अवतल** या **ऊपर की ओर उत्तल के लिए**) तथा उत्तल (**ऊपर की ओर अवतल** या **नीचे की ओर उत्तल के लिए**) करते हैं।

हम यह भी कहते हैं कि एक फलन f किसी बिंदु पर अवतल होता है, यदि उस बिंदु के इर्दगिर्द एक छोटे विवृत अंतराल में वह अवतल हो। इसी प्रकार, एक फलन f किसी बिंदु पर उत्तल होता है, यदि उस बिंदु के इर्दगिर्द एक छोटे विवृत अंतराल में वह उत्तल हो।

टिप्पणीः i) केवल अवतल और उत्तल फलनों में ही एक गुण है कि इनकी प्रत्येक स्पर्श रेखा उनके आलेख को अवतलता के अंतराल में ठीक एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है।

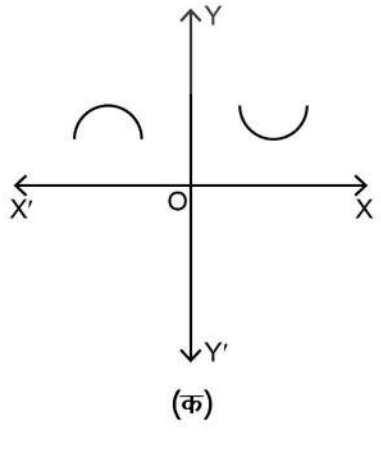
ii) यदि I पर f अवतल है, तो I पर $-f$ उत्तल है। इसी प्रकार, यदि I पर f उत्तल है, तो I पर $-f$ अवतल है।

आइए निम्नलिखित उदाहरणों में अवतलता का अन्वेषण करें:

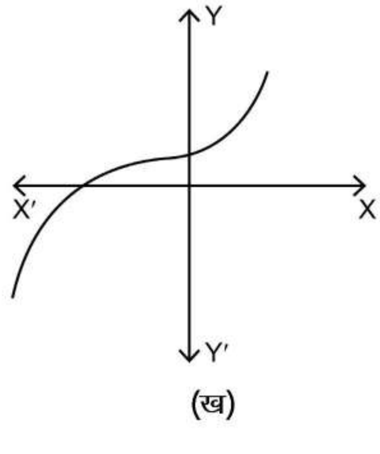
उदाहरण 1: $f(x) = 3x^3 + 2x + 5$ द्वारा परिभाषित फलन f के आलेख की अवतलता ज्ञात कीजिए। इसका अनुमानित आलेख भी खींचिए।

हल : हमें $f(x) = 3x^3 + 2x + 5$ प्राप्त है। इसलिए हम $f'(x) = 9x^2 + 2$ और $f''(x) = 18x$ प्राप्त करते हैं।

यहाँ $f''(x) < 0$ है, जब $x < 0$ तथा $f''(x) > 0$ है, जब $x > 0$ है। अतः, f का आलेख नीचे की ओर अवतल होता है, जब $x < 0$ है तथा f का आलेख ऊपर की ओर अवतल होता है, जब $x > 0$ है, जैसा कि चित्र 3(क) में दर्शाया गया है। f का आलेख चित्र 3(ख) में दर्शाया गया है।



(क)



(ख)

चित्र 3

***

उदाहरण 2: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 13$ द्वारा परिभाषित फलन f का आलेख खींचिए। बताइए कि यह फलन कहाँ एकदिष्टता के साथ ऊपर की ओर अवतल है या नीचे की ओर अवतल है।

हल : f की अवतलता ज्ञात करने के लिए, हम f' और f'' निर्धारित करते हैं।

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$$

$$f''(x) = 6x + 6 = 6(x+1)$$

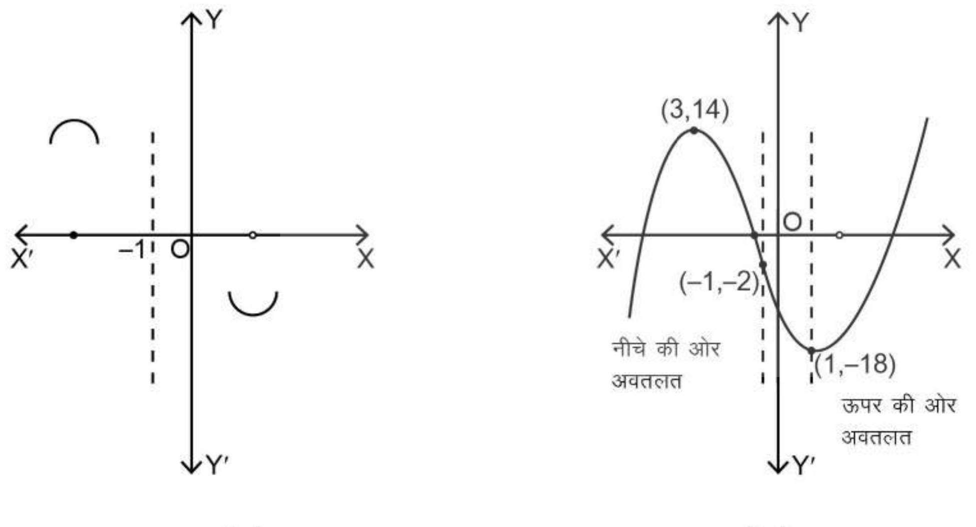
$f''(x) > 0$ है, जब $x > -1$ है तथा $f''(x) < 0$ है, जब $x < -1$ है। इस प्रकार, f का आलेख ऊपर की ओर अवतल है, जब $x > -1$ है तथा नीचे की ओर अवतल है, जब $x < -1$ है। f के अनुमानित आलेख के लिए, आइए देखें कि कहाँ f वर्धमान या ह्रासमान है। इसके लिए, हम $f'(x) = 0$ को हल करते हैं।

$$\Rightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$\Rightarrow 3(x+3)(x-1) = 0$$

$\Rightarrow x = -3$ या $x = 1$ है।

जब $x = -3$ है, तब $f' > 0$ है और f वर्धमान है। जब $-3 < x < 1$ है, तब $f' < 0$ है और f ह्रासमान है। जब $x > 1$ है, तब $f' > 0$ है और f वर्धमान है। अब, हम बिंदुओं $(-3, 14)$ और $(1, -18)$ को आलेखित कर सकते हैं, जिनमें प्रत्येक बिंदु पर आलेख की अवतलता दर्शाने के लिए संक्षिप्त चाप लगे हों, जैसा कि चित्र 4 (क) में दर्शाया गया है। तब, कुछ और अधिक बिंदुओं को परिकलित और आलेखित करके, हम एक आलेख बना सकते हैं, जैसा कि चित्र 4 (ख) में दर्शाया गया है।

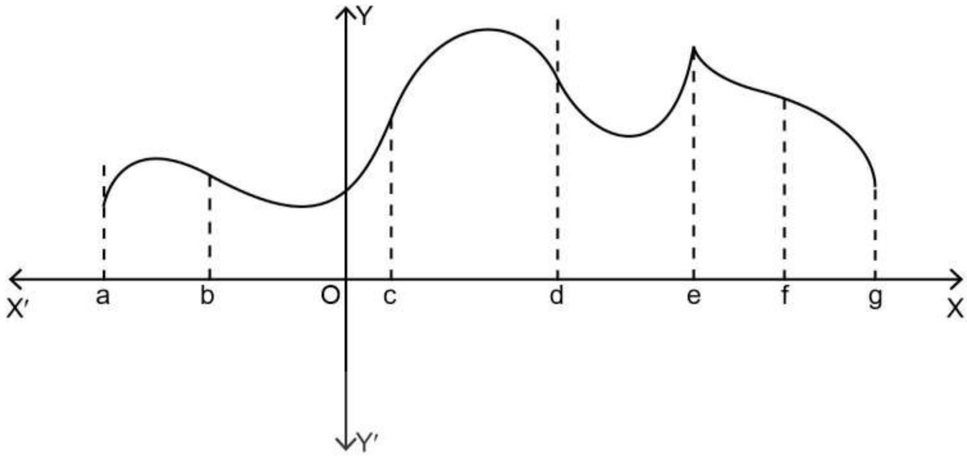


(क) (ख)

चित्र 4: f का आलेख

***

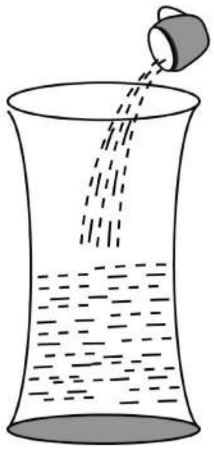
उदाहरण 3: चित्र 5 में दिए गए आलेख से, वे अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें f ऊपर की ओर अवतल है और नीचे की ओर अवतल है।



चित्र 5

हल : चित्र 5 दर्शाता है कि फलन f अंतरालों $]b,c[,]d,e[$ और $]e,f[$ में ऊपर की ओर अवतल है तथा अंतरालों $]a,b[,]c,d[$ और $]f,g[$ में नीचे की ओर अवतल है।

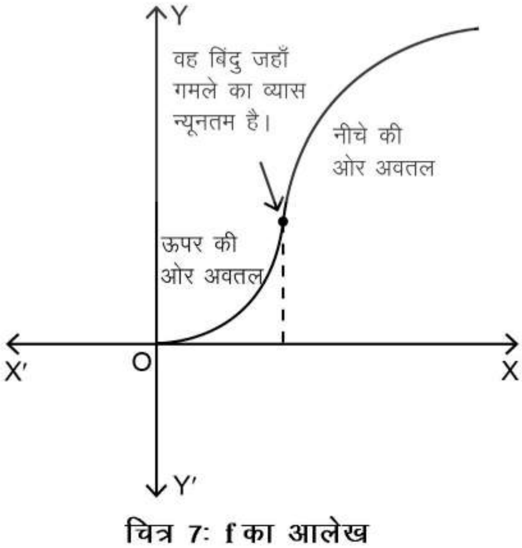
***



चित्र 6

उदाहरण 4: मान लीजिए कि एक गमले में, एक अचर दर से जो आयतन प्रति इकाई समय में मापी जाती है, पानी डाला जा रहा है। समय t पर पानी ऊँचाई $f(t)$ है। उस गमले में पानी की गहराई के आलेख की अवतलता पर टिप्पणी कीजिए।

हल : गमले की तली में, पानी का स्तर धीमी गति से चढ़ेगा, क्योंकि गमले का आधार चौड़ा है और इसीलिए ऊँचाई में वृद्धि के लिए, उसे पानी की अधिक मात्रा की आवश्यकता होगी। परंतु, जैसे-जैसे गमला संकरा होता जाता है, पानी के चढ़ने की दर में वृद्धि होती जाती है। इसका अर्थ है कि प्रारंभिक f' में वृद्धि बढ़ती दर से हो रही है तथा इसका आलेख ऊपर की ओर अवतल है। पानी के स्तर में वृद्धि की दर अधिकतम होगी जब गमले में पानी उसके बीचो-बीच पहुँच जाता है, जहाँ व्यास न्यूनतम है। इसके बाद, f' की वृद्धि की दर पुनः कम होनी प्रारंभ हो जाती है और इसीलिए आलेख नीचे की ओर अवतल है। गमले f में समय t के संगत पानी की ऊँचाई का आलेख चित्र 7 में दर्शाया गया है।



चित्र 7: f का आलेख

***

निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E1) निम्नलिखित प्रतिबंधों को संतुष्ट करने वाले फलन f के संभव आलेख आरेखित कीजिए:

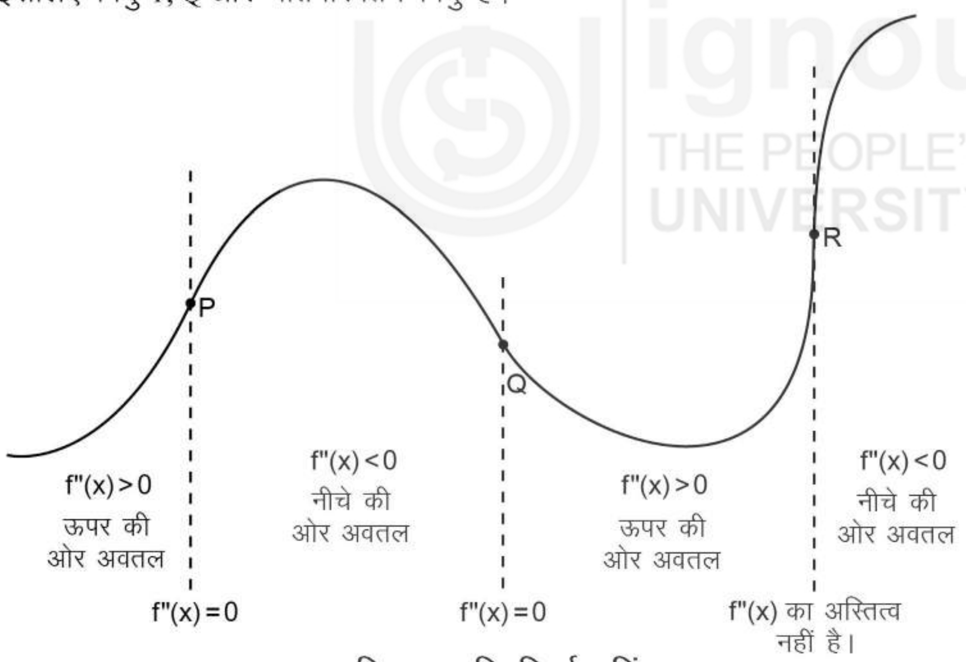
i) $]-\infty, 2[$ पर $f'(x) > 0$ है तथा $]2, \infty[$ पर $f''(x) > 0$ है।

ii) $]-\infty, -3[$ पर और $]3, \infty[$ पर $f''(x) < 0$ तथा $]-3, 3[$ पर $f''(x) < 0$ है।

iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -4$ और $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$ है।

E2) वे अंतराल ज्ञात कीजिए, जिनमें वक्र $y = x^4 - 4x^3$ अवतल या उत्तल है।

अभी तक, हमारा संबंध एक आलेख के मुड़ने के केवल तरीके तक सीमित था। अब, आइए उस संक्रमक बिंदु के बारे में चर्चा करें, जिस पर आलेख ऊपर की ओर अवतल से नीचे की ओर अवतल में बदल जाता है। उदाहरण 2 में दिए फलन के आलेख को देखिए। बिंदु $(-1, -2)$ पर f की अवतलता नीचे की ओर से ऊपर की ओर में बदल जाती है। वह बिंदु जिस पर अवतलता की दिशा बदल जाती है नतिपरिवर्तन का बिंदु (point of inflection) या नतिपरिवर्तन बिंदु (inflection point) कहलाता है। चित्र 8 अवतलता की दिशा में संभव परिवर्तन दर्शाता है। क्योंकि f'' का चिह्न बदल जाता है, इसलिए बिंदु P, Q और नतिपरिवर्तन बिंदु हैं।



चित्र 8: नतिपरिवर्तन बिंदु

चित्र 8 में, जैसे-जैसे हम बाईं ओर से दाईं ओर को चलते हैं, हम देखते हैं कि P, Q और R पर अवतलता बदल जाती है तथा या तो P और Q पर $f''(x_0)$ को 0 होना चाहिए या फिर R पर $f''(x)$ का अस्तित्व नहीं होना चाहिए। इससे हम निम्नलिखित परिभाषा तक पहुँच जाते हैं।

परिभाषा : एक फलन f का एक बिंदु x_0 पर एक नतिपरिवर्तन बिंदु होता है, यदि x_0 पर अवतलता बदल जाती है।

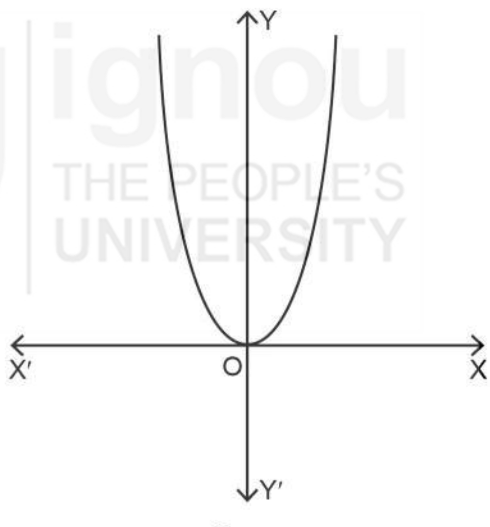
इसलिए, हम कह सकते हैं कि किसी वक्र का x_0 पर एक नतिपरिवर्तन बिंदु होने के लिए आवश्यक प्रतिबंध है कि $f''(x_0) = 0$ हो या $f''(x_0)$ का अस्तित्व नहीं हो। आप इस

ओर ध्यान दे सकते हैं कि एक नतिपरिवर्तन बिंदु को आलेख पर स्थित होना चाहिए, जिसका अर्थ है कि यदि $x = x_0$ पर एक नतिपरिवर्तन बिंदु है, तो $f(x_0)$ को परिभाषित होना चाहिए। आप इस ओर भी ध्यान दे सकते हैं कि यदि $f''(x_0) = 0$ है या $f''(x_0)$ का अस्तित्व नहीं है, तो x_0 पर एक नतिपरिवर्तन बिंदु का होना आवश्यक नहीं है। $(x_0, f(x_0))$ का एक नतिपरिवर्तन बिंदु होने के लिए, x_0 के दोनों ओर अवतलता की दिशा में परिवर्तन होना चाहिए।

आइए अब इसे एक उदाहरण की सहायता से समझें:

उदाहरण 5 : $f(x) = x^4$ द्वारा परिभाषित फलन f का नतिपरिवर्तन बिंदु ज्ञात कीजिए, यदि उसका अस्तित्व है।

हल : हमें $f'(x) = 4x^3$ और $f''(x) = 12x^2$ प्राप्त होता है। साथ ही, $f''(0) = 0$ है। यहाँ $x = 0$ पर f का कोई नतिपरिवर्तन बिंदु नहीं है, यद्यपि $f''(0) = 0$ है (चित्र 9 भी देखिए)। यह इसलिए हो रहा है, क्योंकि सभी $x \neq 0$ के लिए, $f''(x) = 12x^2 > 0$ है और इसके अनुसार 0 से होकर जाने पर इसके चिह्न में कोई परिवर्तन नहीं होता। इस प्रकार, $f''(x_0) = 0, x = x_0$ पर f के नतिपरिवर्तन बिंदु होने के लिए पर्याप्त भी नहीं है।



चित्र 9

***

उदाहरण 6 : x के वे मान ज्ञात कीजिए, जिनके लिए $f(x) = 1/x, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ द्वारा परिभाषित फलन f का आलेख ऊपर की ओर अवतल और नीचे की ओर अवतल है। साथ ही, नतिपरिवर्तन बिंदु भी ज्ञात कीजिए, यदि कोई है।

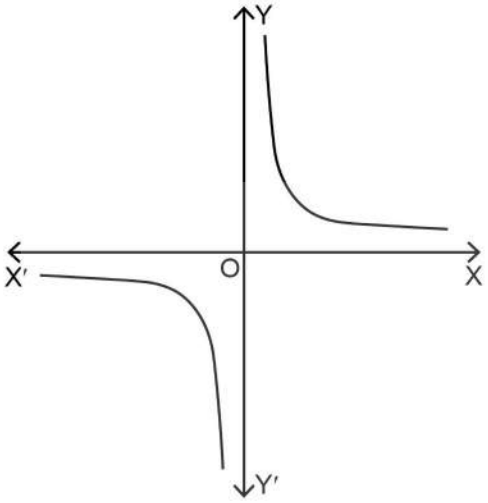
हल : हम ज्ञात करेंगे कि आलेख (चित्र 10 देखिए) के कोई नतिपरिवर्तन बिंदु हैं या नहीं।

यहाँ, $f'(x) = -1/x^2$ है और $f''(x) = 2/x^3$ है।

स्पष्ट रूप से, i) $f''(x) > 0$ है, यदि $x > 0$ है।

ii) $f''(x) < 0$ है, यदि $x < 0$ है।

i) से यह निष्कर्ष निकलता है कि $]0, \infty[$ में f का आलेख ऊपर की ओर अवतल है। ii) से हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $]-\infty, 0[$ में आलेख नीचे की ओर अवतल है। इस तथ्य से कि f के प्रांँत के सभी x के लिए f'' का अस्तित्व है तथा 0 पर नहीं है, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि आलेख का कोई नतिपरिवर्तन बिंदु नहीं है।



चित्र 10: $y = \frac{1}{x}$ का आलेख

***

उदाहरण 7: सभी $x \in \mathbb{R}$ और $n \in \mathbb{N}$ के लिए, $f'(x) = x^{2n+1}$ के सभी नतिपरिवर्तन बिंदु ज्ञात कीजिए।

हल: हमें प्राप्त है: $f'(x) = (2n+1)x^{2n}$ और $f''(x) = (2n+1).2n.x^{2n-1}$

यहाँ, $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ है। साथ ही, जब $x < 0$ है, तब $f''(x) < 0$ है तथा जब $x > 0$ है, तब $f''(x) > 0$ है। अतः, f'' का चिह्न बदल जाता है तथा इसी के अनुसार अवतलता की दिशा बदल जाती है अर्थात् मूलबिंदु से होकर जाने पर f'' का चिह्न (ऋणात्मक से धनात्मक) में बदल जाता है। इस प्रकार, $f(x) = x^{2n+1}$ के आलेख पर मूलबिंदु एक नतिपरिवर्तन बिंदु है।

***

उदाहरण 8: $f(x) = 2x^5 - 15x^3$ द्वारा दिए जाने वाले फलन f के लिए, नतिपरिवर्तन बिंदुओं को निर्धारित कीजिए तथा आलेख खींचिए।

हल: फलन f, $f(x) = 2x^5 - 15x^3$ द्वारा दिया गया है तथा इसके प्रथम और द्वितीय अवकलज क्रमशः $f'(x) = 10x^4 - 45x^2$ और $f''(x) = 40x^3 - 90x$ हैं। हम द्वितीय अवकलज को 0 के बराबर रखते हैं तथा x के लिए हल करते हैं।

$$40x^3 - 90x = 0$$

$$4x\left(x^2 - \frac{9}{4}\right) = 0 \text{ है।}$$

$$x = 0 \text{ या } x = +\frac{3}{2} \text{ या } x = -\frac{3}{2} \text{ है।}$$

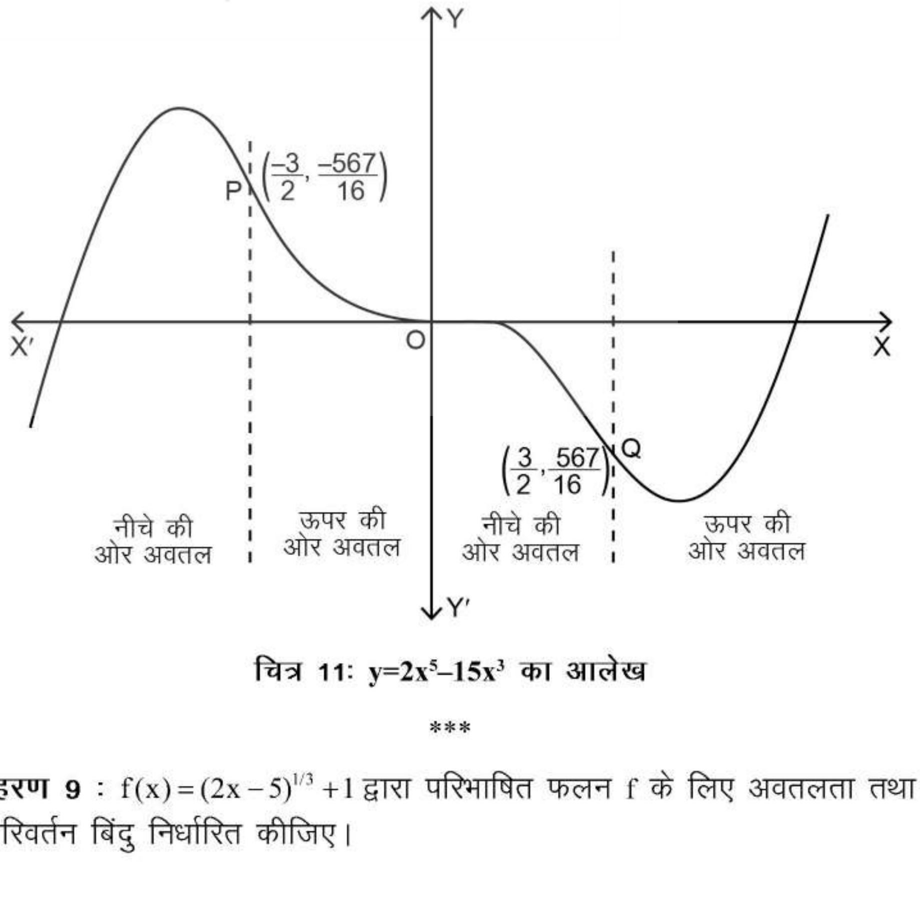
आगे, हम x के इन तीन मानों से परिबद्ध अंतरालों पर $f''(x)$ के चिह्नों की जाँच करते हैं। चिह्न का यह परिवर्तन सारणी 2 में दिया है।

सारणी 2

अंतराल	f″ का चिह्न	परिणाम
$x < -\frac{3}{2}$	$-$	नीचे की ओर अवतल
$-\frac{3}{2} < x < 0$	$+$	ऊपर की ओर अवतल
$0 < x < \frac{3}{2}$	$-$	नीचे की ओर अवतल
$x > \frac{3}{2}$	$+$	ऊपर की ओर अवतल

f का आलेख $x = -\frac{3}{2}$ पर नीचे की ओर अवतल से ऊपर की ओर अवतल में बदल जाता है, $x = 0$ पर ऊपर की ओर अवतल से नीचे की ओर अवतल में बदल जाता है तथा $x = \frac{3}{2}$ पर नीचे की ओर अवतल से ऊपर की ओर अवतल में बदल जाता है। अतः, $\left(-\frac{3}{2}, f\left(-\frac{3}{2}\right)\right), (0, f(0))$ और $\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ नतिपरिवर्तन बिंदु हैं।

क्योंकि $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{567}{16}, f(0) = 0$ और $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{567}{16}$ है, इसलिए बिंदु $p\left(-\frac{3}{2}, \frac{567}{16}\right), O(0,0)$ और $Q\left(\frac{3}{2}, -\frac{567}{16}\right)$ नतिपरिवर्तन बिंदु हैं तथा इन्हें चित्र 11 में दर्शाया गया है।



चित्र 11: $y=2x^5-15x^3$ का आलेख

***

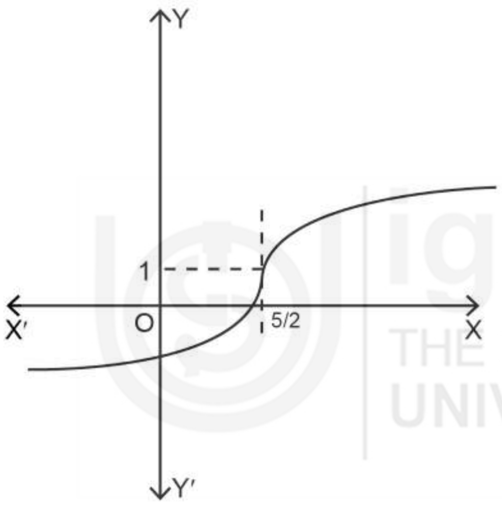
उदाहरण 9 : $f(x) = (2x-5)^{1/3} + 1$ द्वारा परिभाषित फलन f के लिए अवतलता तथा नतिपरिवर्तन बिंदु निर्धारित कीजिए।

हल : f के अवकलज हैं:

$$f'(x)=\frac{1}{3}(2x-5)^{-2/3}\cdot 2=\frac{2}{3}(2x-5)^{-2/3}$$

$$f''(x)=-\frac{4}{9}(2x-5)^{-5/3}\cdot 2=-\frac{8}{9}(2x-5)^{-5/3}$$

जब $x<\frac{5}{2}$ है, तब $f''(x)>0$ है। इसलिए, $\left]-\infty,\frac{5}{2}\right[$ पर f ऊपर की ओर अवतल है। जब $x>\frac{5}{2}$ है, तब $f''(x)<0$ है। इसलिए, $\left]\frac{5}{2},\infty\right[$ पर f नीचे की ओर अवतल है। नतिपरिवर्तन बिंदु ज्ञात करने के लिए, हम ज्ञात करते हैं कि कहाँ $f''(x)=0$ है और कहाँ $f''(x)$ का अस्तित्व नहीं है। क्योंकि $f''(x)$ कभी 0 नहीं होता, इसलिए हमें केवल यह ज्ञात करने की आवश्यकता है कि $f''(x)$ का अस्तित्व कहाँ नहीं है। अतः, संभव नतिपरिवर्तन बिंदु $\left(\frac{5}{2},f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$ अर्थात् $\left(\frac{5}{2},1\right)$ है। आलेख चित्र 12 में दर्शाया गया है।

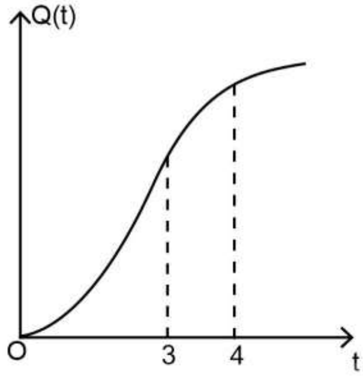


चित्र 12: $y=(2x-5)^{1/3}+1$ का आलेख

***

उदाहरण 10 : किसी फैक्ट्री की सुबह की शिफ्ट का एक क्षमता अध्ययन इंगित करता है कि प्रातः 8 बजे के बाद t घंटों में एक औसत श्रमिक द्वारा उत्पादित इकाइयों की संख्या का निदर्शन सूत्र $Q(t)=-t^3+9t^2+12t$ द्वारा किया जा सकता है। किस समय पर सुबह श्रमिक सबसे अधिक क्षमता से कार्य कर रहा है?

हल : हम कल्पना करते हैं कि सुबह की शिफ्ट प्रातः 8 बजे से दोपहर 12 बजे तक रहती है तथा श्रमिक की क्षमता अधिकतम होगी, जब $Q'(t)=-3t^2+18t+12$ के लिए, उत्पादन की दर $0\le t\le 4$ जितनी अधिक हो सके होगी। Q का द्वितीय अवकलज $Q''(t)=-6t+18$ है, जो $t=3$ पर शून्य है। यह नतिपरिवर्तन बिंदु है। हम कह सकते हैं कि जब $t=3$ है, तब उत्पादन की दर Q(t) अधिकतम है तथा श्रमिक सबसे अधिक क्षमता से कार्य कर रहा है। अर्थात् प्रातः 11 बजे श्रमिक सबसे अधिक क्षमता से कार्य कर रहा है। उत्पादन फलन Q, उसके अवकलज तथा उत्पादन फलन की दर को चित्र 13 में दर्शाया गया है, ध्यान दीजिए कि जब $t=3$ है, तब उत्पादन वक्र अधिकतम खड़ी (या लम्बवत्) है तथा उत्पादन की दर सबसे अधिक है।



चित्र 13: नतिपरिवर्तन दर्शाता हुई उत्पादन फलन वक्र

***

निम्नलिखित प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E3) निम्नलिखित फलनों के लिए, अवतलता, उत्तलता तथा नतिपरिवर्तन बिंदु ज्ञात कीजिए:

i) $f(x) = x^3, \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) = x^{1/3}, \forall x \in \mathbb{R}$

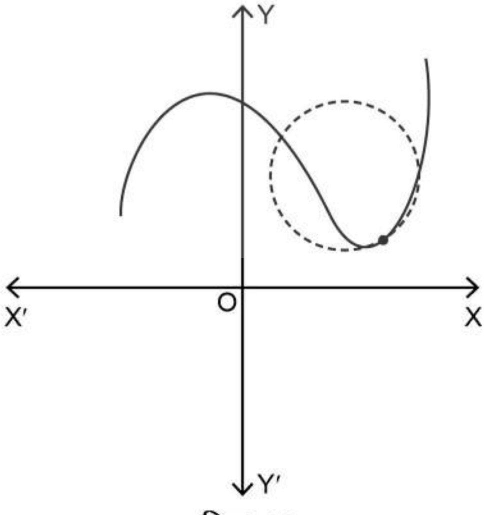
iii) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$

iv) $f(x) = (x-2)/(x-3), \forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$

v) $f(x) = \ln x, x > 0$

vi) $f(x) = \cos x, 0 < x < 2\pi$

आइए अब किसी बिंदु पर एक आलेख के झुकाव को मापने की चर्चा करें, जिसे उस बिंदु पर वक्रता (curvature) के रूप में जाना जाता है। इसके लिए, हम एक वृत्त खींचते हैं, जो किसी वक्र के एक स्थानीय परिच्छेद पर स्थित आस-पास के बिंदुओं में निकटतम रूप से समावेशित हो जाता है, जैसा चित्र 14 में दिया गया है।



चित्र 14

हम कहते हैं कि वक्र और वृत्त स्पर्श करते हैं, क्योंकि दोनों वक्रों (वृत्त और दी हुई वक्र) की उस बिंदु पर एक ही स्पर्श रेखा है, जहाँ वो मिलती हैं।

किसी विशेष बिंदु पर उस वक्र की वक्रता त्रिज्या (radius of curvature) को उस सन्निकट करने वाले वृत्त की त्रिज्या के रूप में परिभाषित किया जाता है। हम इस बदलती हुई वक्रता त्रिज्या को किस प्रकार ज्ञात करते हैं? हम $(c, f(c))$ पर वक्रता को निम्नलिखित अनुपात द्वारा मापते हैं:

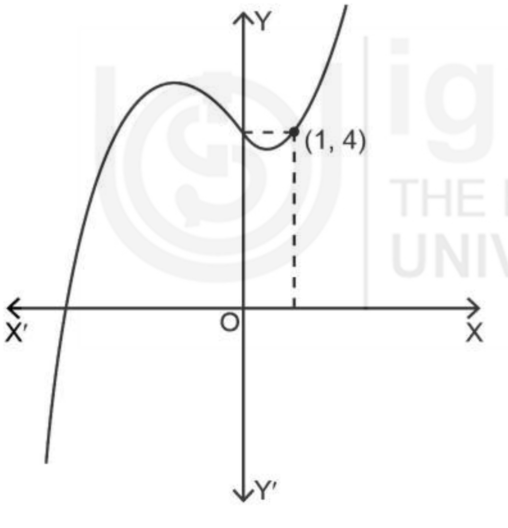
$$k(c)=\frac{f''(c)}{[1+f'(c)^2]^{3/2}}$$

$(c,f(c))$ पर वक्रता त्रिज्या को $\rho(c)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है तथा $\rho(c)=\frac{1}{k(c)}$ यदि $k(c)\neq 0$ है, द्वारा परिभाषित किया जाता है।

आइए निम्नलिखित उदाहरणों में वक्रता त्रिज्या ज्ञात करें।

उदाहरण 11: वक्र $y=2x^3-x+3$ के लिए बिंदु $x=1$ पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $f(x)=2x^3-x+3$ है। सर्वप्रथम, आइए फलन f का आलेख खींचें जैसाकि चित्र 15 में दिया गया है।



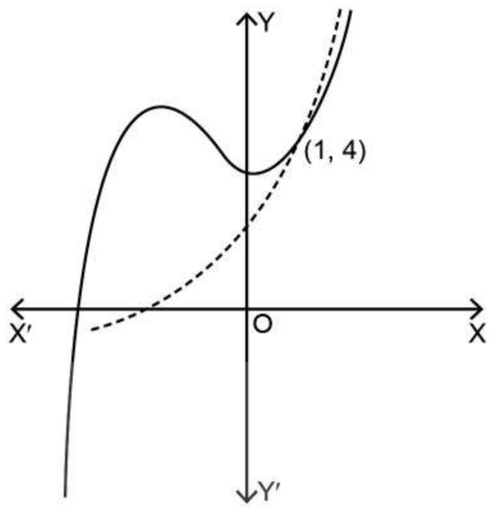
चित्र 15

वक्रता त्रिज्या ज्ञात करने के लिए, हमें अवकलजों की आवश्यकता है। इस प्रकार, $f'(x)=6x^2-1$ और $f'(1)=5$ है। साथ ही, $(f(1))^2=25$ है। यहाँ, $f''(x)=12x$ और $f''(1)=12$ है।

अब, हम सूत्र में इन मानों को प्रतिस्थापित करने के लिए तैयार हैं, ताकि किसी बिंदु c पर त्रिज्या प्राप्त हो जाए। हम प्राप्त करते हैं:

$$\rho(c)=\left[\frac{1+\left(f'(c)^2\right)}{f''(c)}\right]^{3/2}=\frac{(1+25)^{3/2}}{12}\approx 11.05$$

यह दर्शाने के लिए कि हमने क्या किया है, आइए वक्र के आलेख को देखें, जिस पर सन्निकट वृत्त लिटा दिया गया है। यह वृत्त (1, 4) पर वक्र के लिए अच्छा सन्निकटन है, जैसा कि चित्र 16 में दर्शाया गया है।



चित्र 16

***

अब निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E4) $f(x) = 1.5x^2 - 2.5x + 2$ द्वारा परिभाषित फलन f की $(2, 3)$ पर वक्रता ज्ञात कीजिए।

E5) किसी स्वेच्छ बिंदु पर निम्नलिखित फलन के आलेख की वक्रता ज्ञात कीजिए:

i) $f(x) = x - 5, x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) = x^2 + 9, x \in \mathbb{R}$

iii) $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$

iv) $f(x) = \sqrt{(1 - x^2)}, -1 < x < 1$

अभी तक, हमने द्वितीय अवकलज के अनुप्रयोगों की चर्चा की है। अब, हम प्रथम अवकलज पर वापस जाते हैं और अगले भाग में स्पर्श रेखाओं और अभिलंबों के बारे में चर्चा करते हैं।

14.3 स्पर्श रेखाओं और अभिलंबों के समीकरण

इकाई 9 में, हम देख चुके हैं कि एक वक्र के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता की सहायता से किस प्रकार एक अवकलज को परिशुद्ध रूप से परिभाषित किया जा सकता है। हमने देखा था कि (x_0, y_0) पर वक्र $y = f(x)$ की स्पर्श रेखा की प्रवणता को $f'(x_0)$ द्वारा परिकलित किया जाता है, जहाँ उसका अस्तित्व हो। वस्तुतः, हमने कुछ सरल वक्रों के समीकरण भी प्राप्त किए थे। एक बार, हमें ज्ञात हो जाए कि स्पर्श रेखा की समीकरण किस प्रकार ज्ञात की जाती है, तब अभिलंब की समीकरण ज्ञात करना सरल हो जाता है। $y = f(x)$ पर वक्र $y = f(x)$ पर अभिलंब (normal) वह रेखा है जो (x_0, y_0) से होकर जाती है तथा इस बिंदु पर स्पर्श रेखा पर लंब होती है। इसका अर्थ है कि

इस अभिलंब की प्रवणता $-\frac{1}{f'(x_0)}$ होगी, यदि $f'(x_0) \neq 0$ है। आप इकाई 3 का स्मरण कर सकते हैं, जहाँ रेखा L_1 रेखा L_2 पर लंब है, यदि और केवल यदि (iff) $m_1 m_2 = -1$ की चर्चा की थी, जबकि m_1 और m_2 क्रमशः L_1 और L_2 की प्रवणताएँ हैं।

अब, तक क्या होता है जब $f'(x_0) = 0$ है? अवकलज $f'(x_0) = 0$ से यह निष्कर्ष निकलता है कि (x_0, y_0) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता शून्य है। अर्थात् स्पर्श रेखा x-अक्ष के समांतर है। इस स्थिति में, अभिलंब (जो स्पर्श रेखा पर लंब होता है) y-अक्ष के समांतर होगा। तब, इस अभिलंब की समीकरण $x = x_0$ होगी।

आइए, अब विभिन्न वक्रों को देखें तथा अवकलजों का प्रयोग करते हुए, इनकी स्पर्श रेखाओं और अभिलंबों के समीकरण ज्ञात करने का प्रयास करें।

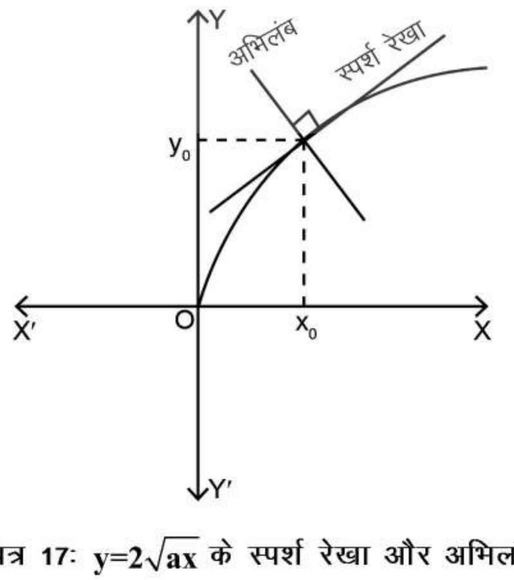
उदाहरण 12 : वक्र $y = 2\sqrt{ax}, a \neq 0$ की स्पर्श रेखा और अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : चित्र 17 में दिये गए वक्र पर विचार कीजिए। यहाँ, $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{2a}{y}$ है। इस प्रकार, $\frac{dy}{dx}$ का अस्तित्व है तथा यह सभी $y \neq 0$ के लिए शून्येतर है। अब, y केवल तभी शून्य होगा जब x शून्य होगा। इस प्रकार, हम इस वक्र की स्पर्श रेखा और अभिलंब की समीकरण, मूलबिंदु (0, 0) के अतिरिक्त, किसी भी बिंदु पर ज्ञात कर सकते हैं। हम जानते हैं कि किसी बिंदु (x_0, y_0) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $2a / y_0$ होगी। इसलिए, अभिलंब की प्रवणता $-y_0 / 2a$ होगी। इस प्रकार, (x_0, y_0) पर स्पर्श रेखा की समीकरण है:

$$y - y_0 = \frac{2a}{y_0}(x - x_0)$$
$$\Rightarrow \quad yy_0 - y_0^2 = 2ax - 2ax_0$$
$$\Rightarrow \quad yy_0 = 2ax + y_0^2 - 2ax_0$$
$$\Rightarrow \quad yy_0 = 2a(x + x_0) \quad [\text{क्योंकि } y_0^2 = 4ax_0]$$

इकाई 3 से याद कीजिए कि (x_0, y_0) से होकर जाने वाली तथा प्रवणता m वाली रेखा की समीकरण $y-y_0 = m(x-x_0)$ है।

(x_0, y_0) पर अभिलंब की समीकरण $y - y_0 = \frac{-y_0}{2a}(x - x_0)$ है, जो सरल करने के बाद $2ay = 2ay_0 + x_0 y_0 - xy_0$ है, जैसा कि चित्र 17 में दिखाया गया है।



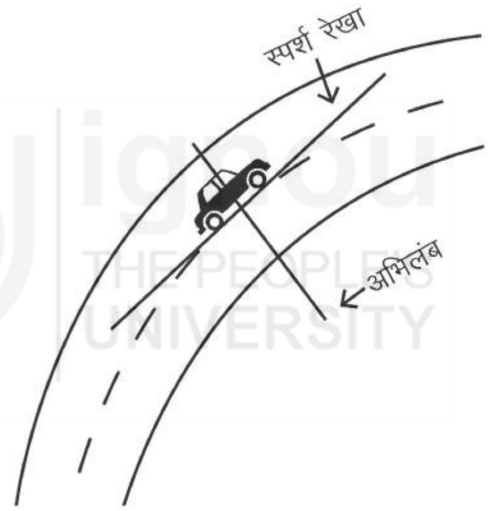
चित्र 17: $y=2\sqrt{ax}$ के स्पर्श रेखा और अभिलंब

उदाहरण 13: किसी गतिमान कार की समय t पर स्थिति $f(t) = t^3 - 2t^2 + 5$ द्वारा दी जाती है।

i) मान लीजिए कि एक कार किसी कोने के इर्दगिर्द गतिमान है तथा सड़क पर पड़ी किसी फिसलन वाली वस्तु (जैसे तेल, बर्फ, पानी या खुले चिकने कंकड़) पर चलायी जा रही है तथा यह भी मान लीजिए कि कार फिसलने लगती है। (चित्र 18 देखिए)। $t = 2$ पर उस पथ की क्या समीकरण होगी जिस पर कार फिसलती है?

ii) यदि वह कार एक वृत्ताकार ट्रैक के अनुदिश तेजी से चल रही है, तो यात्री द्वारा अनुभव किया जाने वाला बल जो आगे धकेल रहा है, उस सड़क के वक्र पर अभिलंब होगा। वह बल जो यात्री को उस ट्रैक के अनुदिश रख रहा है, वास्तव में वृत्त के केन्द्र की दिशा में है, अर्थात् वह वृत्त पर अभिलंब है। अतः, अभिलंब की समीकरण ज्ञात कीजिए।

iii) $t = 2$ पर सड़क की स्पर्श रेखा और अभिलंब के आलेख खींचिए।



चित्र 18: कोने पर एक फिसलती हुई कार

हलः $t = 2$ पर, $f(2) = 5$ है। कार फिसलना प्रारंभ करेगी तथा स्पर्श रेखा की दिशा में फिसलती रहेगी। यहाँ, $f'(t) = 3t^2 - 4t$ है। उस बिंदु पर जहाँ कार फिसलना प्रारंभ करती है, सड़क की स्पर्श रेखा की प्रवणता $m_1 = f'(2) = 4$ है।

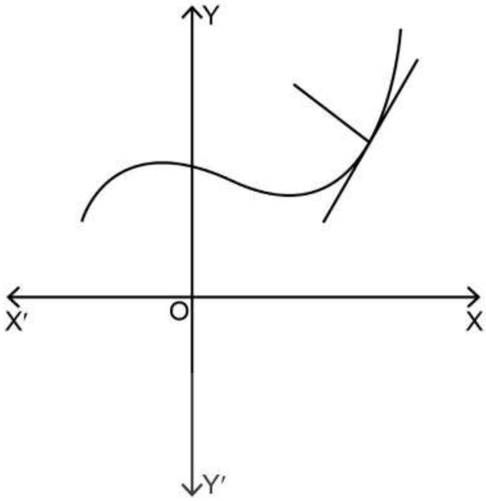
स्पर्श रेखा की समीकरण $y - 5 = 4(t - 2)$, अर्थात् $4t - y - 3 = 0$ है।

अभिलंब की प्रवणता $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{4}$ है।

अभिलंब की समीकरण $y - 5 = -\frac{1}{4}(t - 2)$ है।

अर्थात्, $t + 4y - 22$ है।

चित्र 19, $t = 2$ पर वक्र की स्पर्श रेखा और अभिलंब के आलेख को दर्शाती है।



चित्र 19

***

उदाहरण 14: $f(x) = -x^3 + 6x^2$ के आलेख पर वे बिंदु ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखा क्षैतिज है।

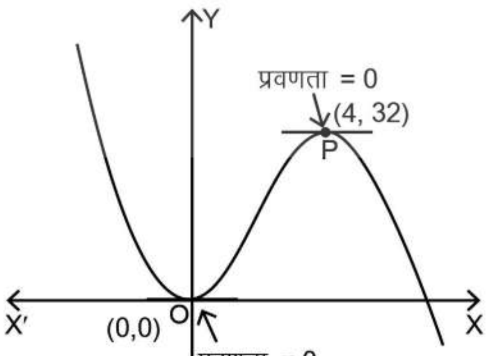
हलः हम एक स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात करने के लिए, अवकलज का प्रयोग करते हैं तथा एक क्षैतिज स्पर्श रेखा की प्रवणता 0 होती है। अतः, हमें ऐसे सभी x ज्ञात करने की आवश्यकता है जहाँ $f'(x) = 0$ हो। $f'(x) = 0$ रखने पर,

$$\frac{d}{dx}\left[-x^3 + 6x^2\right] = 0 \text{ है।}$$

$$\Rightarrow -3x^2 + 12x = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ या } x = 4 \text{ है।}$$

बिंदुओं को ज्ञात करने के लिए, हमें y-निर्देशांक भी ज्ञात करने की आवश्यकता है, जो $f(0) = 0$ और $f(4) = 32$ हैं। इस प्रकार, वे बिंदु जिन पर स्पर्श रेखा क्षैतिज है (0, 0) और (4, 32) हैं। ये बिंदु मूलबिंदु 0 और p हैं, जिन्हें चित्र 20 में दर्शाया गया है।



चित्र 20: क्षैतिज स्पर्श रेखाओं के साथ f का आलेख

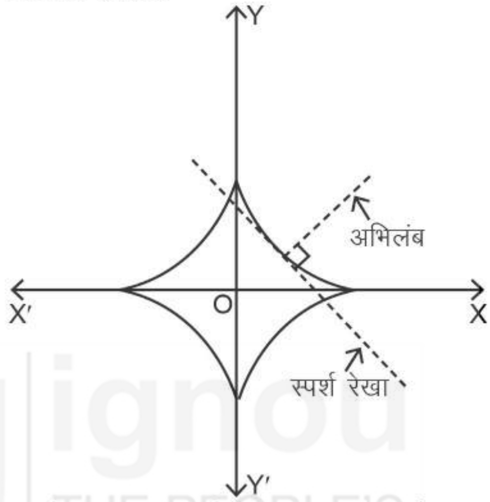
***

आइए अब हम निम्नलिखित उदाहरण में स्पर्शरेखाओं और अभिलंबों की समीकरण उन वक्रों के लिए ज्ञात करें, जिनमें वक्र की समीकरण प्राचलिक रूप में दी हुई है। खंड 3 में, हम प्राचलिक समीकरणों की चर्चा पहले ही कर चुके हैं।

उदाहरण 15: बिंदु $\theta = \pi/4$ पर, $x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta$ द्वारा दिये गए वक्र की स्पर्श रेखा तथा अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल: इस वक्र का अनुमानित आलेख चित्र 21 में दिया गया है। सर्वप्रथम, हम x के सापेक्ष y का अवकलज ज्ञात करते हैं। इससे हमें स्पर्श रेखा की प्रवणता प्राप्त हो जाएगी।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta} = -\tan\theta$$



चित्र 21: प्राचलिक वक्र का आलेख

$\theta = \pi/4$ पर, स्पर्श रेखा की प्रवणता $-\tan(\pi/4) = -1$ है। इसलिए, इस बिंदु पर अभिलंब की प्रवणता 1 हो जाती है। अब जब $\theta = \pi/4$ है, तब $\cos\theta = 1/\sqrt{2}$ और $\sin\theta = 1/\sqrt{2}$ है।

इस प्रकार, $x = a/2\sqrt{2}$ और $y = a/2\sqrt{2}$ है।

बिंदु $(a/2\sqrt{2}, a/2\sqrt{2})$ पर स्पर्श रेखा की समीकरण है:

$$y - \frac{a}{2\sqrt{2}} = -1\left(x - \frac{a}{2\sqrt{2}}\right)$$

अर्थात, $x + y = \frac{a}{\sqrt{2}}$ या $\sqrt{2}(x+y) = a$

$(a/2\sqrt{2}, a/2\sqrt{2})$ पर अभिलंब की समीकरण है:

$$y - \frac{a}{2\sqrt{2}} = 1\left(x - \frac{a}{2\sqrt{2}}\right) \text{ या } y = x \text{ है।}$$

***

अब तक, आप इस तथ्य से भली भाँति अवगत हो गए होंगे कि कुछ बिंदुओं पर $f'(x)$ या dy/dx का अस्तित्व नहीं भी हो सकता है। ऐसे बिंदुओं पर या तो स्पर्श रेखा का अस्तित्व नहीं होता है या फिर यह y-अक्ष के समांतर, अर्थात् ऊर्ध्वाधर होती है। (x_0, y_0) पर ऊर्ध्वाधर स्पर्श रेखाओं के अस्तित्व की जाँच के लिए, हम $\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(x_0,y_0)}$ की जाँच करते हैं। यदि $\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(x_0,y_0)} = 0$ है, तो हम निष्कर्ष निकालते हैं कि (x_0, y_0) पर एक ऊर्ध्वाधर

स्पर्श रेखा है। ऐसी स्थितियों में, स्पर्श रेखा की समीकरण को $x = x_0$ लिखा जा सकता है।

ऊर्ध्वाधर स्पर्श रेखा के संगत अभिलंब क्षैतिज या x-अक्ष के समांतर होगा। इसका अर्थ है कि हम उसकी समीकरण को $y = y_0$ लिख सकते हैं, क्योंकि यह $x = x_0$ से होकर जाती है।

यदि आप उदाहरण 15 की वक्र को लें, तो आप ज्ञात करेंगे कि $\theta = \pi/2$ पर $\frac{dy}{dx}$ का अस्तित्व नहीं है। आइए इस बिंदु पर $\frac{dx}{dy}$ की जाँच करें। यदि $\theta = \pi/2$ है, तो $\frac{dx}{dy} = -\cot\theta = 0$ है। इसका अर्थ है कि इस बिंदु पर वक्र की एक ऊर्ध्वाधर स्पर्श रेखा है और इसके फलस्वरूप एक क्षैतिज अभिलंब है। अब, जब $\theta = \pi/2, x = 0$ है, तब $x = 0$ और $y = 0$ है। इस प्रकार, $(0, a)$ पर स्पर्श रेखा की समीकरण $x = 0$ है तथा अभिलंब की समीकरण $y = 0$ है।

अब, आइए एक अन्य उदाहरण को देखें।

उदाहरण 16: कागज के एक वायुयान की उड़ान पथ $x = t - 3\sin t$ और $y = 4 - 3\cos t, (t \geq 0)$ के अनुदिश चलती है, परंतु यह समय $t = 10$ पर एक दीवार से टकरा जाता है।

i) किस समय पर वायुयान क्षैतिजतः उड़ रहा था?

ii) किस समय पर वह ऊर्ध्वाधरतः उड़ रहा था?

हल : i) वायुयान क्षैतिजतः उन समयों पर उड़ रहा था, जब $dy/dt = 0$ और $dx/dt \neq 0$ है। दिए हुए पथ से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dy}{dt} = 3\sin t \text{ और } \frac{dx}{dt} = 1 - 3\cos t$$

$dy/dt = 0$ करने पर समीकरण $3\sin t = 0$ या अधिक सरल रूप में $\sin t = 0$ प्राप्त होती है। समय अंतराल $0 \leq t \leq 10$ में, इस समीकरण के चार हल $t = 0, t = \pi, t = 2\pi, t = 3\pi$ हैं।

अब, $\frac{dx}{dt} = -1 - 3\cos t$ है।

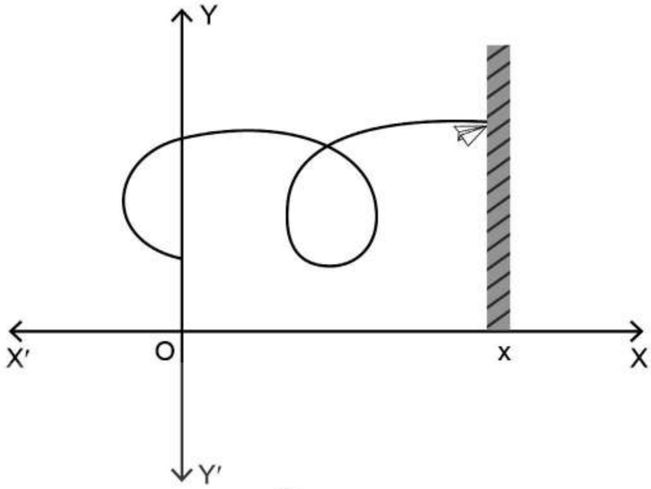
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = -2$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=\pi} = 4$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=2\pi} = -2$$

और $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=3\pi} = 4$ है।

क्योंकि t के इन मानों के लिए, $dx/dt = 1 - 3\cos t \neq 0$ है, इसलिए वायुयान समयों $t = 0, t = \pi \approx 3.14, t = 2\pi \approx 6.28$ और $t = 3\pi \approx 9.42$ पर क्षैतिजतः उड़ रहा था, जो चित्र 22 के संगत है।



चित्र 22

ii) वायुयान उन समयों पर ऊर्ध्वाधरतः उड़ रहा था जब $dx/dt = 0$ और $dy/dt \neq 0$ था। $dx/dt = 0$ रखने पर, हम $1 - 3\cos t = 0$ या $\cos t = \frac{1}{3}$ प्राप्त करते हैं। इस समीकरण के समय अंतराल $0 \leq t \leq 10$ में तीन हल हैं।

जो कि $t = \cos^{-1}\frac{1}{3}$, $t = 2\pi - \cos^{-1}\frac{1}{3}$, और $t = 2\pi + \cos^{-1}\frac{1}{3}$ हैं। क्योंकि $dy/dt = 3\sin t$ इन बिंदुओं पर शून्य नही हैं, इससे पता चलता है कि वायुयान इन समयों पर ऊर्ध्वाधरतः हैः

ये $t = \cos^{-1}\frac{1}{3} \approx 1.23$, $t \approx 2\pi - 1.23 \approx 5.05$ और $t \approx 2\pi + 1.23 \approx 7.51$ हैं।

***

अब हम ध्रुवीय रूप के वक्रों की स्पर्श रेखा ज्ञात करते हैं।

$r = f(\theta)$ के रूप की ध्रुवीय वक्रों की स्पर्श रेखाओं की प्रवणताएँ प्राप्त करने की विधि ज्ञात करने के लिए, जहाँ r, θ का एक अवकलनीय फलन है, हम इस रूप के वक्र को समीकरणों $x = r\cos\theta$ और $y = r\sin\theta$ में r के लिए $f(\theta)$ प्रतिस्थापित करके प्राचल θ के पदों में प्राचलिक रूप में व्यक्त करते हैं। इससे प्राप्त होता हैः

$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\sin\theta$$

अब, x और y को θ के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dx}{d\theta} = -f(\theta)\sin\theta + f'(\theta)\cos\theta = -r\sin\theta + \frac{dr}{d\theta}\cos\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\sin\theta = r\cos\theta + \frac{dr}{d\theta}\sin\theta$$

इस प्रकार, यदि $dx/d\theta$ और $dy/d\theta$ संतत हैं तथा यदि $dx/d\theta \neq 0$ है, तो x का y एक अवकलनीय फलन है तथा t के स्थान पर θ रखने पर, अवकलज dy/dx प्रदान करता हैः

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r\cos\theta + \sin\theta\frac{dr}{d\theta}}{-r\sin\theta + \cos\theta\frac{dr}{d\theta}}$$

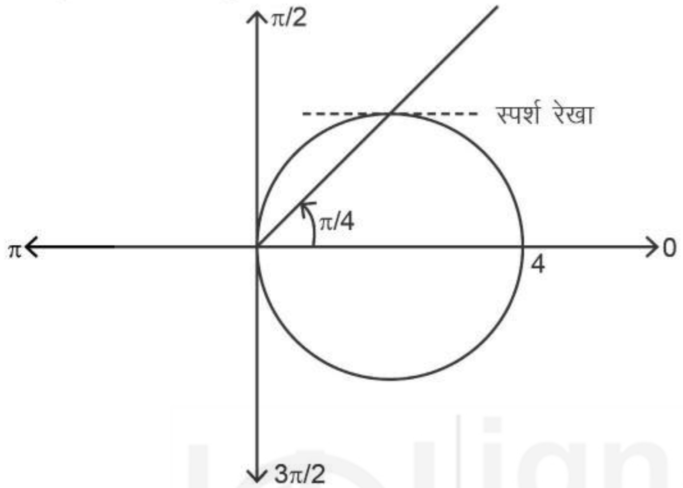
आइए अब ध्रुवीय रूप में दिये गये वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता निम्नलिखित उदाहरण में ज्ञात करें।

उदाहरण 17: उस बिंदु पर जहाँ $\theta = \pi/4$ है, वृत्त $r = 4\cos\theta$ की स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ, $r = 4\cos\theta$ है। हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\cos^2\theta - 4\sin^2\theta}{-8\sin\theta\cos\theta} = \frac{4\cos 2\theta}{-4\sin 2\theta} = -\cot 2\theta$$

इस प्रकार, $\theta = \pi/4$ वाले बिंदु पर, स्पर्श रेखा की प्रवणता $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/4} = -\cot\frac{\pi}{2} = 0$ है, जिसका अर्थ है कि वृत्त की उस बिंदु पर, जहाँ $\theta = \pi/4$ है, स्पर्श रेखा क्षैतिज है (चित्र 23)।



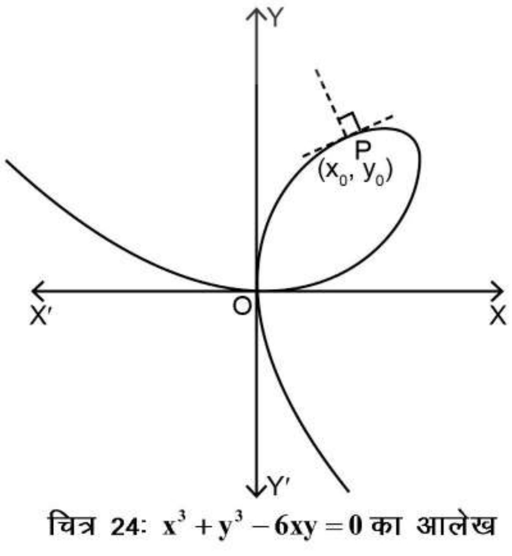
चित्र 23

***

निम्नलिखित उदाहरण स्पर्श रेखाओं और अभिलंबों की समीकरणों को ज्ञात करने की उस विधि को स्पष्ट करता है, जब वक्र की समीकरण अस्पष्ट रूप से दी हुई होती है।

उदाहरण 18: $x^3 + y^3 - 6xy = 0$ द्वारा परिभाषित वक्र के बिंदु (x_0, y_0) पर स्पर्श रेखा और अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल: चित्र 24 वक्र $x^3 + y^3 - 6xy = 0$ के रफ आलेख को दर्शाती है। स्पर्श रेखा और अभिलंब की समीकरण ज्ञात करने के लिए, हम पहले अवकलज के प्रयोग से स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात करते हैं।



चित्र 24: $\mathbf{x^3 + y^3 - 6xy = 0}$ का आलेख

इकाई 10 में, हम देख चुके हैं कि तब अवकलज किस प्रकार ज्ञात करते हैं, जब x और y में संबंध अस्पष्ट रूप से दिया होता है। हम पुनः यही प्रक्रिया अपनाएँगे। दी हुई समीकरण को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-6y-6x\frac{dy}{dx}=0 \text{ जिसका अर्थ } \frac{dy}{dx}=\frac{2y-x^2}{y^2-2x} \text{ है।}$$

इस प्रकार, (x_0, y_0) पर प्रवणता $\dfrac{2y_0-x_0^2}{y_0^2-2x_0}$ है।

अतः, (x_0, y_0) पर स्पर्श रेखा की समीकरण $y-y_0=\dfrac{2y_0-x_0^2}{y_0^2-2x_0}(x-x_0)$

है। सरल करने तथा संबंध $x_0^3+y_0^3=6x_0y_0$ का उपयोग करने पर यह

$(2y_0-x_0^2)x+(2x_0-y_0^2)y+2x_0y_0=0$ रूप में बदल जाती है। अब, (x_0, y_0) पर अभिलंब एक ऐसी रेखा है जो (x_0, y_0) से होकर जाती है तथा जिसकी प्रवणता $\dfrac{-(y_0^2-2x_0)}{2y_0-x_0^2}$ है। अतः, (x_0, y_0) पर अभिलंब की समीकरण $y-y_0=-\dfrac{y_0^2-2x_0}{2y_0-x_0^2}(x-x_0)$ है।

इसे सरल करने पर, हम

$(y_0^2-2x_0)x+(2y_0-x_0^2)y+(x_0-y_0)(2x_0+x_0y_0+2y_0)=0$ प्राप्त करते हैं।

यदि आपने इन उदाहरणों को समझ लिया है, तो आपको निम्नलिखित प्रश्नों को करने में कोई कठिनाई नहीं होगी।

***

उदाहरण 19: वक्र $y=x^3$ की उन स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखा $12x-y-3=0$ के समांतर हैं।

हल: सर्वप्रथम, हम देखते हैं कि रेखा $12x-y-3=0$ की प्रवणता 12 है। इस प्रकार, इस रेखा के समांतर किसी भी रेखा की प्रवणता 12 होनी चाहिए। अब वक्र $y=x^3$ की स्पर्श रेखा की किसी बिंदु (x, y) पर प्रवणता $f'(x)=3x^2$ है। यदि हम $f'(x)$ को 12 के बराबर रखें, तो हमें वक्र पर स्थित वे बिंदु प्राप्त हो जाते हैं, जहाँ स्पर्श रेखा $12x-y-3=0$ के समांतर हैं।

इस प्रकार, $3x^2=12$ या $x^2=4$ अर्थात् $x=\pm 2$ है।

यदि $x=2$ है, तो $y=x^3=8$ है तथा $x=-2$ है, तो $y=x^3=-8$ है। इस प्रकार, वाँछित बिंदु $(2, 8)$ और $(-2, -8)$ हैं। इन बिंदुओं पर स्पर्श रेखाओं के समीकरण क्रमशः $y-8=12x(x-2)$ और $y+8=12(x+2)$ हैं।

***

E6) निम्नलिखित में प्रत्येक वक्र की निर्दिष्ट बिंदु पर स्पर्श रेखा और अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए:

i) $y=x^2+2x+1$ बिंदु $(1, 4)$ पर

ii) $x = a\cos t, y = b\sin t, t = \pi/4$ द्वारा दिए जाने वाले बिंदु पर

iii) $x^2 + y^2 = 25; (-3, 4)$ पर

E7) $f(x) = -x^3 + 6x^2$ के आलेख पर वे बिंदु ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखा की प्रवणता 9 है।

E8) बिंदु 't' पर, निम्नलिखित में से प्रत्येक वक्र की स्पर्श रेखा और अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए:

i) $x = at^2, y = 2at$

ii) $x = a(t + \sin t), y = a(1 - \cos t)$

E9) बिंदु (x_0, y_0) पर, निम्नलिखित में से प्रत्येक वक्र की स्पर्श रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए।

i) $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 1 = 0$

ii) $xy = a$

E10) सिद्ध कीजिए कि रेखा $2x + 3y = 1$ वक्र $3y = e^{-2x}$ को उस बिंदु पर स्पर्श करती है जिसका x-निर्देशांक शून्य है।

E11) सिद्ध कीजिए कि बिंदु $(a\sqrt{2}, b)$ पर अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के अभिलंब की समीकरण $ax + b\sqrt{2y} = (a^2 + b^2)\sqrt{2}$ है।

E12) प्राचलिक समीकरणों $x = t^2$ और $y = t^3$ द्वारा दिए जाने वाले अर्धघन परवलय पर स्थित बिंदुओं $(1, 1)$ और $(1\ -1)$ पर, प्राचल t को विलोपित किए बिना dy/dx और d^2y/dx^2 ज्ञात कीजिए।

E13) एक मधुमक्खी पथ $x = t - 2\sin t, \quad y = 2 - 2\cos t$ के अनुदिश गति करती है, जहाँ $t \geq 0$ है। वह समय $t = 10$ पर एक दीवार पर पहुँच जाती है।

i) किस समय पर वह मधुमक्खी क्षैतिजतः उड़ रही थी?

ii) किस समय पर वह मधुमक्खी ऊर्ध्वाधरतः उड़ रही थी?

E14) हृदयाभ $r = 1 - \cos\theta$ के वे बिंदु ज्ञात कीजिए जहाँ पर ऊर्ध्वाधर स्पर्शरेखा या क्षैतिज स्पर्शरेखा हैं।

E15) क्या निम्नलिखित वक्रों पर स्थित ऐसे बिंदु हैं, जिन पर स्पर्श किसी भी अक्ष में समांतर है? यदि हाँ तो ऐसे सभी बिंदु ज्ञात कीजिए।

i) $y = x^3 - x^2 - 2x$

ii) $y = \sin x$

E16) वक्र $y = \frac{x^2}{4}$ की उस स्पर्श रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए जो $3x - y + 2 = 0$ के समांतर है।

हम देख चुके हैं कि किसी बिंदु पर एक वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता उस बिंदु पर उस वक्र का अवकलज होता है। किसी बिंदु पर हम दो वक्रों की प्रवणताओं का

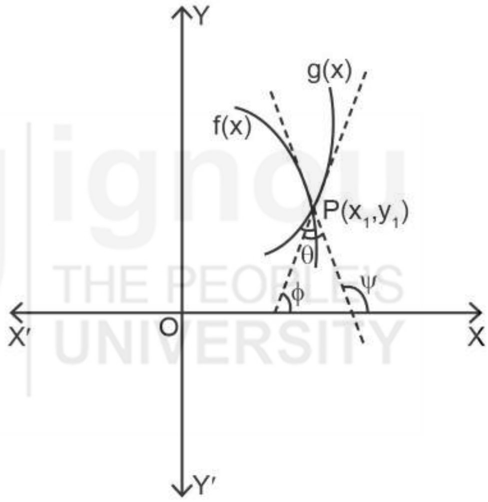
उपयोग उस बिंदु पर उन वक्रों के प्रतिच्छेदन के कोण को ज्ञात करने में कर सकते हैं।

अगले भाग में, हम दो वक्रों के प्रतिच्छेदन कोण को ज्ञात करेंगे।

14.4 दो वक्रों के प्रतिच्छेदन का कोण

किसी वक्र की स्पर्श रेखा की संकल्पना उस वक्र के विभिन्न ज्यामितीय अभिलक्षणों की संख्या करने में बहुत उपयोगी सिद्ध हुई है। इस भाग में, हम ऐसे ही एक अभिलक्षण पर दृष्टि डालेंगे।

जब दो वक्र किसी बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं, तब उस बिंदु पर उनके प्रतिच्छेदन के कोण को उनकी स्पर्श रेखाओं की सहायता से परिभाषित किया जा सकता है। वस्तुतः, हम कहते हैं कि यदि दो वक्र एक बिंदु P पर प्रतिच्छेद करती हैं, तो इन दोनों वक्रों के प्रतिच्छेदन का P पर कोण इन वक्रों की P पर स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण होता है, ताकि $0 \le \theta \le \pi/2$ हो (चित्र 25 देखिए)।



चित्र 25

अब हम एक प्रमेय सिद्ध करेंगे, जो किसी बिंदु पर दो वक्रों के प्रतिच्छेद के कोण को प्रदान करती है, जब दोनों वक्रों के समीकरण ज्ञात हों।

प्रमेय 1: यदि दो वक्र $y = f(x)$ और $y = g(x)$ किसी बिंदु $P(x_1, y_1)$ पर प्रतिच्छेद करती है, तो $P(x_1, y_1)$ पर इन वक्रों के प्रतिच्छेदन कोण θ को $\tan\theta = \left|\frac{f'(x_1) - g'(x_1)}{1 + f'(x_1)g'(x_1)}\right|$ द्वारा दिया जाता है।

उपपत्तिः चित्र 25 से,

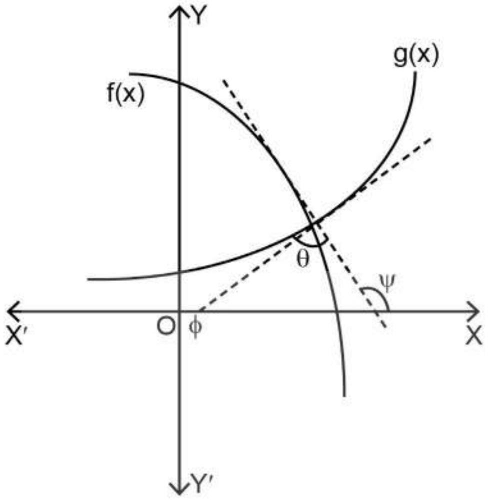
चित्र 25 से, $\tan\theta = \tan(\psi - \Phi)$

$$= \frac{\tan\psi - \tan\Phi}{1 + \tan\psi \tan\Phi}$$

$$= \frac{f'(x_1) - g'(x_1)}{1 + f'(x_1)g'(x_1)}$$

चित्र 25 यह दर्शाता है कि $\psi - \Phi$ एक न्यून कोण है। परंतु यदि वक्र f और g इस

प्रकार हों जैसा कि चित्र 26 में हैं, तब कोण $\theta = \pi - (\psi - \Phi)$ है, क्योंकि हम प्रतिच्छेदन के कोण को न्यून कोण के रूप में लेते हैं।



चित्र 26

इस स्थिति में $\tan\theta = \tan[\pi - (\psi - \Phi)] = -\tan(\psi - \Phi)$ है। परंतु यह निर्णय लेने की स्थिति में नहीं है कि हम $\tan\theta$ को $\tan(\psi - \Phi)$ लें या $-\tan(\psi - \Phi)$ लें, जब तक कि हमने वक्रों को खींच न लिया हो। क्योंकि वक्रों को पहले खींचना और फिर निर्णय लेना जटिल प्रक्रिया है, इसलिए एक वैकल्पिक योजना सोचते हैं। हम देखते हैं कि क्योंकि 0 और $\pi/2$ के बीच में θ स्थित है, इसलिए $\tan\theta$ ऋणेतर है। इस प्रकार, हम $\tan\theta$ को $|\tan(\psi - \Phi)|$ लेते हैं।

अतः, $\tan\theta = \left|\dfrac{f'(x_1) - g'(x_1)}{1 + f'(x_1)g'(x_1)}\right|$ है। ■

इस प्रमेय को सिद्ध करने के बाद, हम सरलता से निम्नलिखित उपप्रमेयों को निगमित कर सकते हैं:

उपप्रमेय 1: दो वक्र $y = f(x)$ और $y = g(x)$ परस्पर (x_1, y_1) पर स्पर्श करती हैं, अर्थात् उनकी (x_1, y_1) पर एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा होती है, यदि और केवल यदि $\theta = 0$ हो, अर्थात् यदि और यदि $f'(x_1) = g'(x_1)$ हो।

उपप्रमेय 2: दो वक्र किसी बिंदु (x_1, y_1) पर परस्पर समकोण पर काटते हैं या लांबिक (orthogonal) होते हैं, यदि और केवल यदि $f'(x_1)g'(x_1) = -1$ हो।

यदि आप निम्नलिखित उदाहरणों को सावधानीपूर्वक पढ़ेंगे, तो आपको बाद में आने वाले प्रश्नों को हल करने में कोई कठिनाई नहीं होगी।

उदाहरण 20: परवलय $y^2 = 2x$ तथा वृत्त $x^2 + y^2 = 8$ के प्रतिच्छेदन के कोण को ज्ञात कीजिए।

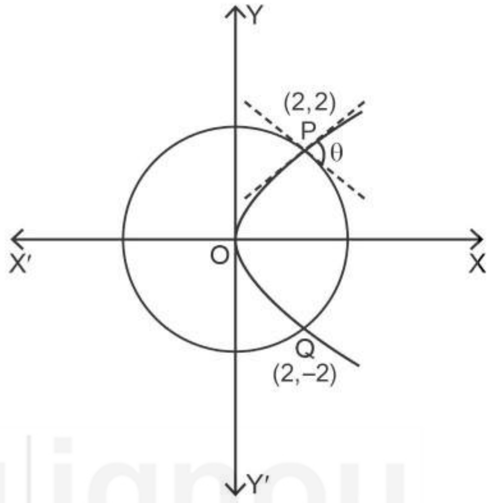
हल: सर्वप्रथम, हम इन वक्रों के प्रतिच्छेद बिंदुओं को ज्ञात करते हैं, यदि कोई हैं। इन बिंदुओं के निर्देशांक परवलय की समीकरण तथा वृत्त की समीकरण दोनों को ही संतुष्ट करेंगे। इसलिए, $x^2 + y^2 - 8$ में $y^2 = 2x$ को प्रतिस्थापित करने पर, हम $x^2 + 2x = 8$ अथवा $x = -4$ या 2 प्राप्त करते हैं।

$y^2 = 2x$ से यह स्पष्ट है कि किसी भी उभयनिष्ठ बिंदु के भुज $x(= y^2/2)$ को ऋणेतर

होना चाहिए। इसलिए, हम मान $x=-4$ को छोड़ देते हैं। जब $x=2$ है, तब $y=\pm 2$ है। अतः, उमयनिष्ठ बिंदु $P(2,2)$ और $Q(2,-2)$ हैं। क्योंकि दोनों वक्र x-अक्ष के सापेक्ष सममित हैं (चित्र 27 देखिए) तथा क्योंकि P और Q एक दूसरे के x-अक्ष के सापेक्ष परावर्तन हैं, इसलिए तब एक ही बिंदु, मान लीजिए, P पर कोण ज्ञात करना ही पर्याप्त है, क्योंकि Q पर कोण P पर कोण के बराबर होगा।

दोनों समीकरणों को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$2y\frac{dy}{dx}=2 \text{ और } 2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$



चित्र 27

अतः, (x, y) पर $f'(x)$ और $g'(x)$ के मान, अर्थात् दोनों वक्रों की स्पर्श रेखाओं की प्रवणताएँ $1/y$ और $-x/y$ हैं। इस प्रकार, दोनों वक्रों की $(2,2)$ पर स्पर्श रेखाओं की प्रवणताएँ क्रमशः $1/2$ और -1 हैं। अतः, यदि θ वाँछित कोण है तो

$\tan\theta=\left|\frac{1/2-(-1)}{1+1/2(-1)}\right|=3$ है।

अतः, $\theta=\tan^{-1}3\approx 71.56^\circ$ है।

***

उदाहरण 21: त्रिघात बहुपद $y=-x^3+6x^2-14x+14$ और द्विघात बहुपद $y=-x^2+6x-6$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

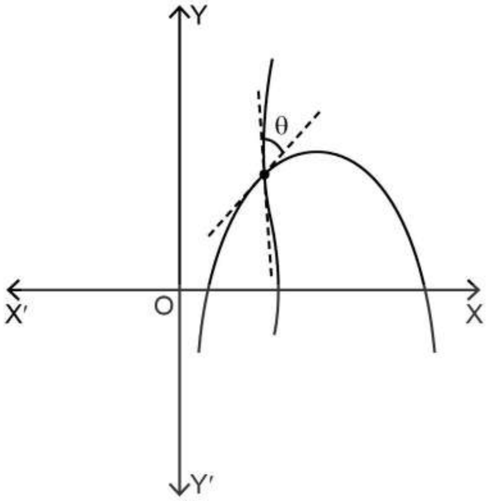
हल: वह बिंदु ज्ञात करने के लिए जहाँ वक्र प्रतिच्छेद करती हैं, हमें उनकी समीकरणों को युगपत् रूप से हल करना चाहिए। अतः, $-x^3+6x^2-14x+14=-x^2+6x-6$ या $x^3-7x^2+20x-20=0$ है। एक त्रिघात समीकरण के मूल ज्ञात करने के लिए, आप इकाई 5 का स्मरण कर सकते हैं। इस त्रिघात समीकरण का एकमात्र वास्तविक मूल $x=2$ है।

तब, हम दिए हुए त्रिघात और द्विघात बहुपदों के $x=2$ पर अवकलजों के मान निकाल कर, उन पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की प्रवणताएँ परिकलित करते हैं। इस प्रकार, $f(x)=-x^3+6x^2-14x+14$ जिससे $f'(x)=-3x^2+12x-14$ है। तब, $f'(2)=-2$ है। साथ ही, $g(x)=-x^2+6x-6$, जिससे $g'(x)=-2x+6$ है। तब, $g'(2)=2$ है।

अंत में, हम चित्र 28 में दर्शाई गई दोनों वक्रों के बीच कोण ज्ञात करने के लिए, सूत्र में स्पर्श रेखाओं की प्रवणताओं को रखते हैं।

$$\tan\theta=\left|\frac{g(x_0)-f(x_0)}{1+g(x_0)f(x_0)}\right|=\left|\frac{-2-2}{1+2\cdot(-2)}\right|=\frac{4}{3} \text{ है।}$$

तब, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ है, जो लगभग $53^\circ 7'$ है।

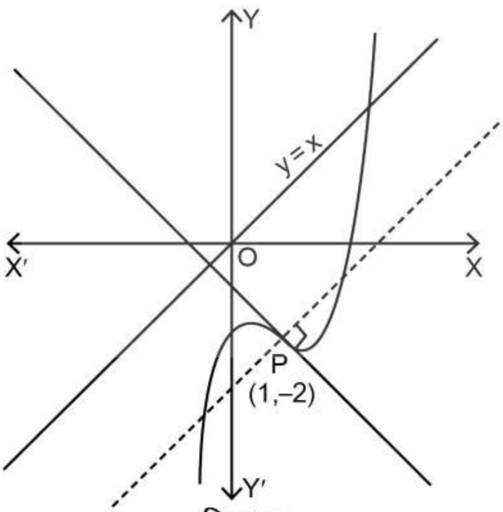


चित्र 28

***

उदाहरण 22: त्रिघात बहुपद $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$ के किस बिंदु पर उसकी स्पर्श रेखा, $y = x$ पर लंब है?

हल: क्योंकि लांबिक रेखाओं की प्रवणताएँ एक दूसरे के ऋणात्मक व्युत्क्रम होते हैं, इसलिए त्रिघात बहुपद की स्पर्श रेखा की प्रवणता $f'(x) = -1$ होनी चाहिए, जो दी हुई रेखा पर लंब है, जिसकी प्रवणता 1 है। अतः, $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ है। इससे हम $f'(x) = -1$ या $3x^2 - 6x + 2 = -1$ प्राप्त करते हैं। इससे स्पर्श बिंदु का भुज $x = 1$ प्राप्त होता है। फिर, हम कोटि प्राप्त करने के लिए, दिए हुए त्रिघात बहुपद में $x = 1$ रखते हैं। इससे $y = x^3 - 3x + 2x - 2$ से $y(1) = -2$ प्राप्त होता है, जिससे स्पर्श बिंदु $(1, -2)$ है, जैसा कि चित्र 29 में दिखाया गया है।



चित्र 29

अब आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E17) परवलयों $y^2 = 4x$ और $x^2 = 4y$ के प्रतिच्छेदन का कोण ज्ञात कीजिए।

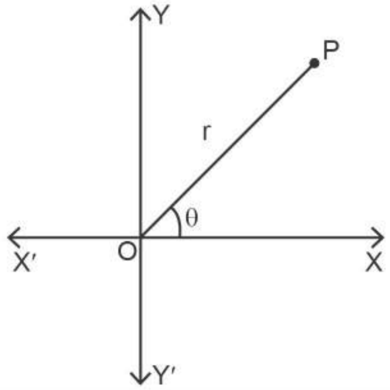
E18) दर्शाइए कि दीर्घ वृत्त $x^2 + 4y^2 = 8$ और अतिपरवलय $x^2 - 2y = 4$ एक दूसरे को चार बिंदुओं पर लांबिक रूप से (समकोण पर) काटते हैं।

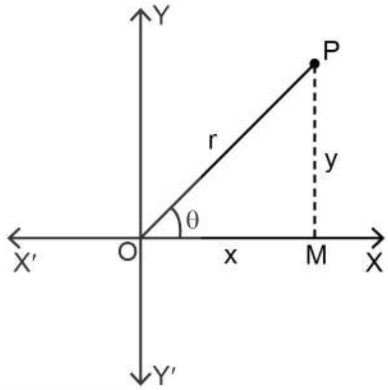
E19) दर्शाइए कि वक्र $xy = a^2$ और $x^2 + y^2 = 2a^2$ परस्पर दो बिंदुओं पर स्पर्श करती हैं (एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा है)।

इकाई 3 का स्मरण कीजिए, जहाँ हमने ध्रुवीय निर्देशांकों की चर्चा की थी। मान लीजिए कि हमें एक समतल में एक प्रारंभिक रेखा दी हुई है [चित्र 30 (क) देखिए]। तब, किसी बिंदु P की स्थिति को ज्ञात किया जा सकता है, यदि हमें ज्ञात होः

i) O से उसकी दूरी r, तथा

ii) OX के साथ OP द्वारा बनाया गया कोण θ।



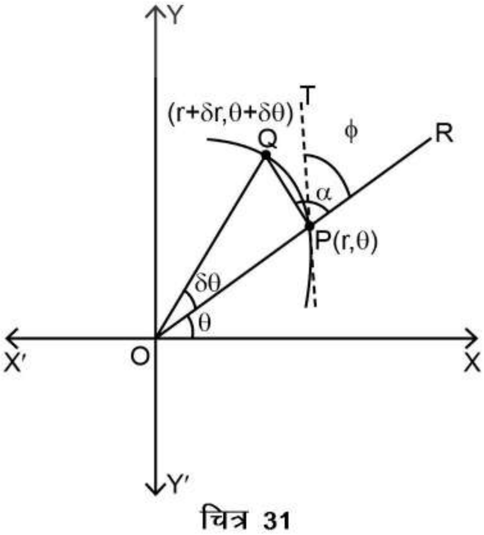


चित्र 30: ध्रुवीय निर्देशांक

r और Q बिंदु P के ध्रुवीय निर्देशांक कहलाते हैं। चित्र 30 (ख) से यह स्पष्ट है कि यदि P के x और y कार्तीय निर्देशांक हैं, तो $x = r\cos\theta$ और $y = r\sin\theta$ है। इससे $r^2 = x^2 + y^2$ और $\tan\theta = y/x$ भी प्राप्त होता है। एक वक्र की समीकरण को कभी-कभी समीकरण $r = f(\theta)$ द्वारा ध्रुवीय निर्देशांकों में व्यक्त किया जाता है। उदाहरणार्थ, केन्द्र O और त्रिज्या r वाले वृत्त की समीकरण $r = a$ है।

अब, आइए दो वक्रों के प्रतिच्छेदन का कोण ज्ञात करने की समस्या पर पुनः वापस आजाएँ।

अभी तक हम जिस निदर्श का पालन करते रहे हैं, उसे प्रयोग नहीं किया जा सकता, यदि वक्र की समीकरण ध्रुवीय रूप में दी हुई है। इस स्थिति में, हम एक प्रकार की अप्रत्यक्ष विधि का अनुसरण करते हैं।



चित्र 31

चित्र 31 पर दृष्टि डालिए। यह एक वक्र को दर्शाता है जिसका समीकरण $r = f(\theta)$ के द्वारा ध्रुवीय रूप में दिया गया है। इस वक्र पर $P(r, \theta)$ और $Q(r+\delta r, \theta+\delta\theta)$ दो बिंदु हैं। P पर PT एक स्पर्श रेखा है तथा OPR मूलबिंदु और बिंदु P से होकर जाने वाली एक रेखा है। अब हम PT और OR के बीच के कोण θ को ज्ञात करने का प्रयास करेंगे।

यहाँ हम देखते हैं कि स्पर्श रेखा PT छेदक रेखा PQ की एक सीमांत स्थिति है। यहाँ हम देखते हैं कि स्पर्श रेखा PT छेदक रेखा PQ की एक सीमांत स्थिति है। यदि PQ और OR के बीच के कोण को हम x द्वारा व्यक्त करें, तो हम इसी प्रकार कह सकते हैं कि α की सीमा φ है, जब वक्र के अनुदिश $Q \to P$ है।

एक ΔABC के लिए साइन नियम का स्मरण कीजिए!
$$\frac{\sin A}{A} = \frac{\sin B}{B} = \frac{\sin C}{C}$$

अब, ΔOPQ से हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{OQ}{OP} = \frac{\sin \angle OPQ}{\sin \angle OQP}$$

या, $\dfrac{r+\delta r}{r} = \dfrac{\sin(\pi-\alpha)}{\sin(\alpha-\delta\theta)}$

या, $1+\dfrac{\delta r}{r} = \dfrac{\sin(\pi-\alpha)}{\sin(\alpha-\delta\theta)}$

$$\sin A - \sin B = 2\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

या, $\dfrac{\delta r}{r} = \dfrac{\sin\alpha - \sin(\alpha-\delta\theta)}{\sin(\alpha-\delta\theta)}$ (क्योंकि $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$ है)

या, $\dfrac{1}{r}\dfrac{\delta r}{\delta\theta} = \dfrac{2\cos(\alpha-\frac{\delta\theta}{2})\sin(\frac{\delta\theta}{2})}{\sin(\alpha-\delta\theta).\delta\theta}$

$$= \frac{2\cos(\alpha-\frac{\delta\theta}{2})}{\sin(\alpha-\delta\theta)} \cdot \frac{\sin(\frac{\delta\theta}{2})}{\frac{\delta\theta}{2}}$$

याद कीजिए कि $\lim\limits_{\delta\theta\to 0} \dfrac{\sin(\delta\theta/2)}{\delta\theta/2} = 1$ है।

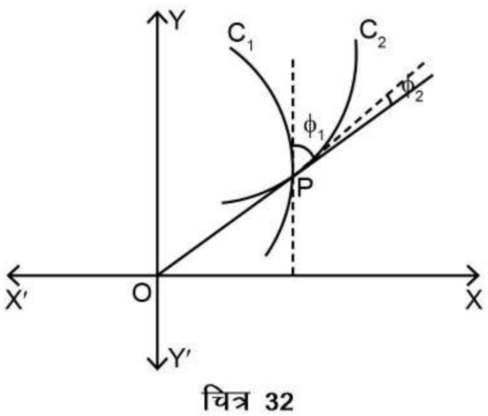
जब $Q \to P$, तब $\alpha \to \phi$, $\delta\theta \to 0$ और $\delta r \to 0$ है। अतः, जब $Q \to P$ है, तब

हम $\dfrac{1}{r}\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{\cos\phi}{\sin\phi} = \cot\phi$ प्राप्त करते हैं।

जिससे $\tan\phi = r \cdot \dfrac{d\theta}{dr}$ है।

यह सूत्र समीकरण $r = f(\theta)$ द्वारा परिभाषित वक्र के बिंदु P पर स्पर्श रेखा तथा OP के बीच के कोण को ज्ञात करने में सहायता करता है।

हम इस परिणाम का प्रयोग दो वक्रों C_1 और C_2 के बीच के कोण को ज्ञात करने में करेंगे, जो बिंदु P (मान लीजिए) पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि OP तथा P पर C_1 और C_2 पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच के कोण क्रमशः ϕ_1 और ϕ_2 हैं, तो C_1 और C_2 के प्रतिच्छेदन का कोण $|\phi_1 - \phi_2|$ होगा (चित्र 32 देखिए)।



चित्र 32

इसे सरलता से परिकलित किया जा सकता है, क्योंकि हमें $\tan\phi_1$ और $\tan\phi_2$ ज्ञात हैं।

इस प्रकार, $\tan|\phi_1 - \phi_2| = \left|\dfrac{\tan\phi_1 - \tan\phi_2}{1+\tan\phi_1 \tan\phi_2}\right|$ है।

आगे, यदि वक्र लांबिक रूप से प्रतिच्छेद करती हैं, तो $\tan\phi_1 . \tan\phi_2 = -1$ है। आगे आने वाले उदाहरण इस चर्चा को स्पष्ट करने में आपकी सहायता करेंगे।

उदाहरण 23: बिंदु $P(a/\sqrt{2}, \pi/8)$ पर वक्रों $r = a\sin 2\theta$ और $r = a\cos 2\theta$ के प्रतिच्छेदन का कोण ज्ञात कीजिए।

हल: P के निर्देशांक दोनों समीकरणों $r = a\sin 2\theta$ और $r = a\cos 2\theta$ को संतुष्ट करते हैं। यदि OP और $r = a\sin 2\theta$ के बीच का कोण ϕ_1 है, तो

$$\tan\phi_1 = r\frac{d\theta}{dr} = \frac{a\sin 2\theta}{dr/d\theta} = \frac{a\sin 2\theta}{2a\cos 2\theta} = \frac{1}{2}\tan 2\theta = \frac{1}{2} \text{ है।}$$

इस प्रकार, यदि OP और $r = a\cos 2\theta$ के बीच का कोण ϕ_2 है, तो

$$\tan\phi_2 = r\frac{d\theta}{dr} = -\frac{1}{2}\cot 2\theta = -\frac{1}{2} \text{ है।}$$

इस प्रकार, $\tan|\phi_1 - \phi_2| = \left|\dfrac{\tan\phi_1 - \tan\phi_2}{1+\tan\phi_1 \tan\phi_2}\right| = \left|\dfrac{1/2+1/2}{1-1/4}\right| = \dfrac{4}{3}$ है।

इस प्रकार, $\phi_1 - \phi_2 = \tan^{-1}(4/3) \approx 53.13^\circ$ है, जो वाँछित कोण है।

***

अब स्वयं कुछ प्रश्न करने का प्रयास कीजिए

E20) निम्नलिखित में से प्रत्येक वक्र के लिए, वक्र पर स्थित एक बिंदु $P(r, \theta)$ को मूलबिंदु से मिलाने वाली रेखा और वक्र की स्पर्श रेखा के बीच का कोण ज्ञात कीजिए:

i) $r^2 = a^2\cos 2\theta$ ii) $1/r = 1 + e\cos\theta$

iii) $r^m = a^m \cos m\theta$ iv) $r^m = a^m(\cos m\theta - \sin m\theta)$

E21) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित दोनों वक्र लांबिक रूप से प्रतिच्छेद करते हैं या नहीं:

i) $r = ae^\theta$ और $re^\theta = b$

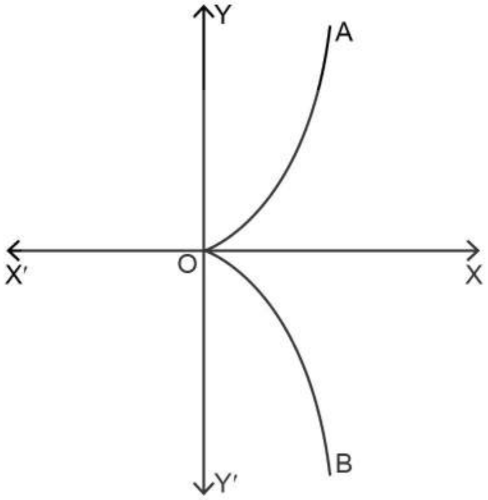
ii) $r = a(1+\sin\theta)$ और $r = a(1-\sin\theta)$

अगले भाग में, हम कुछ विशिष्ट बिंदुओं की चर्चा करेंगे, जो साधारण बिंदुओं से कुछ अलग व्यवहार दर्शाते हैं। ऐसे बिंदु विचित्र बिंदु (singular points) कहलाते हैं।

14.5 विचित्र बिंदु

$y = f(x)$ के प्रकार की एक समीकरण x के दिए हुए मान के लिए y का एक अद्वितीय मान निर्धारित करती है। इसका अर्थ है कि y-अक्ष के समांतर प्रत्येक रेखा वक्र y=f(x)

से एक अद्वितीय बिंदु पर मिलती है। परंतु प्रायः एक वक्र की समीकरण $f(x, y) = 0$ के रूप में दी जाती है। यदि $f(x, y)$ चर y में एक रैखिक व्यंजक नहीं है, तो $f(x, y) = 0$ को $y = F(x)$ के रूप में अद्वितीय रूप से लिखना संभव नहीं भी हो सकता है। उदाहरणार्थ, यदि $f(x, y) = y^2 - x^3$ है, तो $f(x, y) = 0$ से $y^2 = x^3$ प्राप्त होता है। इससे हमें $y = F(x)$ के प्रकार के दो संबंध $y = +x^{3/2}$ और $y = -x^{3/2}$ प्राप्त होते हैं। इस वक्र की दो शाखाएँ हैं, जैसा कि आप चित्र 33 में देख सकते हैं।

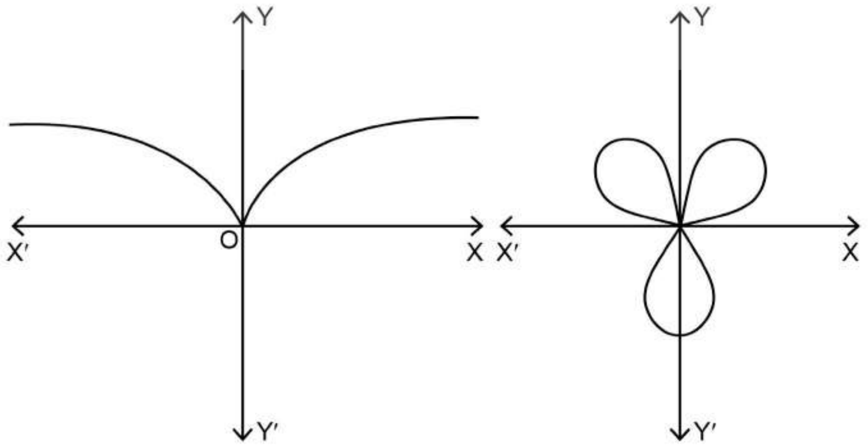


चित्र 33: $y^2 = x^3$ का आलेख

वक्र की दोनों शाखाओं के बीच में मूल बिंदु उमयनिष्ठ है। हम कह सकते हैं कि वक्र $y^2 = x^3$ को बिंदुओं A और B से होकर जाने वाली दोनों शाखाएँ मूलबिंदु पर मिलती हैं। O से बिंदुओं के लिए, हम एक व्यापक नाम **विचित्र बिंदु** (singular points) देते हैं। साथ ही, $y^2 = x^3$ से $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$ प्राप्त होता है, जो $(0, 0)$ पर अनिर्धार्य (indeterminate) है। हम ऐसे बिंदुओं को भी विचित्र बिंदु कहते हैं। हम विचित्र बिंदु पर वक्रों के व्यवहार के बारे में कोई व्यापक कथन नहीं दे सकते हैं। हम इनका स्थिति के अनुसार विश्लेषण करते हैं। इनकी एक परिशुद्ध परिभाषा इस प्रकार है:

परिभाषा: यदि किसी वक्र $f(x, y) = 0$ पर स्थित पर स्थित एक बिंदु P से होकर उस वक्र की k शाखाएँ होकर जाती हैं तथा $k > 1$ है, तो P को कोटि K का **एक विचित्र बिंदु या एक गुणज बिंदु (multiple point)** कहा जाता है।

चित्र 34 गुणज बिंदुओं वाले फलन के आलेख को दर्शाती है।



चित्र 34: द्विक और गुणज बिंदु

कोटि दो वाले गुणज बिंदु को **द्विक बिंदु (double point)** कहा जाता है। इस प्रकार, चित्र 34 (क) में बिंदु O एक द्विक बिंदु है। स्पष्टतः, एक द्विक बिंदु पर एक वक्र की दो स्पर्श रेखाएँ होंगी (प्रत्येक शाखा के संगत एक)। इस पर निर्भर करते हुए कि द्विक बिंदुओं पर स्पर्श रेखाएं भिन्न-भिन्न, संपाती या अधिकल्पित हैं, हम ऐसे बिंदुओं को विशेष नाम देंगे, जैसे पात (node), उभयाग्र (cusp) और संयुग्मी (conjugate), जैसा कि निम्नलिखित परिभाषा दिया गया हैः

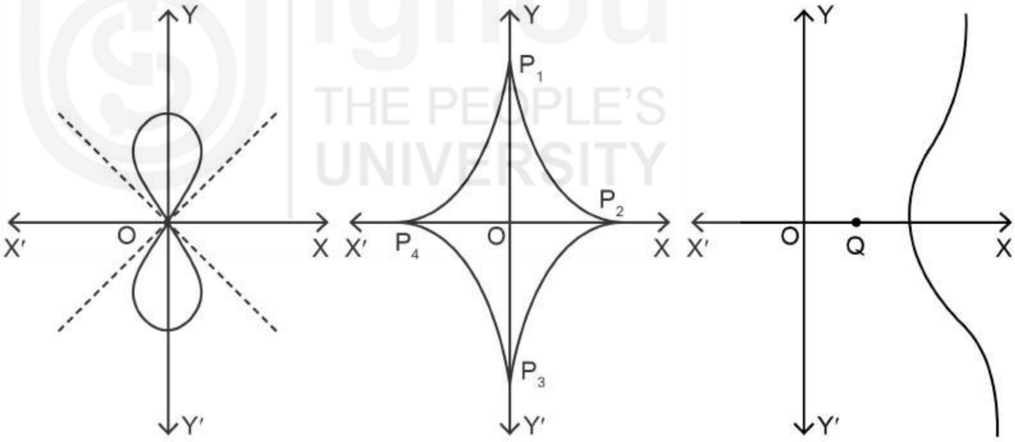
परिभाषाः एक द्विक बिंदु को

i) एक पात कहा जाता है, यदि उस बिंदु पर दोनों स्पर्श रेखाएँ वास्तविक और भिन्न-भिन्न होती है।

ii) एक उभयाग्र कहा जाता है, यदि दोनों स्पर्श रेखाएँ वास्तविक और संपाती होती हैं।

iii) एक संयुग्मी (या वियुक्त (isolated)) बिंदु कहा जाता है, यदि दोनों स्पर्श रेखाएँ अधिकल्पित (imaginary) होती हैं।

चित्र 35 में, हम प्रत्येक के एक उदाहरण को दर्शा रहे हैं। चित्र 35 (क) में, वक्र $f(x, y) = 0$ के लिए, मूलबिंदु एक पात है। चित्र 35 (ख) में, वक्र $g(x, y) = 0$ के लिए, बिंदु P_1, P_2, P_3 और P_4 उभयाग्र हैं, जबकि चित्र 35 (ग) में, वक्र $h(x, y) = 0$ पर स्थित बिंदु Q एक संयुग्मी बिंदु है। इस प्रकार एक संयुग्मी बिंदु एक वियुक्त बिंदु है।



(क) पात (ख) उभायाग्र (ग) वियुक्त बिंदु

चित्र 35

उदाहरण 24: निर्धारित कीजिए कि दिए हुए, फलनों के आलेख एक ऊर्ध्वाधर स्पर्श रेखा है या एक उभयाग्र है।

i) $y^3 = x^2(x+3)^3$

ii) $y^3 = x(x+1)^3$

हलः i) हमें प्राप्त हैः $y^3 = x^2(x+3)^3$ या $y = x^{2/3}(x+3)$

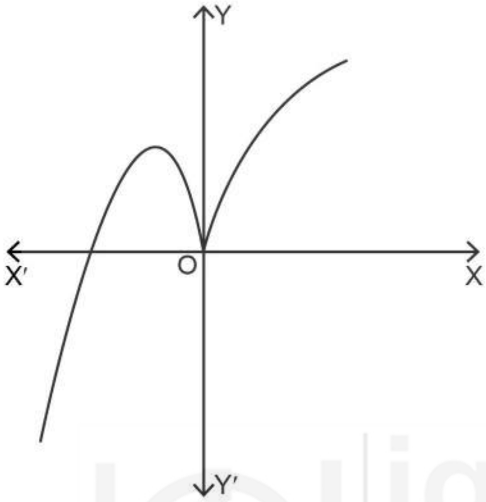
या $y = x^{5/3} + 3x^{2/3}$

इसलिए, $y' = \frac{5}{3}x^{2/3} + 2x^{-1/3}$

$$= \frac{1}{3}(5x^{2/3} + 6x^{-1/3})$$

$$= \frac{1}{3}x^{-1/3}(5x + 6)$$

जब $x \to 0^-$ है, तब $y' \to -\infty$ तथा जब $x \to 0^+$ है, तब $y' \to +\infty$ है। उस अवस्था में जहाँ y' एक बिंदु के एक तरफ $+\infty$ की ओर अग्रसर हो तथा उसी बिंदु के दूसरी तरफ की ओर अग्रसर हो तब वक्र उस बिंदु पर एक उभयाग्र रखता है। अतः, मूल बिंदु पर एक उभयाग्र रखता है। एक उभयाग्र है, जैसा कि चित्र 36 में दर्शाया गया है।



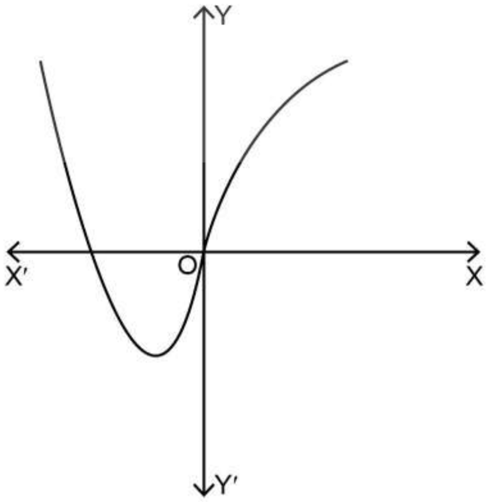
चित्र 36

ii) $y = x^{1/3}(x + 1)$ है।

$$\Rightarrow y' = \frac{4}{3}x^{1/3} + \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

$$= \frac{1}{3}x^{-2/3}(4x + 1)$$

जब $x \to 0^-$ है, तब $y' \to \infty$ है तथा जब $x \to 0^+$ है, तब $y \to \infty$ है। यहाँ, दोनों ओर से $x \to 0$ होने पर $y' \to \infty$ है। इसका अर्थ है कि मूलबिंदु पर एक ऊर्ध्वाधर स्पर्श रेखा है, जैसा कि चित्र 37 में दर्शाया गया है।



चित्र 37

***

अब निम्नलिखित प्रश्न का अभ्यास कीजिए।

E22) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित वक्रों की मूलबिंदु पर ऊर्ध्वाधर स्पर्श रेखा है या उभयाग्र बिंदु।

i) $y = 5x^{7/5} - x^{3/5}$

ii) $y^5 = x^2(2x+1)^5$

आइए इसका सारांश दें कि हमने इस इकाई में क्या अध्ययन किया है।

14.6 सारांश

इस इकाई में, हमने निम्नलिखित बिंदुओं पर चर्चा की है:

1. यदि किसी अंतराल में, $f''(x) > 0$ है, तो उस पर f उत्तल होता है। यदि $f''(x) < 0$ है, तो f उस पर अवतल होता है।

2. यदि $f''(x_0) = 0$ है या उसका अस्तित्व नहीं है तथा x_0 से होकर जाते हुए f'' का चिह्न बदल जाता है, तो $x = x_0$ पर f का एक नतिपरिवर्तन बिंदु होता है। इसका अर्थ है कि $(x_0, f(x_0))$ पर स्पर्श रेखा f के आलेख को इस बिंदु पर काटती है।

3. फलन f की बिंदु c पर वक्रता त्रिज्या $\rho(c) = \frac{(1+(f'(c)^2)^{3/2}}{|f''(c)|}$ तथा वक्रता $k(c) = \frac{1}{\rho(c)}$ होती है।

4. वक्र $y = f(x)$ की (x_0, y_0) पर स्पर्श रेखा की समीकरण $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ होती है।

5. (x_0, y_0) पर वक्र की एक ऊर्ध्वाधर स्पर्श रेखा होती है, यदि उस बिंदु पर $\frac{dx}{dy} = 0$ हो।

6. दो वक्रों $y = f(x)$ और $y = g(x)$ के प्रतिच्छेदन का कोण θ उस प्रतिच्छेद बिंदु पर उनकी स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण होता है। इसे संबंध $\tan\theta = \left|\frac{f'(x) - g'(x)}{1 + f'(x)g'(x)}\right|$ द्वारा दिया जाता है।

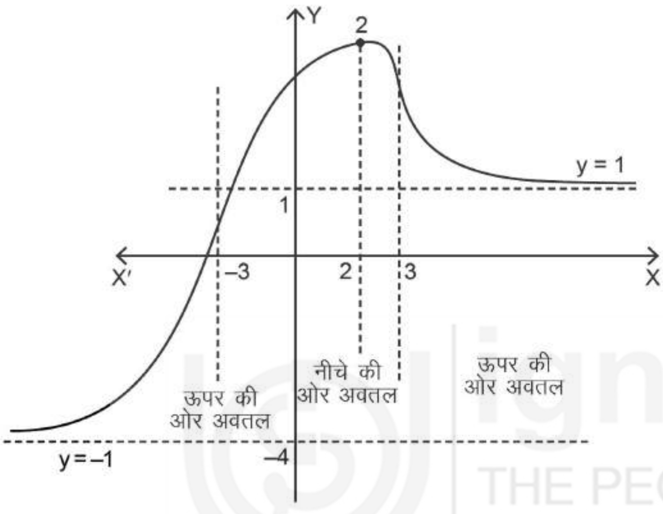
7. $y = f(x)$ और $y = g(x)$ एक दूसरे को (x_0, y_0) पर लांबिक रूप से काटते हैं, यदि $f'(x_0)g'(x_0) = -1$ है।

8. बिंदु θ पर वक्र $r = f(\theta)$ की स्पर्श रेखा और त्रिज्या सदिश (radius vector) के बीच के कोण ϕ को $\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr}$ द्वारा दिया जाता है।

9. यदि वक्र $f(x, y) = 0$ के एक बिंदु से होकर उस वक्र की k शाखाएँ जाती हैं तथा $k > 1$ है, तो P कोटि k का एक विचित्र बिंदु या एक गुणज बिंदु कहलाता है। कोटि 2 के विचित्र बिंदु द्विक बिंदु कहलाते हैं। एक द्विक बिंदु इसके अनुसार एक पात, एक उभयाग्र था एक संयुग्मी (वियुक्त) बिंदु कहलाता है जब कि उस बिंदु पर दोनों स्पर्श रेखाएँ वास्तविक और भिन्न-भिन्न हैं, वास्तविक परंतु संपाती हैं या काल्पनिक हैं।

14.7 हल / उत्तर

E1) प्रतिबंध (i) से, यह स्पष्ट है कि $]-\infty, 2[$ पर f वर्धमान है तथा $]2, \infty[$ पर ह्रासमान है। (ii) से, यह कहा जा सकता है कि $]-\infty, -3[$ और $]3, \infty[$ पर f ऊपर की ओर अवतल है तथा $]-3, 3[$ पर f नीचे की ओर अवतल है। $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -4$ कहती है कि जब $-\infty$ की ओर x अग्रसर होता है, तब, -4 की ओर f अग्रसर होता है तथा $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$ कहती है कि जब $-\infty$ की ओर x अग्रसर होता है, तब 1 की ओर f अग्रसर होता है। f के आलेख का आलेख कुछ इस प्रकार का दिखेगा, जैसा कि चित्र 38 में दिया है।



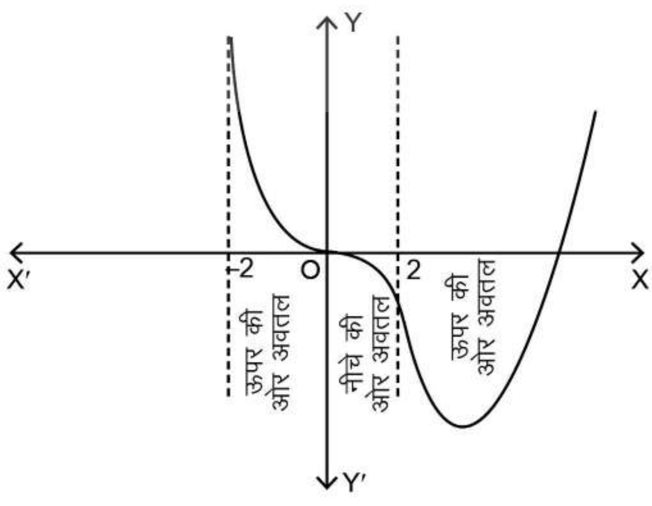
चित्र 38

E2) $f(x) = x^4 - 4x^3$ से हम प्राप्त करते हैं:

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$

$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$

इस प्रकार, $f''(x) > 0$ है, जब $x > 2$ और $x < 0$ है। साथ ही, $f''(x) < 0$ है, जब $0 < x < 2$ है। अतः, $]-\infty, 0[$ और $]2, \infty[$ पर वक्र ऊपर की ओर अवतल है तथा $]0, 2[$ पर वक्र नीचे की ओर अवतल है। आलेख चित्र 39 में दर्शाया गया है।



चित्र 39

E3) i) $]0, \infty[$ में ऊपर की ओर अवतल, $]-\infty, 0[$ में नीचे की ओर अवतल, नतिपरिवर्तन बिंदु $(0, 0)$ है।

ii) $]-\infty, 0[$ में ऊपर की ओर अवतल, $]0, \infty[$ में नीचे की ओर अवतल; नतिपरिवर्तन बिंदु $(0,0)$ है।

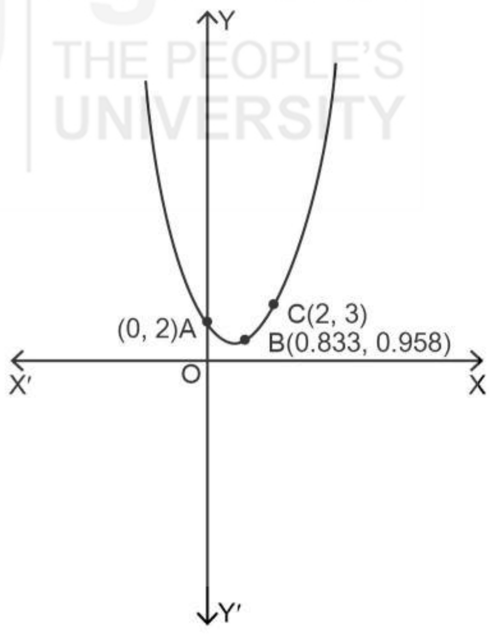
iii) $]-\infty, 0[\cup]2, \infty[$ में ऊपर की ओर अवतल; $]-1, 2[$ में नीचे की ओर अवतल; नतिपरिवर्तन बिंदु $(-1, -8)$, और $(2, 47)$ है।

iv) $x > 3$ में ऊपर की ओर अवतल है, $x < 3$ में नीचे की ओर अवतल है, कोई नतिपरिवर्तन बिंदु नहीं है।

v) सभी $x > 0$ पर नीचे की ओर अवतल, कोई नतिपरिवर्तन बिंदु नहीं है।

vi) $]\pi/2, 3\pi/2[$ में ऊपर की ओर अवतल, $]0, \pi/2[\cup]3\pi/2, 2[$ में नीचे की ओर अवतल, नतिपरिवर्तन बिंदु $(\pi/2, 0), (3\pi/2, 0)$ हैं।

E4) हम देखते हैं कि यह परवलय तीनों बिंदुओं A, B और C में से प्रत्येक से होकर जाता है, जैसा कि चित्र 40 में दर्शाया गया है।

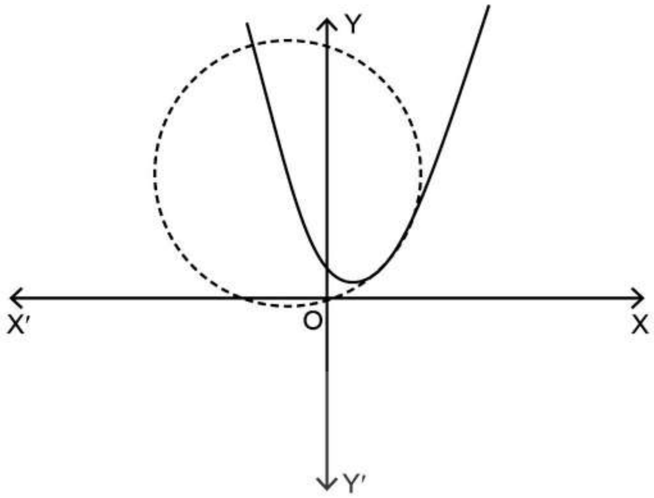


चित्र 40

दिये गए फलन से हम प्राप्त करते हैं $\frac{dy}{dx} = 3x - 2.5$, $x = 2$ पर $\frac{dy}{dx} = 3.5$

अब $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=2 \text{ पर}} = 3$ इस प्रकार वक्रता की त्रिज्या $(2, 3)$ पर $\frac{[1+(3.5)^2]^{3/2}}{3} \approx 16.08$ है।

इसका संगत वक्र चित्र 41 में दर्शाया गया है।



चित्र 41

E5) i) 0

ii) $\dfrac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}$

iii) $\dfrac{-\sin x}{(1+\cos^2 x)^{3/2}}$

iv) -1

E6) i) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=1} = 4$ है। $(1, 4)$ पर स्पर्श रेखा की समीकरण $(y-4) = 4(x-1)$ है, जो कि $4x - y = 0$ है।

$(1, 4)$ पर अभिलंब की प्रवणता $= -1/4$ है।

$(1, 4)$ पर अभलंब की समीकरण $(y-4) = (-1/4)\,(x-1)$ है, जो कि $x + y + 17$ है।

ii) $t = \dfrac{\pi}{4}$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $-b/a$ है।

$t = \dfrac{\pi}{4}$ पर अभिलंब की प्रवणता a/b है।

$t = \pi/4$ पर $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ और $y = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$ है।

स्पर्शरेखा की समीकरणः $\left(y - \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{-b}{a}\left(x - \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$

स्पर्शरेखा की समीकरणः $y - \dfrac{b}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{b}\left(x - \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$

iii) स्पर्श रेखा की प्रवणता $= 3/4$ है।

अभिलंब की प्रवणता $= -4/3$ है।

स्पर्श रेखा की समीकरण $y - 4 = (3/4)\,(x+3)$

अभिलंब की समीकरण $y - 4 = (-4/3)\,(x+3)$

E7) $f'(x) = -3x^2 + 12x$

$f'(x) = 9 \Rightarrow -3x^2 + 12x = 9$

$\Rightarrow \quad -3x^2 + 12x - 9 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 1$ या $x = 3$

$\Rightarrow \quad f(1) = 5$ या $f(3) = 27$ है।

इस प्रकार, वे बिंदु, जहाँ स्पर्श रेखा की प्रवणता 9 है, $(1, 5)$ और $(3, 27)$ हैं।

E8) i) स्पर्श रेखा : $ty = x + at^2$

अभिलंब $y + tx = at(2 + t^2)$

ii) स्पर्श की समीकरणः $(1 + \cos t)y = \sin t(x - at)$ जो कि $\sin(t/2)x - \cos(t/2)y = at\sin(t/2)$ है।

अभिलंब की समीकरणः $\sin(t/2)y + \cos(t/2)x = 2a\sin(t/2) + at\cos(t/2)$.

E9) i) $y - y_0 = -\left(\dfrac{x_0 + 2}{y_0 + 3}\right)(x - x_0)$

ii) $y - y_0 = (-y_0 / x_0)\,(x - x_0)$

E10) $3y = e^{-2x} \Rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = -\dfrac{2}{3}$ है। जब x-निर्देशांक 0 है, तब $(0, 1/3)$ वक्र पर एक बिंदु है।

$(0, 1/3)$ पर स्पर्श रेखा निम्नलिखित द्वारा दी जाती हैः

$y - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{2}{3}x$ या $2x + 3y = 1$

E11) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(a\sqrt{2},\, b)} = \dfrac{b\sqrt{2}}{a}$

अभिलंब की प्रवणता $= -a / b\sqrt{2}$ है।

अभिलंब की समीकरण $y - b = \dfrac{-a}{b\sqrt{2}}(x - a\sqrt{2})$ है।

E12) क्योंकि $\dfrac{dx}{dt} = 2t$ और $\dfrac{dy}{dt} = 3t^2$ है, अतः

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{3t^2}{2t} = \dfrac{3}{2}t\ (t \neq 0)$

साथ ही, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dy'}{dx} = \dfrac{dy'/dt}{dx/dt} = \dfrac{\dfrac{d}{dt}(3/2t)}{dx/dt} = \dfrac{3/2}{2t} = \dfrac{3}{4t}$

क्योंकि वक्र पर बिंदु $(1, 1)$ प्राचलिक समीकरणों में $t = 1$ के संगत है, इसलिए हम प्राप्त करते हैं:

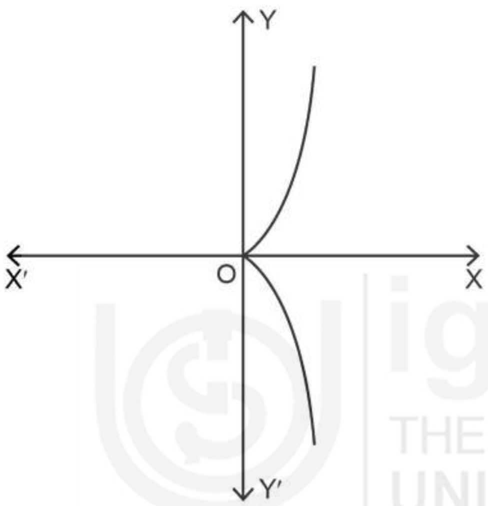
$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \dfrac{3}{2}$ और $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1} = \dfrac{3}{4}$

इसी प्रकार, बिंदु $(1, -1)$ प्राचलिक समीकरणों में $t = -1$ के संगत है।

इससे हम $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-1} = -\frac{3}{2}$ और $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=-1} = -\frac{3}{4}$ प्राप्त करते हैं।

चित्र 42 में दर्शाया गया आलेख भी हमारे द्वारा प्राप्त प्रथम और द्वितीय अवकलजों के मानों को सत्यापित करता है। क्योंकि आलेख की ऊपरी शाखा के बिंदु $(1, 1)$ पर स्पर्श रेखा की धनात्मक प्रवणता है, इसलिए वक्र ऊपर की ओर अवतल है। साथ ही, नीचे की ओर वाली शाखा पर स्थित बिंदु $(1, 1)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता ऋणात्मक है। इसलिए वक्र नीचे की ओर अवतल है।

अंत में, हम देखते हैं कि हम $t = 1$ और $t = -1$ दोनों के लिए dy/dx और d^2y/dx^2 ज्ञात कर पाए हैं, यद्यपि बिंदु $(1, 1)$ और $(1, -1)$ दोनों अलग-अलग शाखाओं पर स्थित हैं।



चित्र 42

E13) $\frac{dx}{dt} = 1 - 2\cos t$ और $\frac{dy}{dt} = 2\sin t$ है। अतः, $\frac{dy}{dx} = \frac{2\sin t}{1 - 2\cos t}$ है।

E14) वक्र की एक क्षैतिज स्पर्श रेखा होगी, यदि $dy/d\theta = 0$ हो तथा $dx/d\theta \neq 0$ हो। इसी प्रकार, वक्र की एक ऊर्ध्वाधर स्पर्श रेखा होगी, यदि $dy/d\theta \neq 0$ हो तथा $dx/d\theta = 0$ हो तथा एक विचित्र बिंदु होगा, जब $dy/d\theta = 0$ और $dx/d\theta = 0$ हो। हम इन अवकलजों को ज्ञात कर सकते हैं। परंतु, एक वैकल्पिक विधि यह होगी कि हम मौलिक सिद्धांतों पर वापस जाएँ तथा हृदयाम को रूपांतरण सूत्रों और $x = r\cos\theta$ और $r = \sin\theta$ में $r = 1 - \cos\theta$ प्रतिस्थापित करके, प्राचलिक रूप में व्यक्त करें। हम $x = (1 - \cos\theta)\cos\theta, y = (1 - \cos\theta)\sin\theta$ प्राप्त करते हैं, जहाँ $0 \le \theta \le 2\pi$ है।

इन समीकरणों को θ के सापेक्ष अवकलित करने तथा सरल करने पर, हम $\frac{dx}{d\theta} = \sin\theta(2\cos\theta - 1)$ और $\frac{dy}{d\theta} = (1 - \cos\theta)(1 + 2\cos\theta)$ प्राप्त करते हैं।
इस प्रकार, $dx/d\theta = 0$ है, यदि $\sin\theta = 0$ है या $\cos\theta = \frac{1}{2}$ तथा $dy/d\theta = 0$ है, यदि $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ है। अतः, अंतराल $0 \le \theta \le 2\pi$ पर $dx/d\theta = 0$ है हल हैं:
$\frac{dx}{d\theta} = 0 : \theta = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$ तथा अंतराल $0 \le \theta \le 2\pi$ या पर $dy/d\theta = 0$ के हल हैं:

$\frac{dy}{d\theta} = 0: \ \theta = 0, \ \frac{2\pi}{3}, \ \frac{4\pi}{3}, \ 2\pi$

इस प्रकार, $\theta = 2\pi/3$ और $\theta = 4\pi/3$ पर वक्र की क्षैतिज स्पर्श रेखाएँ हैं, $\theta = \pi/3, \pi$ और $5\pi/3$ पर ऊर्ध्वाधर स्पर्श रेखाएँ हैं।

E15) i) $x = (1 \pm \sqrt{7})/3$ पर स्पर्श रेखाएँ x-अक्ष के समांतर हैं।

ii) स्पर्श रेखाएँ उन सभी बिंदुओं पर x-अक्ष के समांतर होती हैं, जहाँ किसी पूर्णांक n के लिए $x = n\pi + \pi/2$ है। y-अक्ष के समांतर कोई स्पर्श रेखाएँ नहीं हैं।

E16) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}$ है।

क्योंकि $\frac{x}{2} = 3 \Rightarrow x = 6$ है। जब $x = 6$ है। तब $y = 9$ है। वाँछित स्पर्श रेखा की समीकरण है:

$y - 9 = 3(x - 6)$

$\Rightarrow \ 3x - 4 = 9$ है।

E17) $y^2 = 4x \Rightarrow x = y^2/4 \Rightarrow x^2 = y^4/16 = 4y$ प्रतिच्छेद बिंदु पर

$\Rightarrow y^4 - 64 = 0$

$\Rightarrow y(y^3 - 64) = 0$

$\Rightarrow y(y-4)\,(y^2 + 4y + 16) = 0$

$\Rightarrow y = 0, 4$ (अन्य मूल सम्मिश्र हैं।)

$x = 0$ या 4

(4, 4) पर $y^2 = 4x$ की स्पर्श रेखा की प्रवणता =1/2

(4, 4) पर $x^2 = 4y$ की स्पर्श रेखा की प्रवणता =2

$\Rightarrow$ प्रतिच्छेदन का कोण $= \tan^{-1}(3/4)$

(0, 0) पर $y^2 = 4x$ की स्पर्श रेखा ऊर्ध्वाधर है तथा (0, 0) पर $x^2 = 4y$ की स्पर्श रेखा क्षैतिज है।

अतः, (0, 0) पर वक्रों का प्रतिच्छेदन का कोण $\pi/2$ है।

E18) चार बिंदु $(4/\sqrt{3}, \pm\sqrt{2/3}), (-4/\sqrt{3}, \pm\sqrt{2/3}$ हैं।

$x^2 + 4y^2 = 8$ के लिए, $\frac{dy}{dx} = -x/4y$ है।

$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{4}{\sqrt{3}},\ y=1\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ है।

$x^2 - 2y^2 = 4$ के लिए, $\frac{dy}{dx} = x/2y$ है।

$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=4/\sqrt{3},\ y=\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{2}$ है।

$\therefore$ ये लांबिक रूप से काटती है।

E 19) दोनो बिंदु (a, a) और (–a, –a) हैं।

E 20) i) $2r = -2a^2 \sin 2\theta \dfrac{d\theta}{dr} \Rightarrow \dfrac{d\theta}{dr} = \dfrac{-r}{a^2 \sin 2\theta}$

$\Rightarrow$ कोण $= \tan^{-1}\left(r - \dfrac{d\theta}{dr}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{-r^2}{a^2 \sin 2\theta}\right) = \tan^{-1} - \cot 2\theta)$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) + 2\theta\right)$$

$= (2n+1)\pi/2 + 2\theta$ है।

ii) $\tan^{-1}\left(\dfrac{1 + e\cos\theta}{e\sin\theta}\right)$

iii) $(2n+1)\pi/2 + m\theta \; n \in \mathbb{Z}$

iv) $m\theta - \dfrac{\pi}{4}$

E21) i) $r = ac^{\theta} \Rightarrow 1 = ae^{\theta}.\dfrac{d\theta}{dr} \Rightarrow \dfrac{d\theta}{dr} = \dfrac{1}{ae^{\theta}}$

$$\Rightarrow \tan\phi_1 = r\frac{d\theta}{dr} = \frac{r}{ae^{\theta}} = 1$$

$re^{\theta} = b \Rightarrow r = be^{-\theta} \Rightarrow 1 = -be^{-\theta}\dfrac{d\theta}{dr}$

$\Rightarrow \dfrac{d\theta}{dr} = \dfrac{-1}{be^{-\theta}} \Rightarrow \tan\phi_2 = r\dfrac{d\theta}{dr} = \dfrac{-r}{be^{-\theta}} = -1$

$\Rightarrow \tan\phi_1 \tan\phi_2 = -1 \Rightarrow$ वक्र लांबिक रूप से काटते हैं।

ii) वक्र लांबिक रूप से काटते हैं।

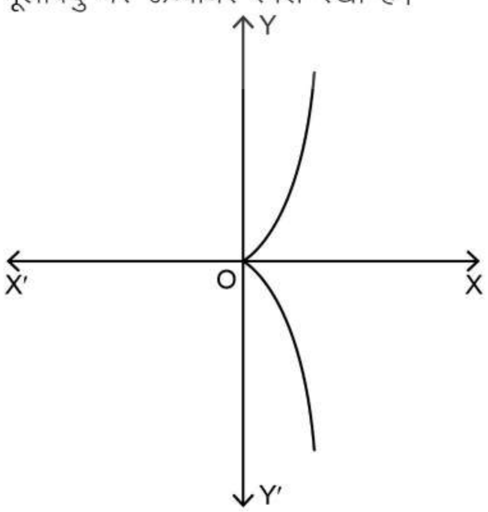
E22) i) $y' = 7x^{\frac{2}{5}} - \dfrac{3}{5}x^{\frac{-2}{5}}$

$= x^{\frac{-2}{5}}\left(7x^{\frac{4}{5}} - \dfrac{3}{5}\right)$

$y' = 0 \Rightarrow 7x^{\frac{4}{5}} - \dfrac{3}{5} = 0$

जब $x \to 0^-$, तब $y' \to \infty$ और जब $x \to 0^+$ तब $y' \to \infty$ है।

अतः वक्र की मूलबिंदु पर ऊर्ध्वाधर स्पर्श रेखा हैं।



चित्र 43

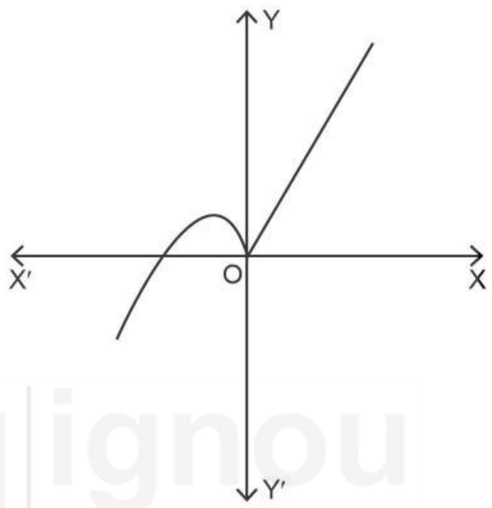
ii) $y = 2x^{\frac{7}{5}} + x^{\frac{2}{5}}$

$$y' = \frac{14}{5}x^{\frac{2}{5}} + \frac{2}{5}x^{\frac{-3}{5}}$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{-3}{5}}(7x+1)$$

जब $x \to 0^-$ तब $y' \to -\infty$ और जब $x \to 0^+$ तब $y' \to +\infty$ है।

अतः मूलबिंदु पर उभयाग्र हैं।



चित्र 44

इकाई 15

अनंतस्पर्शी

इकाई की रूपरेखा **पृष्ठ संख्या**

15.1 प्रस्तावना

पिछली दोनों इकाइयों में, हमने फलन के आलेख के चित्रीयकरण के लिए, प्रथम और द्वितीय अवकलजों के अनुप्रयोगों की चर्चा की थी। इस इकाई में, हम ऐसी रेखाओं के बारे में चर्चा करेंगे जो एक दिये गये वक्र के जितनी संभव हो निकटतर होती जाती है। ऐसी रेखाएँ अनंतस्पर्शी (asymptotes) कहलाती हैं। भाग 15.2 और भाग 15.3 में, आप देखेंगे कि अनंत स्पर्शियाँ तीन प्रकार की होती हैं: क्षैतिज, ऊर्ध्वाधर और तिर्यक (slant/oblines) अनंतस्पर्शियाँ। आप यह देखेंगे कि किस प्रकार ये बहुत उपयोगी सिद्ध होती हैं, जब आप अगली इकाई में वक्र अनुरेखण करना सीखेंगे।

अब हम इस इकाई के उद्देश्यों की सूची देंगे। इस इकाई को पढ़ने के बाद, कृपया इस सूची को पुनः पढ़ें तथा सुनिश्चित कर लें कि आपने यह उद्देश्य प्राप्त कर लिए हैं।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आप

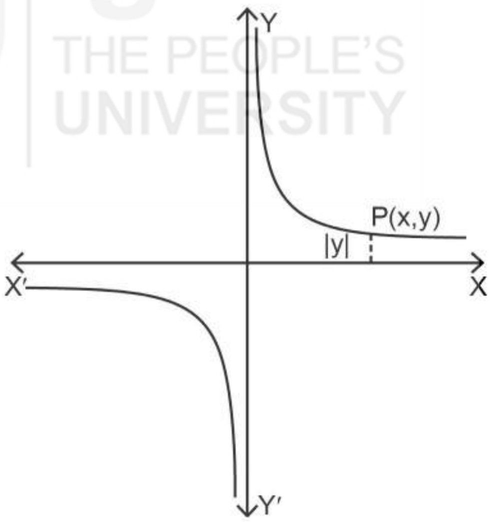
- अक्षों के समांतर अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कर पाएँगे।।
- तिर्यक अनंतस्पर्शियों को परिभाषित कर पाएँगे तथा उनके समीकरण प्राप्त कर पाएँगे।

अब हम वक्रों के अभिलक्षण के बारे में अध्ययन करेंगे जो वक्रों के अनुरेखण में बहुत, उपयोगी सिद्ध होगा, जैसा कि अगली इकाई में देखेंगे। इसमें सीमाएँ जब $x = \to \pm\infty$ या $y \to \pm\infty$ संबद्ध होती हैं। हम अक्षों के समांतर अनंतस्पर्शियों की चर्चा करेंगे।

15.2 अक्षों के समांतर अनंतस्पर्शियाँ

चित्र 1 में दर्शाए गए एक आयताकार अतिपरवलय $xy = c, c > 0$ पर विचार कीजिए। $xy = c$ का अर्थ $y = c/x$ है तथा इसका अर्थ है कि जब $x \to \infty$ या $-\infty$ है, तब $y \to 0$ है। अब, $|y|$ अतिपरवलय पर स्थित किसी बिंदु $P(x, y)$ की x-अक्ष से दूरी है। इसलिए, हम कह सकते हैं कि जब $x \to \infty$ या $-\infty$ है, तब अतिपरवलय पर स्थित किसी बिंदु $P(x, y)$ की x-अक्ष से दूरी शून्य की ओर अग्रसर होती है। दूसरे शब्दों में, इसका अर्थ है कि x-अक्ष एक ऐसी रेखा है जो अतिपरवलय से मिलती प्रतीत होती है। ऐसी रेखाओं को **अनंतस्पर्शियाँ** कहते हैं। हम नीचे अनंतस्पर्शी की परिभाषा देते हैं।

परिभाषा : एक सरल रेखा किसी वक्र की अनंतस्पर्शी कहलाती है, यदि वक्र के अनुदिश कोई बिंदु P जैसे-जैसे अनंत (infinity) की ओर गति करता है, उस सरल रेखा से बिंदु P की लांबिक दूरी शून्य की ओर प्रवृत्त होती जाती है।

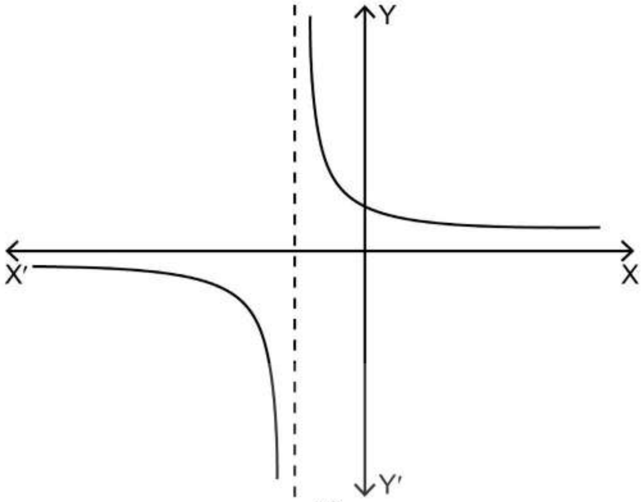


चित्र 1: $xy = c$ का आलेख

$xy = c$ को $x = \dfrac{c}{y}$ के रूप में लिख कर तथा ठीक ऊपर जैसे ही तर्क की पुनरावर्ती करते हुए, हम देख सकते हैं कि y-अक्ष भी अतिपरवलय की अनंतस्पर्शी है।

उदाहरण 1: सिद्ध कीजिए कि x-अक्ष वक्र $y = \dfrac{10}{1+x}$ की एक अनंतस्पर्शी है।

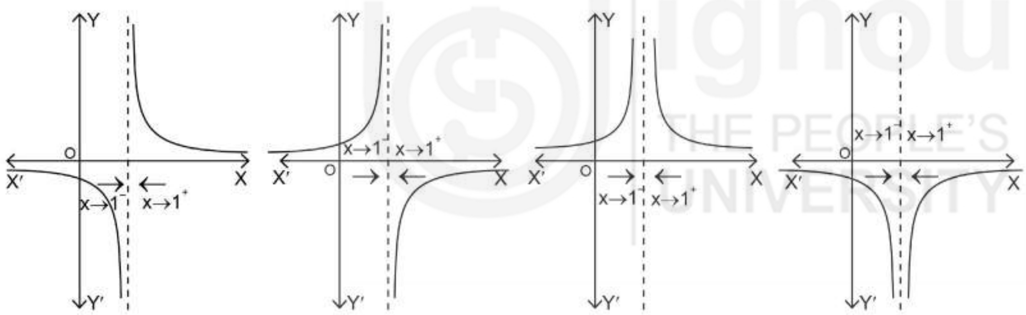
हल : वक्र के समीकरण से हम देखते हैं कि जब $x \to \infty$ या $-\infty$ है, तब $y \to 0$ है। पुनः, इसका अर्थ है कि वक्र पर स्थिति बिंदु $P(x, y)$ की x-अक्ष से दूरी शून्य की ओर प्रवृत्त होती है, जब $x \to \infty$ या $-\infty$ है। इससे सिद्ध होता है कि x-अक्ष उस वक्र की अनंतस्पर्शी है। चित्र 2 भी यही दर्शाता है।



चित्र 2: $y = \dfrac{10}{1+x}$ का आलेख

***

वे अनंतस्पर्शियाँ जो अक्षों के समांतर हैं, या तो क्षैतिज होती हैं या ऊर्ध्वाधर होती हैं। अब अपनी चर्चा ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शियों से शुरू करेंगे। आइए अब चित्र 3 में दिए फलनों के आलेखों में कुछ स्थितियों को देखें।



(क) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ (ख) $f(x) = \dfrac{-1}{(x-1)}$ (ग) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ (घ) $f(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$

चित्र 3

चित्र 3 (क) में, फलन f अनिश्चित रूप से वर्धमान रहता है, जब x दाईं ओर से 1 की ओर अग्रसर होता है तथा अनिश्चित रूप से ह्रासमान रहता है, जब x बाईं ओर से 1 की ओर अग्रसर होता है। अतः, $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1} = +\infty$ और $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{x-1} = -\infty$ है।

इसी प्रकार चित्र 3 (ख) में, फलन अनिश्चित रूप से ह्रासमान रहता है, जब x दाईं ओर से 1 की ओर अग्रसर होता है तथा अनिश्चित रूप से वर्धमान रहता है, जब x बाईं ओर से 1 की ओर अग्रसर होता है। अतः, $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$ और $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-1}{x-1} = +\infty$ है।

इसी प्रकार, चित्र 3 (ग) में, फलन अनिश्चित रूप से वर्धमान है, जब x बाईं और दाईं दोनों ओर से 1 की ओर अग्रसर होता है।

अतः, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ है।

साथ ही, चित्र 3 (घ) में, फलन अनिश्चित रूप से ह्रासमान है, जब x बाईं और दाईं ओर से 1 की ओर अग्रसर होता है।

अतः, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-1}{(x-1)^2}=-\infty$ है।

हम कह सकते हैं कि $f(x)\to+\infty$ है, जब $x\to 1^+$ है, या $x\to 1^-$ है, तो f का आलेख बिना परिबद्धता के ऊपर की ओर चढ़ता है तथा ऊर्ध्वाधर रेखा $x=1$ के निकटतर होता जाता है। यदि $f(x)\to-\infty$ है, जब $x\to 1^+$ या $x\to 1^-$ है, तो f का आलेख बिना परिबद्धता के नीचे की ओर गिरता है तथा $x=1$ के किसी ओर ऊर्ध्वाधर रेखा के निकटतर हो जाता है। ऐसी स्थितियों में, हम रेखा $x=1$ को ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शी या y-अक्ष के समांतर अनंतस्पर्शी कहते हैं। इससे निम्नलिखित परिभाषा पर पहुँचते हैं।

परिभाषा : एक रेखा $x=a$ फलन f की वक्र की एक **ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शी** कहलाती है, यदि $f(x)\to+\infty$ या $f(x)\to-\infty$ जब x किसी भी ओर से a की ओर अग्रसर होता है।

ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शियों में, हमने x के a की ओर अग्रसर होने पर $f(x)$ के व्यवहार की व्याख्या करने के लिए सीमाओं का उपयोग किया है।

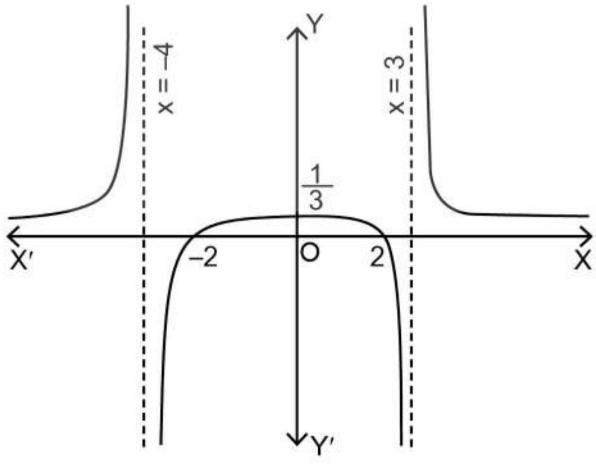
आइए हम निम्नलिखित उदाहरणों में ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शियाँ निकालते हैं:

उदाहरण 2 : $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+x-12}$ द्वारा दिए जाने वाले फलन की ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शियाँ निर्धारित कीजिए।

हल : हम $f(x)$ को पुनः $f(x)=\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+4)(x-3)}$ लिख सकते हैं। आप इस ओर ध्यान दे सकते हैं कि x जब बाईं ओर से 3 के निकटतर होता है, तब फलन के मान ऋणात्मक रूप से, छोटे तथा और छोटे होकर, $-\infty$ की ओर अग्रसर होते हैं। साथ ही, x जब दाईं ओर से 3 के निकटतर होता है, जब फलन के मान धनात्मक रूप से, बड़े तथा और बड़े होकर, $+\infty$ की ओर अग्रसर होते हैं।

इस प्रकार, $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=-\infty$ और $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\infty$ है।

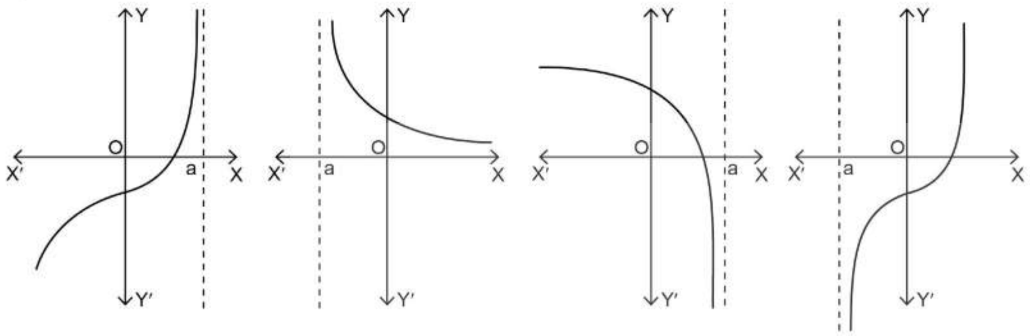
अतः इस फलन के लिए $x=3$ एक ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शी है। इसी प्रकार, $x=-4$ भी एक ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शी है, जैसा चित्र 4 में दर्शाया गया है।



चित्र 4: ऊर्ध्वाधर अनंस्पर्शियाँ

परिमेय फलनों की स्थिति में, यह सदैव सत्य नहीं हो सकता कि हर का प्रत्येक गुणनखंड एक अनंतस्पर्शी हो।

उदाहरणार्थ, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}$ की $x = 1$ पर एक ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शी नहीं है, यद्यपि $x = 1$ से हर 0 हो जाता है। इसका कारण यह है कि जब हम $(x^2 - 1)/(x-1)$ को सरल करते हैं, जब अंश और हर में एक उभयनिष्ठ गुणनखंड है। कुछ संभव विधियाँ जिनमें एक ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शी प्रकट हो सकती है चित्र 5 में दी हैं।



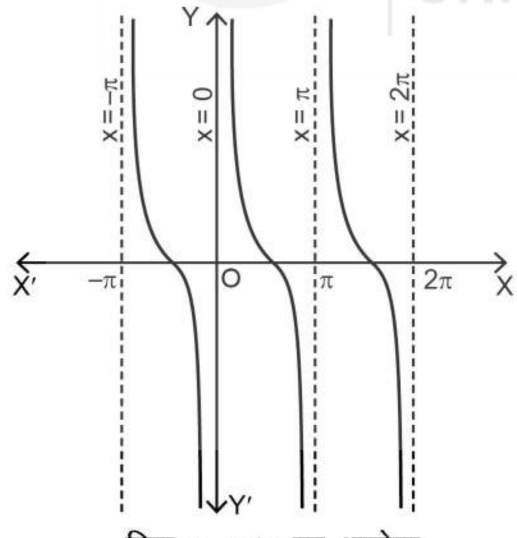
(क) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ **(ख)** $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ **(ग)** $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ **(घ)** $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

चित्र 5: ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शियाँ

***

उदाहरण 3: $y = \cot x$ की ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

हल : कोटैन्जेंट (cotangent) फलन एक आवर्ती (periodic) फलन है, जिसका आवर्त π है। परंतु सर्वसमिका $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ से, आप देख सकते हैं कि कोटैन्जेंट फलन की ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शियाँ हैं, जब $\sin x$ शून्य है, तब $x = n\pi$ पर होता है, जहाँ n एक पूर्णांक है। कोटैन्जेंट फलन का आलेख चित्र 6 में दर्शाया गया है।

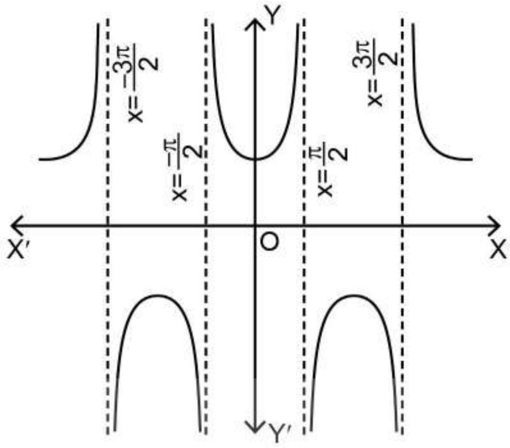


चित्र 6: cot x का आलेख

***

उदाहरण 4: $y = \sec x$ की ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

हल : सीकैन्ट फलन एक आवर्ती फलन है, जिसका आवर्त 2π है। इस फलन की ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शियाँ हैं, जब $\cos x = 0$ है, यह $x = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ पर होता है, जहाँ n एक पूर्णांक है। सीकैन्ट फलन का आलेख चित्र 7 में दर्शाया गया है।

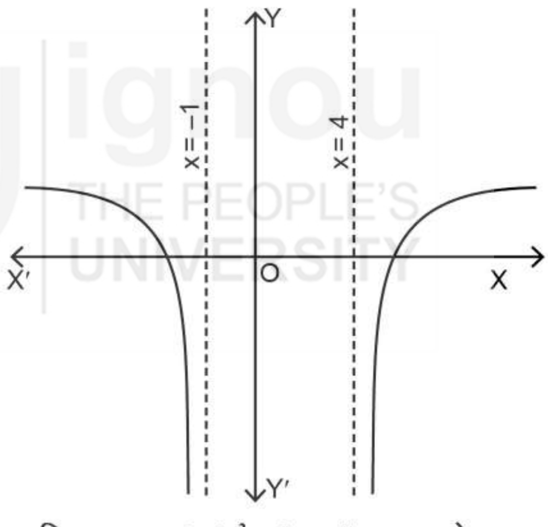


चित्र 7: **sec x का आलेख**

***

उदाहरण 5: $y = \ln(x^2 - 3x - 4)$ की ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

हल : $y = \ln(x^2 - 3x - 4)$ की अनंतस्पर्शियाँ हैं, जब $x^2 - 3x - 4 = 0$ है। इस प्रकार, $x = 4$ और $x = -1$ फलन $y = \ln(x^2 - 3x - 4)$ की ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शियाँ हैं। $y = \ln(x^2 - 3x - 4)$ का आलेख चित्र 8 में दर्शाया गया है।



चित्र 8: **$y = \ln(x^2 - 3x - 4)$ का आलेख**

***

अब निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए:

E1) निम्नलिखित की ऊध्वार्धर अनंतस्पर्शियाँ निर्धारित कीजिए

i) $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2 - 1)}$ iv) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$

ii) $f(x) = \dfrac{7}{x^2 + 49}$ v) $f(x) = 2\cot\dfrac{x}{3}$

iii) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 16}$ vi) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

E2) क्या $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 - x}$ की $x = 0$ एक अनंतस्पर्शी है। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

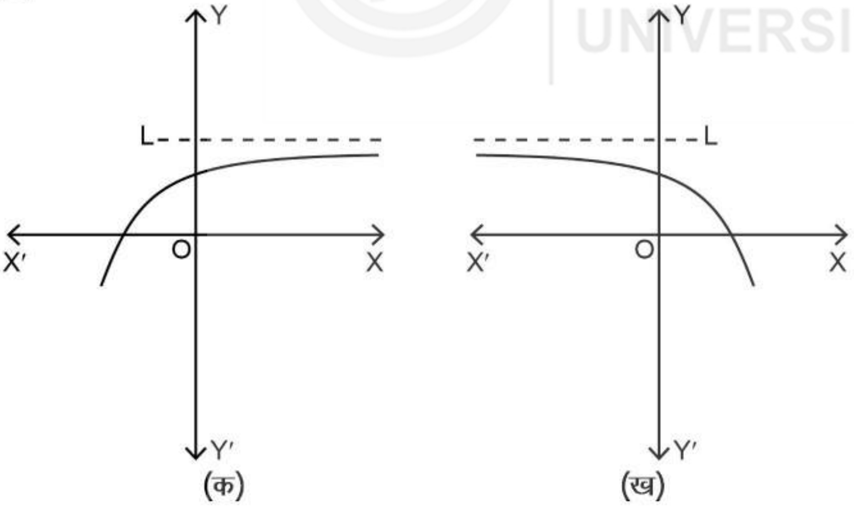
इसी प्रकार, हम क्षैतिज अनंतस्पर्शियों को परिभाषित करते हैं। इसके लिए, पुनः

चित्र 1 पर वापस जाकर, देख सकते हैं कि जब x में बिना परिबद्धता के वृद्धि होती है, तब $f(x) = c/x$ का मान धनात्मक है, परंतु यह 0 के निकटतर तथा और निकटतर होता जाता है तथा जब x में बिना परिबद्धता के कमी होती है, तब $f(x) = c/x$ का मान ऋणात्मक है और यह 0 के निकटतर तथा और निकटतर होता जाता है। हम इन सीमाओं को $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{c}{x} = 0$ और $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{c}{x} = 0, c > 0$ लिखते हैं।

परंतु, कभी-कभी हम एक विशिष्ट x-मान के निकट $f(x)$ के व्यवहार के बारे में चिंता नहीं करेंगे, अपितु इसकी चिंता करेंगे कि $f(x)$ किस प्रकार व्यवहार करता है, जब x में बिना परिबद्धता के वृद्धि होती है या x में बिना परिबद्धता के कमी होती है। यह कभी-कभी फलन का अंत व्यवहार (end behaviour) कहलाता है, क्योंकि यह इसकी व्याख्या करता है कि x के उन मानों के लिए, जो मूलबिंदु से अधिक दूरी पर हैं, फलन किस प्रकार का व्यवहार करता है।

व्यापक रूप में, हम कह सकते हैं कि यदि $f(x) \to L$ है, जब $x \to \infty$ है, तो $y = f(x)$ का वक्र रेखा $y = L$ के निकटतर तथा और निकटतर होता जाता है, जैसा कि चित्र 9 (क) में दर्शाया गया है। हम यह भी कह सकते हैं कि यदि $f(x) \to L$ है, जब $x \to -\infty$ है, तो $y = f(x)$ का आलेख रेखा $y = L$ के निकटतर तथा और निकटतर होता जाता है, जैसा कि चित्र 9 (ख) में दर्शाया गया है। दोनों ही स्थितियों में, हम रेखा L को एक **क्षैतिज अनंतस्पर्शी** या **x-अक्ष के समांतर अनंतस्पर्शी** कहते हैं। इससे निम्नलिखित परिभाषा तक पहुँचते हैं।

परिभाषा : एक रेखा $y = L$ फलन f की वक्र की एक क्षैतिज अनंतस्पर्शी कहलाती है, यदि $f(x) \to L$ है, जब $x \to +\infty$ या जब $x \to -\infty$ है।



चित्र 9

आइए, हम निम्नलिखित उदाहरणों में क्षैतिज अनंतस्पर्शियाँ निकालते हैं।

उदाहरण 6 : $f(x) = \frac{2x+5}{x}$ द्वारा दिए जाने वाले फलन f की क्षैतिज अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

हल : क्षैतिज अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात करने के लिए, हम $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+5}{x}$ पर विचार करते हैं।

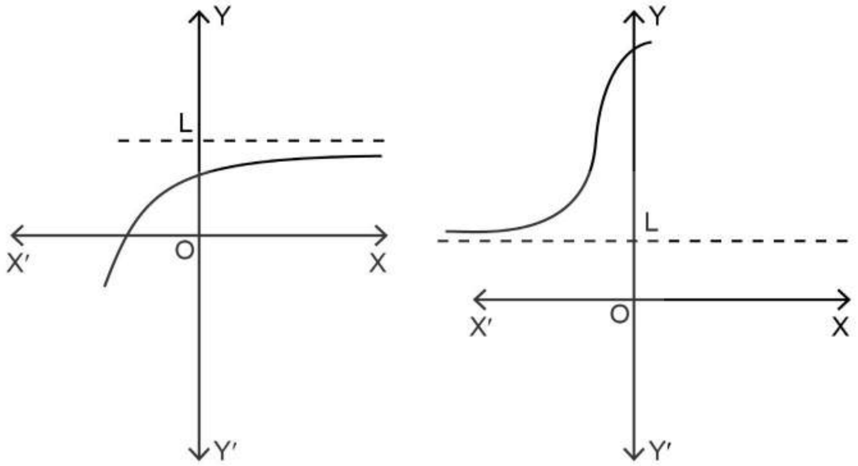
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(2 + \frac{5}{x}\right)$$

$$= 2 \text{ है।}$$

इस प्रकार, वाँछित क्षैतिज अनंतस्पर्शी $y = 2$ है।

***

चित्र 10 (क) और 10 (ख) में, हम दो तरीके देखते हैं जिनमें एक क्षैतिज अनंतस्पर्शी हो सकती हैं।



(क) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ (ख) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$

चित्र 10

उदाहरण 7: $y = \dfrac{5+2^x}{1-2^x}$ की क्षैतिज अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

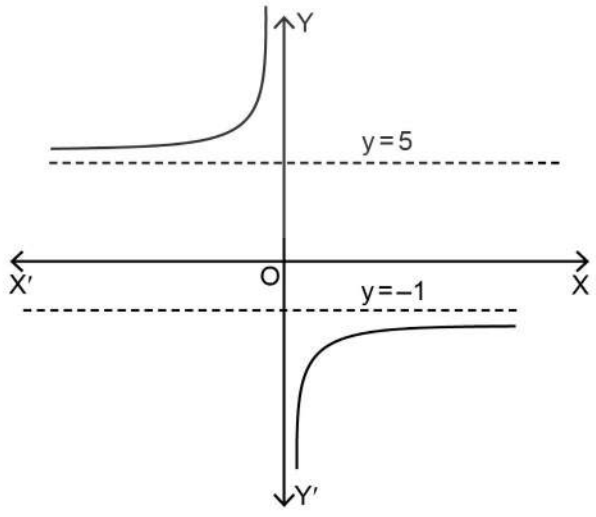
हल : क्षैतिज अनंतस्पर्शी ज्ञात करने के लिए, आइए अनंत पर सीमाएँ ज्ञात करें।

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5+2^x}{1-2^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{2^x}+1}{\frac{1}{2^x}-1}$$

$$= \frac{0+1}{0-1} = -1$$

तथा $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5+2^x}{1-2^x} = \dfrac{5+0}{1-0} = 5$ है।

अतः, क्षैतिज अनंतस्पर्शियाँ $y = -1$ और $y = 5$ हैं, जिन्हें चित्र 11 में दर्शाया गया है।



चित्र 11: $y = \dfrac{5+2^x}{1-2^x}$ का आलेख

***

उदाहरण 8 : $y = x\,e^x$ की क्षैतिज अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

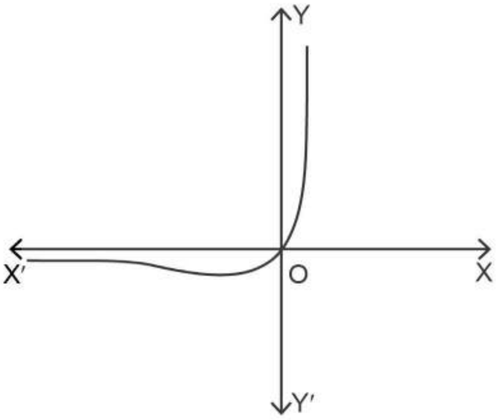
हल : आइए अनंत पर सीमाएँ ज्ञात करें।

$$\lim_{x\to\infty} x\,e^{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ form}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} \text{ (लापिताल नियम के अनुप्रयोग से)}$$

$$= \frac{1}{-\infty} = 0$$

इस प्रकार, $y = x\,e^{x}$ की क्षैतिज अनंतस्पर्शी $y = 0$ है, जिसे चित्र 12 में दर्शाया गया है।



चित्र 12: $y = x\,e^{x}$ का आलेख

अब निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E3) निम्नलिखित में से प्रत्येक की क्षैतिज अनंतस्पर्शी निर्धारित कीजिए:

i) $f(x) = \dfrac{3x+4}{x^3 - x^2 + 5}$

ii) $f(x) = \dfrac{2x^4 - 3x^3}{x^3 + x}$

iii) $f(x) = \dfrac{-1}{x^2 + 2}$

iv) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

v) $f(x) = (1.001)^x$

vi) $f(x) = e^{-3x} \cos x$

vii) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

viii) $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{x}$

E4) एक ऐसा परिमेय फलन f निर्धारित कीजिए, जिसकी $y = 0$ पर एक क्षैतिज अनंतस्पर्शी हो, $x = -2$ और $x = 3$ पर ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शियाँ हो तथा $f(1) = 1$ हो।

अब, हम अक्षों के समांतर अनंतस्पर्शियाँ अभिकलित करने की प्रक्रिया देखेंगे। यहाँ, हम यह निर्णय लेने के लिए कि एक दिये हुए वक्र की अनंतस्पर्शियाँ x और y अक्षों के समांतर हैं या नहीं कुछ जाँच निगमित करेंगे। इसके लिए, हम $f(x, y) = 0$ द्वारा दिये जाने वाले एक वक्र पर विचार करेंगे, जहाँ $f(x, y)$ चरों x और y में एक बहुपद है।

प्रमेय 1: एक सरल रेखा $y = c$ एक वक्र $f(x, y) = 0$ की एक अनंतस्पर्शी होती है, यदि और केवल यदि (iff) फलन $y - c$ में x की उच्चतम घात के गुणांक का एक गुणनखंड होता है।

इस प्रमेय की निम्नलिखित रूप में व्याख्या की जा सकती है:

x-अक्ष के समांतर अनंतस्पर्शियों को वक्र की समीकरण में x की उच्चतम घात के गुणांक के वास्तविक रैखिक गुणनखंडों को शून्य के बराबर करके प्राप्त किया जा सकता है।

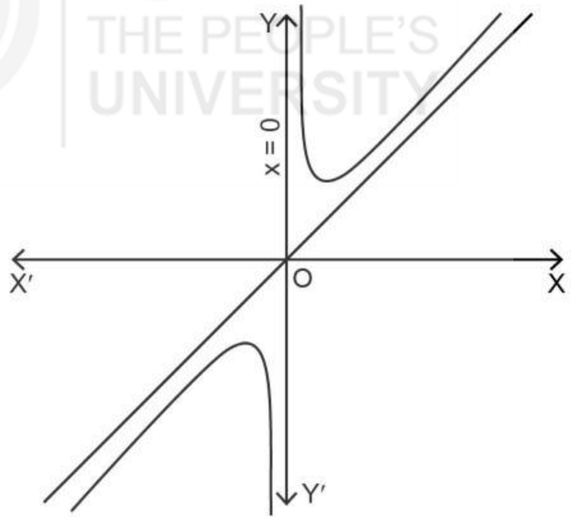
हम प्रमेय की ही तरह, एक अन्य प्रमेय का भी कथन दे सकते हैं, जो यह निर्णय लेने की जाँच का कार्य कर सकती है कि एक दिए हुए वक्र की y-अक्ष के समांतर एक अनंतस्पर्शी है या नहीं।

प्रमेय 2: एक सरल रेखा $x = c$ एक वक्र $f(x, y) = 0$ की एक अनंतस्पर्शी होती है, यदि और केवल यदि $x - c$ फलन $f(x, y)$ में y की उच्चतम घात के गुणांक का एक गुणनखंड होता है।

आइए अब अक्षों के समांतर अनंतस्पर्शियों को ज्ञात करने के कुछ उदाहरण देखें।

उदाहरण 9: वक्र $y = x + \frac{1}{x}$ के लिए, प्रत्येक अक्ष के समांतर अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

हल : दी हुई समीकरण को $f(x, y) = 0$ के रूप में लिखने पर, हम $x^2 - xy + 1 = 0$ प्राप्त करते हैं। आप इस वक्र का आलेख चित्र 13 में देख सकते हैं। $f(x, y) = 0$ में, x की उच्चतम घात 2 है तथा x^2 का गुणांक 1 है। इसमें $y - c$ के रूप का कोई गुणनखंड नहीं है। अतः, x-अक्ष के समांतर कोई अनंतस्पर्शी नहीं है। $f(x, y) = 0$ में, y की उच्चतम घात 1 है तथा y के गुणांक को शून्य के बराबर करने पर, $x = 0$ प्राप्त होता है। अतः, y-अक्ष के समांतर एक अनंतस्पर्शी है तथा यह स्वयं y-अक्ष है।



चित्र 13

***

उदाहरण 10: वक्र $y^2(x^2 - a^2) = x$ की अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

हल : दी हुई समीकरण को पुनः $y^2(x^2 - a^2) - x = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।
x-अक्ष के **समांतर अनंतस्पर्शियाँ**: x^2 (x की उच्चतम घात) के गुणांक को शून्य के बराबर करने पर, हम $y^2 = 0$ प्राप्त करते हैं, जो एक अनंतस्पर्शी के रूप में $y = 0$ प्रदान करता है।

y-अक्ष के समांतर अनंतस्पर्शियाँ: y^2 (y की उच्चतम घात) के गुणांकों को शून्य के

बराबर करने पर, हम $x^2 - a^2 = 0 \Rightarrow x = \pm a$ प्राप्त करते हैं। इस प्रकार, $x = a$ और $x = -a$ दो अनंतस्पर्शियाँ y-अक्ष के समांतर हैं।

अतः, वाँछित अनंतस्पर्शियाँ $x = \pm a, y = 0$ है।

***

उदाहरण 11: वक्र $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$ की निर्देशांक अक्षों के समांतर अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

हल : दी हुई समीकरण को पुनः $a^2y^2 - b^2x^2 - x^2y^2 = 0$ के रूप में लिखी जा सकती है।

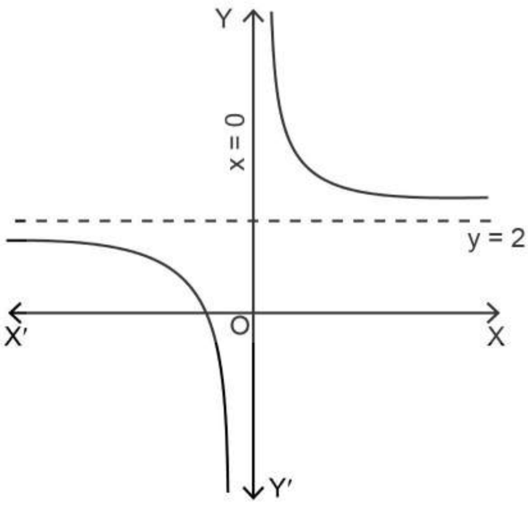
x-अक्ष के समांतर अनंतस्पर्शियाँ: x^2 (x की उच्चतम घात) के गुणांक को शून्य के बराबर करने पर, हम $y^2 + b^2 = 0 \Rightarrow y = \pm ib$ प्राप्त करते हैं, जो दो अधिकलित अनंतस्पर्शियाँ प्रदान करता है।

y-अक्ष के समांतर अनंतस्पर्शियाँ: y^2 (y की उच्चतम घात) के गुणांक को शून्य के बराबर करने पर, हम $x^2 - a^2 = 0 \Rightarrow x = \pm a$ प्राप्त करते हैं। इस प्रकार y-अक्ष के समांतर दो अनंतस्पर्शियाँ $x = +a$ और $x = -a$ हैं।

***

उदाहरण 12: $f(x) = \frac{2x+1}{x}$ द्वारा दी जाने वाली वक्र की अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ हम क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शियाँ सीमा ज्ञात करके निकालते हैं। यहाँ $y = 2 + \frac{1}{x}$ है और $y \to 2$ जब $x \to \infty$ या $x \to -\infty$ है। इसलिए $y = 2$, x-अक्ष के समांतर अनंतस्पर्शी है। जब $y \to \infty$ है तब $x \to 0$ है, इसलिए $x = 0$ एक ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शी है जैसा कि चित्र 14 में दिखाया गया है।



चित्र 14

देखें कि क्या आप इस प्रश्न को स्वयं कर सकते हैं या नहीं।

E5) निम्नलिखित में से प्रत्येक वक्र के लिए, प्रत्येक अक्ष के समांतर अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए, यदि कोई हैं:

i) $x^2y = 2 + y$ ii) $xy^2 = 16x^2 + 20y^2$

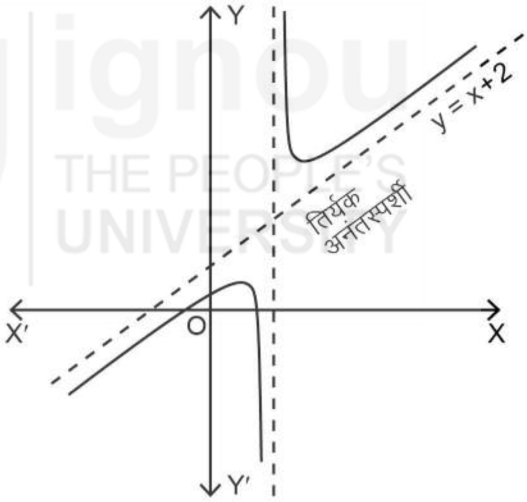
iii) $(x+y)^2 = x^2 + 4$ iv) $x^2y^2 = 9(x^2 + y^2)$

v) $y = \frac{1}{x^2+1}$ vi) $y = \frac{3-10x}{x^2+10}$

अभी तक हम जिन अनंत स्पर्शियों को ज्ञात कर रहे थे, वे अक्षों के समांतर थीं। अगले भाग में, हम ऐसे अनंतस्पर्शियों को ज्ञात करेंगे, जो अक्षों के समांतर नहीं हैं। ये **तिर्यक अनंतस्पर्शियाँ** कहलाती हैं।

15.3 तिर्यक अनंतस्पर्शियाँ

आप यह सोच रहे होंगे कि एक अनंतस्पर्शी क्या सदैव ही किसी निर्देशांक अक्ष के समांतर होनी चाहिए। नहीं, ऐसे अनेक वक्र हैं जिनकी अनंतस्पर्शियाँ न तो ऊर्ध्वाधर होती हैं और न ही क्षैतिज। उदाहरणार्थ, $f(x) = \frac{x^2-1}{x-2}$ पर विचार कीजिए। f का आलेख चित्र 15 में दर्शाया गया है।



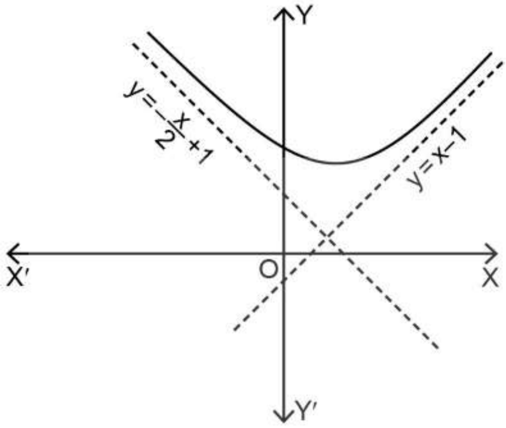
चित्र 15: $\frac{x^2-1}{x-2}$ का आलेख

हम उपरोक्त को $f(x) = (x+2) + \frac{3}{(x-2)}$ के रूप में लिख सकते हैं। हम देखते हैं कि जब $x \to \infty$ है, तब $\frac{3}{x-2} \to 0$ है। अतः, जब x बहुत बड़ा होता जाता है, तब $x+2$ के निकटतर तथा और निकटतर y होता जाता है। इस प्रकार, रेखा $y = x + 2$ एक **तिर्यक अनंतस्पर्शी कहलाती** है।

परिभाषा : एक रेखा $y = mx + c (m \neq 0)$ फलन f के आलेख की एक अनंतस्पर्शी कहलाती है, यदि $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(mx+c)] = 0$ हो या $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(mx+c)] = 0$ हो।

उदाहरणार्थ, यदि हम कहते हैं कि रेखाएँ $y = x - 1$ और $y = -\frac{x}{2} + 1$ किसी वक्र की अनंतस्पर्शियाँ हैं, तो इसका अर्थ है कि जब $x \to \infty$ है तब f का आलेख रेखा $y = x - 1$ की ओर अग्रसर है।

इसलिए $y = x - 1$ फलन f के आलेख की ∞ पर एक तिर्यक अनंतस्पर्शी है। इसी प्रकार, जब $x \to -\infty$ है, तब फलन f का आलेख रेखा $y = -\frac{x}{2} + 1$ की ओर अग्रसर होता है। इसलिए, $y = -\frac{x}{2} + 1$ फलन f के आलेख की $-\infty$ पर एक तिर्यक अनंतस्पर्शी है, जैसा कि चित्र 16 में दर्शाया गया है।



चित्र 16: तिर्यक अनंतस्पर्शियाँ

वापस तिर्यक अनंतस्पर्शी की परिभाषा पर जाते हुए, हम कह सकते हैं कि प्रथम स्थिति में, रेखा $y = mx + c$ फलन $f(x)$ की एक तिर्यक अनंतस्पर्शी है जब $+\infty$ की ओर x प्रवृत्त होता है तथा द्वितीय स्थिति में $y = mx + c$ फलन $f(x)$ की एक तिर्यक अनंतस्पर्शी है, जब $-\infty$ की ओर x प्रवृत्त होता है। फलन $f(x)$ के लिए, तिर्यक अनंतस्पर्शी समीकरण $y = mx + c$ द्वारा दी जाएगी। m का मान पहले अभिकलित किया जाता है तथा इसे निम्नलिखित सीमा द्वारा दिया जाता है।

मान लीजिए कि $y = mx + c$ फलन f की $\pm\infty$ पर एक अनंतस्पर्शी है। तब, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + c)] = 0$ है।

अब, दोनों पक्षों को x से भाग देने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - \frac{mx + c}{x} \right] = 0$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{c}{x} \right] = 0$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m \right] = 0 \qquad \left[\because \lim_{x \to \infty} \frac{c}{x} = 0 \right]$$

इस प्रकार, $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ है।

हम m को $x \to \infty$ और $x \to -\infty$ दोनों स्थितियों के लिए, अलग-अलग प्रकार से हल करके ज्ञात कर सकते हैं। यदि इसी सीमा का कोई अस्तित्व नहीं हो या यह शून्य के बराबर हो, तो उस दिशा में कोई अनंतस्पर्शी नहीं हैं।

m ज्ञात करने के बाद, c का मान $c = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$ अभिकलित करके ज्ञात किया जा सकता है। यदि इस सीमा का अस्तित्व नहीं है, तो उस दिशा में कोई तिर्यक अनंतस्पर्शी नहीं होगी, चाहे m को परिभाषित करने वाली सीमा का अस्तित्व भी हो। आइए निम्नलिखित उदाहरणों में तिर्यक अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात करें:

उदाहरण 13: $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ की तिर्यक अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

हल: हम m और c के मान ज्ञात करेंगे।

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{x^2 - 1}\right)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 \text{ है।}$$

$$c = \lim_{x \to \pm\infty} (y - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - (1)x\right)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0 \text{ है।}$$

इसलिए, तिर्यक अनंतस्पर्शी $y = x$ है।

***

उदाहरण 14: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ की तिर्यक अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

हल: $y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2 - 1}\right) = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ है।

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x}\left[\pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right]$$

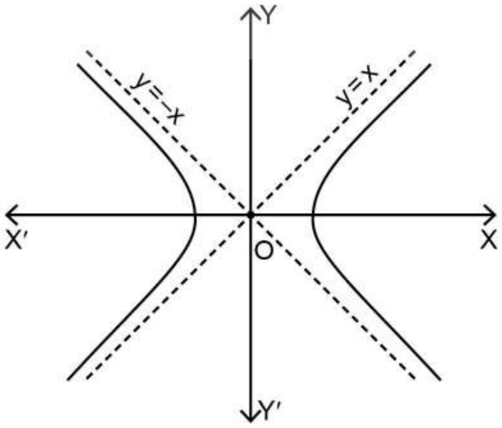
$$= \pm \frac{b}{a} \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

$$= \pm \frac{b}{a}(1) = \pm \frac{b}{a} \text{ है।}$$

$$c = \lim_{x \to \pm\infty}\left(y - \left(\pm \frac{b}{a}x\right)\right) = \pm \frac{b}{a} \lim_{x \to \pm\infty}\left[\sqrt{x^2 - a^2} - x\right]$$

$$= \pm \frac{b}{a} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0$$

इस प्रकार, तिर्यक अनंतस्पर्शियाँ $y = \pm \frac{b}{a}x$ हैं। चित्र 17 में इन अनंतस्पर्शियों को दर्शाया गया है।



चित्र 17: एक अतिपरवलय में अनंतस्पर्शियाँ

***

उदाहरण 15: $f(x)=\sqrt{x^2+9x}$ की तिर्यक अनंतस्पर्शी ज्ञात कीजिए।

हल: प्रवणता $m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+9x}}{x}$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{(x^2)\left(1+\frac{9}{x}\right)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{9}{x}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{9}{x}}}{x} \quad \text{और} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{9}{x}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{9}{x}} \quad \text{और} \quad \lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{9}{x}}$$

$$=1 \text{ और } -1$$

साथ ही, हम m के दोनों मानों के लिए c ज्ञात करेंगे।

जब $m=1$ है, $c=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt{x^2+9x}-x\right]$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+9x-x^2}{\sqrt{x^2+9x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{9x}{\sqrt{x^2+9x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{9x}{x\left(\sqrt{1+\frac{9}{x}}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{9}{\sqrt{1+\frac{9}{x}}+1}=\frac{9}{2} \text{ है।}$$

इसी प्रकार, जब $m=-1$ है, हमें प्राप्त होता है:

$$c=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt{x^2+9x}+x\right]=-\frac{9}{2}$$

अतः, f की ∞ पर तिर्यक अनंतस्पर्शी $y=x+\frac{9}{2}$ और $y=-x-\frac{9}{2}$ हैं।

***

उदाहरण 16: दर्शाइए कि $f(x)=x+\sqrt{x}$ की ∞ पर कोई तिर्यक अनंतस्पर्शी है।

हल: हम इसकी अंतर्विरोध द्वारा उपपत्ति देंगे। मान लीजिए कि f की एक तिर्यक अनंतस्पर्शी $y=mx+c$ है। तब, हमें प्राप्त होना चाहिए:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=1 \text{ या इसका अस्तित्व नहीं है।}$$

अतः, $y = x + c$ है।

इससे फिर हम प्राप्त करते हैं:

$c = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x + \sqrt{x} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x} = \infty$ या इसका अस्तित्व नहीं है।

यह एक अंतर्विरोध है (क्योंकि c परिमित होना चाहिए)।

अतः, f की ∞ पर तिर्यक अनंतस्पर्शी नहीं हो सकती है।

***

आइए किसी वक्र की उस स्थिति में तिर्यक अनंतस्पर्शी ज्ञात करें, जब वक्र की समीकरण $f(x, y) = 0$ के रूप दी गई है।

उदाहरण 17: वक्र $x^3 - y^3 = 3xy$ के लिए तिर्यक अनंतस्पर्शियों की जाँच कीजिए।

हल : मान लीजिए कि दी हुई वक्र की एक तिर्यक अनंतस्पर्शी $y = mx + c$ है। वक्र की समीकरण को $x^3 - y^3 - 3xy = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है। उपरोक्त को x^3 से भाग देने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$1 - \frac{y^3}{x^3} - \frac{3y}{x}.\frac{1}{x} = 0$$

इस प्रकार, $\lim_{x\to\pm\infty}\left[1 - \frac{y^3}{x^3} - \frac{3y}{x}.\frac{1}{x}\right] = 0$

$$\Rightarrow\ 1 - \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{y^3}{x^3}\right) - 3\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{y}{x}\right)\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow\ 1 - \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{y^3}{x^3}\right) = 0 \ [\text{क्योंकि } \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0 \text{ है}]$$

$$\Rightarrow\ 1 - \left[\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{y}{x}\right)\right]^3 = 0$$

$\Rightarrow\ m^3 = 1 \Rightarrow m = 1$ है क्योंकि $m^3 - 1 = 0$ के अन्य मूल सम्मिश्र संख्याएँ हैं।

अब, वक्र की समीकरण को पुनः $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 3xy$ के रूप में लिखने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$c = \lim_{x\to\pm\infty}(y - mx) = \lim_{x\to\pm\infty}(y - x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-3xy}{x^2 + xy + y^2}\right]$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-3}{\frac{x^2}{xy} + \frac{xy}{xy} + \frac{y^2}{xy}}\right]$$

$$= \frac{-3}{1+1+1} \ (\text{क्योंकि } \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{y} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^{-1} = \frac{1}{m} = 1 \text{ है})$$

$$= -1$$

अतः, वाँछित अनंतस्पर्शी $y = x - 1$ है।

***

यदि कोई परिमेय फलन $\frac{P(x)}{Q(x)}$ इस प्रकार का है कि अंश की घात हर की घात से एक अधिक है, तो $\frac{P(x)}{Q(x)}$ के आलेख की एक तिर्यक अनंतस्पर्शी हो सकती है।

अनंतस्पर्शी ज्ञात करने के लिए, हम $\frac{P(x)}{Q(x)} = (ax+b) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ लिखते हैं, जहाँ $R(x)$ की घात $<Q(x)$ की घात है।

अब, $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{P(x)}{Q(x)} - (ax+b)\right] = 0$ [क्योंकि $\lim_{x\to\infty}\frac{R(x)}{Q(x)} = 0$ है]

तथा $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{P(x)}{Q(x)} - (ax+b)\right] = 0$ [क्योंकि $\lim_{x\to-\infty}\frac{R(x)}{Q(x)} = 0$ है]

हम कह सकते हैं कि जब $x \to \infty$ या $x \to -\infty$ है, तब $\frac{P(x)}{Q(x)}$ का आलेख रेखा $\frac{P(x)}{Q(x)}$ की ओर अग्रसर होता है। यह रेखा $y = ax + b$ ही तिर्यक अनंतस्पर्शी है।

निम्नलिखित उदाहरण इस प्रक्रिया की विधि को स्पष्ट करेगा।

उदाहरण 18: $y = \frac{2x^3 - 3x + 4}{x^2}$ की तिर्यक अनंतस्पर्शी ज्ञात कीजिए।

हल : हम $y = 2x + \frac{-3x+4}{x^2}$ लिख सकते हैं।

यहाँ $\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+4}{x^2} = 0$ है तथा $\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x+4}{x^2} = 0$ है।

इस प्रकार, रेखा $y = 2x$ एक वाँछित तिर्यक अनंतस्पर्शी है।

***

अब, इन प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E6) निम्नलिखित में प्रत्येक वक्र के लिए अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए:

i) $x^3 + y^3 = 3ax^2$ ii) $x^4 - y^4 + xy = 0$

iii) $y = \frac{2x^3 + x^2 + 11x + 5}{x^2 + 5}$ iv) $y = 2x - x^2 + 2$

E7) किसी उत्पाद की x इकाइयों के उत्पादन के लागत-फलन को $C(x) = 3x^2 + 80$ द्वारा दिया जाता है। औसत लागत के लिए, तिर्यक अनंतस्पर्शी ज्ञात कीजिए तथा उसकी सार्थकता की व्याख्या कीजिए।

अब आइए इस इकाई में जो हमने अध्ययन किया है, उसका सारांश दें।

15.4 सारांश

इस इकाई में, हमने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. एक सरल रेखा किसी वक्र की एक अनंत (अपरिमित) शाखा अनंतस्पर्शी कही जाती है, यदि जब वक्र पर एक बिंदु उस वक्र के अनुदिश अनंत की ओर गति

करता है, तो उस बिंदु की सरल रेखा से लांबिक दूरी शून्य की ओर प्रवृत्त होती है।

2. निर्देशांक अक्षों के समांतर अनंतस्पर्शियाँ, वक्र की समीकरण में x की उच्चतम घात तथा y की उच्चतम घात के गुणांकों के वास्तविक रैखिक गुणनखंडों को शून्य के बराबर करके प्राप्त की जाती हैं।

3. एक रेखा $y = mx + c (m \neq 0)$ किसी फलन f के आलेख की एक तिर्यक अनंतस्पर्शी होती है, यदि $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + c)] = 0$ या $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + c)] = 0$ हो। m और c के मान क्रमशः $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ और $c = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$ होते हैं।

15.5 हल / उत्तर

E1) i) ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शियाँ $x = 0, x = 1$ और $x = -1$ हैं।

ii) कोई ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शी नहीं है।

iii) ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शियाँ $x = 4$ और $x = -4$ है।

iv) $x = -2$ ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शी है।

v) ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शियाँ $x = 3n\pi$ हैं, जहाँ $n \in \mathbb{Z}$ है।

vi) $x = 0$ ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शी है।

E2) रेखा $x = 0$ एक ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शी नहीं है, क्योंकि $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$ है।

E3) i) $f(x) = \dfrac{\dfrac{3}{x^2} + \dfrac{4}{x^3}}{1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{x^3}}$

क्योंकि $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ है और $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ है, इसलिए रेखा $y = 0$ एक क्षैतिज अनंतस्पर्शी है।

ii) कोई क्षैतिज अनंतस्पर्शी नहीं।

iii) $y = 0$ क्षैतिज अनंतस्पर्शी है।

iv) $y = 0$ क्षैतिज अनंतस्पर्शी है।

v) $\lim_{x \to \infty} (1.001)^x = \infty$ और $\lim_{x \to -\infty} (1.001)^{-x} = 0$ है। इस प्रकार, $y = 0$ एक क्षैतिज अनंतस्पर्शी है।

vi) $\lim_{x \to \infty} e^{-3x} \cos(x) = 0$ है। इसलिए, $y = 0$ एक क्षैतिज अनंतस्पर्शी है।

vii) कोई क्षैतिज अनंतस्पर्शी नहीं।

viii) $y = 0$ एक क्षैतिज अनंतस्पर्शी है।

E4) एक संभव फलन $f(x) = \dfrac{x - 7}{(x + 2)(x - 3)}$ है।

E5) i) $x^2y = 2 + y \Leftrightarrow x^2y - y - 2 = 0$

x की उच्चतम घात 2 है तथा x^2 का गुणांक y है। अतः $y = 0$ एक अनंतस्पर्शी है।

y की उच्चतम घात 1 है, तथा y का गुणांक $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ है। अतः, $x = -1$ और $x = 1$ दो अनंतस्पर्शियाँ हैं, जो y-अक्ष के समांतर हैं।

ii) x-अक्ष के समांतर कोई अनंतस्पर्शी नहीं।

y-अक्ष के समांतर $x = 20$ एक अनंतस्पर्शी है।

iii) y-अक्ष के समांतर कोई अनंतस्पर्शी नहीं।

$y = 0$ एक अनंतस्पर्शी है।

iv) x-अक्ष के समांतर $y = \pm 3$ अनंतस्पर्शियाँ हैं।

y-अक्ष के समांतर $x = \pm 3$ अनंतस्पर्शियाँ हैं।

v) $y = 0$ एक अनंतस्पर्शी है।

vi) $y = 0$ एक अनंतस्पर्शी है।

E6) i) $x^3 + y^3 = 3ax^2$

$$\Rightarrow 1 + (y/x)^3 = 3a/x$$
$$\Rightarrow 1 + \lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^3 = \lim_{x\to\infty}\frac{3a}{x}$$
$$\Rightarrow 1 + m^3 = 0 \Rightarrow m^3 = -1 \Rightarrow m = -1 \text{ है।}$$

$$c = \lim_{x\to\infty}(y - mx) = \lim_{x\to\infty}(y + x)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3ax^2}{x^2 - xy + y^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{3a}{1 - y/x + (y/x)^2}$$
$$= \frac{3a}{1+1+1} = a$$

अतः, अनंतस्पर्शी की समीकरण $y + x = a$ है।

ii) $m = 1, c = 0$ समीकरण $y = x$ है।

$m = -1, c = 0$ समीकरण $y + x = 0$ है।

iii) $y = 2x + 1$

iv) $\lim_{x\to\infty}[f(x) - (mx+1)]$ शून्य नहीं है, क्योंकि 2 अपरिबद्ध है। इसलिए, निम्नलिखित सीमा पर विचार करने पर,

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (mx+c)] = \lim_{x\to-\infty}\left[2x - 2^x + 2 - (mx+c)\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[(2-m)x - 2^x + (2-c)\right]$$

यह सीमा 0 केवल तभी है, यदि $m = 2$ और $c = 2$ हो। इस प्रकार, तिर्यक अनंतस्पर्शी की

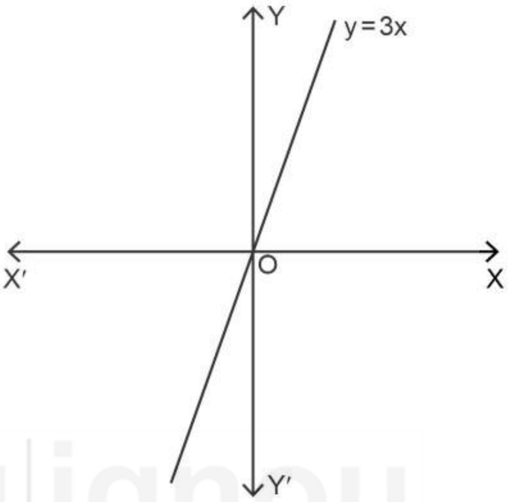
समीकरण $y = 2x + 2$ है।

E7) औसत लागत-फलन $A(x) = \frac{C(x)}{x}$

$$A(x) = \frac{3x^2 + 80}{x} = 3x + \frac{80}{x}$$

यहाँ, $\lim_{x\to\infty} \frac{80}{x} = 0$ और $\lim_{x\to-\infty} \frac{80}{x} = 0$ है।

इस प्रकार, $A = 3x$ एक तिर्यक अनंतस्पर्शी है।



चित्र 18: एक अतिपरवलय में अनंतस्पर्शियाँ

इकाई 16

वक्र अनुरेखण

इकाई की रूपरेखा — पृष्ठ संख्या

16.1 प्रस्तावना

एक चित्र एक हज़ार शब्दों के बराबर होता है। एक वक्र जो किसी फलन का एक चित्रीय प्रतिबिंब होता है, हमें प्रचुर मात्रा में सूचनाएँ प्रदान करता है। निस्संदेह, हम इन सूचनाओं को इस फलनीय संबंध को परिभाषित करने वाली समीकरण के विश्लेषण द्वारा भी प्राप्त कर सकते हैं। संबंधित वक्र का अध्ययन प्रायः सरल और तीव्र होता है। इसके अतिरिक्त, एक वक्र, जो दो राशियों के मध्य संबंध को निरूपित करता है, एक राशि के एक अन्य राशि के विशिष्ट मान के संगत मान ज्ञात करने में हमारी सहायता भी करता है। इस इकाई में, हम यह समझने का प्रयास करेंगे कि $y = f(x)$ जैसे किसी फलन के आलेख तथा एक बिंदु पर एक से अधिक शाखाओं वाले वक्र $f(x, y) = 0$ का क्या अर्थ है और इसके आलेख को किस प्रकार खींचा जाता है। हम यहाँ पूर्व इकाइयों में अध्ययन किए गए अनेक परिणामों का उपयोग करेंगे। इस इकाई के साथ, हम खंड 4 की समाप्ति पर आ जाते हैं, जिसमें हमने अवकल गणित की सहायता से फलनीय संबंधों के अनेक ज्यामितीय अभिलक्षणों का अध्ययन किया है।

अब, हम इस इकाई के उद्देश्यों की सूची देंगे। इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, कृपया इस सूची को पुनः पढ़ें तथा सुनिश्चित कर लें कि आपने ये उद्देश्य प्राप्त कर लिए हैं।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आप

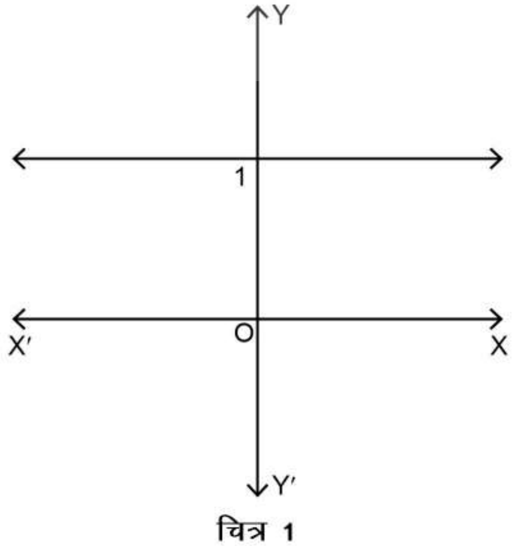
- उन गुणों की सूची दे पाएँगे जिन्हें एक वक्र के अनुरेखण के लिए उपयोग किया जा सकता है।
- कुछ वक्रों का अनुरेखण कर पाएँगे, जिनके समीकरण कार्तीय, प्राचलिक और ध्रुवीय रूप में दिए गए हैं।

16.2 एक वक्र का अनुरेखण : कार्तीय समीकरण

इकाई 2 से याद कीजिए कि एक फलन $f : D \to \mathbb{R}$ के आलेख से हमारा तात्पर्य बिंदुओं के समुच्चय $\{(x, f(x)) : x \in D\}$ से होता है। एक फलन के आलेखीकरण का अर्थ होता है कि संगत समुच्चय के बिंदुओं को एक समतल में दर्शाना। इस प्रकार, वक्र अनुरेखण का अर्थ उन बिंदुओं को आलेखित करना है जो एक दिए हुए संबंध को संतुष्ट करते हैं। परंतु, इसमें कुछ कठिनाइयाँ संबद्ध होती हैं। आइए देखें कि ये कठिनाइयाँ क्या हैं तथा किस प्रकार इनका सामना किया जाता है।

प्रायः यह संभव नहीं होता कि किसी वक्र पर स्थित सभी बिंदुओं को आलेखित कर लिया जाए। इसकी मानक तकनीक यह है कि कुछ उपयुक्त बिंदुओं को आलेखित कर लिया जाए तथा इस वक्र के आकार की एक व्यापक धारणा उसकी स्पर्श रेखाओं, अनंतस्पर्शियों, विचित्र बिंदुओं, नतिपरिवर्तन बिंदुओं, अवतलता, एकदिष्टता, आवर्तिता, इत्यादि पर विचार करके प्राप्त कर ली जाए। तब, हम एक मुक्त हस्त वक्र (free hand curve) खींचते हैं, जो उसके अनेक गुणों को लगभग जितना संभव है उतना संतुष्ट करती है।

वक्र या आलेख जो हम खींचते हैं, उसकी एक सीमा है। यदि एक (या दोनों) चरों के मानों का परिसर परिमित नहीं है, तो संपूर्ण आलेख को खीचना संभव नहीं होता। ऐसी स्थितियों में, आलेख न केवल सन्निकट होता है, अपितु अपूर्ण भी होता है। उदाहरणार्थ, सरलतम वक्र एक सरल रेखा पर विचार कीजिए। मान लीजिए कि हम $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ के आलेख को खींचना चाहते हैं ताकि $f(x) = 1$ है। हम जानते हैं कि यह x-अक्ष के समांतर एक सरल रेखा है। परंतु संपूर्ण आलेख खींचना इसलिए संभव नहीं है, क्योंकि यह रेखा दोनों ओर अनिश्चित रूप से विस्तृत है। हम इसे दोनों सिरों पर तीरों द्वारा इंगित करते हैं, जैसा कि चित्र 1 में दर्शाया गया है।



चित्र 1

अब, हम एक फलन के आलेख को हाथ से खींचने की समस्या को लेते हैं, जबकि समीकरण कार्तीय रूप में दी हुई हो।

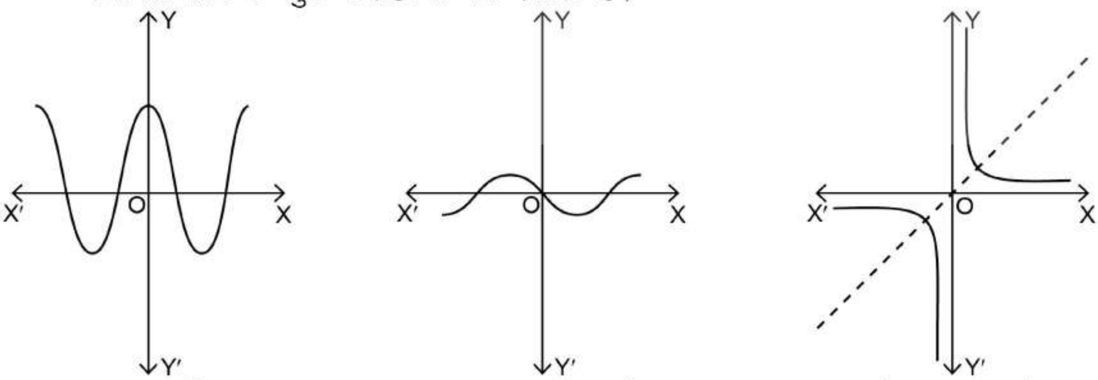
अब, हम कुछ गुणों की सूची देंगे, जिनको उपयुक्त समय पर लेने पर, इस वक्र के अनुरेखण का कार्य हमारे लिए सरल हो जाता है। हम इन सभी गुणों की चर्चा कर चुके हैं। अब, हम इनका सारांश एक-एक करके देंगे।

i) **सरलीकरण** : आप जिस फलन $y=f(x)$ का आलेख खींचना चाहते हैं, यदि संभव है, उसको सरल कीजिए। उदाहरणार्थ, यदि $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{(x-1)}, x\neq 1$ द्वारा f परिभाषित है, तो आपको इसे यहाँ लिखी प्रक्रिया प्रारंभ करने से पहले $f(x)=x+2, x\neq 1$ के रूप में लिखना चाहिए।

ii) **प्राँत और परिसर** : $y=f(x)$ की स्थिति में, हम प्राँत और परिसर ज्ञात करते हैं तथा उन्हीं के अनुसार क्षेत्रों को अंकित करते हैं।

iii) **आवर्तिता** : इकाई 6 का स्मरण कीजिए, जहाँ हमने फलनों की चर्चा की थी। **आवर्तिता** किसी फलन की एक निश्चित अंतराल में एक नियमित पैटर्न के अनुसार स्वयं की बार-बार प्रकट होने की प्रवृत्ति है। उदाहरणार्थ, सभी त्रिकोणमितीय फलनों में आवर्तिता होती है। यदि D में सभी x के लिए $f(x+p)=f(x)$ हो, जहाँ p एक धनात्मक अचर है, तो f एक आवर्ती (periodic) फलन कहलाता है तथा न्यूनतम p इस **फलन का आवर्त** कहलाता है। एक वक्र का अनुरेखण करते समय, यदि हमें ज्ञात है कि वह फलन आवर्ती है तथा आवर्त p है, तो हम संपूर्ण वक्र का स्कैच खींचने के लिए, स्थानांतरण (translation) करते रहते हैं [स्थानांतरण के लिए इकाई 3 का स्मरण कीजिए]।

iv) **सममिति** : अगला चरण यह है कि ज्ञात करें कि क्या वक्र किसी रेखा या मूलबिंदु के सापेक्ष सममित (symmetric) है। कोई वक्र एक रेखा के सापेक्ष सममित होता है, यदि हम उस वक्र को उस रेखा के अनुदिश मोड़ें, तो वक्र की दोनों स्थितियाँ यथार्थ रूप से परस्पर संपाती हो जाती हैं। एक वक्र मूलबिंदु के सापेक्ष सममित होती है, यदि उसे 180° के घूर्णन (rotation) करने पर, हमें वही वक्र प्राप्त हो जाती है। वक्रों की सममिति की चर्चा, हम इकाई 6 में पहले ही कर चुके हैं। चित्र 2 आपको सममित वक्रों के कुछ उदाहरणों को दर्शाती है।



(क) x-अक्ष के सापेक्ष सममित

(ख) मूलबिंदु के सापेक्ष सममित

(ग) रेखा $y=x$ के सापेक्ष सममित

चित्र 2

यहाँ हम आपके लिए कुछ संकेत दे रहे हैं, जो किसी वक्र की सममितता निर्धारित करने में आपकी सहायता करेंगे।

(क) **y-अक्ष के सापेक्ष सममिति:** किसी फलन $y = f(x)$ का आलेख y-अक्ष के सापेक्ष सममित कहा जाता है, यदि f एक सम (even) फलन होता है, अर्थात् x के स्थान पर $-x$ लिखने पर, वक्र की समीकरण में कोई परिवर्तन नहीं होता है। उदाहरणार्थ, $y = \cos x,\ y = x^2, y = |x|$ इत्यादि। इसका अर्थ है कि हमारा कार्य आधा रह जाता है। यदि हमें यह ज्ञात है कि $x \geq 0$ के लिए वक्र कैसा दिखता है, जो संपूर्ण वक्र प्राप्त करने के लिए, हमें उसे केवल y-अक्ष में परावर्तित करने की आवश्यकता होती है।

(ख) **मूलबिंदु के सापेक्ष सममिति** : इकाई 6 का स्मरण कीजिए, जहाँ हमने सीखा कि विषम (odd) फलन मूलबिंदु के सापेक्ष सममित होते हैं। अर्थात् यदि $f(x) = -f(-x)$ हो, तो वक्र मूलबिंदु के सापेक्ष सममित होता है, ऐसी स्थितियों में, यह पर्याप्त होता है कि x-अक्ष के ऊपर आलेख के भाग को खींचा जाए तथा संपूर्ण आलेख प्राप्त करने के लिए उसमें 180° का घूर्णन कर दिया जाए (अर्थात् उसे 180° के कोण पर घुमा दिया जाए)। ऐसे कुछ फलन $y = x^3, y = \sin x, y = x$ इत्यादि हैं।

(ग) **रेखा $y = x$ के सापेक्ष सममिति** : यदि x और y को परस्पर बदलने पर वक्र की समीकरण में कोई परिवर्तन नहीं होता, तो वह वक्र रेखा $y = x$ के सापेक्ष सममित होती है।

v) **अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु** : अगला चरण है कि उन बिंदुओं को निर्धारित करना जहाँ वह वक्र अक्षों को प्रतिच्छेद करता है। यदि हम $y = f(x)$ में $y = 0$ रखते हैं तथा परिणामी समीकरण को x के लिए हल करते हैं, तो हमें x-अक्ष के साथ प्रतिच्छेद बिंदु प्राप्त होता है। इसी प्रकार, $x = 0$ रखने पर तथा परिणामी समीकरण को y के लिए हल करने पर, हम y-अक्ष के साथ प्रतिच्छेद बिंदु ज्ञात कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, वक्र $y = 3x^2 - x^3$ में, यदि $y = 0$ रखें, तो हमें $x = 0, 3$ प्राप्त होते हैं तथा यदि हम $x = 0$ रखें, तो हम $y = 0$ प्राप्त करते हैं। इस प्रकार, वक्र अक्षों को $(0, 0)$ और $(3, 0)$ पर प्रतिच्छेद करती है। यदि समीकरण को हल करना कठिन हो, तो आप इस चरण को छोड़ सकते हैं।

vi) **असंततता के बिंदु** : वे बिंदु निर्धारित करने का प्रयास कीजिए, जहाँ फलन असंतत है।

vii) **वर्धमान और ह्रासमान फलनों के अंतराल** : इसके लिए, dy/dx परिकलित कीजिए। इससे आपको यह निर्धारित करने में सहायता मिलेगी कि कहाँ वक्र ऊपर चढ़ता हुआ है $(dy/dx > 0)$ या नीचे गिरता हुआ है $(dy/dx < 0)$ । आप इकाई 13 का स्मरण कर सकते हैं।

viii) **अवतलता और नतिपरिवर्तन बिंदु** : इकाई 14 का स्मरण कीजिए तथा x के सापेक्ष द्वितीय अवकलज ज्ञात कीजिए। $\frac{d^2y}{dx^2}$ से, आप अवतलता ज्ञात कर सकते हैं। वक्र ऊपर की ओर अवतल होता है, जहाँ $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ है तथा नीचे की ओर अवतल होता है, जहाँ $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ है। नतिपरिवर्तन बिंदु वहाँ प्रकट होते हैं, जहाँ अवतलता की दिशा में परिवर्तन होता है। इससे आपको वक्र के आकार के बारे में एक सही धारणा प्राप्त होगी।

ix) **सापेक्ष चरम बिंदु** : इकाई 13 से स्मरण कीजिए कि हम सापेक्ष उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ ज्ञात करने के लिए, द्वितीय-अवकलज जाँच का उपयोग करते हैं। हम निम्नलिखित परीक्षण में प्रथम कोटि की क्रांतिक संख्याओं x_0 को प्रतिस्थापित करते हैं:

- यदि $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0} > 0$ है, तो x_0 पर सापेक्ष निम्निष्ठ होता है।
- यदि $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0} < 0$ है, तो x_0 पर सापेक्ष उच्चिष्ठ होता है।
- यदि $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0} = 0$ है, तो यह परीक्षण असफल रहती है।

हम प्रथम अवकलज परीक्षण का भी उपयोग कर सकते हैं।

x) **स्पर्श रेखाएँ और अभिलंब** : ऊर्ध्वाधर स्पर्श रेखाओं तथा संगत अभिलंबों के समीकरण ज्ञात कीजिए। आप इकाई 14 का स्मरण कर सकते हैं।

xi) **अनंतस्पर्शियाँ** : अगला चरण अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात करना है, यदि कोई हैं। हम अक्षों के समांतर तथा तिर्यक अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कर सकते हैं, जैसी कि इकाई 15 में चर्चा की जा चुकी है। ये वक्र की शाखाओं की अनंत तक विस्तृत होने की प्रवृत्ति को प्रदर्शित करती हैं।

xii) **विचित्र बिंदु** : एक अन्य महत्वपूर्ण चरण विचित्र बिंदुओं को निर्धारित करने का है। इन बिंदुओं पर वक्र का आकार, सामान्यतः अधिक जटिल होता है, क्योंकि इनसे होकर वक्र की एक से अधिक शाखाएँ हैं। (इकाई 14 से स्मरण कीजिए)।

xiii) **बिंदुओं का आलेखन** : वे बिंदु आलेखित कीजिए जहाँ f का एक सापेक्ष उच्चिष्ठ, निम्निष्ठ या नतिपरिवर्तन बिंदु, x-अंतः खंड, y-अंतः खंड, इत्यादि है।

xiv) **वक्र का स्कैच खींचिए** : अब, इन आलेखित बिंदुओं पर वक्र की स्पर्श रेखाएँ खींचने का प्रयास कीजिए। अब आलेखित बिंदुओं को एक सरल (मृद) वक्र द्वारा मिलाइए (असंततता के बिंदुओं को छोड़ते हुए)। इसमें स्पर्श रेखाएँ आपका मार्गदर्शन करेंगी, क्योंकि ये आपको वक्र की दिशा बताती है। अनंतस्पर्शियों के स्कैच डैश (बिंदुकित) रेखाओं द्वारा खींचिए। अंत में, उपरोक्त क्रम संख्याओं i) से xiii) से प्राप्त सूचनाओं का प्रयोग करते हुए वक्र खींचिए।

अब हम अनेक उदाहरणों के माध्यम से इस प्रक्रिया को स्पष्ट करेंगे। आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में, ऊपर वर्णित सभी चरणों की आवश्यकता नहीं भी हो सकती है। हम कुछ ऐसे फलनों के अनुरेखण से प्रारंभ करते हैं, जिनसे हम इकाई 2 और इकाई 6 में परिचित हो चुके हैं।

उदाहरण 1 : फलन $y = |x|$ का आरेख खींचिए।

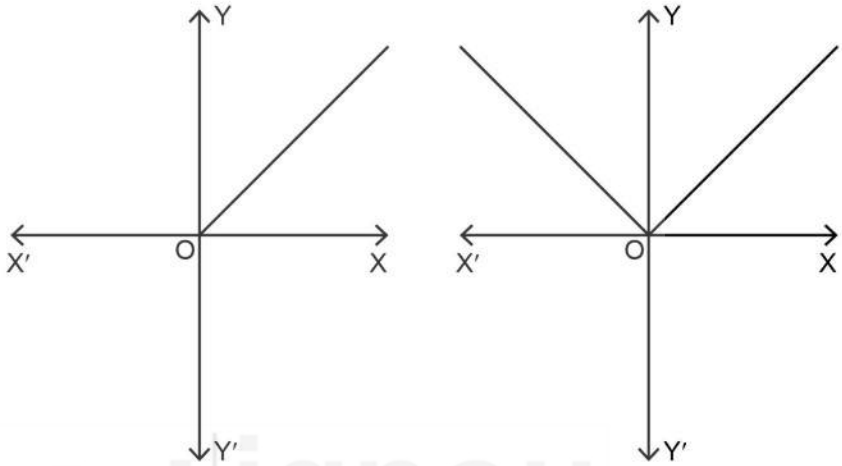
हल : आइए वक्र अनुरेखण के चरणों का उपयोग करते हुए प्रारंभ करें। हम y को पुनः इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$y = \begin{cases} x\,, & x \geq 0 \\ -x\,, & x < 0 \end{cases}$$

i) **प्राँत और परिसर** : इस फलन का प्राँत $\mathbb{R}$ है तथा परिसर ऋणेतर वास्तविक संख्याएँ हैं। इसलिए, आप केवल धनात्मक मान ही ले सकते हैं। इस प्रकार, आलेख x-अक्ष के ऊपर स्थित है।

ii) **सममिति** : क्योंकि $|x| = |-x|$ है, इसलिए फलन $y = |x|$ y-अक्ष के सापेक्ष सममित है।

iii) **अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु** : यदि $x = 0$ है, तो $y = 0$ है। इसलिए, यह वक्र अक्षों से केवल मूलबिंदु पर मिलता है। y-अक्ष के दाईं ओर, $x > 0$ है और इसीलिए $|x| = x$ है। इस प्रकार, आलेख $y = x$ का आलेख रह जाता है तथा आप जानते हैं कि यह एक सरल रेखा है, जो अक्षों से समान रूप से झुकी हुई है [नीचे दी चित्र 3 (क)] । इसका y-अक्ष में परावर्तन करने पर, हमें संपूर्ण आलेख प्राप्त हो जाता है, जैसा कि चित्र 3 (ख) में दर्शाया गया है।



(क) y-अक्ष के दाईं ओर आलेख **(ख) $y = |x|$ का संपूर्ण आलेख**

चित्र 3

***

उदाहरण 2 : महत्तम पूर्णांक फलन $y = [x]$ का आरेख खींचिए।

हल : आइए देखें कि महत्तम पूर्णांक फलन के अनुरेखण के लिए, वक्र अनुरेखण के कौन-से गुणों का प्रयोग किया जाएगा।

i) **प्राँत और परिसर** : इस फलन का प्राँत $\mathbb{R}$ है तथा परिसर सभी पूर्णांकों का समुच्चय है। यह वक्र प्रथम और तृतीय चतुर्थांशों में स्थित है, क्योंकि या तो $x \geq 0$ और $y \geq 0$ है या $x \leq 0$ और $y \leq 0$ है।

ii) **सममिति** : यदि हम x के स्थान पर $-x$ रखें, तो हमें y के विभिन्न मान प्राप्त होते हैं। अतः, y-अक्ष के सापेक्ष $[x]$ सममित नहीं है। साथ ही, $y = [x]$ एक विषम फलन भी नहीं है। इस प्रकार, यह मूलबिंदु के सापेक्ष भी सममित नहीं है।

iii) **अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु** : जब $x = 0$ है, तब $y = 0$ है। इस प्रकार, यह वक्र मूलबिंदु से होकर जाती है। साथ ही, जब $y = 0$ है, तब $0 \leq x < 1$ है। अतः, आलेख x-अक्ष पर स्थित है।

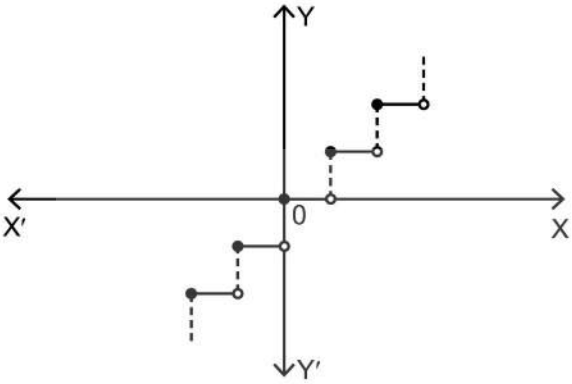
iv) **असंततता के बिंदु** : $y = [x]$ प्रत्येक पूर्णांक बिंदु पर असंतत है। इसलिए, आलेख में प्रत्येक पूर्णांक बिंदु x पर एक विच्छेदन है। प्रत्येक अंतराल $[n, n+1[$ में इसका मान एक अचर है और n के बराबर है।

v) **सापेक्ष चरम बिंदु** : कोई उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ नहीं।

vi) **अनंतस्पर्शियाँ** : यहाँ कोई अनंतस्पर्शियाँ नहीं हैं।

vii) **अवतलता** : आलेखन तो ऊपर की ओर अवतल है और न ही नीचे की ओर अवतल है।

अतः, आलेख चित्र 4 में दर्शाया गया है। ध्यान दीजिए कि एक बिंदु के इर्दगिर्द एक खोखला वृत्त यह इंगित करता है कि वह बिंदु आलेख में सम्मिलित नहीं है।



चित्र 4: $y = [x]$ का आलेख

***

उदाहरण 3 : $y = x^3$ का आरेख खींचिए।

हल : आइए वक्र $y = x^3$ के लिए, गुणों की जाँच करें।

i) **प्राँत और परिसर** : इस फलन के प्राँत और परिसर $\mathbb{R}$ हैं। जब $x > 0$ है, तब $y > 0$ है तथा जब $x < 0$ है, तब $y < 0$ है। इस प्रकार, दूसरे और चौथे चतुर्थांशों में आलेख का कोई भाग नहीं है।

ii) **सममिति** : यह फलन एक विषम फलन है। इसका अर्थ है कि वक्र मूलबिंदु के सापेक्ष सममित है। इस प्रकार, x-अक्ष के ऊपर ही आलेख का खींचना पर्याप्त है तथा फिर इसे 180^o के घूर्णन से प्राप्त भाग से जोड़ दिया जाए।

iii) **अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु** : यदि $x = 0$ है, तो $y = 0$ है। अतः, वक्र अक्षों से केवल मूलबिंदु पर मिलता है।

iv) **मूलबिंदु पर स्पर्श रेखाएँ** : हमें $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ प्राप्त है, जो मूलबिंदु पर 0 है। इस प्रकार, मूलबिंदु पर स्पर्श रेखा x-अक्ष है।

v) **एकदिष्टता** : हम $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करते हैं, जो सदैव ऋणेतर है। इसका अर्थ है कि जब x में वृद्धि होती है, तब y में भी वृद्धि होती है। इस प्रकार, आलेख ऊपर की ओर चढ़ता रहता है।

vi) **सापेक्ष चरम बिंदु** : यहाँ, $(0, 0)$ पर $\frac{dy}{dx} = 0$ है तथा $(0, 0)$ पर $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$ भी 0 है। क्योंकि द्वितीय अवकलज जाँच चरम बिंदु ज्ञात करने में सहायक नहीं है, इसलिए आइए प्रत्येक ओर $\frac{dy}{dx}$ के चिह्न देखें।

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 = \begin{cases} > 0, \text{ for } x > 0 \\ > 0, \text{ for } x < 0 \end{cases}$$

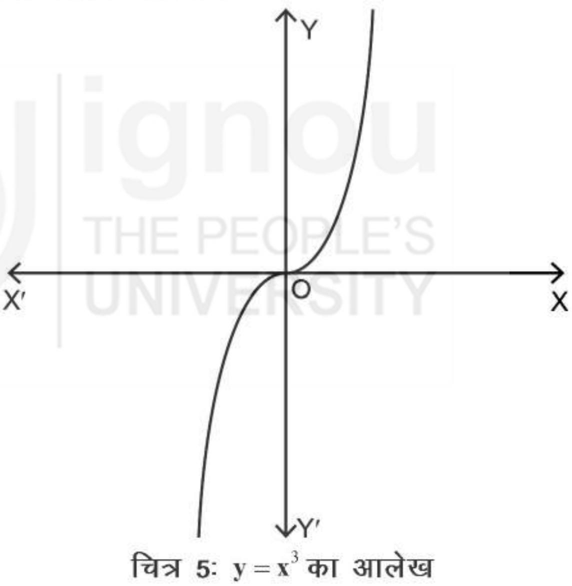
क्योंकि $\frac{dy}{dx}$ के चिह्न में कोई परिवर्तन नहीं होता है, इसलिए यहाँ कोई चरम बिंदु नहीं है।

vii) **अवतलता और नतिपरिवर्तन बिंदु** : यहाँ मूलबिंदु पर $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ है। साथ ही, जब $x<0$ है, तब $\frac{d^2y}{dx^2}<0$ है तथा जब $x>0$ है, तब $\frac{d^2y}{dx^2}>0$ है। अतः, जब $x>0$ है, तब यह वक्र ऊपर की ओर अवतल है तथा जब $x<0$ है, तब नीचे की ओर अवतल है। क्योंकि अवतलता मूलबिंदु पर परिवर्तित हो रही है, इसलिए नतिपरिवर्तन बिंदु $(0, 0)$ है।

viii) **अनंतस्पर्शियाँ** : अक्षों के समांतर आलेख की कोई अनंतस्पर्शी नहीं है। साथ ही, $\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}x^2$ है तथा इसका अस्तित्व नहीं है। इसका अर्थ है कि वक्र की कोई तिर्यक अनंतस्पर्शी भी नहीं है।

ix) **विचित्र बिंदु** : इस वक्र के कोई विचित्र बिंदु नहीं हैं।

आलेख चित्र 5 में दर्शाया गया है।



चित्र 5: $y = x^3$ का आलेख

***

उदाहरण 4: $y=\frac{1}{x^2}$ का आलेख खींचिए।

हल : वक्र अनुरेखण के लिए, आइए गुणों की सूची बनाएँ।

i) **प्राँत और परिसर** : फलन का प्राँत $\mathbb{R}-\{0\}$ है तथा फलन का परिसर ऋणेतर वास्तविक संख्याएँ हैं। किसी भी बिंदु का y-निर्देशांक ऋणात्मक नहीं हो सकता। इसलिए, वक्र को x-अक्ष के ऊपर होना चाहिए।

ii) **सममिति** : यहाँ $f(x)=f(-x)$ है। इसलिए, वक्र y-अक्ष के सापेक्ष सममित है। अतः, हम पहले y-अक्ष के दाईं ओर आलेख को खींचेंगे।

iii) **अक्षों पर प्रतिच्छेद बिंदु** : वक्र अक्षों को कहीं भी प्रतिच्छेद नहीं करता।

iv) **एकदिष्टता** : हमें $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3}$ और $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6}{x^4}$ प्राप्त होते हैं। क्योंकि सभी $x > 0$ के लिए $\frac{dy}{dx} < 0$ है, इसलिए $]0, \infty[$ में फलन ह्रासमान है, अर्थात् जब x में वृद्धि होती जाती है, आलेख नीचे की ओर गिरता जाता है। साथ ही, क्योंकि सभी $x < 0$ के लिए $\frac{dy}{dx} > 0$ है, इसलिए $]-\infty, 0[$ में फलन वर्धमान है।

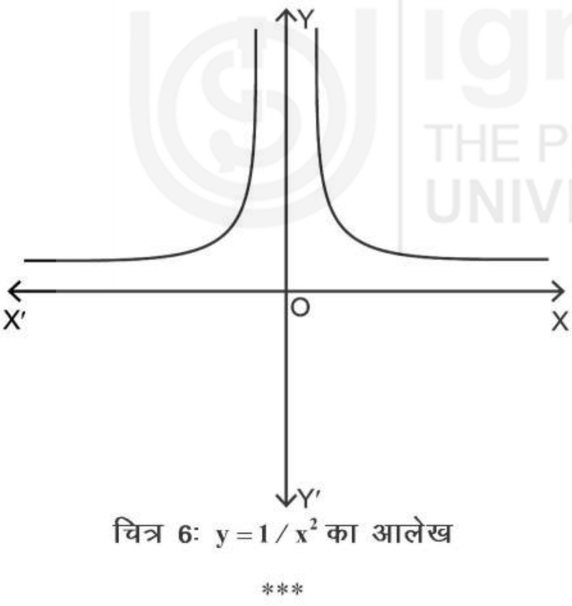
v) **असंततता** : फलन के प्राँत में, y का आलेख संतत है।

vi) **सापेक्ष चरम मान** : आगे, क्योंकि प्राँत में सभी x के लिए $\frac{dy}{dx}$ शून्येतर है, इसलिए यहाँ कोई चरम बिंदु नहीं है।

vii) **अवतलता और नतिपरिवर्तन बिंदु** : क्योंकि प्राँत में $\frac{d^2y}{dx^2}$ धनात्मक है, इसलिए वक्र प्राँत में प्रत्येक स्थान पर ऊपर की ओर अवतल है। क्योंकि अवतलता में कोई परिवर्तन नहीं होता है, इसलिए यहाँ कोई नतिपरिवर्तन बिंदु नहीं है।

viii) **अनंतस्पर्शियाँ** : क्योंकि $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ है, इसलिए $x = 0$ एक ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शी है। साथ ही, क्योंकि $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ है, इसलिए $y = 0$ एक क्षैतिज अनंतस्पर्शी है।

वक्र चित्र 6 में दर्शाया गया है।



चित्र 6: $y = 1/x^2$ का आलेख

***

उदाहरण 5: $y = \frac{1}{x}$ का आलेख खींचिए।

हल : i) **प्राँत और परिसर** : फलन का प्राँत $\mathbb{R} - \{0\}$ है तथा परिसर $\mathbb{R}$ है। यहाँ, हम देख सकते हैं कि या तो x और y दोनों धनात्मक होंगे या दोनों ऋणात्मक होंगे। इसका अर्थ है कि वक्र प्रथम और तृतीय चतुर्थांशों में स्थित है।

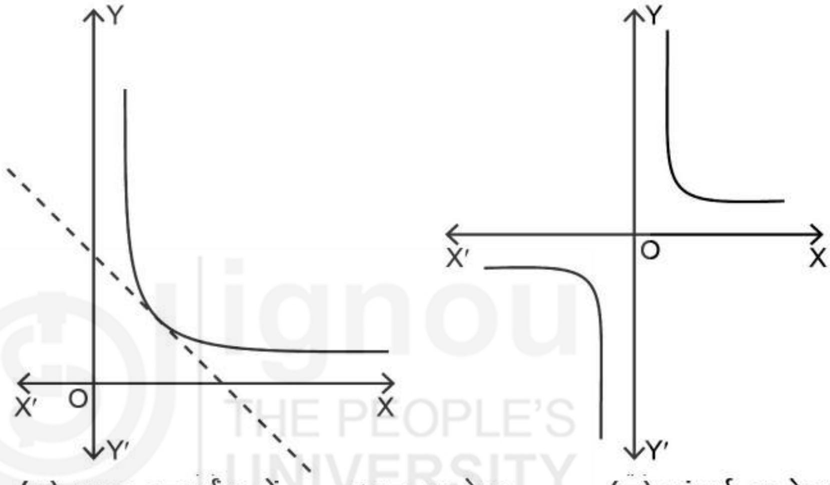
ii) **सममित** : यहाँ $f(x) = \frac{1}{x}$ है तथा f एक सम फलन नहीं है। इसलिए, यह y-अक्ष के सापेक्ष सममित नहीं है। साथ ही, यह मूलबिंदु के सापेक्ष सममित है और इसी लिए इसका प्रथम चतुर्थांश में अनुरेखण करना ही पर्याप्त है तथा फिर इसमें 180^0 का घूर्णन करके तृतीय चतुर्थांश में वक्र का भाग प्राप्त किया जाए।

iii) **वर्धमान या ह्रासमान वाले अंतराल** : यहाँ, $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2}$ है, जिसका अर्थ है कि प्राँत में x के सभी मानों के लिए $y < 0$ है। अतः, जब x में वृद्धि होती है, तब y में कमी होती है।

iv) **अनंतस्पर्शियाँ** : क्योंकि $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ है, इसलिए $y = 0$ एक क्षैतिज अनंतस्पर्शी है। साथ ही, $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ है। इसलिए $x = 0$ एक ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शी है।

v) **सापेक्ष चरम बिंदु** : प्राँत में किसी x के लिए, हमें $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2} \neq 0$ प्राप्त है। अर्थात् यहाँ कोई चरम बिंदु नहीं है।

उपरोक्त सभी बिंदुओं पर विचार करते हुए, हम प्रथम चतुर्थांश में वक्र का अनुरेखण कर सकते हैं [चित्र 7 (क) देखिए]। चित्र 7 (ख) संपूर्ण वक्र प्रदान करती है।

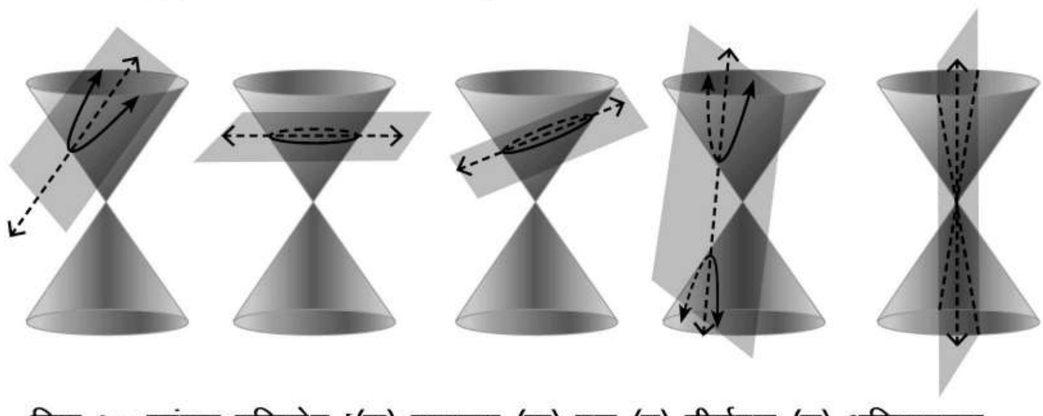


(क) प्रथम चतुर्थांश में $xy = 1$ का आलेख **(ख) संपूर्ण आलेख**

चित्र 7

***

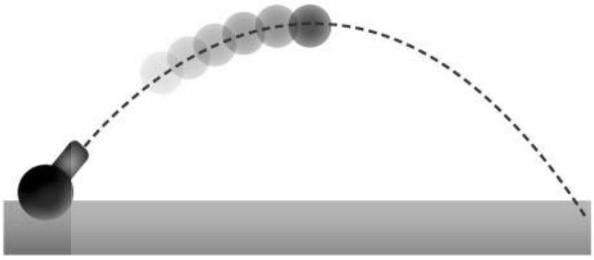
उदाहरण 5 में अनुरेखित किया गया वक्र एक **अतिपरवलय** है। यदि हम किसी द्विशंकु को चित्र 8 (क) के अनुसार एक समतल से काटें, तो हमें एक **परवलय** प्राप्त होता है। यह एक शंकु का परिच्छेद होता है। इसी कारण इसे एक शंकु परिच्छेद या **शांकव परिच्छेद (conic section)** भी कहते हैं। चित्र 8 (ख) और चित्र 8 (ग) क्रमशः एक वृत्त और एक दीर्घवृत्त को दर्शाती हैं। चित्र 8 (घ) की वक्र एक **अतिपरवलय** कहलाती है तथा चित्र 8 (ड.) सरल रेखाओं का एक युग्म है।



चित्र 8 : शांकव परिच्छेद [(क) परवलय (ख) वृत्त (ग) दीर्घवृत्त (घ) अतिपरवलय (ङ) सरल रेखाओं का युग्म]

इन वक्रों के बारे में सबसे पहला वर्णन एक यूनानी गणितज्ञ मेनीचम्स (Menaechmas) (चौथी शताब्दी ई. पू.) के कार्य में पाया गया है। बाद में, अपोलोनियस (Appolonius) (तीसरी शताब्दी ई. पू.) ने इनका विस्तृत रूप से अध्ययन किया उनके लिए वर्तमान में प्रचलित नाम दिए।

सत्रहवीं शताब्दी में, रेन दकार्त ने खोज की कि शांकव परिच्छेदों को वक्रों के रूप में अभिलक्षणित किया जा सकता है, जो दो चरों वाली द्विघात समीकरण से परिचालित होती हैं। ब्लेज़ पास्कल (1623-1662) ने इन्हें एक वृत्त के प्रक्षेपों के रूप में प्रस्तुत किया। (आप ऐसा करने का प्रयास क्यों नहीं करते?) एक दीवार पर किसी टार्च के प्रकाश को विभिन्न कोणों से डालिए तथा दीवार पर विभिन्न शांकव परिच्छेद को देख कर उनकी जाँच कीजिए। गेलिलियो (Galileo) (1564-1642) ने दर्शाया कि तिर्यक रूप से फेंके गए एक प्रक्षेप का पथ (चित्र 9) एक परवलय होता है।



चित्र 9

परवलयिक वक्रों का प्रयोग मेहरावों (arches) और झूला-पुलों (suspension bridges) भी किया जाता है (चित्र 10)। परवलयज (Paraboloid) पृष्ठों का प्रयोग टेलिस्कोपों, सर्च लाइटों, सोलर हीटरों तथा राडार रिसीवरों में प्रयोग किया जाता है।

चित्र 10

सत्रहवीं शताब्दी में, जोहन्नस केप्लर (Johannes Kepler) ने खोज की कि ग्रह सूर्य के चारों ओर दीर्घवृत्तीय परिपथों में गति करते हैं। हेली पुच्छलतारे धूमकेतु (Halley's Comet) के बारे में यह कहा जाता है कि वह एक बहुत विस्तृत दीर्घवृत्त के अनुदिश गति करता है। सौर मंडल में एक वृहत् दूरी से आने वाला एक धूमकेतु या उल्का पिंड एक अतिपरवलयिक पथ के अनुदिश गति करते हैं। अतिपरवलयों का उपयोग ध्वनि श्रृंखला और नौचालन पद्धतियों में भी किया जाता है।

आइए अब अगले उदाहरण को देखें।

उदाहरण 6 : $y = x^3 + x^2$ का आलेख खींचिए।

हल : i) **प्राँत और परिसर :** इस फलन के प्राँत और परिसर $\mathbb{R}$ हैं।

ii) **सममिति** : फलन न तो सम है और न ही विषम। इसलिए यह y-अक्ष और मूलबिंदु के सापेक्ष सममित नहीं है।

iii) **प्रतिच्छेद बिंदु** : यदि $x = 0$ है, तो $y = 0$ है तथा यदि $y = 0$ है, तो $x = 0, -1$ है। इस प्रकार, वक्र अक्षों से $(0, 0)$ और $(-1, 0)$ पर मिलता है।

iv) **स्पर्श रेखाएँ** : हमें $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x$ प्राप्त होता है। x-अक्ष मूलबिंदु पर स्पर्श रेखा है, क्योंकि $x = 0$ पर $\frac{dy}{dx} = 0$ है। क्योंकि $x = -1$ पर $\frac{dy}{dx} = 1$ है, इसलिए $(-1, 0)$ पर स्पर्श रेखा x-अक्ष से 45° का कोण बनाती है [चित्र 11 (क)]।

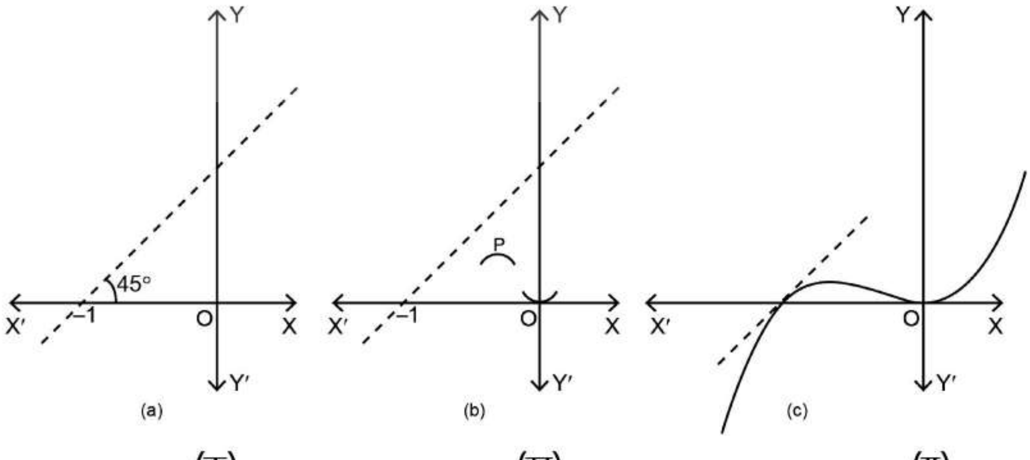
v) **सापेक्ष चरम बिंदु** : आगे, $\frac{dy}{dx} = 0$ से $x = 0$ और $x = -2/3$ प्राप्त होता है। अब $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + 2$ है। क्योंकि $(0, 0)$ पर $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ है, इसलिए बिंदु $(0, 0)$ पर एक निम्निष्ठ है। बिंदु $(-2/3, 4/27)$ एक उच्चिष्ठ बिंदु है, क्योंकि $(0, 0)$ पर $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ है। इस प्रकार, चित्र 11 (ख) में O एक घाटी है तथा P एक चोटी है।

vi) **नतिपरिवर्तन बिंदु** : यहाँ $x = -2/3$ पर $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ है तथा जब $x = -\frac{1}{3}$ से होकर x जाता है, तब यह चिह्न बदलता है। अतः, $(-1/3, 2/27)$ एक नतिपरिवर्तन बिंदु है। क्योंकि $]-\infty, -1/3[$ पर $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ है, इसलिए इस अंतराल में वक्र ऊपर की ओर अवतल है।

vii) **वर्धमान या ह्रासमान फलन का अंतराल** : यदि $-\frac{2}{3} < x < 0$ है, तो $\frac{dy}{dx} < 0$ है। इस प्रकार, $]-\infty, -2/3[$ और $]0, \infty[$ में आलेख ऊपर की ओर चढ़ता है, परंतु $]-2/3, 0[$ में नीचे की ओर गिरता है।

viii) **अनंतस्पर्शियाँ** : जब x अनंत की ओर प्रवृत्त होता है, तब y भी ऐसा ही करता है। जब $x \to -\infty$ है, तब y भी ऐसा ही करता है। यहाँ न कोई क्षैतिज अनंतस्पर्शी है और न ही कोई ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शी। तिर्यक अनंतस्पर्शी के लिए, $\lim_{x\to\infty}[(x^3 + x^2) - (mx + c)]$ का अस्तित्व नहीं है। इसलिए, कोई तिर्यक अनंतस्पर्शी नहीं है।

अतः, आलेख चित्र 11 (ग) में दर्शाए अनुसार है।



(क) (ख) (ग)

चित्र 11

***

उदाहरण 7 : वक्र $y = \frac{3x^2}{x^2-1}$ का आरेख खींचिए।

हल : i) **प्राँत और परिसर** : प्राँत $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ है।

ii) **सममिति** : क्योंकि x की घातें सम हैं, इसलिए वक्र y-अक्ष के सापेक्ष सममित है।

iii) **अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु** : वक्र मूलबिंदु से होकर जाता है।

iv) **अनंतस्पर्शियाँ** : क्योंकि $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3}{1-(1/x^2)} = 3$ है।

इसलिए रेखा $y = 3$ क्षैतिज अनंतस्पर्शी है।

साथ ही, $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{3x^2}{x^2-1} = \infty, \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{3x^2}{x^2-1} = -\infty, \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{3x^2}{x^2-1} = \infty$ और $\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{3x^2}{x^2-1} = -\infty$ है।

इसलिए, रेखाएँ $x = 1$ और $x = -1$ ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शियाँ हैं। हम इन अनंतस्पर्शियों को चित्र 12 (क) में दर्शाए चित्र के अनुसार खींच सकते हैं।

v) **एकदिष्टता** : यहाँ $y' = \frac{5x(x^2-1)-3x^2\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-6x}{(x^2-1)^2}$ है। क्योंकि जब $x < 0$ है, तब $y' > 0$ है तथा जब $x > 0$ है, तब $y' < 0$ है, इसलिए $]-\infty,-1[$ और $]-1,0[$ पर f वर्धमान है तथा $]0,1[$ और $]1,\infty[$ पर f ह्रासमान है।

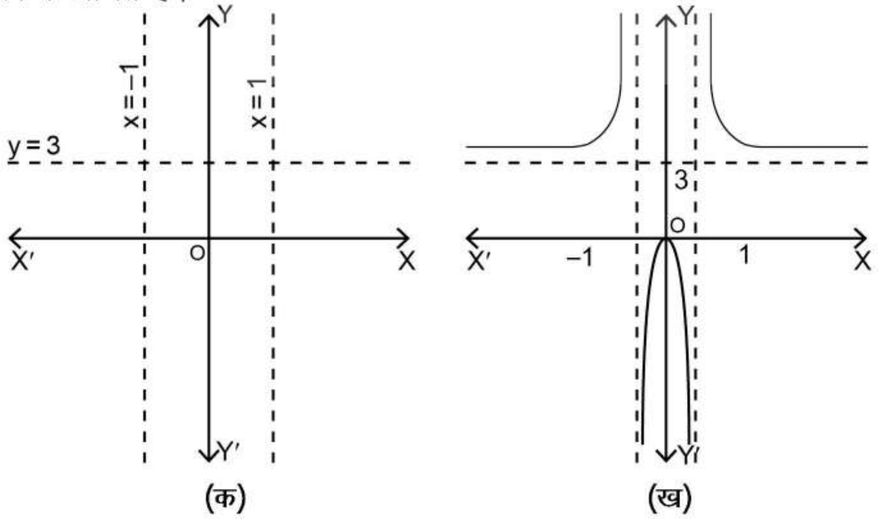
vi) **सापेक्ष चरम बिंदु** : जब $y' = 0$ है, तब $x = 0$ है। क्योंकि 0 पर y' का मान धनात्मक से ऋणात्मक हो जाता है, इसलिए प्रथम अवकलज जाँच द्वारा $y(0) = 0$ एक स्थानीय उच्चिष्ठ है।

vii) **अवतलता** : हमें प्राप्त होता है:

$$f''(x) = \frac{-6(x^2-1)^2 + 6x\cdot 2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \frac{6(1+3x^2)}{(x^2-1)^3}$$

क्योंकि सभी x के लिए $6(1+3x^2) > 0$ है, इसलिए हम $y'' > 0 \Leftrightarrow x^2-1 > 0 \Leftrightarrow |x| > 1$ तथा $y'' < 0 \Leftrightarrow |x| < 1$ प्राप्त करते हैं। इस प्रकार, अंतरालों $]-\infty,-1[$ और $]1,\infty[$ पर वक्र ऊपर की ओर अवतल है तथा $]-1,1[$ पर यह नीचे की ओर अवतल है। इसका कोई नतिपरिवर्तन बिंदु नहीं है, क्योंकि 1 और -1 फलन f के प्राँत में स्थित नहीं हैं।

i) से vii) तक की सूचनाओं का प्रयोग करते हुए, हम वक्र चित्र 12 (ख) में वक्र का स्कैच खींचते हैं।



(क) (ख)

चित्र 12

अगले उदाहरण में, हम चरघातांकीय फलन वाली वक्र का अनुरेखण करेंगे।

उदाहरण 8: वक्र $y = xe^x$ का अनुरेखण कीजिए।

हल : i) **प्राँत और परिसर** : प्राँत $\mathbb{R}$ है।

ii) **अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु** : वक्र मूलबिंदु से होकर जाती है।

iii) **सममिति** : कोई सममिति नहीं है।

iv) **अनंतस्पर्शियाँ** : क्योंकि $x \to \infty$ होने पर x और e^x बड़े तथा और बड़े होते जाते हैं, इसलिए हम $\lim\limits_{x\to\infty} xe^x = \infty$ प्राप्त करते हैं। परंतु जब $x \to -\infty$ है, तब $e^x \to 0$ है और इसलिए हमें एक अनिर्घार्य गुणनफल प्राप्त होता है, जिसमें लापिताल नियम के प्रयोग की आवश्यकता होती है।

इस प्रकार, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} (-e^x) = 0$ है।

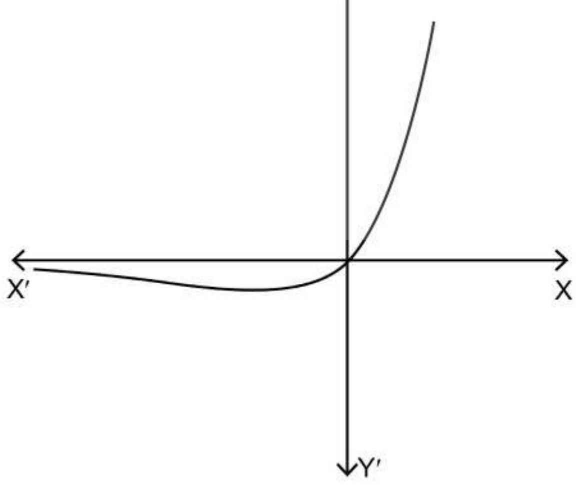
इस प्रकार, x-अक्ष एक क्षैतिज अनंतस्पर्शी है।

v) **एकदिष्टता** : हम $y' = xe^x + e^x = (x+1)e^x$ प्राप्त करते हैं। क्योंकि e^x सदैव धनात्मक होता है, इसलिए हम देखते हैं कि जब $x+1>0$ है, तब $y'>0$ है तथा जब $x+1<0$ है, तब $y'<0$ है। इसलिए, $]-1,\infty[$ पर y वर्धमान है तथा $]-\infty,-1[$ पर ह्रासमान है।

vi) **सापेक्ष चरम मान** : क्योंकि $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=-1} = 0$ है तथा $x=-1$ पर $\frac{dy}{dx}$ का मान ऋणात्मक से धनात्मक में बदल जाता है, इसलिए $(-1,-e^{-1})$ एक स्थानीय निम्निष्ठ है।

vii) **अवतलता** : हम $y'' = (x+1)e^x + e^x = (x+2)e^x$ प्राप्त करते हैं। क्योंकि यदि $x>-2$ है, तो $y''>0$ है तथा यदि $x<-2$ है, तो $y''<0$ है, इसलिए $]-2,\infty[$ पर वक्र ऊपर की ओर अवतल है तथा $]-\infty,-2[$ पर नीचे की ओर अवतल है। नतिपरिवर्तन बिंदु $]-2,-2e^{-2}[$ है।

हम इस सूचना का चित्र 13 में वक्र के अनुरेखण के लिए करते हैं।



चित्र 13

***

निम्नलिखित उदाहरण में, हम त्रिकोणमितीय फलनों वाले वक्र का अनुरेखण करेंगे।

उदाहरण 9: वक्र $y = \frac{\cos x}{2+\sin x}$ का अनुरेखण कीजिए।

हल : i) **प्राँत और परिसर** : प्राँत $\mathbb{R}$ है।

ii) **अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु** : वक्र $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ और $\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}, 0\right)$ से होकर जाता है, जहाँ n एक पूर्णांक है।

iii) **सममिति और आवर्तिता** : किसी भी अक्ष के सापेक्ष वक्र सममित नहीं है। हमें सभी x के लिए $f(x+2\pi) = f(x)$ प्राप्त है और इसीलिए f आवर्ती है तथा इसका आवर्त 2π है। इस प्रकार, हमें केवल $0 \le x \le 2\pi$ पर विचार करने की आवश्यकता है और फिर स्थानांतरण द्वारा वक्र का विस्तार कर देते हैं।

iv) **अनंतस्पर्शियाँ** : यहाँ कोई अनंतस्पर्शी नहीं है।

v) **एकदिष्टता** : हमें प्राप्त होता है : $\frac{dy}{dx} = \frac{(2+\sin x)(-\sin x) - \cos x(\cos x)}{(2+\sin x)^2}$

$$= -\frac{2\sin x + 1}{(2+\sin x)^2}$$

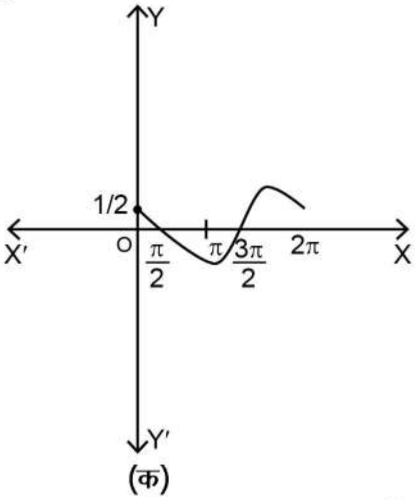
इस प्रकार, $\frac{dy}{dx} > 0$ के लिए $2\sin x + 1 < 0 \Leftrightarrow \sin x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$ है। अतः, $]\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}[$ पर f वर्धमान है तथा $]0, \frac{7\pi}{6}[$ और $]\frac{11\pi}{6}, 2\pi[$ पर ह्रासमान है।

vi) **सापेक्ष चरम बिंदु** : प्रथम अवकलज जाँच से, हम देखते हैं कि स्थानीय निम्निष्ठ मान $-1/\sqrt{3}$ है तथा स्थानीय उच्चिष्ठ मान $1/\sqrt{3}$ है।

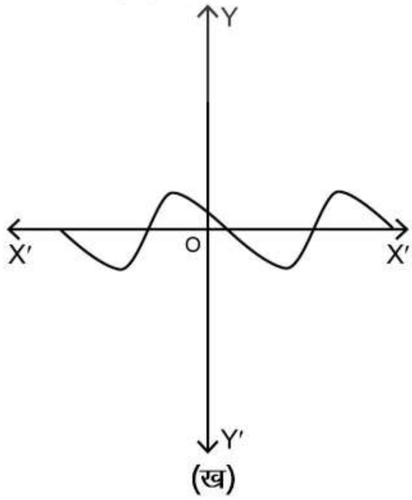
vii) **अवतलता** : यदि हम $f(x)$ को पुनः अवकलित करें तथा सरल करें, तो हम $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2\cos x(1-\sin x)}{(2+\sin x)^3}$ प्राप्त करते हैं।

क्योंकि सभी x के लिए $(2+\sin x)^3 > 0$ है और $1-\sin x \ge 0$ है तथा साथ ही हम जानते हैं कि $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ तब है, जब $\cos x < 0$ है, अर्थात् $\pi/2 < x < 3\pi/2$ है, इसलिए $]\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}[$ पर वक्र ऊपर की ओर अवतल है तथा $]0, \frac{\pi}{2}[$ और $]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$ पर नीचे की ओर अवतल है। नतिपरिवर्तन बिंदु $]\frac{\pi}{2}, 0[$ और $]\frac{3\pi}{2}, 0[$ हैं।

हम फलन का आलेख केवल $0 \le x \le 2\pi$ के लिए खींचते हैं, जैसा कि चित्र 14 (क) में दर्शाया गया है। इसके बाद, हम आलेख को पूरा करने के लिए, आवर्तिता का प्रयोग करते हुए, उसका विस्तार करते हैं, जैसा कि चित्र 14 (ख) में दर्शाया गया है।



(क)



(ख)

चित्र 14

***

अभी तक, हमारी सभी वक्र फलनों के आलेख थे। अब हम कुछ ऐसी वक्रों का अनुरेखण करेंगे, जो फलनों के आलेख नहीं हैं, अपितु उनकी एक से अधिक शाखाएँ हैं। ये वक्र $f(x, y) = 0$ के रूप के हैं।

उदाहरण 10: अर्धघन परवलय $y^2 = x^3$ का अनुरेखण कीजिए।

हल : i) क्षेत्र जहाँ वक्र स्थित है : हम ध्यान देते हैं कि वक्र पर स्थित बिंदुओं के लिए x^3 सदैव ऋणेतर है। इसका अर्थ है कि x सदैव ऋणेतर है तथा वक्र का कोई भी भाग y-अक्ष के बाईं ओर स्थित नहीं है।

ii) **सममिति** : यहाँ x-अक्ष के सापेक्ष सममिति है (y की सम घातें हैं)।

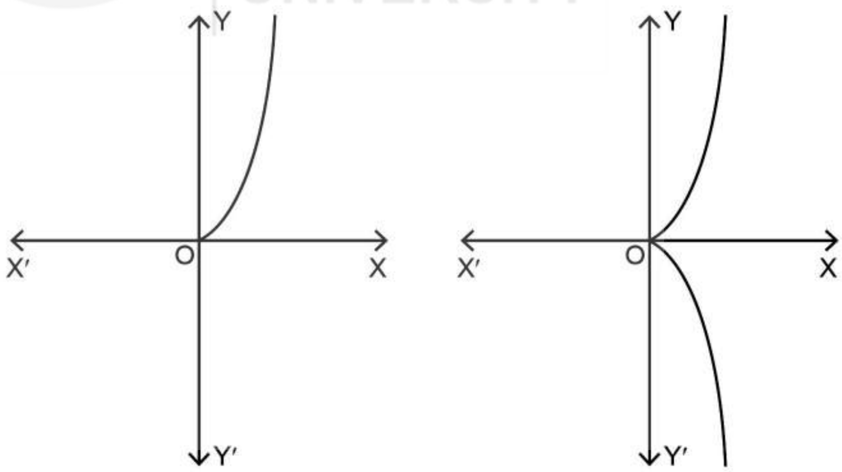
iii) **अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु** : वक्र अक्षों से केवल मूलबिंदु पर मिलता है।

iv) **द्विक बिंदु** : मूलबिंदु पर स्पर्श रेखाएँ $y^2 = 0$ द्वारा दी जाती हैं, जिससे मूलबिंदु एक उमयाग्र है।

v) **वर्धमान और ह्रासमान व्यवहार** : प्रथम चतुर्थांश में, y में x के साथ वृद्धि होती है तथा $x \to \infty$ होने पर $y \to \infty$ है।

vi) **अनंतस्पर्शियाँ** : यहाँ कोई अनंतस्पर्शी नहीं है।

हम पहले चित्र 15 (क) में दर्शाए अनुसार वक्र प्रथम चतुर्थांश में खींचते हैं और फिर x-अक्ष में इसका परावर्तन लेते हैं। हमें संपूर्ण आलेख प्राप्त हो जाता है, जैसा कि चित्र 15 (ख) में दर्शाया गया है।



(क) (ख)

चित्र 15

***

उदाहरण 11: वक्र $y^2 = (x-2)(x-3)(x-4)$ का अनुरेखण कीजिए।

हल: i) क्षेत्र, जहाँ वक्र स्थित है : हम देख सकते हैं कि $(x-2)(x-3)(x-4)$ ऋणेतर है। यदि $x < 2$ है, तो हमें का एक ऋणात्मक मान प्राप्त होता है, जो असंभव है। इसलिए, वक्र का कोई भी भाग रेखा $x = 2$ के बाईं ओर स्थित नहीं होगा। इसी

कारण, वक्र का कोई भी भाग रेखाओं $x = 3$ और $x = 4$ के बीच में स्थित नहीं होगा। इसलिए, वक्र रेखाओं $x = 2$ और $x = 3$ के बीच में, तथा रेखा $x = 4$ के दाईं ओर स्थित है।

ii) **सममिति** : क्योंकि y केवल सम घातों के साथ है, इसलिए वक्र x-अक्ष के सापेक्ष सममित है तथा इसका संपूर्ण आलेख प्राप्त करने के लिए, इसका x-अक्ष में परावर्तन लिया जा सकता है।

iii) **अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु** : वक्र अक्षों को बिंदुओं $(2, 0), (3, 0)$ और $(4, 0)$ पर काटता है।

iv) **स्पर्श रेखाएँ और अभिलंब** : यहाँ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}[(x-2)(x-3)+(x-2)(x-4)$ $+(x-3)(x-4)]$ है। इस प्रकार, इस वक्र की $(2, 0), (3, 0)$ और $(4, 0)$ पर ऊर्ध्वाधर स्पर्श रेखाएँ हैं। इन तथ्यों को संयोजित करते हुए, A $(2, 0)$, B $(3, 0)$, C $(4, 0)$ के निकट इस वक्र का आकार चित्र 16 (क) में दर्शाई गई चित्र के अनुसार होना चाहिए।

v) **वर्धमान या ह्रासमान का अंतराल** : आइए $y > 0$ ले (अर्थात् x-अक्ष से ऊपर के बिंदुओं पर विचार करें। तब,

$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 18x + 26}{2\sqrt{(x-2)\,(x-3)(x-4)}}$ है। यह $x = 3 \pm 1/\sqrt{3}$ पर शून्य है। यदि $\alpha = 3 + 1/\sqrt{3}$ और $\beta = 3 - 1/\sqrt{3}$ है, तो 3 और 4 के बीच में α स्थित है और

इसलिए इसे छोड़ा जा सकता है। साथ ही, $3x^2 - 18x + 26 = 3(x-\beta)\,(x-\alpha)$ है तथा $2 < \beta < 3 < \alpha < 4$ है। $x \in]2, 3[$ के लिए, $(x-\alpha)$ ऋणात्मक रहता है। अतः, $2 < x < \beta$ के लिए, $\frac{dy}{dx} > 0$ है, क्योंकि $(x-\alpha)$ और $(x-\beta)$ दोनों ऋणात्मक हैं।

इसी प्रकार, $\beta < x < 3$ के लिए, $\frac{dy}{dx} < 0$ है। इसलिए, $]2, \beta[$ में आलेख ऊपर की ओर चढ़ता है तथा $]\beta, 3[$ में नीचे की ओर गिरता है। इस प्रकार, x-अक्ष के ऊपर वक्र का आकार अंडाकार है तथा x-अक्ष के सापेक्ष सममिति द्वारा, हम $x = 2$ और $x = 3$ के मध्य आलेख को पूर्ण कर सकते हैं, जैसा कि चित्र 16 (ख) में किया गया है।

vi) **अवतलता** : आइए अब $x = 4$ के दाईं ओर वाले आलेख के भाग पर विचार करें। मूलबिंदु को $(4, 0)$ पर स्थानांतरित करने पर, वक्र की समीकरण $y^2 = x(x+1)\,(x+2) = x^2 + 3x^2 + 2x$ हो जाती है।

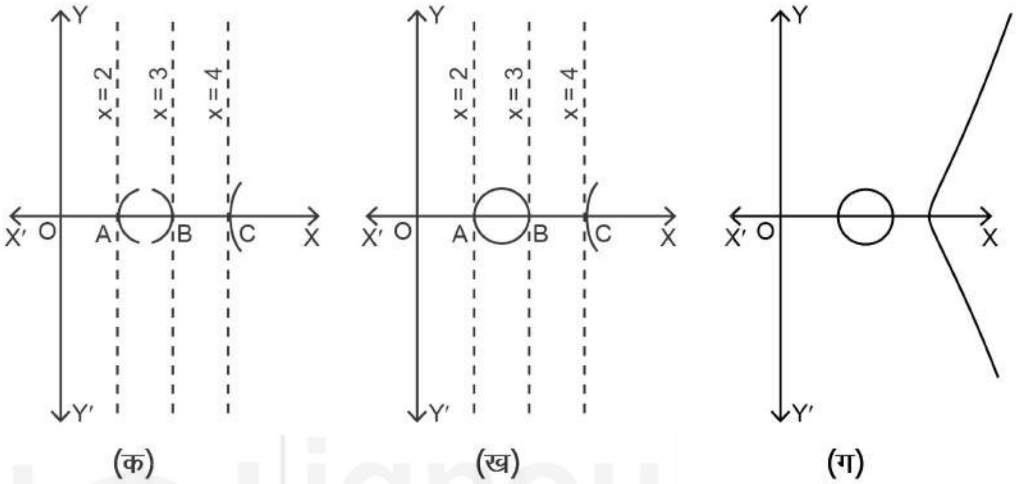
जब x में वृद्धि होती है, तब y में भी वृद्धि होती है। जब $x \to \infty$ है, तब y भी ऐसा ही करता है (x-अक्ष के ऊपर के बिंदुओं पर विचार करते हुए। जब x बहुत छोटा है, तब $2x$ की तुलना में x^3 और $3x^2$ नगण्य हैं, जिससे (नए) मूलबिंदु के निकट वक्र लगभग (सन्निकट रूप से) $y^2 = 2x$ के आकार का है। x^3 की तुलना में, x, $3x^2$ और $2x$ के मान नगण्य हैं, जिससे x के बड़े मानों के लिए वक्र $y^2 = x^3$ के आकार की है। इस प्रकार, कुछ बिंदुओं पर वक्र अपनी उत्तलता में परिवर्तन

करती है। यह निष्कर्ष एक नतिपरिवर्तन बिंदु के अस्तित्व से भी निकाला जा सकता है।

vi) **अनंतस्पर्शियाँ** : यहाँ कोई अनंतस्पर्शी नहीं है।

vii) **गुणज बिंदु** : यहाँ कोई गुणज बिंदु नहीं है।

x-अक्ष के अनुदिश परावर्तन पर विचार करते हुए, हमें चित्र 16 (ग) में खींचा हुआ संपूर्ण आलेख प्राप्त हो जाता है।



चित्र 16

***

उदाहरण 12: वक्र $(x^2-1)(y^2-4)=4$ का अनुरेखण कीजिए।

हल: i) **क्षेत्र, जहाँ वक्र स्थित है**: यहाँ $y^2=\frac{4}{x^2-1}+4$ है। इसलिए $x\notin]-1,1[$, है।

इसी प्रकार, $x^2=\frac{4}{y^2-4}+1$ इसलिए $y\notin]-2,2[$ है।

ii) **सममिति** : इस वक्र में दोनों अक्षों के सापेक्ष सममिति है। इसलिए, हम केवल प्रथम चतुर्थांश में वक्र का आरेख खींच सकते हैं तथा फिर इसका y-अक्ष में परावर्तन लेकर, x-अक्ष के ऊपर का आलेख प्राप्त कर सकते हैं। इस आलेख का x-अक्ष में परावर्तन लेकर संपूर्ण आलेख प्राप्त हो जाएगा।

iii) **अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु** : ध्यान दीजिए कि मूलबिंदु आलेख पर स्थित एक बिंदु है। वक्र अक्षों से किसी अन्य बिंदु पर नहीं मिलती है।

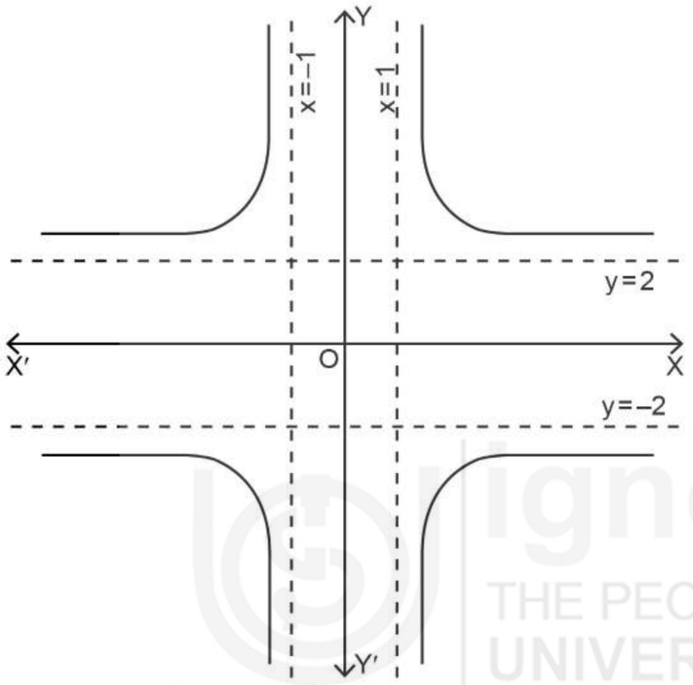
iv) **मूलबिंदु पर स्पर्श रेखा** : मूलबिंदु पर वक्र की स्पर्श रेखाएँ हैं तथा ये $4x^2+y^2=0$ द्वारा दी जाती हैं। क्योंकि ये अधिकल्पित हैं, इसलिए आलेख पर मूलबिंदु एक वियुक्त बिंदु है।

v) **अनंतस्पर्शियाँ** : x और y की उच्चतम घातों के गुणांकों को शून्य के बराबर करने पर, हम वक्र की अनंतस्पर्शियों के रूप में $y=\pm 2$ और $x=\pm 1$ प्राप्त करते हैं। इस प्रकार, प्रथम चतुर्थांश में वक्र का भाग मूलबिंदु से अधिक दूर क्षेत्र में रेखाओं $x=1$ और $y=2$ की ओर अग्रसर होता है। जब $x\to\infty$ है, तब $y\to 2$ है तथा जब $y\to\infty$ है, तब $x\to 1$ है।

vi) **वर्धमान और ह्रासमान** : प्रथम चतुर्थांश में, जब x में वृद्धि होती है, तब x^2-1 में भी वृद्धि होती है तथा क्योंकि $x^2-1=\frac{4}{(y^2-4)}$ हैं, इसलिए x में वृद्धि होने पर y में कमी होती है।

vii) **सापेक्ष चरम बिंदु** : यहाँ कोई चरम बिंदु नहीं हैं।

यहाँ कोई विचित्र बिंदु या नतिपरिवर्तन बिंदु नहीं हैं। अतः, इसका आलेख चित्र 17 में दर्शाए अनुसार है।



चित्र 17

***

उदाहरण 13: वक्र $y^2=(x-1)(x-2)^2$ का अनुरेखण कीजिए।

हल: i) **सममिति** : क्योंकि y की घात सम है, इसलिए यहाँ x-अक्ष के सापेक्ष सममिति है।

ii) **क्षेत्र** : क्योंकि y^2 ऋणात्मक नहीं हो सकता है, इसलिए वक्र का कोई भी भाग $x=1$ के बाईं ओर स्थित नहीं होगा।

iii) **अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु** : अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु $(1, 0)$ और $(2, 0)$ हैं।

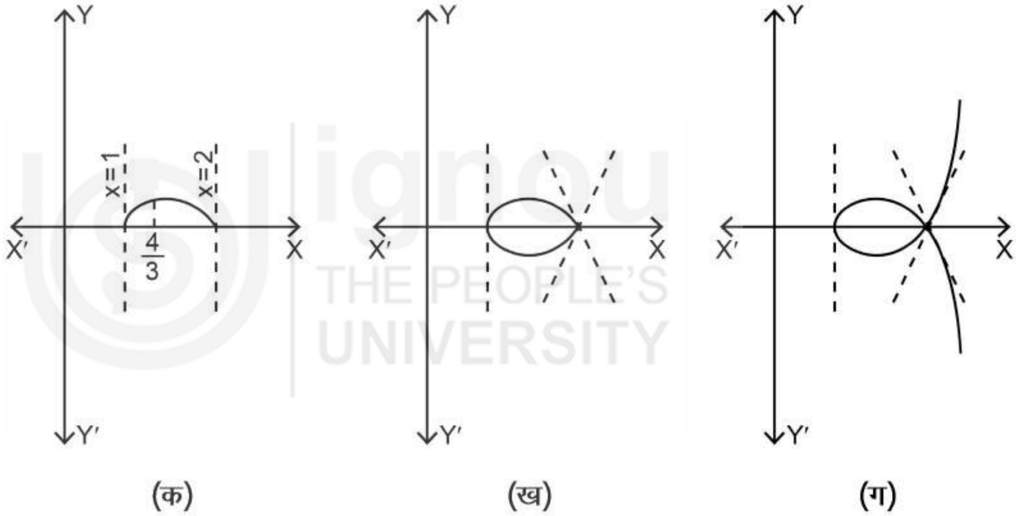
iv) **स्पर्श रेखाएँ** : $(1, 0)$ पर स्पर्श रेखा ऊर्ध्वाधर है। मूलबिंदु को $(2, 0)$ पर स्थानांतरित करने पर, वक्र $y^2=x^2(x+1)$ में रूपांतरित हो जाता है। नए मूलबिंदु पर स्पर्श रेखाएँ $y^2=x^2(x+1)$ द्वारा दी जाती हैं। इसका अर्थ है कि बिंदु $(2, 0)$ एक पात है तथा $(2, 0)$ पर स्पर्श रेखाएँ अक्षों से समान कोणों झुकी हुई हैं।

आइए x-अक्ष के ऊपर $x=1$ और $x=2$ के बीच में आलेख को बनाने का प्रयास करें। वक्र की समीकरण को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$2yy' = (x-2)^2 + 2(x-1)\,(x-2) = (x-2)(3x-4)$ या $y' = \dfrac{(x-2)\,(3x-4)}{2y}$ है।
जब $1 < x < 2, (x-2) < 0$ है। यदि y' धनात्मक है, $y' > 0$ हैं, जबकि प्रतिबंध है कि $3x-4 < 0$ हो। इस प्रकार, $y' > 0$ है, जब $x \in]1, 4/3[$ है तथा $y' < 0$ है, जब $x \in]4/3, 2[$ है। स्पर्श रेखा x-अक्ष के समांतर है, जब $3x-4=0$ है, अर्थात् $x = 4/3$ है (चित्र 18 (क) देखिए)। अतः, $1 < x < 2$ के लिए, वक्र का आकार चित्र 18 (ख) में दर्शाए आकार के अनुसार है।

v) **वर्धमान और ह्रासमान के लिए अंतराल** : अब $x > 0$ के लिए, प्रथम चतुर्थांश में जब $x \to \infty$ है, तब $y \to \infty$ है। ध्यान दीजिए कि जब मूलबिंदु को $(2, 0)$ लिया जाता है, तब वक्र की समीकरण $y^2 = x^2(x+1) = x^3 + x^2$ के रूप में बदल जाती है।

इससे यह प्रदर्शित होता है कि जब $x > 0$ और $y > 0$ है, तब वक्र रेखा $y = x$ (जिस पर $y^2 = x^2$ है) के ऊपर स्थित है। अतः, अंतिम आरेख [चित्र 18 (ग)] संपूर्ण आलेख दर्शाता है।



चित्र 18

***

यदि आपने उदाहरणों 1 से 13 तक का अध्ययन सावधानी पूर्वक किया है, तो आपको निम्नलिखित प्रश्नों को हल कर लेना चाहिए:

E1) निम्नलिखित वक्रों को, अनुरेखण में प्रयुक्त सभी गुणों को बताते हुए अनुरेखित कीजिए:

i) $y = x^2$ ii) $y^2 = (x-2)^3$

iii) $y(1+x^2) = x$ iv) $y^2 = x^2(1-x^2)$

v) $y = x\,e^{-1/x}$ vi) $y = \sin^3 x$

vii) $y = x(\ln x)$ viii) $y = x - 5x^{1/3}$

ix) $y = \ln(\sin x)$ x) $y = x\sqrt{5-x}$

xi) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ xii) $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$

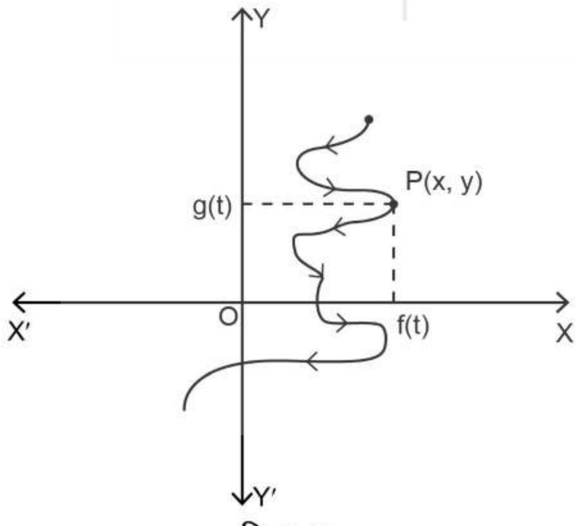
E2) वक्र $y = x - \tan^{-1} x$ की तिर्यक अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए तथा इस तथ्य का उपयोग करते हुए, वक्र का अनुरेखण कीजिए।

E3) सापेक्षता के सिद्धांत में, किसी कण का द्रव्यमान $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ होता है, जहाँ m_0 उस कण का द्रव्यमान है, m द्रव्यमान है, जब वह कण प्रेक्षक के सापेक्ष चाल v से गति करता है तथा c प्रकाश की चाल है। v के एक फलन के रूप में m के लिए वक्र का अनुरेखण कीजिए।

अगले भाग में, हम उन वक्रों का अनुरेखण करेंगे, जो प्राचलिक रूप में दी गई हैं।

16.3 एक वक्र का अनुरेखण : प्राचलिक समीकरण

कभी-कभी फलनीय संबंध एक प्राचल (Parameter) की सहायता से परिभाषित किए जा सकते हैं। ऐसी स्थितियों में, हमें समीकरणों का एक युग्म दिया होता है, जो प्राचल t से x और y को संबंधित करता है। उदाहरणार्थ, कल्पना कीजिए कि कोई कण एक वक्र के अनुदिश गति कर रहा है तथा उसके x और y निर्देशांक समय t के पदों में परिभाषित हैं, जैसा कि चित्र 19 में दर्शाया गया है।



चित्र 19

इस स्थिति में, हम $x = f(t)$ और $y = g(t)$ लिखते हैं, जहाँ t तीसरा चर है, जो प्राचल कहलाता है। समीकरण $x = f(t)$ और $y = g(t)$ प्राचलिक समीकरण कहलाती है। आवश्यक नहीं है कि प्राचल t समय ही निरूपित करे। आप खंड 3 के परिशिष्ट I का स्मरण कर सकते हैं।

अब, हम देखेंगे कि प्राचलिक रूप में दी हुई समीकरणों वाले वक्र का किस प्रकार अनुरेखण करते हैं।

हम इस प्रक्रिया को एक उदाहरण की सहायता से स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 14: चक्रज (cycloid) $x = a(t + \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ को अनुरेखित कीजिए, जब $-\pi$ से π तक t विचरण करता है।

हल: यहाँ $\frac{dx}{dt} = a(1+\cos t)$ और $\frac{dy}{dt} = a \sin t$ है, जिससे $\frac{dy}{dx} = \tan(t/2)$ है। क्योंकि सभी $t \in]-\pi, \pi[$ के लिए, $\frac{dy}{dx} > 0$ है, इसलिए $-a\pi$ ($t = -\pi$ पर) से 0 तक ($t = 0$ पर) से $a\pi$ तक ($t = x$ पर) t के साथ x में वृद्धि होती है।

साथ ही, $\frac{dy}{dx}$ ऋणात्मक है, जब $t \in]-\pi, 0[$ है तथा धनात्मक है, जब $t \in]0, \pi[$ है। इसलिए, $[-\pi, 0]$ में $2a$ से 0 तक y में कभी होती है तथा $[0, \pi]$ में 0 से 0π तक की वृद्धि होती है। आइए इन आँकड़ों को सारणी 2 में सारणीबद्ध करें।

सारणी 2

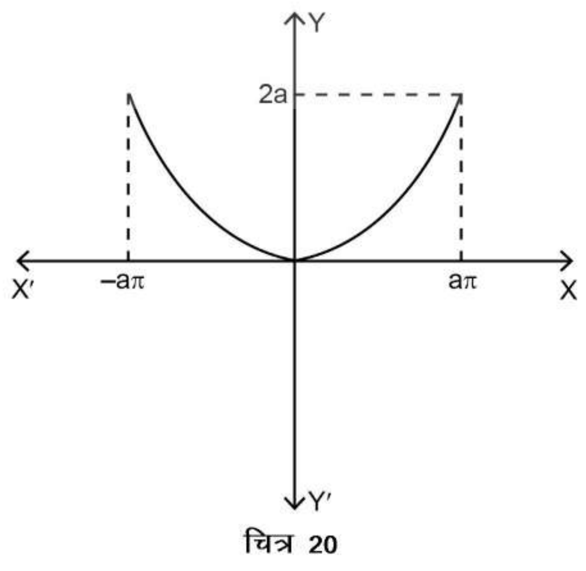
$t \in [-\pi, 0]$	$t \in [0, \pi]$
i) x में $-a$ से 0 तक ही वृद्धि होती है। ii) y में $2a$ से 0 तक की कमी होती है। iii) अतः, वक्र नीचे की ओर गिरता है।	i) x में 0 से a तक की वृद्धि होती है। ii) y में 0 से $2a$ तक की वृद्धि होती है। iii) अतः, वक्र ऊपर की ओर चढ़ता है।

साथ ही, अंतरालों $[-\pi, 0]$ और $[0, \pi]$ के अंत बिंदुओं $-\pi$, 0 और π पर इनके बारे में स्थितियों का सारांश सारणी 3 में दे रहे हैं।

सारणी 3

t	(x, y)	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{dx}{dy}$	स्पर्श रेखा
$-\pi$	$(-a\pi, 2a)$	परिभाषित नहीं	0	ऊर्ध्वाधर
0	(0, 0)	0	परिभाषित नहीं	क्षैतिज
π	$(a\pi, 2a)$	परिभाषित नहीं	0	ऊर्ध्वाधर

सारणी 3 में सारणीबद्ध किए गए आँकड़ों के आधार पर, हम चित्र 20 में दर्शाए अनुसार आलेख खींचते हैं।



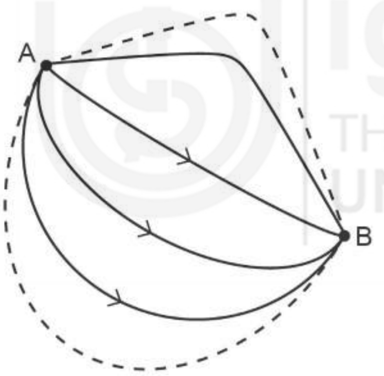
चित्र 20

यदि t में 2π की वृद्धि होती है, तो x में $2\pi a$ की वृद्धि होती है तथा y में कोई परिवर्तन नहीं होता है। इस प्रकार, उचित दूरी के स्थानांतरण द्वारा अंतरालों $\ldots[-5\pi, -3\pi]$, $[-3\pi, -\pi], [\pi, 3\pi], [3\pi, 5\pi]\ldots$ में संपूर्ण आलेख प्राप्त किया जा सकता है।

***

चक्रज को ज्यामिति की हेलन कहा जाता है, क्योंकि यह गणितज्ञों के बीच अनेक विवादों का कारण था। इसके अनेक रोचक गुण हैं। हम यहाँ मात्र एक का वर्णन कर रहे हैं। इस प्रश्न पर विचार कीजिए : दो बिंदुओं को जोड़ने वाली एक नाँद को क्या आकार दिया जाए ताकि किसी गेंद को A से B तक लुढ़काने में न्यूनतम संभव समय लगे?

अब, हम जानते हैं कि A से B तक की न्यूनतम (लघुतम) दूरी रेखा AB के अनुदिश (चित्र 21) होगी। परंतु क्योंकि हमारी रुचि न्यूनतम दूरी के स्थान पर न्यूनतम समय में है, इसलिए हमें इस तथ्य पर भी विचार करना चाहिए कि गेंद तेजी से तभी लुढ़केगी, जब नाँद A पर अधिक खड़ी या लंबवत् (steeper) हो। स्विज़रलैंड के गणितज्ञों जेकब और जोहन्न बर्नूली ने यर्थात् परिकलनों से यह सिद्ध किया कि ऐसी नाँद एक चक्रज के चाप के रूप की बनानी चाहिए। इसी के कारण, एक चक्रज को तीव्र ढाल वाला वक्र भी कहा जाता है।

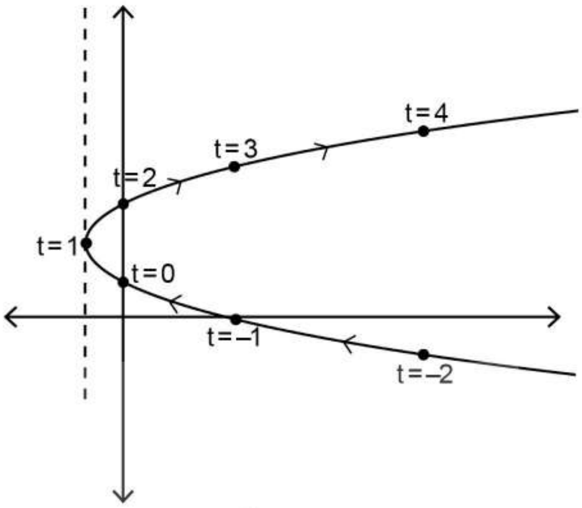


चित्र 21

चक्रज का उपयोग घड़ियों तथा गियर पहियों के दाँतों में किया जाता है। इसे किसी वृत्त पर स्थित एक बिंदु के बिंदुपथ के रूप में प्राप्त किया जा सकता है, जब वह वृत्त एक सरल रेखा के अनुदिश लुढ़कता है। आइए अब प्राचलिक रूप में एक अन्य वक्र का अनुरेखण करें।

उदाहरण 15: प्राचलिक समीकरणों $x = t^2 - 2t$ और $y = t + 1$ द्वारा परिभाषित वक्र का अनुरेखण खींचिए तथा उसकी पहचान कीजिए।

हल: हम $\frac{dx}{dt} = 2t - 2$ और $\frac{dy}{dt} = 1$ प्राप्त करते हैं, जिससे $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2t-2}$ है। यहाँ, $\frac{dy}{dx} > 0$ है, जब $t > 1$ है तथा $\frac{dy}{dx} < 0$ है, जब $t < 1$ है। इसका अर्थ है कि y वर्धमान है, जब $t > 1$ है तथा y ह्रासमान है, जब $t < 1$ है। $t = 1$ पर, वक्र की स्पर्श रेखा ऊर्ध्वाधर है। चित्र 22 में, हम वक्र को आलेखित करते हैं।



चित्र 22

हम सारणी 4 में दिए बिंदुओं को भी अंकित कर सकते हैं।

सारणी 4

t	x	y
–2	8	–1
–1	3	0
0	0	1
1	–1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5

जैसे-जैसे t में वृद्धि होती जाती है, एक कण, जिसकी स्थिति उपरोक्त प्राचलिक समीकरणों द्वारा दी जाती है, इस वक्र के अनुदिश तीरों की दिशा में गति करता रहता है। ध्यान दीजिए कि वक्र पर स्थित क्रमागत बिंदु समान समय अंतरालों पर प्रकट होते हैं, परंतु समान दूरियों पर नहीं। यह इसलिए है, क्योंकि वह कण धीमी गति से चलता है तथा फिर समय t में वृद्धि होने पर तेज गति से चलता है।

चित्र 22 से ऐसा प्रतीत होता है कि इस कण द्वारा अनुरेखित वक्र एक परवलय हो सकता है। हम इसकी पुष्टि निम्नलिखित प्रकार से प्राचल t के विलोपन द्वारा कर सकते हैं:

हम दूसरे समीकरण से $t = y - 1$ प्राप्त करते हैं तथा इसे पहली समीकरण में प्रतिस्थापित करते हैं। इससे $x = t^2 - 2t = (y-1) = y^2 - 4y + 3$ प्राप्त होता है और इसलिए दी प्राचलिक समीकरण द्वारा दिया जाने वाला वक्र परवलय $x = y^2 - 4y + 3$ है।

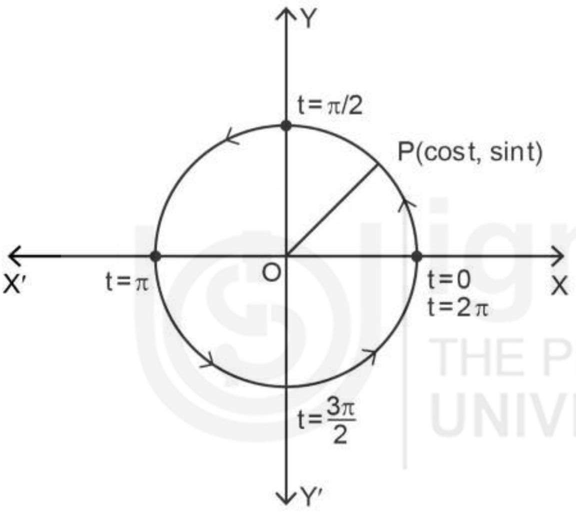
***

उदाहरण 16: निम्नलिखित प्राचलिक समीकरणों द्वारा कौन–सा वक्र निरूपित होती है?

$x = \cos t,\ y = \sin t,$ जहाँ $0 \le t \le 2\pi$ है।

हलः यदि हम बिंदुओं को अंकित करते हैं, तो ऐसा प्रतीत होता है कि यह वक्र एक वृत्त है। हम इस धारणा की पुष्टि t के विलोपन द्वारा कर सकते हैं। ध्यान दीजिए कि $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ है।

इस प्रकार, बिंदु (x, y) एक इकाई वृत्त (unit circle) $x^2 + y^2 = 1$ पर गति करता है। ध्यान दीजिए कि इस उदाहरण में, प्राचल t का चित्र 23 में दर्शाए कोण (रेडियनों में) के रूप में निर्वचन किया जा सकता है। जब t में 0 से 2π तक की वृद्धि होती है, बिंदु $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ बिंदु $(1, 0)$ से प्रारंभ करते हुए, वृत्त के अनुदिश एक बार वामावर्त दिशा में गति करता है।



चित्र 23

***

देखिए कि क्या आप इस प्रश्न को कर सकते हैं।

E4) निम्नलिखित वक्रों का अनुरेखण कीजिए:

i) $x = a(t + \sin t),\ y = a(1 + \cos t),\ -\pi \le t \le \pi,\ a > 0$

ii) $x = a \sin 2t(1 + \cos 2t),\ y = a \cos 2t(1 - \cos 2t),\ 0 \le t \le \pi,\ a > 0$

iii) $x = at^2,\ y = 2at,\ 0 \le t \le 1$

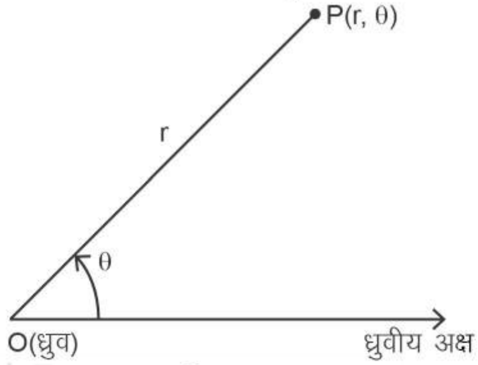
iv) $x = \sin 2t, y = \cos 2t, 0 \le t \le 2\pi$

v) $x = \sin t,\ y = \sin^2 t$

अभी तक, हमने कार्तीय और प्राचलिक रूपों वक्रों के अनुरेखण की चर्चा की है। अगले भाग में, हम ध्रुवीय रूप में वक्रों के अनुरेखण की चर्चा करेंगे।

16.4 एक वक्र का अनुरेखण : ध्रुवीय समीकरण

इस भाग में, हम ऐसी वक्रों के अनुरेखण की समस्या पर विचार करेंगे, जिनके समीकरण ध्रुवीय रूप में दिए हैं। आप ध्रुवीय निर्देशांकों के लिए, इकाई 3 का स्मरण कर सकते हैं। ऐसी निर्देशांक पद्धति में, हम समतल में प्रत्येक बिंदु P के साथ ध्रुवीय निर्देशांकों (r, Q) का एक युग्म सहचर कर (जोड़) सकते हैं, जहाँ r बिंदु और ध्रुव के बीच में इकाइयों की संख्या है तथा θ ध्रुवीय अक्ष के साथ किरण OP द्वारा बनाया गया कोण है, जैसा कि चित्र 24 में दर्शाया गया है। यदि r ऋणात्मक है, तो वह बिंदु मूलबिंदु के विपरीत ओर स्थिर होता है। इस प्रकार, r एक घूर्णन अक्ष पर एक स्थिति है।



चित्र 24

इस संबंध में निम्नलिखित विचार उपयोगी हो सकते हैं:

i) **सममिति** : यदि θ के स्थान पर $-\theta$ रखने पर, समीकरण अपरिवर्तित रहती है, तो वह वक्र प्रारंभिक रेखा के सापेक्ष सममित होती है। यदि r के स्थान पर $-r$ रखने पर, समीकरण अपरिवर्तित रहती है, तो वह वक्र ध्रुव (या मूलबिंदु) के सापेक्ष सममित होता है।

   अंत में, यदि θ के स्थान पर $\pi-\theta$ रखने पर, समीकरण अपरिवर्तित रहती है, तो वह वक्र रेखा $\theta=\pi/2$ के सापेक्ष सममित होता है।

ii) **क्षेत्र** : θ के मान्य मानों के लिए, वे सीमाएँ ज्ञात कीजिए जिनके बीच में r स्थित होना चाहिए। यदि किसी $a>0$ के लिए, $r<a(r>a)$ है, तो वह वक्र संपूर्ण रूप से वृत्त $r=a$ के अंदर (बाहर) स्थित होता है। यदि θ के कुछ मानों के लिए, r^2 ऋणात्मक है, तो संगत क्षेत्र में वक्र का कोई भाग स्थित नहीं होता।

iii) **वृत्त के एक बिंदु और मूलबिंदु को मिलाने वाली रेखा तथा स्पर्श रेखा के बीच का कोण** : उपयुक्त बिंदुओं पर, यह कोण सरलता से निर्धारित किया जा सकता है। इन बिंदुओं पर यह कोण वक्र के आकार के बारे जानने में सहायक होता है। इकाई 14 से स्मरण कीजिए कि यह कोण ϕ संबंध $\tan\phi = r\dfrac{d\theta}{dr}$ द्वारा दिया जाता है।

हम ध्रुवीय निर्देशांकों में $r=f(\theta)$ के रूप की समीकरणों के आलेख खींचने की प्रक्रिया को कुछ उदाहरणों की सहायता से स्पष्ट करेंगे, जहाँ यह कल्पना की गई है कि θ को रेडियनों में मापा गया है। इनका सावधानीपूर्वक अध्ययन कीजिए ताकि आप स्वयं कुछ वक्रों का अनुरेखण कर सकेंगे।

उदाहरण 17: हृदयाभ $r=a(1+\cos\theta)$ का अनुरेखण कीजिए।

हलः हम निम्नलिखित प्रेक्षण कर सकते हैं:

i) **सममिति :** क्योंकि $\cos\theta = \cos(-\theta)$ होता है, इसलिए प्रारंभिक रेखा के सापेक्ष वक्र सममित है। इसका अर्थ है कि हमें वक्र का अनुरेखण केवल प्रारंभिक रेखा के ऊपर ही करने की आवश्यकता है। शेष आधा वक्र ऊपर खींची वक्र का प्रारंभिक रेखा में परावर्तन होगा।

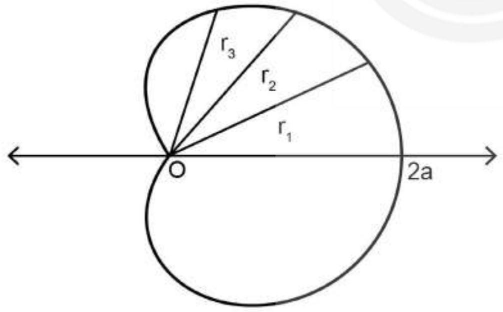
ii) **क्षेत्र :** क्योंकि $-1 \le \cos\theta \le 1$ इसलिए वक्र वृत्त $r = 2a$ के अंदर स्थित है।

iii) **स्पर्श रेखाएँ :** $\frac{dr}{d\theta} = -a\sin\theta$ है। अतः, $\frac{dr}{d\theta} < 0$ है, जब $0 < \theta < \pi$ है। इस प्रकार, अंतराल $]0, \pi/2[$ में जब θ में वृद्धि होती है, तब r में कमी होती है। इसी प्रकार, $]\pi/2, \theta[$ में θ जब θ में वृद्धि होती है, तब r में कमी होती है। r और θ के कुछ संगत मान सारणी 5 में दिए हैं।

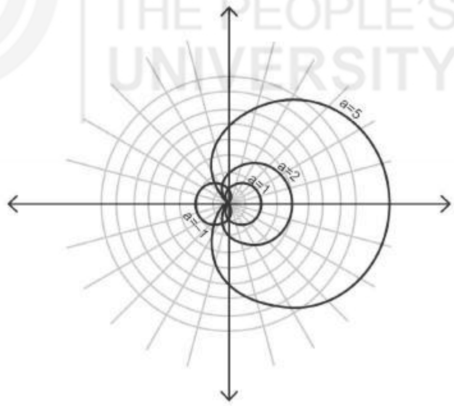
सारणी 5

θ	0	$\pi/2$	π
r	$2a$	a	0

उपरोक्त तथ्यों को संयोजित करने पर, हम सरलता से प्रारंभिक रेखा के ऊपर आलेख खींच सकते हैं। इस भाग को प्रारंभिक रेखा में परावर्तित करके हम वक्र को संपूर्ण रूप से खींच सकते हैं, जैसा कि चित्र 25 (क) में दर्शाया गया है। कम होती त्रिज्याओं 2a, r_1, r_2, r_3 पर ध्यान दीजिए। यदि हम a को बदलने दें और इसे धनात्मक रखें तो हृदयाभ का आकार बदलता है। यदि a ऋणात्मक है तो हृदयाभ की दिशा बदल जाती है। ये हृदयाभ चित्र 25 (ख) में दिखाये गये हैं।



(क) वक्र $r = a(1+\cos\theta)$



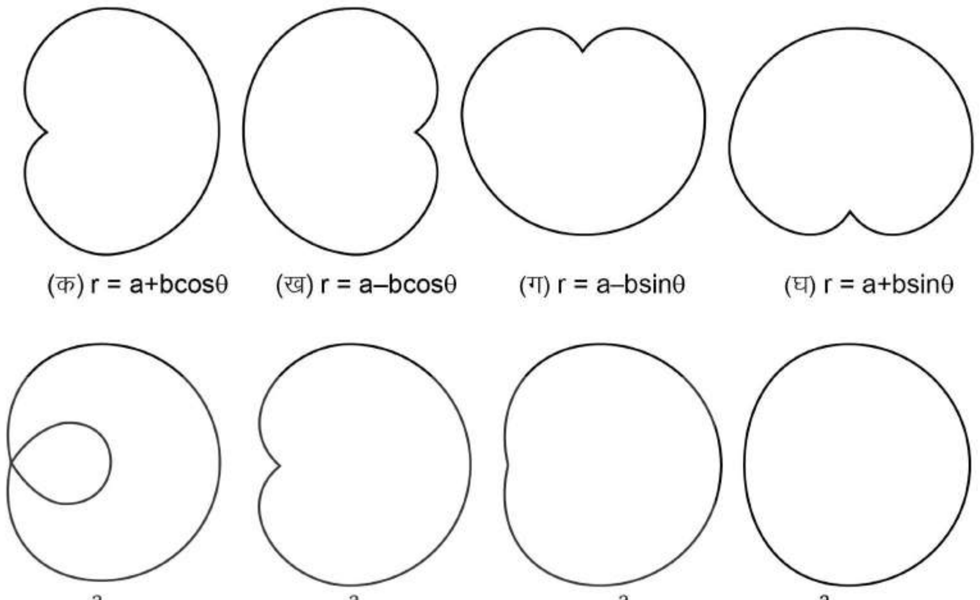
(ख) वक्र $r = a(1+\cos\theta)$, $a = 1, 2, 5, -1$ के लिए।

चित्र 25

यह वक्र एक हृदयाभ कहलाता है, क्योंकि यह हृदय जैसा लगता है।

***

आप इस ओर ध्यान दे सकते हैं कि चारों रूपों $r = a \pm b\sin\theta$ और $r = a \pm b\cos\theta$ में से कोई भी समीकरण, जिनमें $a > 0$ और $b > 0$ है, ध्रुवीय वक्र निरूपित करती हैं, जो मंथरक (limacons) [एक घोंघे जैसे जीव के लिए लैटिन शब्द लाइमेक्स (limax) से लिया गया है] कहलाती हैं जैसा कि चित्र 26 (क) से चित्र 26 (घ) तक दिखाया गया है। एक मंथरक के लिए चार संभव आकार हैं, जो अनुपात a/b भी निर्भर करते हैं, (चित्र 26 (ङ) से चित्र 26 (ज)) तक । यदि $a = b$ है ($a/b = 1$ की स्थिति) तो मंथरक हृदय के आकार जैसा प्रतीत होने के कारण एक **हृदयाभ** कहलाता है, जैसा कि उदाहरण 17 में बताया जा चुका है।



(क) $r = a+b\cos\theta$ (ख) $r = a-b\cos\theta$ (ग) $r = a-b\sin\theta$ (घ) $r = a+b\sin\theta$

(ङ) $\frac{a}{b}<1$ (आंतरिक छल्ले या फंदे के साथ) (च) $\frac{a}{b}=1$ (हृदयाभ) (छ) $1<\frac{a}{b}<2$ (गड्डे वाली) (झ) $\frac{a}{b}>2$ (उत्तल)

चित्र 26

उदाहरण 18: समानकोणिक सर्पिल $r = ae^{\theta\cot\alpha}$ का अनुरेखण कीजिए।

हल: हम इस प्रकार प्रारंभ करते हैं:

i) **क्षेत्र** : जब $\theta = 0$ है, तक $r = a$ है।

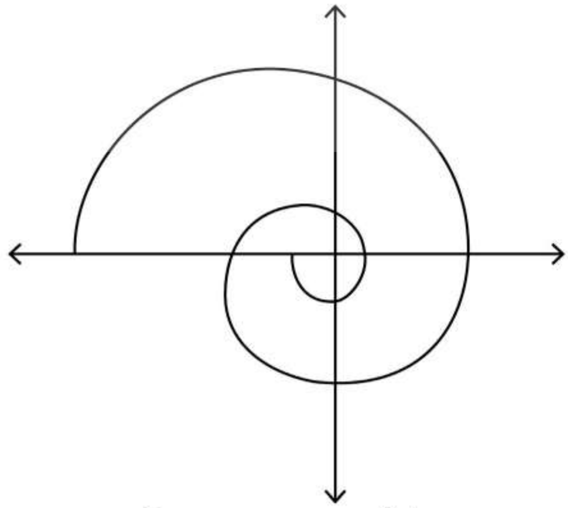
ii) **सममिति** : यहाँ कोई सममिति नहीं है।

iii) **स्पर्श रेखाएँ** : $\frac{dr}{d\theta} = r\cot\alpha$ है, जो $\cot\alpha > 0$ मानते हुए धनात्मक है।

अतः, जब θ में वृद्धि होती है, तब r में भी वृद्धि होती है। $r\frac{d\theta}{dr} = \tan\alpha$ है।

इस प्रकार, प्रत्येक बिंदु पर, वक्र पर स्थित एक बिंदु को मूलबिंदु से मिलाने वाली रेखा तथा स्पर्श रेखा के बीच का कोण एक ही अर्थात् α रहता है। इसी लिए यह नाम दिया गया है।

इन तथ्यों को संयोजित करने पर, हमें चित्र 27 में दर्शाए अनुसार वक्र का आकार प्राप्त होता है।



चित्र 27: वक्र $r = ae^{\theta\cot\alpha}$

समानकोणिक (लघुगणकीय) सर्पिल $r = ae^{\theta\cot\alpha}$ **पीछा करने का वक्र** (curve of pursuit)

कहलाता है। मान लीजिए एक वर्ग में चारों कोनों से चार कुत्ते चलना प्रारंभ करते हैं। इनमें से प्रत्येक दूसरे कुत्ते को एकसमान वेग से सामने से पीछा करता है। तब, इनमें से प्रत्येक एक समानकोणिक सर्पिल अनुरेखित करता है। अनेक घोंघे (shell) और जीवाश्म (fossile) ऐसे आकार के होते हैं जो समानकोणिक सर्पिलों के आकार के बहुत निकट होते हैं (चित्र 28)। सूरजमुखी के फूल के बीच या चीड़ के शंकु के पत्ते भी इसी रूप में व्यवस्थित होते हैं।

चित्र 28: सर्पिल

इस सर्पिल की प्रथम चर्चा दकार्ते (Descartes) द्वारा मरसेन्ने (Mersenne) को 1638 में लिखे पत्रों में मिलती है। लघुगणकीय सर्पिल नाम का श्रेय जेक्यूस बर्नूली (Jacques Bernoulli) को जाता है। वह इससे इतना उत्तेजित हुआ कि उसने यह वसियत लिखी कि उसकी कब्र पर एक समानकोणिक सर्पिल की नक्काशी की जाए, जिसके नीचे शब्द 'यद्यपि बदला, परंतु मैं बिना बदले ऊपर चढ़ा' (Though changed, I rise unchanged) अंकित हों।

सर्पिल $r = a\theta$ आर्कमिडीयन सर्पिल (Archimedean Spiral) कहलाता है। इसका अध्ययन, कोनोन (Conon) ने प्रारंभ किया था। आर्किमिडीज ने इसका उपयोग एक वृत्त को वर्ग करने में, अर्थात् एक दिए हुए वृत्त के क्षेत्रफल के बराबर के क्षेत्रफल वाले वर्ग बनाने में, किया। यह सर्पिल वृहत् रूप से एक समान रैखिक गति उत्पन्न करने के लिए एक कैम (Cam) के रूप में प्रयोग किया जाता है। इसका उपयोग अपकेन्द्री (Centrifugal) पंपों के खोलों के रूप में किया जाता है, जिससे हवा, जिसके आयतन में पंखे के ब्लेडों के प्रत्येक डिग्री के घूर्णन के साथ एकसमान रूप से वृद्धि होती रहती है, को पीछे का दबाव बनाए बिना, निर्गम में संचारित कर दिया जाता है।

सर्पिल $r\theta = a$ का श्रेय वारिंगनन (Varignon) को जाता है। इसे **व्युत्क्रम या अतिपरवलयिक (reciprocal or hyperbolic)** सर्पिल (याद कीजिए कि $xy = a$ एक अतिपरवलय है) के रूप में जाना जाता है। यह उस कण का पथ है, जो एक केन्द्रीय बल के अंतर्गत दूरी के घन के रूप में विचरण करता है।

आइए, अब अगले उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 19: वक्र $r = a\sin 3\theta, a > 0$ का अनुरेखण कीजिए।

हल: i) **सममिति** : आप ध्यान दे सकते हैं कि यह वक्र रेखा $\theta = \pi/2$ के सापेक्ष

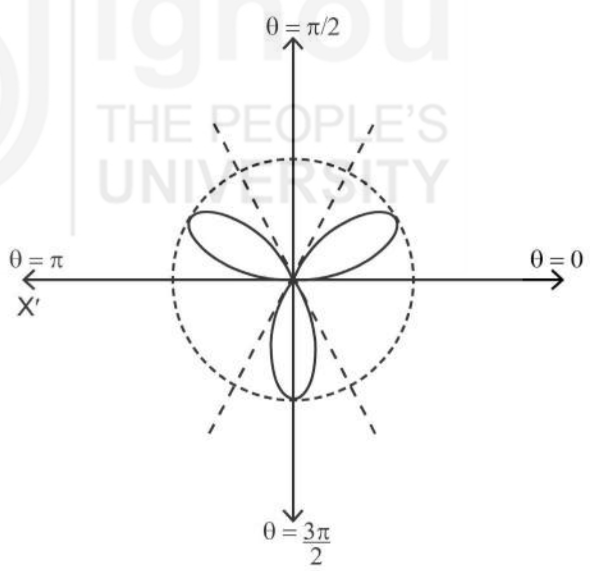
सममित है, क्योंकि θ के स्थान पर $\pi-\theta$ रखने पर समीकरण में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

ii) **क्षेत्र** : वक्र वृत्त $r=a$ के अंदर स्थित है, क्योंकि $\sin 3\theta \le 1$ है। मूलबिंदु वक्र पर स्थित है तथा केवल यही बिंदु है जहाँ प्रारंभिक रेखा वक्र से मिलती है।

iii) **स्पर्श रेखाएँ** : $r=0 \Rightarrow \theta = n\pi/3$ है, जहाँ n कोई पूर्णांक है। अतः, मूलबिंदु एक गुणज बिंदु है, क्योंकि रेखाएँ $\theta = 0, \pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3, 2\pi$ इत्यादि ध्रुव पर स्पर्श रेखाएँ हैं।

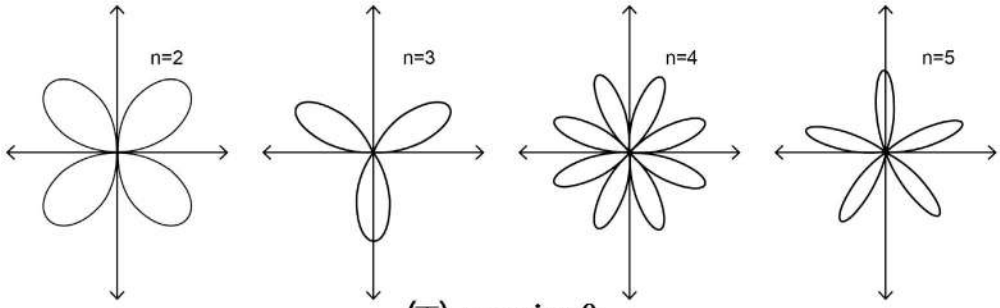
iv) **एकदिष्टता** : $\frac{dr}{d\theta} = 3\cos 3\theta$ है। इसलिए, अंतरालों $]0, \frac{\pi}{6}[,]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}[$ और $]\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}[$ में r में वृद्धि होती है तथा अंतरालों $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[,]\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}[$ और $]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}[$ में कमी होती है। ध्यान दीजिए कि r ऋणात्मक है, जब $\theta \in]\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}[$ या $\theta \in]\pi, \frac{4\pi}{3}[$ या $\theta \in]\frac{5\pi}{3}, 2\pi[$ है।

इसलिए, इस वक्र में तीन फंदे (loops) हैं, जैसा कि चित्र 29 में दर्शाया गया है। यह फलन आवर्ती है तथा जब θ में 2π से आगे वृद्धि होती है, तब वक्र स्वयं पुनः अनुरेखित होता है।

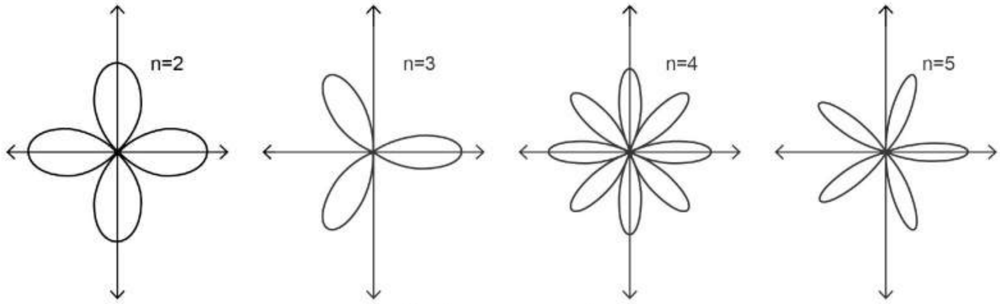


चित्र 29: वक्र $\mathbf{r = a\sin 3\theta}$

ध्रुवीय निर्देशांकों में $r = a\sin n\theta$ और $r = a\cos n\theta$ के रूप के समीकरण, जिनमें $a > 0$ है और n एक धनात्मक पूर्णांक है, फूलों के आकार के वक्रों के कुलों को निरूपित करती हैं, जो गुलाब कहलाते हैं (चित्र 30)। गुलाब में, समान दूरियों पर त्रिज्या a वाली n पंखड़ियाँ होती हैं, यदि n विषम है तथा समान दूरियों पर त्रिज्या a वाली 2n पंखड़ियाँ होती हैं, यदि n सम है। यह दर्शाया जा सकता है कि एक सम संख्या की पंखड़ियों वाले गुलाब को ठीक एक बार अनुरेखित किया जाता है, जब θ अंतराल $0 \le \theta < 2\pi$ में विचरण करता है तथा एक विषम संख्या की पंखड़ियों वाले गुलाब को ठीक एक बार अनुरेखित किया जाता है, जब θ अंतराल $0 \le \theta < \pi$ में विचरण करता है। त्रिज्या a के तीन पंखड़ियों वाले एक गुलाब को उदाहरण 19 में आलेखित किया गया था।



(क) $r = a\sin n\theta$



(ख) $r = a\cos n\theta$

चित्र 30: गुलाब वक्र

अब स्वयं अपने आप कुछ वक्रों को अनुरेखित करने का प्रयास कीजिए।

E5) ध्रुवीय निर्देशांकों में निम्नलिखित वक्रों को अनुरेखित कीजिए:

i) $r = 1$

ii) $\theta = \frac{\pi}{4}$

iii) $r = \theta \ (\theta \geq 0)$

E6) आपके द्वारा उपयोग किए सभी गुणों को बताते हुए, निम्नलिखित वक्रों को अनुरेखित कीजिए।

i) $r = a(1-\cos\theta),\ a > 0$

ii) $r = 2 + 4\cos\theta$

iii) $r = a\cos 3\theta,\ a > 0$

iv) $r = a\sin 2\theta,\ a > 0$

आइए, अब इसका सारांश दें कि इस इकाई में हमने क्या अध्ययन किया है।

16.5 सारांश

इस इकाई में, हमने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. एक वक्र $y = f(x)$ या $f(x, y) = 0$ के अनुरेखण का अर्थ उस संबंध को संतुष्ट करने वाले बिंदुओं को आलेखित करना है।

2. सममिति और एकदिष्टता के निकष (नियम), स्पर्श रेखाओं के समीकरण, अनंतस्पर्शियों तथा नतिपरिवर्तन बिंदुओं का वक्र अनुरेखण में उपयोग किया जाता है।।

3. वक्र अनुरेखण को कुछ उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया गया है, जब वक्र की समीकरण निम्नलिखित रूप में दी हुई हैः

   i) कार्तीय रूप

   ii) प्राचलिक रूप

   iii) ध्रुवीय रूप

16.6 हल / उत्तर

प्रत्येक स्थान पर बिंदुकित रेखाएँ स्पर्श रेखाएँ या अनंतस्पर्शियाँ निरूपित करती हैं।

E1) i) **प्राँत** : $\mathbb{R}$ है तथा वक्र प्रथम और द्वितीय चतुर्थांशों में स्थित है।

अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु : $(0, 0)$

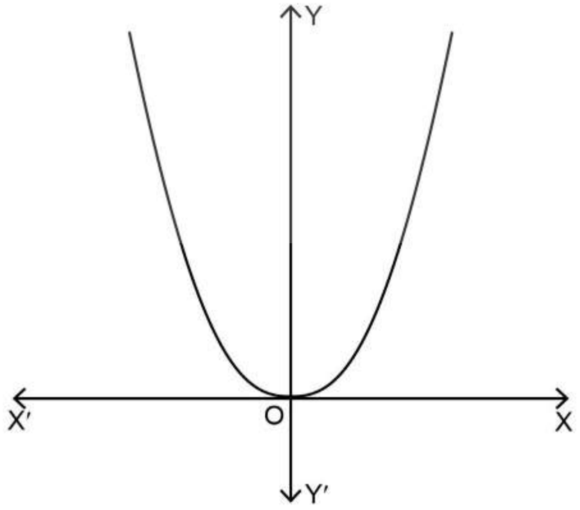
सममिति : y-अक्ष के सापेक्ष

अनंतस्पर्शियाँ : कोई नहीं।

एकदिष्टता : $]0, \infty[$ पर वर्धमान और $]-\infty, 0[$ पर ह्रासमान

सापेक्ष चरम बिंदु : 0 पर निम्निष्ठ और $f(0) = 0$ है।

इस वक्र का संगत आरेख चित्र 31 में दिया गया है।



चित्र 31

ii) **अस्तित्व का क्षेत्र** : $[2, \infty[$ तथा वक्र प्रथम और चौथे चतुर्थांशों में स्थित है।

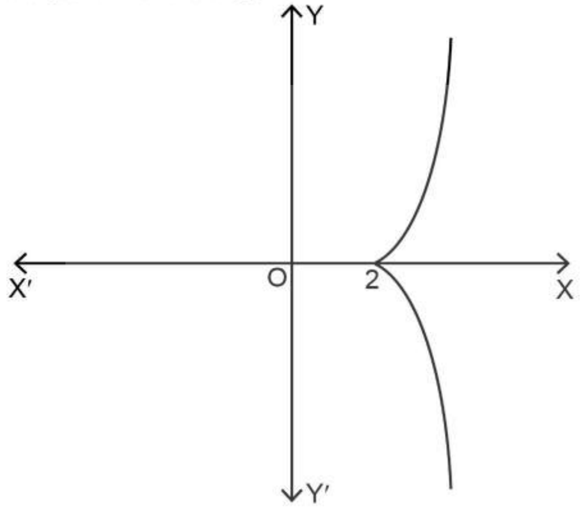
अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु : $(2, 0)$

सममिति : x-अक्ष के सापेक्ष

अनंतस्पर्शियाँ : कोई नहीं

द्विक बिंदु : यदि हम मूलबिंदु को $(2, 0)$ पर स्थानांतरित करें, तो $(2, 0)$ द्विक बिंदु है तथा उभयाग्र है।

संगत वक्र चित्र 32 में आरेखित है।



चित्र 32

iii) **प्राँत** : $\mathbb{R}$ है, तथा वक्र प्रथम और तृतीय चतुर्थांशों में स्थित है, क्योंकि या तो x, y दोनों धनात्मक हैं या दोनों ऋणात्मक हैं।

सममिति : मूलबिंदु के सापेक्ष

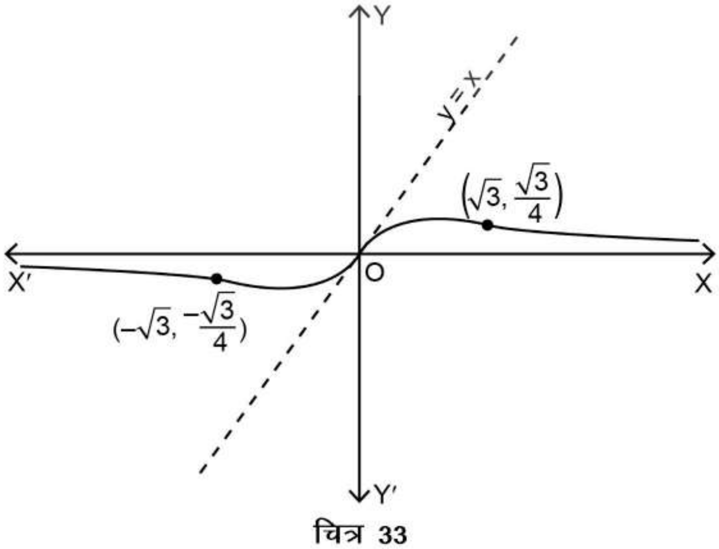
अनंतस्पर्शी : x-अक्ष एक अनंतस्पर्शी है।

एकदिष्टता : $]-1, 1[$ पर फलन ऊपर चढ़ता है तथा अन्य पर नीचे गिरता है।

स्पर्श रेखाएँ : $y = x$ मूलबिंदु पर स्पर्श रेखा है।

अवतलता : $(0, 0), \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right), \left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ नतिपरिवर्तन बिंदु हैं।

आलेख चित्र 33 में दर्शाया गया है:



चित्र 33

iv) **अस्तित्व का क्षेत्र :** $\frac{y^2}{x^2} = 1 - x^2$ दर्शाती है कि संपूर्ण वक्र रेखाओं $x = \pm 1$ के बीच में स्थित है।

अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु : $(0, 0)$

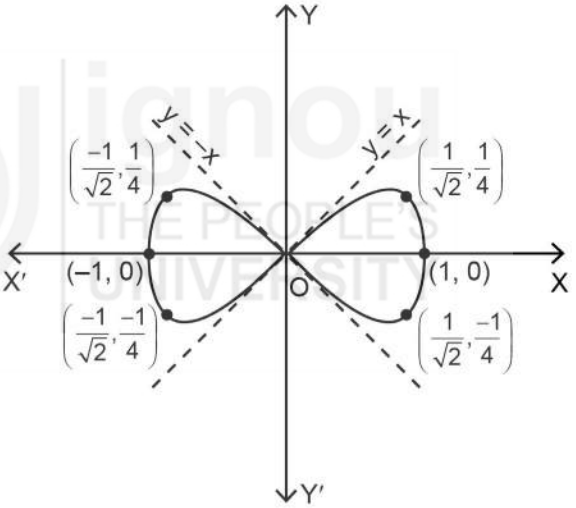
सममिति : x-अक्ष, y-अक्ष और मूलबिंदु के सापेक्ष

स्पर्श रेखाएँ : मूलबिंदु पर स्पर्श रेखाएँ $y = \pm x$ हैं। $x = \pm 1$ पर स्पर्श रेखाएँ ऊर्ध्वाधर हैं।

सापेक्ष चरम बिंदु : $\left(\pm 1/\sqrt{2}, 1/4\right)$ पर उच्चिष्ठ और $\left(\pm 1/\sqrt{2}, -1/4\right)$ पर निम्निष्ठ है।

गुणज बिंदु : $y = \pm x\sqrt{1-x^2}$ परिभाषित है, यदि $1 - x^2 \geq 0$ है या $-1 \leq x \leq 1$ है। यदि न्यूनतम घात वाले पद को 0 के बराबर रखें, तो हमें $y^2 = x^2$ प्राप्त होता है, जिससे $y = \pm x$ मिलता है। इसलिए, वक्र की मूलबिंदु पर दो स्पर्श रेखाएँ $y = x$ और $y = -x$ हैं तथा मूलबिंदु एक पात है।

वक्र चित्र 34 में आरेखित किया गया है।



चित्र 34

v) **प्राँत और परिसर :** $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$

सममिति : कोई नहीं

अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु : कोई नहीं

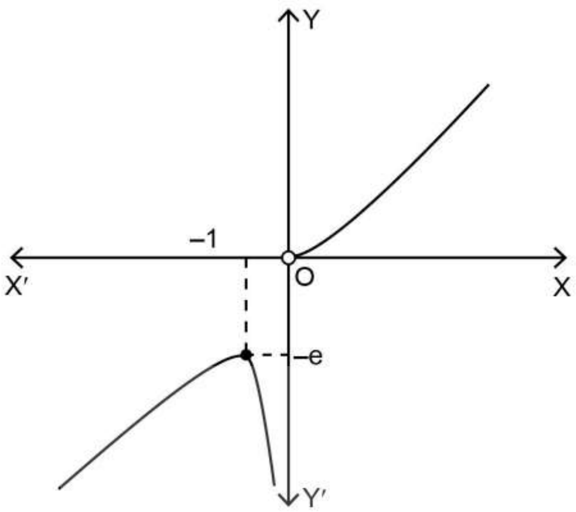
अवतलता : $]0, \infty[$ पर ऊपर की ओर अवतल तथा $]-\infty, 0[$ पर नीचे की ओर अवतल

सापेक्ष चरम बिंदु : –1 पर उच्चिष्ठ और सापेक्ष उच्चिष्ठ मान $f(-1) = -e$ है।

एकदिष्टता : $]-\infty, -1[$ और $]0, \infty[$ पर वर्धमान तथा $]-1, 0[$ पर ह्रासमान है।

असंततता का बिंदु : मूलबिंदु असंतता का बिंदु है।

संगत वक्र चित्र 35 में आरेखित है।



चित्र 35

vi) **प्राँत** : $\mathbb{R}$

सममिति : मूलबिंदु के सापेक्ष

आवर्तिता : आवर्त 2π

प्रतिच्छेद बिंदु : मूलबिंदु $(0, 0), (n\pi, 0)$ (n एक पूर्णांक है)

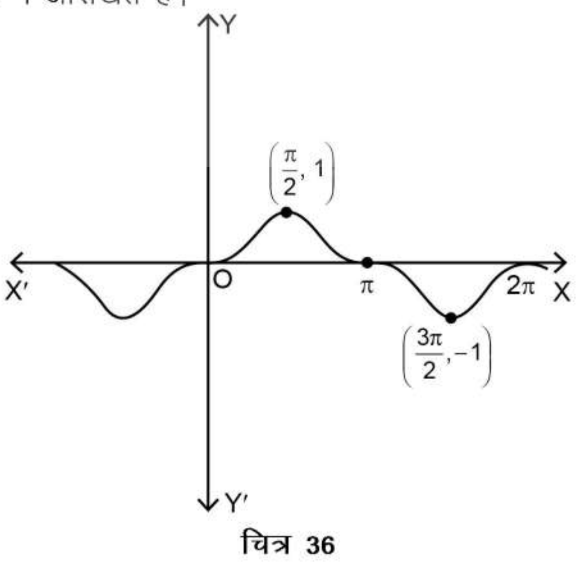
एकदिष्टता : $]0, \pi/2[$ और $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ पर वर्धमान तथा $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ पर ह्रासमान है।

सापेक्ष चरम बिंदु : $\pi/2$ पर उच्चिष्ठ और $f(\pi/2) = 1$ है, और $3\pi/2$ पर निम्निष्ठ है तथा $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ है।

अवतलता : $]0, a[$ और $]\pi - a, \pi[$ पर ऊपर की ओर अवतल तथा $]a, \pi - a[$ पर नीचे की ओर अवतल, जहाँ $a = \sin^{-1}\sqrt{2/3}$ है।

नतिपरिवर्तन बिंदु : $x = 0, \pi, \pi - a$

वक्र चित्र 36 में आरेखित है।



चित्र 36

vii) **प्राँत** : $]0, \infty[$

अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु : $(1, 0)$

सममिति : कोई नहीं

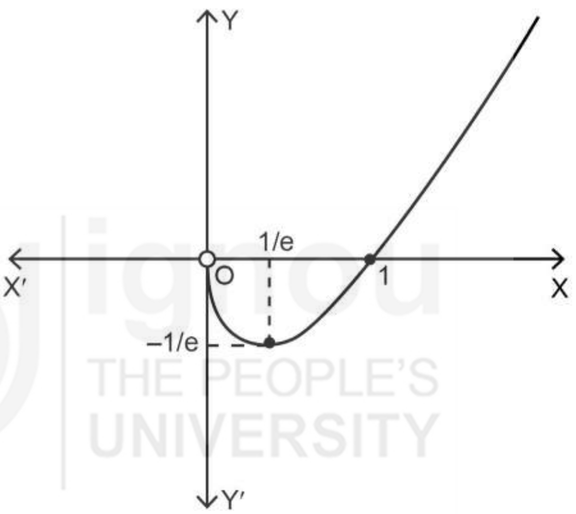
अनंतस्पर्शी : कोई नहीं

एकदिष्टता : $\left]\frac{1}{e}, \infty\right[$ पर वर्धमान तथा $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ पर ह्रासमान है।

सापेक्ष चरम बिंदु : $x = \frac{1}{e}$ पर निम्निष्ठ और $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ है।

अवतलता : $]0, \infty[$ पर ऊपर की ओर अवतल

वक्र चित्र 37 में खींचा गया है।



चित्र 37

viii) प्राँत : $\mathbb{R}$

अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु : $(0,0), (\pm 3\sqrt{3}, 0)$

सममिति : मूलबिंदु के सापेक्ष।

अनंतस्पर्शी : कोई नहीं।

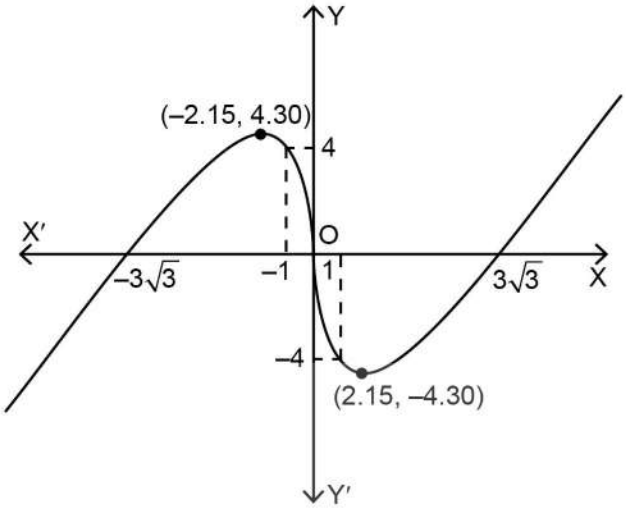
एकदिष्टता : $]-\infty, -1[$ और $]1, \infty[$ पर वर्धमान तथा $]-1, 1[$ पर ह्रासमान है।

सापेक्ष चरम मान : -1 पर उच्चिष्ठ तथा $f(-1) = 2$ है। 1 पर निम्निष्ठ तथा $f(1) = -2$ है।

अवतलता : $]0, \infty[$ पर ऊपर की ओर अवतल तथा $]-\infty, 0[$ पर नीचे की ओर अवतल

नतिपरिवर्तन बिंदु : $(0, 0)$ नतिपरिवर्तन बिंदु है।

संगत वक्र चित्र 38 में आरेखित है।



चित्र 38

ix) **प्राँत** : $x \in]2n\pi, (2n+1)\pi[$ जहाँ n एक पूर्णांक है। y का मान सदैव ऋणात्मक है। इसलिए, वक्र तीसरे और चौथे चतुर्थांशों में स्थित है।

अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु : $\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi, 0\right)$

सममिति : कोई नहीं

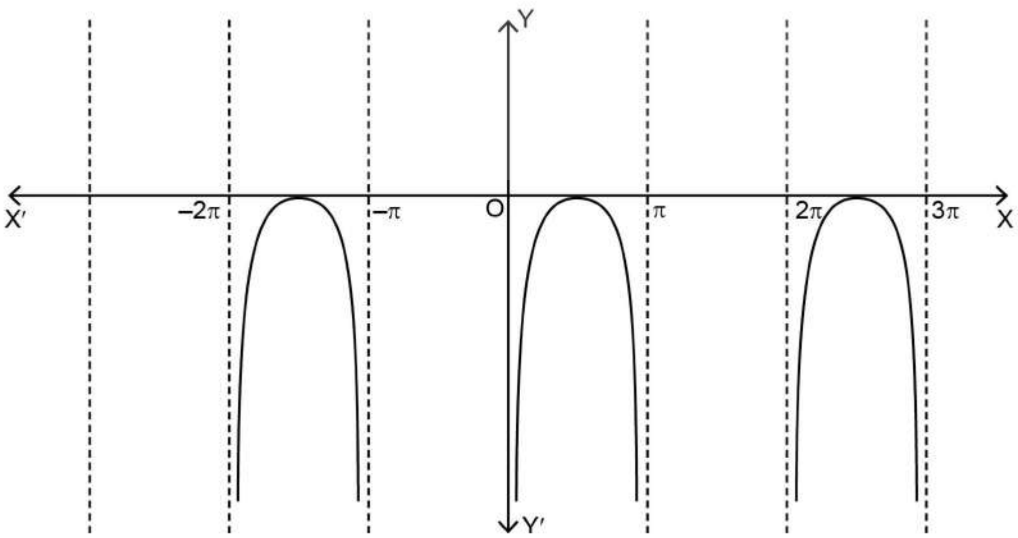
आवर्तिता : आवर्त 2π

अनंतस्पर्शियाँ : $x = n\pi$ पर ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शी

एकदिष्टता : $\left]2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right[$ पर वर्धमान तथा $\left]\frac{\pi}{2} + 2n\pi, (2n+1)\pi\right[$ पर ह्रासमान

सापेक्ष चरम मान : $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ पर उच्चिष्ठ तथा $f\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0$ है।

संगत वक्र चित्र 39 में आरेखित है।



चित्र 39

x) **प्राँत** : $]-\infty, 5]$

अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु : (0, 01), (5, 0)

सममिति : कोई नहीं

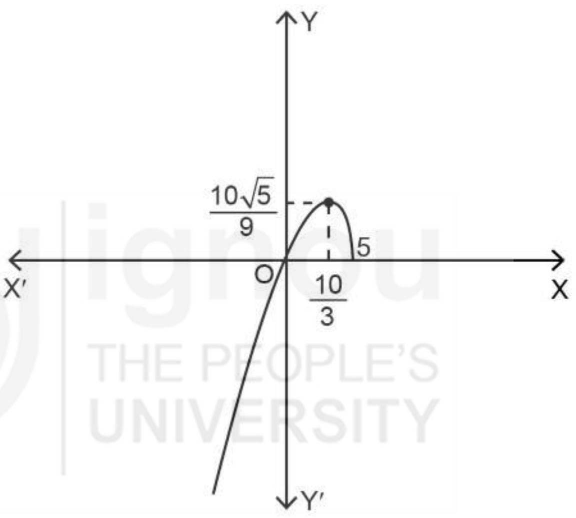
अनंतस्पर्शी : कोई नहीं

एकदिष्टता : $\left]-\infty, \frac{10}{3}\right[$ पर वर्धमान तथा $\left]\frac{10}{3}, 5\right[$ पर ह्रासमान

सापेक्ष चरम बिंदु : $\frac{10}{3}$ पर उच्चिष्ठ तथा $f\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{10}{9}\sqrt{5}$ है।

अवतलता : $]-\infty, 5[$ पर नीचे की ओर अवतल

संगत वक्र चित्र 40 में दर्शाया गया है।



चित्र 40

xi) **प्राँतः** $]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$

अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु : (0, 0)

सममिति : कोई नहीं

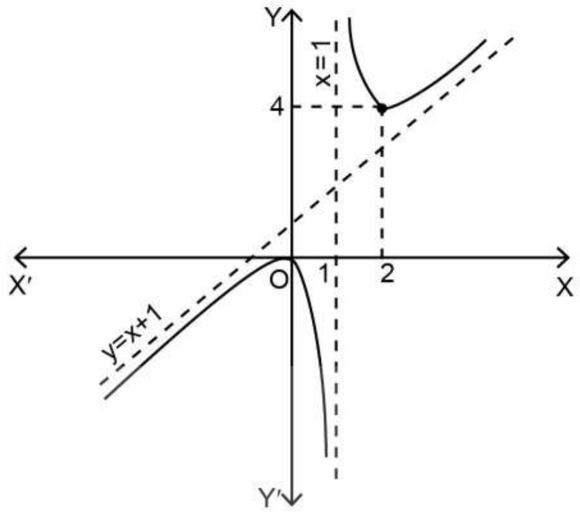
अनंतस्पर्शी : $x = 1, y = x + 1$

एकदिष्टता : $]-\infty, 0[$ और $]2, \infty[$ पर वर्धमान तथा $]0, 1[$ और $]1, 2[$ पर ह्रासमान है।

सापेक्ष चरम मान : $x = 0$ पर उच्चिष्ठ और $f(0) = 0$ है। तथा $x = 2$ पर निम्निष्ठ और $f(2) = 4$ है।

अवतलता : $]1, \infty[$ पर ऊपर की ओर अवतल तथा $]-\infty, 1[$ पर नीचे की ओर अवतल हैं।

संगत वक्र चित्र 41 में आरेखित है।



चित्र 41

xii) **प्राँत :** $]-\infty,0[\,\cup\,]0,\infty[$

अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु : $(-(4)^{1/3},0)$

सममिति : कोई नहीं

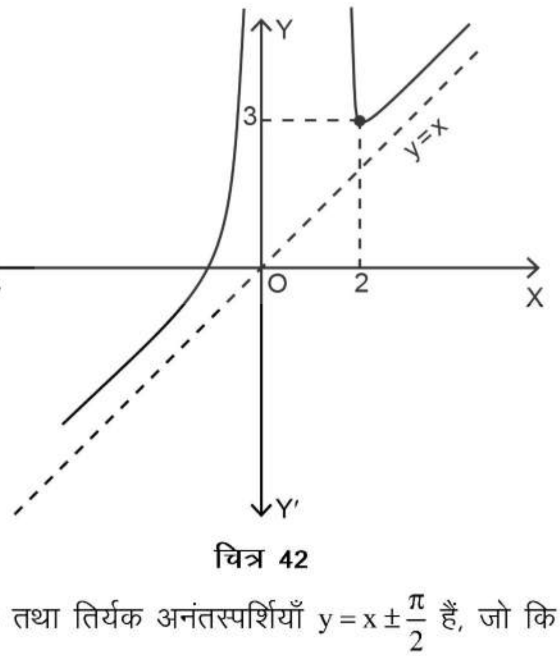
अनंतस्पर्शियाँ : $x=0,\ y=x$

एकदिष्टता : $]-\infty,0[$ और $]2,\infty[$ पर वर्धमान तथा $]0,2[$ पर ह्रासमान है।

सापेक्ष चरममान : $x=2$ पर निम्निष्ठ तथा $f(2)=3$ है।

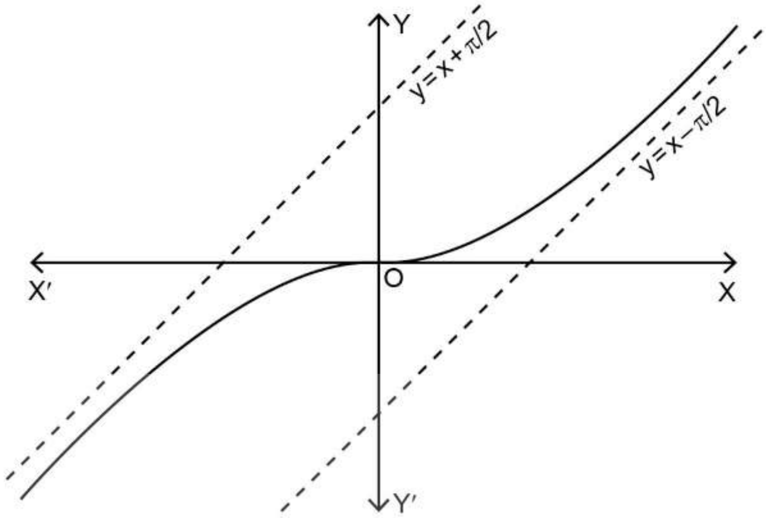
अवतलता : $]-\infty,0[$ और $]0,\infty[$ पर ऊपर की ओर अवतल

संगत वक्र चित्र 42 में आरेखित है।



चित्र 42

E2) $y=x-\tan^{-1}x$ तथा तिर्यक अनंतस्पर्शियाँ $y=x\pm\dfrac{\pi}{2}$ हैं, जो कि चित्र 43 में दर्शाई गईं हैं।



चित्र 43

E3) **प्राँत** : $[0, c[$

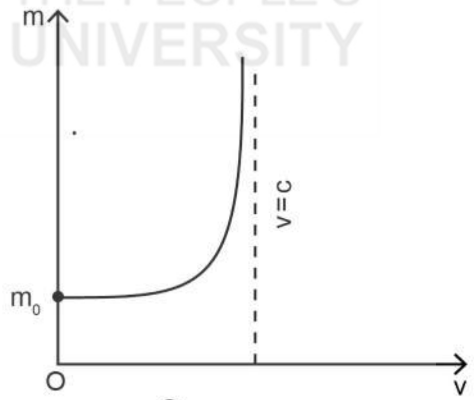
अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु : $(0, m_0)$

सममिति : कोई नहीं

अनंतस्पर्शी : $v = c$

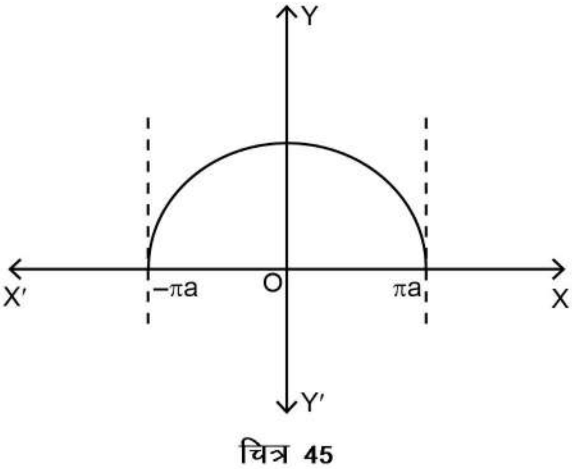
एकदिष्टता : $[0, c[$ पर वर्धमान

संगत वक्र चित्र 44 में आरेखित है।



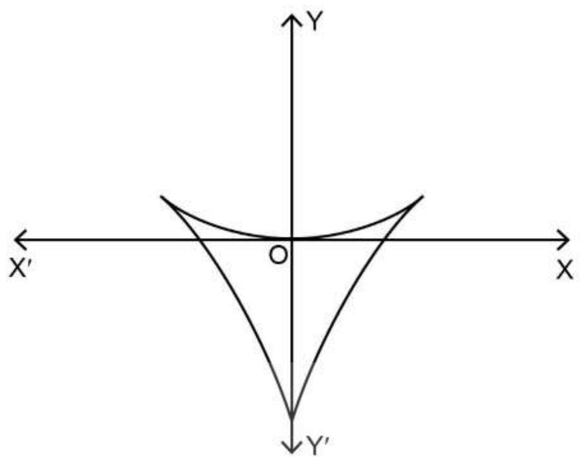
चित्र 44

E4) i)



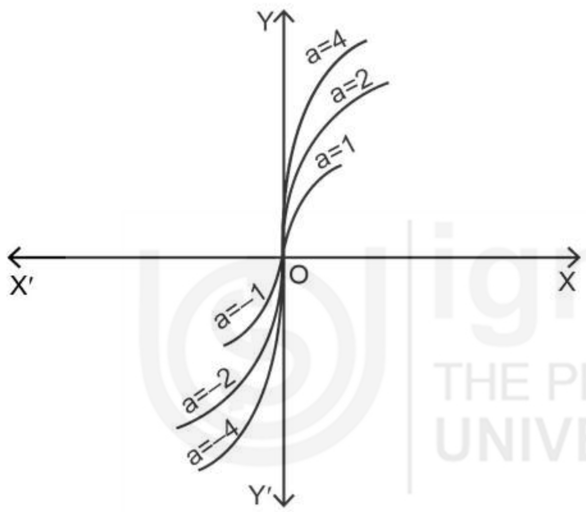
चित्र 45

ii)



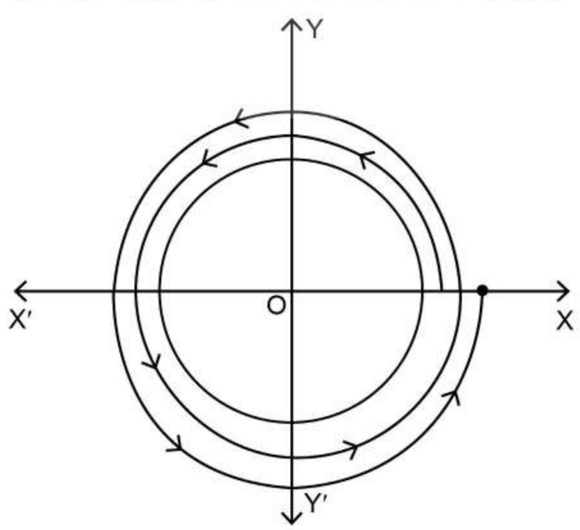
चित्र 46

iii)



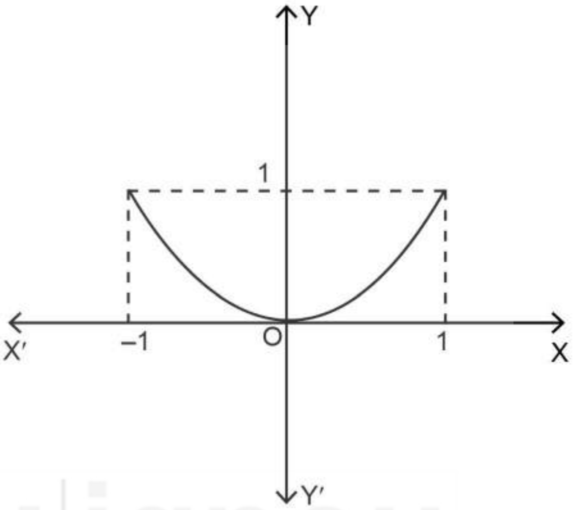
चित्र 47

iv) पुनः, हमें $x^2 + y^2 = \sin^2 2t + \cos^2 2t = 1$ प्राप्त होता है। इसलिए ये प्राचलिक समीकरण पुनः एक इकाई वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ को निरूपित करती हैं। परंतु जब 0 से 2π तक t में वृद्धि होती है, तब बिंदु $(x, y) = (\sin 2t, \cos 2t)$ बिंदु $(0, 1)$ से प्रारंभ करता है तथा वृत्त के अनुदिश वामावर्त (anti-clockwise) दिशा में दो बार घूम कर गति करता है, जैसा कि चित्र 48 में प्रदर्शित किया गया है।



चित्र 48

v) आप देख सकते हैं कि $y = (\sin t)^2 = x^2$ है और इसलिए बिंदु (x, y) परवलय $y = x^2$ पर गति करता है। परंतु यह भी ध्यान दीजिए कि क्योंकि $-1 \le \sin t \le 1$ है, इसलिए हम $-1 \le x \le 1$ प्राप्त करते हैं। अतः, प्राचलिक समीकरण केवल परवलय के एक भाग को निरूपित करती है, जिसके लिए $-1 \le x \le 1$ है। क्योंकि $\sin t$ आवर्ती है, इसलिए बिंदु $(x, y) = (\sin t, \sin^2 t)$ परवलय के अनुदिश $(-1, 1)$ से $(1, 1)$ तक प्रायः अपरिमित रूप से पीछे-आगे गति करता है (चित्र 49 देखिए)।

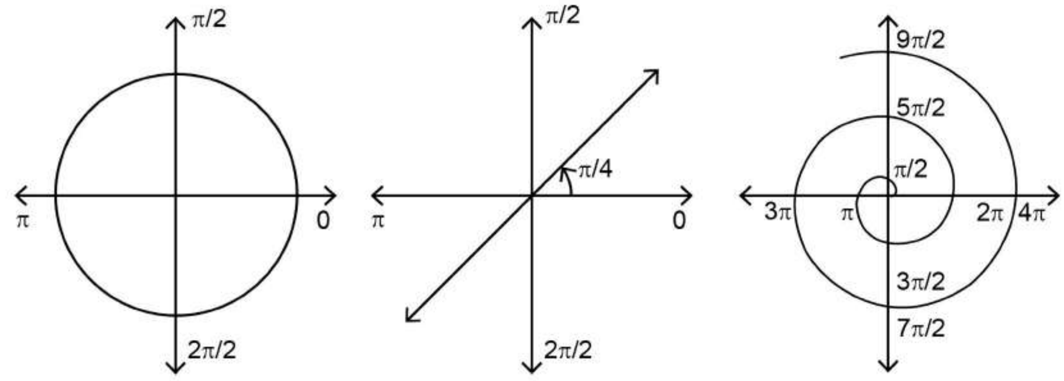


चित्र 49

E5) i) θ सभी मानों के लिए, बिंदु $(1, \theta)$ ध्रुव से सदैव 1 इकाई की दूरी पर रहता है। इस प्रकार, आलेख त्रिज्या 1 का एक वृत्त है, जिसका केन्द्र ध्रुव पर है [चित्र 50 (क)]।

ii) r के सभी मानों के लिए, बिंदु $(r, \pi/4)$ उस रेखा पर स्थित है, जो ध्रुवीय अक्ष के साथ $\pi/4$ का कोण बनाता है [चित्र 5 (ख)]। r के धनात्मक मान प्रथम चतुर्थांश में रेखा पर स्थित बिंदुओं के संगत हैं तथा r के ऋणात्मक मान तृतीय चतुर्थांश में रेखा पर स्थित बिंदुओं के संगत हैं। इस प्रकार, r पर किसी भी प्रतिबंध की अनुपस्थिति में, आरेख संपूर्ण रेखा है। परंतु ध्यान दीजिए कि यदि हमने प्रतिबंध $r \ge 0$ लगाए होते, तो आलेख प्रथम चतुर्थांश में केवल एक किरण होता।

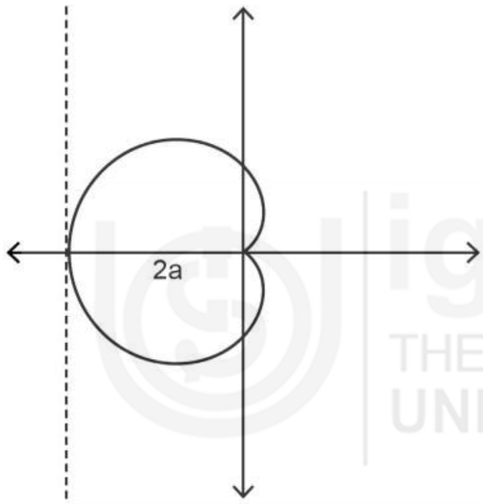
iii) ध्यान दीजिए कि जब θ में वृद्धि होती है, तब r में भी वृद्धि होती है। इस प्रकार, आलेख एक ऐसी वक्र है जो θ में वृद्धि होने पर, ध्रुव से निकल कर सर्पिल का आकार लेती है। इस सर्पिल के एक विवेकपूर्ण परिशुद्ध आरेख को, θ के उन मानों के लिए, जो $\pi/2$ के गुणज हैं, वक्र के x और y-अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदुओं को आलेखित करके प्राप्त किया जा सकता है, यह मस्तिष्क में रखते हुए कि r का मान सदैव θ के मान के बराबर होता है (चित्र 50 (ग))।



(क) **r = 1** (ख) $\theta = \pi/4$ (ग) **r = 0**

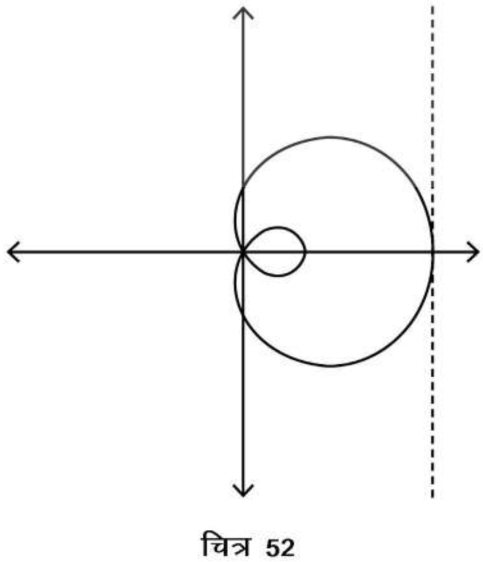
चित्र **50**

E6) i)



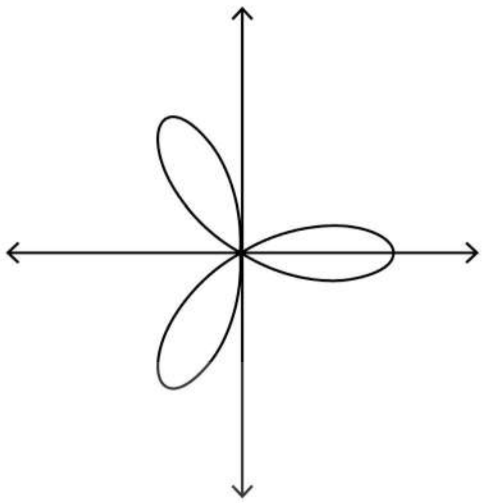
चित्र **51**

ii)



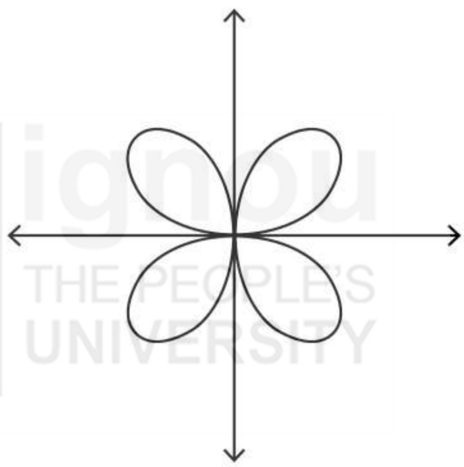
चित्र **52**

iii)



चित्र 53

iv)



चित्र 54

विविध उदाहरण और प्रश्न

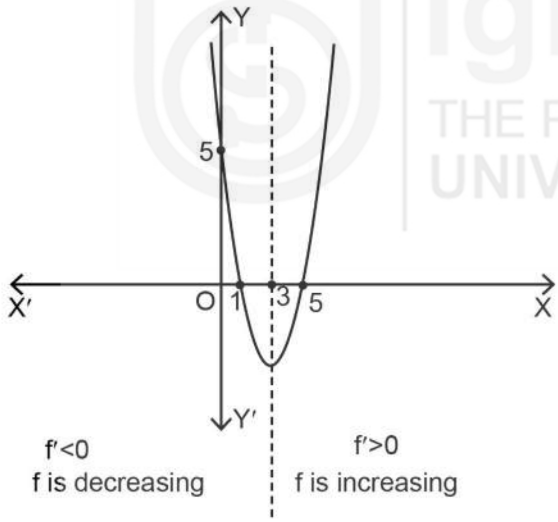
नीचे दिए उदाहरण और प्रश्न इस खंड में आपके द्वारा अध्ययन की गई संकल्पनाओं और प्रक्रियाओं पर आधारित है। इनको करने से आपको संबंधित संकल्पनाओं की बेहतर समझ तथा साथ ही प्रश्नों को हल करने का अच्छा अभ्यास प्राप्त होगा।

उदाहरण 1: वे अंतराल ज्ञात कीजिए, जिनमें निम्नलिखित फलन वर्धमान हैं तथा वे अंतराल जिनमें वे ह्रासमान हैं:

i) $f(x) = x^2 - 6x + 5$ ii) $f(x) = x^3$

हल: i) चित्र 1 में दिए f के आलेख से सुझाव मिलता है कि $x \le 3$ के लिए f ह्रासमान है तथा $x \ge 3$ के लिए वर्धमान है। इसकी पुष्टि करने के लिए, हम f को अवकलित करके $f'(x) = 2x - 6 = 2(x-3)$ प्राप्त करते हैं। इससे निष्कर्ष निकलता है कि $f'(x) < 0$ है, यदि $x < 3$ है तथा $f'(x) > 0$ है, यदि $x > 3$ है।

क्योंकि $x = 3$ पर f संतत है, इसलिए प्रथम अवलज जाँच के उपयोग से हम कह सकते हैं कि $]-\infty, 3[$ पर f ह्रासमान है तथा $]3, +\infty[$ वर्धमान है। हम चित्र 1 के आलेख से भी यही निष्कर्ष निकाल सकते हैं।

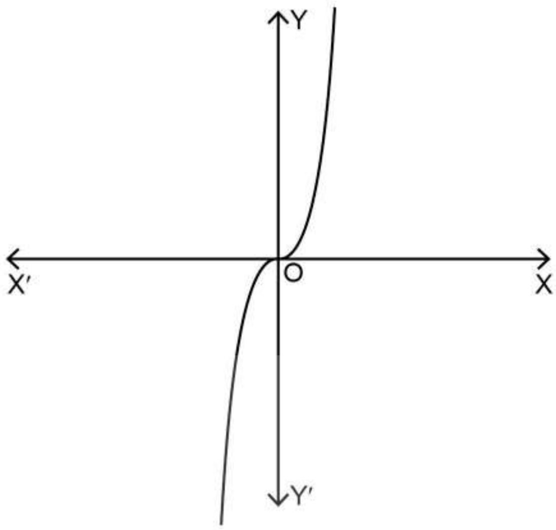


चित्र 1: $x^2 - 6x + 5$ का आलेख

ii) चित्र 2 में f का आलेख यह सुझाव देता है कि x-अक्ष के संपूर्ण ऊपर वाले क्षेत्र में f वर्धमान है। इसकी पुष्टि करने के लिए, हम f को अवकलित कर $f'(x) = 3x^2$ प्राप्त करते हैं। इस प्रकार, $f'(x) > 0$ है, यदि $x < 0$ है तथा $f'(x) > 0$ है, यदि $x > 0$ है।

क्योंकि $x = 0$ पर f संतत है, इसलिए प्रथम अवकलज जाँच के उपयोग से, $]-\infty, 0[$ और $]0, +\infty[$ पर f वर्धमान है।

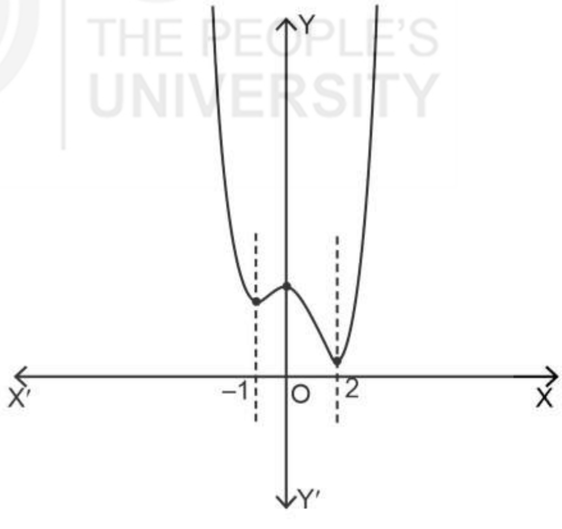
अतः, संपूर्ण अंतराल $]-\infty, +\infty[$ पर f वर्धमान है, जो निष्कर्ष हम चित्र 2 में दिए आलेख से भी प्राप्त करते हैं।



चित्र 2: x^3 का आलेख

***

उदाहरण 2: चित्र 3 में दिए $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2+5$ द्वारा परिभाषित फलन f के आलेख का वे अंतराल ज्ञात करने में उपयोग कीजिए जिनमें f वर्धमान या ह्रासमान है। साथ ही, अवकलजों के उपयोग से इसका सत्यापन भी कीजिए।



चित्र 3: $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2+5$ का आलेख

हल: आलेख से यह सुझाव मिलता है कि यदि $x \le -2$ है, तो ह्रासमान है तथा यदि $-2 \le x \le 0$ है, तो f वर्धमान है, यदि $0 \le x \le 1$ है, तो ह्रासमान है तथा यदि $x \ge 1$ है, तो वर्धमान है।

f को अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$f'(x)=x^3-x^2-2x=x(x^2-x-2)=x(x+1)(x-2)$ सारणी 1 में f' के चिह्न दिए गए हैं, जो आलेख से निगमित किए गए निष्कर्षों की पुष्टि करते हैं।

सारणी 1

अंतराल	$(x)(x+1)(x-2)$ के चिह्न	$f'(x)$ का चिह्न	निष्कर्ष
$x<-1$	$(-)(-)(-)$	$-$	$]-\infty,-1[$ पर f ह्रासमान है।
$-1<x<0$	$(-)(+)(-)$	$+$	$]-1,0[$ पर f वर्धमान है।
$0<x<2$	$(+)(+)(-)$	$-$	$]0,2[$ पर f ह्रासमान है।
$x>2$	$(+)(+)(+)$	$+$	$]2,+\infty[$ पर f वर्धमान है।

***

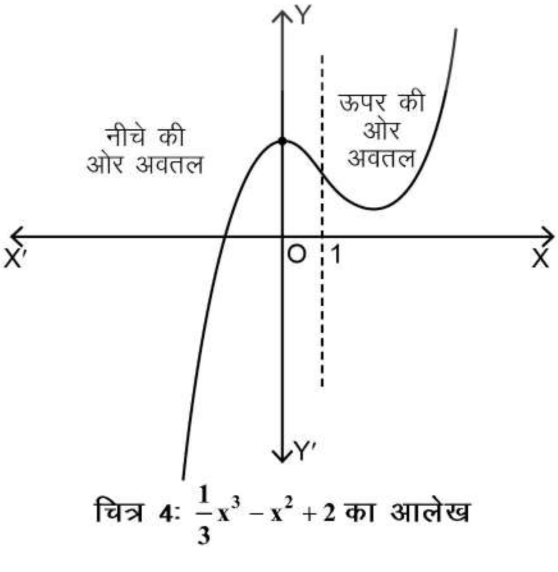
उदाहरण 3: वे फलन ज्ञात कीजिए, जिनमें निम्नलिखित फलन ऊपर की ओर अवतल हैं और नीचे की ओर अवतल हैं:

i) $f(x)=x^2-6x+5$ ii) $f(x)=x^3$ iii) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2$

हलः i) प्रथम दो अवकलजों को अवकलित करने पर, हम $f'(x)=2x$ और $f''(x)=2$ प्राप्त करते हैं। क्योंकि सभी x के लिए, $f''(x)>0$ है, इसलिए $]-\infty,+\infty[$ पर f ऊपर की ओर अवतल है। आप चित्र 1 में दिए आलेख से इसका सत्यापन कर सकते हैं।

ii) प्रथम दो अवकलजों को परिकलित करने पर, हम $f'(x)=3x^2$ और $f''(x)=6x$ प्राप्त करते हैं। क्योंकि $x<0$ होने पर $f''(x)<0$ है तथा $x>0$ होने पर $f''(x)>0$ है, इसलिए $]-\infty,0[$ पर फलन f नीचे की ओर अवतल है तथा $]0,+\infty[$ पर ऊपर की ओर अवतल है। चित्र 2 इसे दर्शाती है।

iii) प्रथम दो अवकलजों को परिकलित करने पर, हम $f'(x)=x^2-2x$ और $f''(x)=2x-2=2(x-1)$ प्राप्त करते हैं। क्योंकि $x>1$ होने पर $f''(x)>0$ है तथा $x<1$ होने पर $f''(x)<0$ है, इसलिए हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $]1,+\infty[$ पर f ऊपर की ओर अवतल है तथा $]-\infty,1[$ पर f नीचे की ओर अवतल है। चित्र 4 इसका आलेख दर्शाता है तथा इसका सत्यापन भी करता है।



चित्र 4: $\frac{1}{3}x^3-x^2+2$ का आलेख

उदाहरण 4: $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2+5$ द्वारा परिभाषित फलन f के आलेख पर विचार कीजिए, जो चित्र 3 में दिया गया है। आलेख से नतिपरिवर्तन बिंदुओं का आकलन कीजिए तथा यथार्थ नतिपरिवर्तन बिंदुओं को ज्ञात करके अपने उत्तर की जाँच कीजिए।

हल : चित्र 5 में दर्शाए आलेख से, यह स्पष्ट है कि -1 और 0 के बीच में आलेख ऊपर की ओर अवतल से नीचे की ओर अवतल में परिवर्तित होता है। मान लीजिए कि ऐसा लगभग $x=-0.50$ पर होता है तथा यही आलेख कहीं 1 और 2 के बीच में, मान लीजिए लगभग $x=1.25$ पर, नीचे की ओर अवतल से ऊपर की अवतल में परिवर्तित होता है। इस परिणाम की यथार्थ नतिपरिवर्तन बिंदुओं से जाँच करने के लिए, हम f का द्वितीय अवकलज प्राप्त करते हैं। हम प्राप्त करते हैं: $f'(x)=x^3-x^2-2x$ और $f''(x)=3x^2-2x-2$

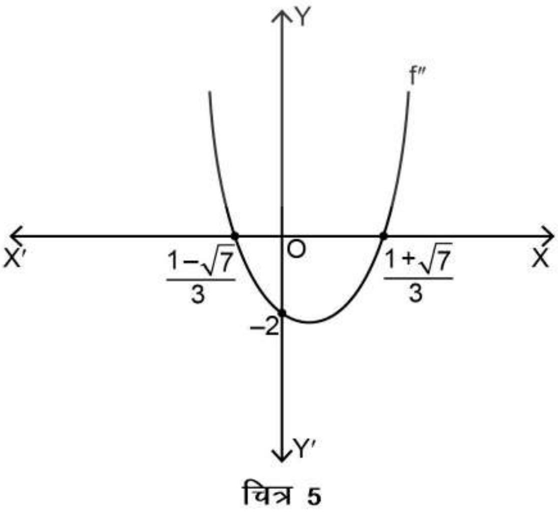
$(3x-(1+\sqrt{7}))(3x-(1-\sqrt{7}))$ है।

हम विभिन्न अंतरालों पर द्वितीय अवकलज के चिह्नों की जाँच करते हैं, जैसा कि सारणी 2 में दिया गया है।

इस प्रकार, सारणी 2 में f'' के चिह्नों से, हम कह सकते हैं कि मानों $x=\frac{1-\sqrt{7}}{3}\approx-0.55$ और $x=\frac{1+\sqrt{7}}{3}\approx 1.22$ पर f के नतिपरिवर्तन बिंदु हैं।

सारणी 2

अंतराल	f'' का चिह्न	परिणाम
$x<\frac{1-\sqrt{7}}{3}$	+	f ऊपर की ओर अवतल है
$\frac{1-\sqrt{7}}{3}<x<\frac{1+\sqrt{7}}{3}$	–	f नीचे की ओर अवतल है
$x>\frac{1+\sqrt{7}}{3}$	+	f ऊपर की ओर अवतल है



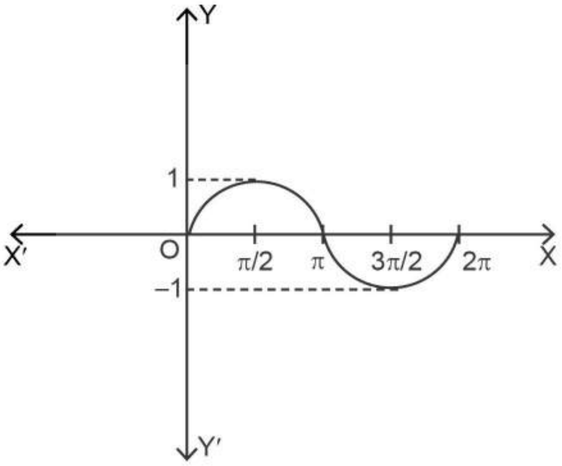
चित्र 5

***

उदाहरण 5: अंतराल $[0, 2\pi]$ पर $f(x)=\sin x$ के नतिपरिवर्तन बिंदु ज्ञात कीजिए तथा अपने परिणामों का फलन के आलेख से सत्यापन कीजिए।

हल : f के प्रथम दो अवकलजों को परिकलित करने पर, हम $f'(x) = \cos x$ और $f''(x) = -\sin x$ प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार, $0 < x < \pi$ पर $f''(x) < 0$ है तथा $\pi < x < 2\pi$ पर $f''(x) > 0$ है, जिससे निष्कर्ष निकलता है कि $0 < x < \pi$ पर आलेख नीचे की ओर अवतल है तथा $\pi < x < 2\pi$ पर आलेख ऊपर की ओर अवतल है। इस प्रकार, $x = \pi \approx 3.14$ पर एक नतिपरिवर्तन बिंदु है, जैसा कि चित्र 6 में दर्शाया गया है।



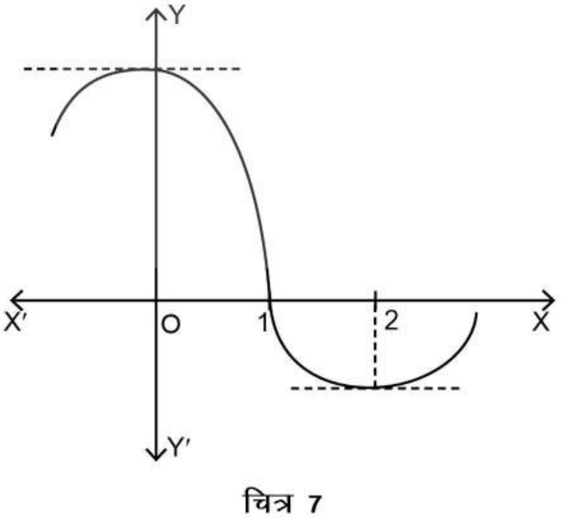
चित्र 6

***

उदाहरण 6: चित्र 7 में $y = f'(x)$ के दिए आलेख का उपयोग करते हुए, खानों ($\square$) में उपयुक्त प्रतीक $<, =, \text{or} >$ भरिए। अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए:

i) $f(0) \;\square\; f(1)$ ii) $f(1) \;\square\; f(2)$ iii) $f'(0) \;\square\; 0$

iv) $f'(1) \;\square\; 0$ v) $f''(0) \;\square\; 0$ vi) $f''(2) \;\square\; 0$



चित्र 7

हल : i) क्योंकि $[0, 1]$ पर $f' > 0$ है, इसलिए $[0, 1]$ पर f वर्धमान है और $f(0) < f(1)$ है।

ii) क्योंकि $[1,2]$ पर $f' < 0$ है, इसलिए $[1, 2]$ पर f ह्रासमान है और $f(1) > f(2)$ है।

iii) $f'(0) > 0$ है।

iv) $f'(1) = 0$ है। f' का आलेख x-अक्ष को $x = 1$ पर प्रतिच्छेद करता है।

v) $f''(0) > 0$ है।

vi) $f''(2) = 0$ है।

***

उदाहरण 7: दर्शाइए कि $\sqrt[3]{1+x} < 1 + \frac{1}{3}x$ यदि $x > 0$ है।

हल : मान लीजिए कि $f(x) = 1 + \frac{x}{3} - \sqrt[3]{1+x}$ है।

तब, $f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1+x)^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3(1+x)^{2/3}} = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{1}{(1+x)^{2/3}}\right]$

यहाँ, $f'(0)$ जब $x > 0$ है। अतः, $]0, \infty[$ पर f एक वर्धमान फलन है।

अतः, $f(0) < f(x) \forall x \in]0, \infty[$ है।

यह हमें $0 < 1 + \frac{x}{3} - \sqrt[3]{1+x}$ प्रदान करता है। [क्योंकि $f(0) = 0$]

इस प्रकार, $\sqrt[3]{1+x} < 1 + \frac{x}{3}$ है।

***

उदाहरण 8: $f(x) = x^4 - 2x^2$ के सापेक्ष उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ ज्ञात कीजिए। f के आलेख पर इन्हें अंकित कीजिए।

हल : हम $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$ तथा $f''(x) = 12x^2 - 4$ प्राप्त करते हैं।

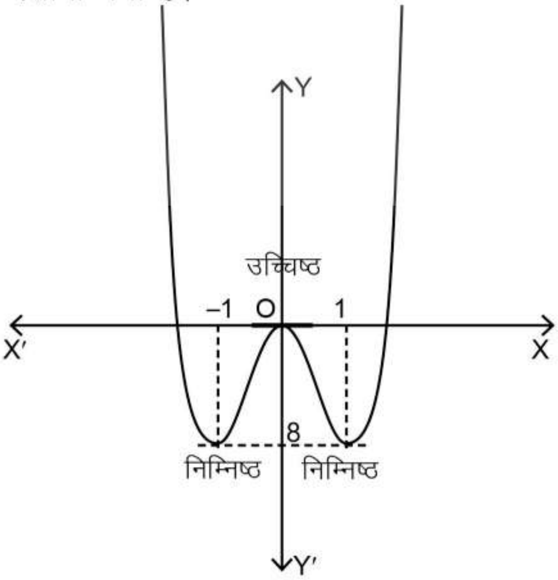
$f'(x) = 0$ को हल करने पर, $x = 0, x = 1$ और $x = -1$ पर क्रान्तिक बिंदु प्राप्त होते हैं। द्वितीय अवकलज जाँच के उपयोग से, हम प्राप्त करते हैं:

$f''(0) = -4 < 0$, इस प्रकार $x = 0$ पर उच्चिष्ठ है।

$f''(1) = 8 > 0$, इस प्रकार $x = 1$ पर निम्निष्ठ है।

$f''(-1) = 8 > 0$, इस प्रकार $x = -1$ पर निम्निष्ठ है।

इसलिए, $x = 0$ पर एक सापेक्ष उच्चिष्ठ है तथा $x = 1$ और $x = -1$ पर सापेक्ष निम्निष्ठ है, जैसा कि चित्र 8 में दर्शाया गया है।



चित्र 8

***

उदाहरण 9: $y=\dfrac{x^3-x^2-8}{x-1}$ के आलेख का स्कैच खींचिए।

हल : i) सममिति : x-अक्ष, y-अक्ष या मूलबिंदु के सापेक्ष कोई सममिति नहीं है।

ii) **अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु** : $y=0$ रखने पर, समीकरण $x^3-x^2-8=0$ प्राप्त होती है। इस समीकरण की LHS अपना चिह्न अंतराल $[2,3]$ में बदलती है। इसलिए, y का आलेख x-अक्ष को 2 और 3 के बीच में प्रतिच्छेद करता है। साथ ही, वक्र बिंदु $(0,8)$ से होकर भी जाती है।

iii) **अनंतस्पर्शीयाँ** : यहाँ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2-8}{x-1}-\infty$ की अग्रसर होता है, इसलिए, $x=1$ एक ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शी है। यहाँ कोई क्षैतिज अनंतस्पर्शियाँ नहीं हैं।

iv) **सापेक्ष उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ** : हम प्राप्त करते हैं : $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left[x^2-\dfrac{8}{x-1}\right]$ तथा

$$=2x+\frac{8}{(x-1)^2}$$

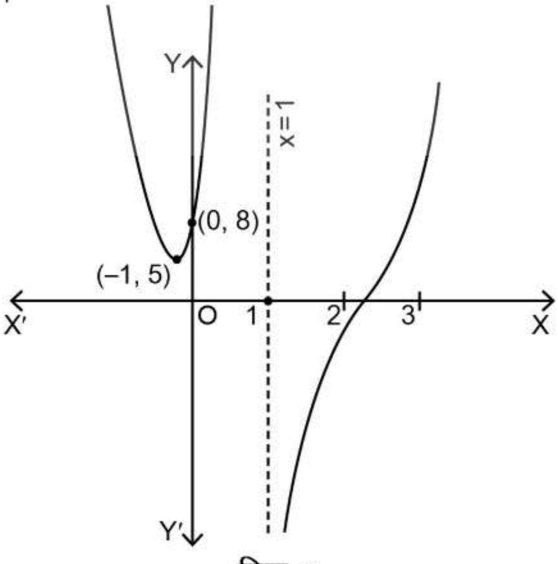
तथा $\dfrac{d^2y}{dx^2}=2-\dfrac{16}{(x-1)^3}$

यहाँ, $y'=0$ है, जब $2x=-\dfrac{8}{(x-1)^2}$ है या जब $2(x^3-2x^2+x+4)$ $=2(x+1)(x^2-3x+4)=0$ है। इस समीकरण का एकमात्र वास्तविक हल $x=-1$ है। इसलिए, $x=-1$ पर एक सापेक्ष निम्निष्ठ $f(-1)=5$ है।

v) **वर्धमान या ह्रासमान फलन** : यहाँ $y'<0$ है, जब $x<-1$ है। अतः, $]-1,\infty[$ पर f ह्रासमान है। साथ ही, $y'>0$ है, जब $-1<x<\infty$ है। अतः, $x=1$ के अतिरिक्त $]-1,\infty[$ पर f वर्धमान है।

vi) **अवतलता** : यहाँ, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ है, जब $2=\dfrac{16}{(x-1)^3}$ या जब $(x-1)^3=8$ है। तब $x-1=2$ या $x=3$ है। इस प्रकार, $x=3$ पर एक नतिपरिवर्तन बिंदु है। इस नतिपरिवर्तन बिंदु के निर्देशांक $(3,5)$ हैं।

ऊपर (i) से (vi) तक जिन गुणों की हमने चर्चा की है उनको संयोजित करते हुए हम वक्र $y=f(x)$ का अनुरेखण कर सकते हैं। चित्र 9 फलन $y=f(x)$ के आलेख को दर्शाती है।



चित्र 9

***

उदाहरण 10: किसी निर्देशांक रेखा पर गतिमान एक कण का स्थिति फलन $s(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 3$ द्वारा दिया जाता है। इस कण के वेग और त्वरण ज्ञात कीजिए तथा यह भी निर्धारित कीजिए कि किन-किन अंतराल में वेग और त्वरण वर्धमान या ह्रासमान हैं।

हल : समय t पर वेग और त्वरण निम्नलिखित हैं :

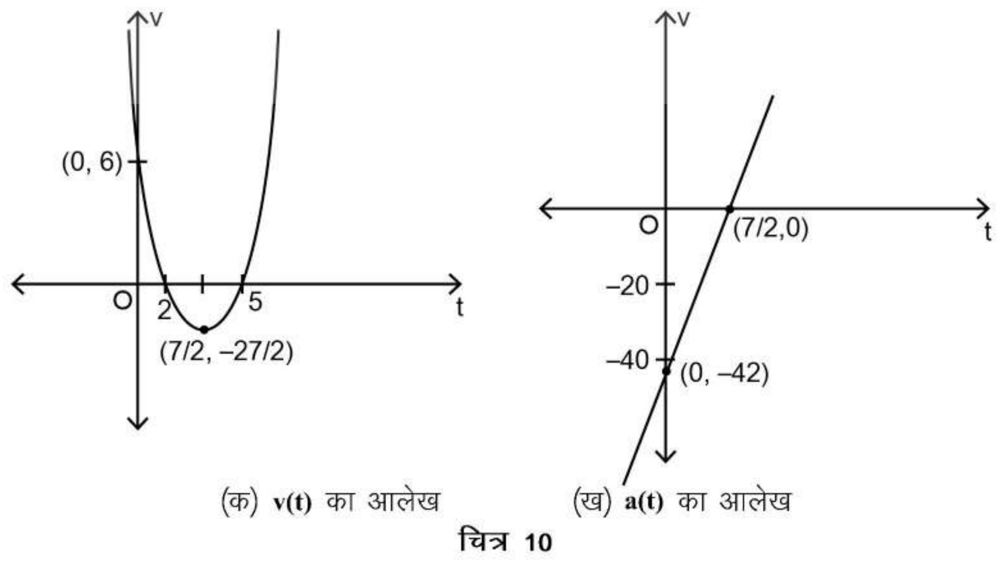
$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 42t + 60 = 6(t-2)(t-5)$$

और $a(t) = v'(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = 12t - 42 = 12\left(t - \frac{7}{2}\right)$

प्रत्येक क्षण पर, हम v (t) के चिह्न से गति की दिशा का निर्धारण कर सकते हैं तथा v (t) और a (t) दोनों के चिह्नों से यह निर्धारित कर सकते हैं कि कण की गति बढ़ रही है या घट रही है [चित्र 10 (क) और (ख)]।

सारणी 3

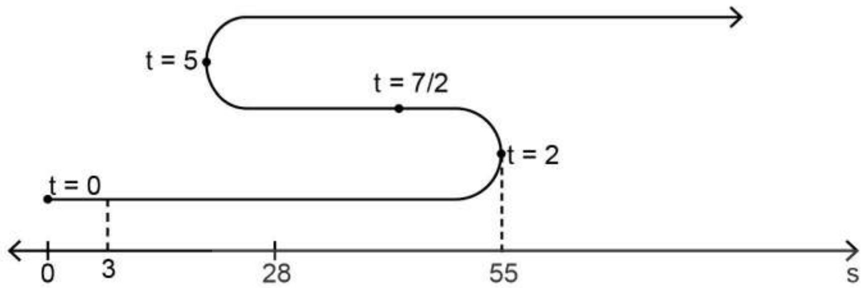
समय	वेग v (t)	त्वरण a (t)	व्याख्या
$0 < t \le 2$	$v(0) = 60\,m/s$ $v(2) = 0m/s$	$a(0) = -42\,m/s^2$ $a(2) = -18\,m/s^2$	क्योंकि त्वरण ऋणात्मक है, इसलिए कण की गति घट रही है कण सतत् रूप से घटती चाल से चल रहा है।
$2 \le t \le \frac{7}{2}$	$v(2) = 0m/s$ $v\left(\frac{7}{2}\right) = -\frac{27}{2}\,m/s$	$a(2) = -18\,m/s^2$ $a\left(\frac{7}{2}\right) = 0\,m/s^2$	कण की गति में कमी होना प्रारंभ हो जाता है।
$\frac{7}{2} \le t \le 5$	$v\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{-27}{2}\,m/s$ $v(5) = 0\ m/s$	$a\left(\frac{7}{2}\right) = 0\,m/s^2$ $a(5) = 18m/s^2$	कण समय $t = 5s$ तक गति जारी रखता है, जब वह $s(5) = 28m$ पर रुक जाता है, अपनी दिशा को पुनः पलट लेता है तथा उसके बाद $a(5) = 18\,m/s^2$ के त्वरण के साथ उसकी गति में वृद्धि होती है तथा वह दाईं ओर को बढ़ती हुई गति से चलता रहता है।



(क) **v(t)** का आलेख (ख) **a(t)** का आलेख

चित्र 10

कण की गति का चित्र 11 में एक योजनाबद्ध तरीके से वक्र रेखा द्वारा वर्णन किया गया है।



चित्र 11

***

उदाहरण 11: अंतराल $]-1, 2]$ पर फलन $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ के सभी निरपेक्ष चरम मान ज्ञात कीजिए।

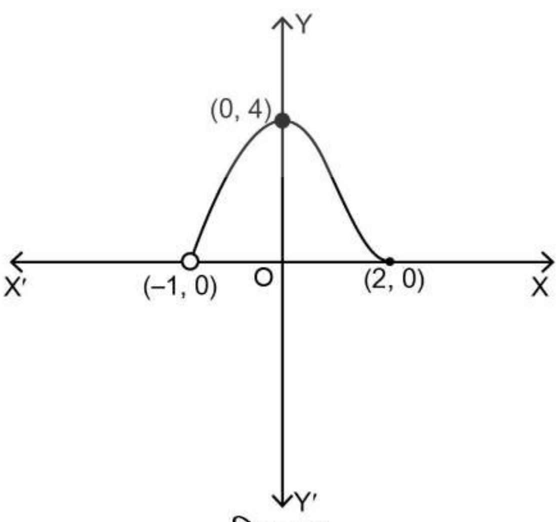
हल : यहाँ, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ है। अवकलित करने पर, हम $f'(x) = 3x^2 - 6x$ और $f''(x) = 6x - 6$ प्राप्त करते हैं।

$f'(x) = 0$ से $3x^2 - 6x = 0$ प्राप्त होता है, जिससे $x = 0, 2$ हैं।

क्योंकि $f''(0) = -6$ है, इसलिए $x = 0$ पर f का एक सापेक्ष उच्चिष्ठ है। यह उच्चिष्ठ मान $f(0) = 4$ है।

क्योंकि $f''(2) = 6 > 0$ है, इसलिए $x = 2$ का एक सापेक्ष निम्निष्ठ है। यह निम्निष्ठ मान $f(2) = 0$ है।

क्योंकि $]-1, 2]$ पर f का एक ही सापेक्ष उच्चिष्ठ मान है तथा एक ही सापेक्ष निम्निष्ठ मान है, इसलिए सापेक्ष चरम बिंदु ही निरपेक्ष चरम बिंदु होंगे। इस प्रकार, $x = 0$ पर f का एक निरपेक्ष उच्चिष्ठ है तथा $x = 2$ पर एक निरपेक्ष निम्निष्ठ है। आप चित्र 12 में f का आलेख देख सकते हैं।



चित्र 12

***

उदाहरण 12: अधिकतम आयतन वाले उस लंब वृत्तीय बेलन की त्रिज्या और ऊँचाई ज्ञात कीजिए, जो त्रिज्या 12 cm और ऊचाई 20 cm वाले एक लंब वृत्तीय शंकु के अंतर्गत खींचा जा सकता है।

हल : मान लीजिए कि बेलन की त्रिज्या (cm में) r है और ऊँचाई (cm में) में n है। तथा बेलन का आयतन (घन cm में) में) V है, जैसा कि चित्र 13 (क) में दर्शाया गया है।

अंतर्गत बेलन का आयतन $V = \pi r^2 h$ है।

क्योंकि आयतन में दो चर हैं, इसलिए हम r और h में संबंध का उपयोग करते हुए, इनमें से एक चर का विलोपन कर सकते हैं। इसके लिए, हम समरूप त्रिभुजों का प्रयोग करते हैं [चित्र 13 (ख)]।

हम प्राप्त करते हैं : $\dfrac{BC}{CD} = \dfrac{BO}{OA}$

$$\frac{20-h}{r} = \frac{20}{12} \text{ या } h = 20 - \frac{5}{3}r$$

V के सूत्र में, r के पदों में h को रखने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$V = \pi r^2\left(20 - \frac{5}{3}r\right) = 20\pi r^2 - \frac{5}{3}\pi r^3$$

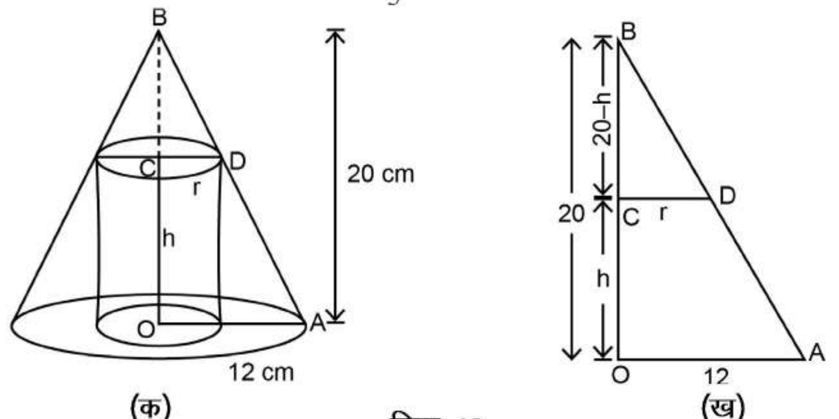
जो V को अकेले r के पदों में व्यक्त करता है। क्योंकि r त्रिज्या को निरूपित करता है, इसलिए यह ऋणात्मक नहीं हो सकता तथा क्योंकि अंतर्गत बेलन की त्रिज्या शंकु की त्रिज्या से अधिक नहीं हो सकती, इसलिए चर r को $0 \le r \le 12$ को संतुष्ट करना चाहिए। V को r के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम $\dfrac{dV}{dr} = 40\pi r - 5\pi r^2 = 5\pi r(8-r)$ तथा $\dfrac{d^2V}{dr^2} = 40\pi - 10\pi r$ प्राप्त करते हैं। $dV/dr = 0$ करने पर, हमें $5\pi r(8-r) = 0$ अर्थात् $r = 0$ और $r = 8$ प्राप्त होता है, जो क्रान्तिक संख्याएँ हैं। क्योंकि ये अंतराल [0, 12] में स्थित हैं, इसलिए उच्चिष्ठ मान $r = 0, r = 8$ और $r = 12$ में किसी एक पर होना चाहिए।

$$(V)_{r=0 \text{ पर}} = 0$$

$$(V)_{r=8 \text{ पर}} = \frac{1280\pi}{3}$$

$$(V)_{r=12 \text{ पर}} = 0$$

यहाँ अधिकतम आयतन $V = \dfrac{1280\pi}{3} cm^3$ प्रकट होता है, जब अंतर्गत बेलन की त्रिज्या 8 cm है। जब $r = 8$ cm है, तब $h = \dfrac{20}{3}$ cm है। इस प्रकार, अधिकतम आयतन वाले बेलन की त्रिज्या 8 cm है तथा ऊँचाई $\dfrac{20}{3}$ cm है।



चित्र 13

***

उदाहरण 13: कोई औषधियाँ (दवाइयाँ) निर्माण करने वाली फर्म द्रव रूप की एक पेनिसिलीन (penicillin) को ₹100 प्रति इकाई की दर पर बेचती है। x इकाइयों के लिए कुल उत्पादन लागत (₹ में) $C(x)=100,000+20x+0.004x^2$ है तथा एक निर्दिष्ट समय में उस फर्म की उत्पादन क्षमता अधिकतम 20000 इकाई है। उस समय में, अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए उस फर्म द्वारा निर्मित और बेचे जाने वाली पेनिसिलीन की इकाइयों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: x इकाइयों को बेचने से प्राप्त कुल राजस्व $R(x)=100x$ हैं। इसलिए x इकाइयों पर लाभ $P(x)=R(x)-C(x)$ होगा।

इस प्रकार, $P(x)=100x-(100,000+20x+0.004x^2)=80x-100,000-0.004x^2$

$P(x)$ को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम $\frac{dP}{dx}=80-0.008x$ प्राप्त करते हैं।

$dP/dx=0$ करने पर, हमें $80-0.008x=0$ प्राप्त होता है, जिससे $x=10000$ प्राप्त होता है।

क्योंकि उत्पादन क्षमता अधिकतम 20000 है, इसलिए क्रान्तिक संख्या अंतराल [0, 20000] में स्थित है। इसलिए, अधिकतम लाभ मानों $x=0$, $x=10000$ या $x=20000$ में से किसी एक मान पर होना चाहिए।

अब प्रत्येक क्रान्तिक संख्या पर $p(x)$ का मान है:

$$P(0)=-100,000$$
$$P(10,000)=3,00,000$$
$$P(20,000)=-1,00,000$$

इस प्रकार, उस फर्म को अधिकतम लाभ के लिए 10000 इकाइयों का निर्माण करना चाहिए।

***

उदाहरण 14: अनुरेखण में आपके द्वारा उपयोग किए गए सभी गुणों को बताते हुए, वक्र $y=e^{-x^2/2}$ का अनुरेखण कीजिए।

हल: i) **सममिति** : क्योंकि x की घात सम है, इसलिए यह वक्र y-अक्ष के सापेक्ष सममित है।

ii) **अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु** : $y=0$ रखने पर, समीकरण $e^{-x^2/2}=0$ प्राप्त होती है, जिसका कोई हल नहीं है, क्योंकि e की सभी घातों के मान धनात्मक हैं। इस प्रकार, यहाँ कोई x-अंतः खंड नहीं है। अब $x=0$ रखने पर y-अंतः खंड $y=1$ प्राप्त होता है। इसलिए, वक्र (0, 1) से होकर जाता है।

iii) **अनंतस्पर्शियाँ** : यहाँ कोई ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शी नहीं है, क्योंकि $e^{-x^2/2}$ अंतराल $]-\infty,+\infty[$ पर परिभाषित और संतत है। साथ ही, क्योंकि जब $x\to-\infty$ या $x\to+\infty$ है, तब $-x^2/2\to-\infty$ है, इसलिए $\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2/2}=\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2/2}=0$ है।

इस प्रकार, $e^{-x^2/2}$ की एक क्षैतिज अनंतस्पर्शी है, जो $y=1$ है।

iv) **वर्धमान और ह्रासमान फलन** : अवकलित करने पर, हम

$\frac{dy}{dx} = e^{-x^2/2} \frac{d}{dx}\left[-\frac{x^2}{2}\right] = -xe^{-x^2/2}$ प्राप्त करते हैं। यहाँ $y' > 0$ है, जब $x < 0$ है। इस प्रकार, $]-\infty, 0[$ पर y वर्धमान है। साथ ही, $y' < 0$ है, जब $x > 0$ है। इस प्रकार, $]0, \infty[$ पर y ह्रासमान है।

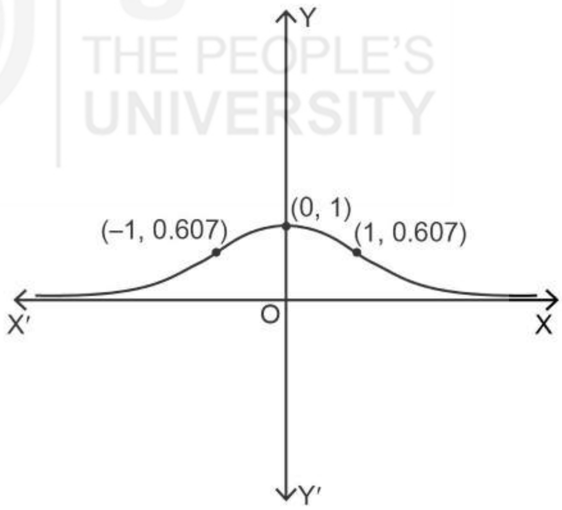
v) **सापेक्ष चरम बिंदु** : क्योंकि सभी x के लिए, $-xe^{-x^2/2} > 0$ है इसलिए $dy/dx = -xe^{-x^2/2}$ का चिह्न वही है जो $-x$ का है, इसलिए $x = 0$ पर y का एक सापेक्ष निम्निष्ठ $e^0 = 1$ है।

vi) **अवतलता** : यहाँ, $\frac{d^2y}{dx^2} = -x\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2/2}\right] + e^{-x^{2/2}}\frac{d}{dx}[-x]$

$$= x^2e^{-x^2/2} - e^{-x^2/2} = (x^2-1)e^{-x^2/2} \text{ है।}$$

क्योंकि सभी x के लिए, $e^{-x^2/2} > 0$ है, इसलिए $d^2y/dx^2 = (x^2-1)e^{-x^2/2}$ का चिह्न वही होगा जो x^2-1 का है, और (x^2-1) का चिह्न केवल $x = 1$ और $x = -1$ पर ही बदलेगा।

इस प्रकार, $x = -1$ और $x = 1$ पर नतिपरिवर्तन बिंदु प्रकट होंगे। ये नतिपरिवर्तन बिंदु $(-1, e^{-1/2}) \approx (-1, 0.607)$ और $(1, e^{-1/2}) \approx (1, 0.607)$ हैं। हम इन सभी बिंदुओं को संयोजित करते हैं तथा चित्र 14 में दर्शाए अनुसार वक्र का अनुरेखण करते हैं।



चित्र 14: वक्र $\mathbf{y = e^{-x^2/2}}$

***

उदाहरण 15 : निम्नलिखित सीमाओं में अनिर्धार्य रूपों के प्रकार को ज्ञात कीजिए। साथ ही, सीमा भी ज्ञात कीजिए।

i) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ ii) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\frac{1-\sin x}{\cos x}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^3}$ iv) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^{-4/3}}{\sin(1/x)}$

हल : **i)** अंश और हर की सीमा 0 है। इसलिए, यह सीमा $0/0$ के प्रकार की अनिर्धार्य रूप की है। लापिताल-नियम के अनुप्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\frac{d}{dx}[x^2-9]}{\frac{d}{dx}[x-3]}=\lim_{x\to3}\frac{2x}{1}=6$$

वैकल्पिक रूप से, आप इस सीमा को गुणनखंडन द्वारा इस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं:

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to3}(x+3)=6$$

ii) अंश और हर की सीमा 0 है जब $x\to\frac{\pi}{2}$ है। इसलिए, यह सीमा $0/0$ के प्रकार की अनिर्धार्य रूप की है। लापिताल-नियम के अनुप्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{d}{dx}[1-\sin x]}{\frac{d}{dx}[x^3]}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos x}{-\sin x}=\frac{0}{-1}=0$$

iii) अंश और हर की सीमा 0 जब $x\to\infty$ है। इसलिए, यह सीमा $0/0$ के प्रकार की अनिर्धार्य रूप की है। लापिताल-नियम के अनुप्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-1}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}[e^x-1]}{\frac{d}{dx}[x^3]}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{6x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{6}=\infty$$

iv) अंश और हर की सीमा 0 है जब $x\to\infty$ है। इसलिए, यह सीमा $0/0$ के प्रकार की अनिर्धार्य रूप की है। लापिताल-नियम के अनुप्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-4/3}}{\sin(1/x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{4}{3}x^{-7/3}}{(-1/x^2)\cos(1/x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4}{3}x^{-1/3}}{\cos(1/x)}=\frac{0}{1}=0$$

***

उदाहरण 16 : दर्शाइए कि $\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}=e$ है।

हल : मान लीजिए कि $y=(1+x)^{1/x}$ है। दोनों पक्षों के प्राकृतिक लघुगणक लेने पर, $\ln y=\ln(1+x)^{1/x}=\frac{1}{x}\ln(1+x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$ प्राप्त होता है।

इस प्रकार, $\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ जो $0/0$ के प्रकार की अनिर्घार्य रूप की है। अतः, लापिताल-नियम के अनुप्रयोग से, हम प्राप्त करते हैं:

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1/(1+x)}{1}=1$$

क्योंकि हमें जब $x\to0$ है, तब $\ln y\to1$ प्राप्त हुआ है, इसलिए चरघातांकीय फलन के सांतत्य से यह निष्कर्ष निकलता है कि जब $x\to0$ है, तब $e^{\ln y}\to e^1$ होगा तथा इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि जब $x\to0$ है, तब $y\to e$ होगा। इस प्रकार, $\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}=e$ है।

***

अब आप निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कर सकते हैं:

E1) $f(x) = x^4$ द्वारा परिभाषित फलन f के लिए, यदि हैं तो, नतिपरिवर्तन बिंदु ज्ञात कीजिए।

E2) चित्र 15 में दिए आलेख के प्रयोग से निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए:

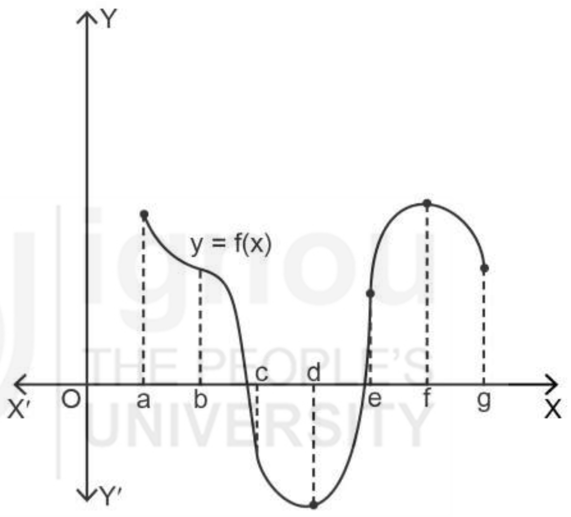
i) वे अंतराल जिन पर f वर्धमान है।

ii) वे अंतराल जिन पर f ह्रासमान है।

iii) वे विवृत अंतराल जिन पर f ऊपर की ओर अवतल है।

iv) वे निवृत अंतराल जिन पर f नीचे की ओर अवतल है।

v) x के वे मान जिन पर f के नतिपरिवर्तन बिंदु हैं।



चित्र 15

E3) दर्शाइए कि $x < \tan x$ है, यदि $0 < x < \pi/2$ है।

E4) नीचे दिए हुए प्रकार से परिभाषित फलनों के लिए, वे अंतराल जिन पर f वर्धमान है, वे अंतराल जिन पर f ह्रासमान है, वे विवृत अंतराल जिन पर f ऊपर की ओर अवतल है, वे विवृत अंतराल जिन पर f नीचे की ओर अवतल है तथा सभी नतिपरिवर्तन बिंदुओं के x निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

i) $f(x) = (x+2)^3$ iii) $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$

ii) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+2}$ iv) $f(x) = x^{1/3}(x+4)$

E5) सिद्ध कीजिए कि एक व्यापक त्रिघात बहुपद $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$ का ठीक एक नतिपरिवर्तन बिंदु है।

E6) प्रथम और द्वितीय अवकलज दोनों जाँचों का प्रयोग करते हुए, नीचे दिए हुए प्रकार से परिभाषित फलनों के सापेक्ष चरम बिंदु ज्ञात कीजिए:

i) $f(x) = 1 - 4x - x^2$

ii) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

iii) $f(x) = \sin^2 x,\ 0 < x < 2\pi$

iv) $f(x) = |x^2 - 4|$

E7) अनुरेखण के लिए उपयोग किए गए सभी गुणों को बताते हुए, निम्नलिखित वक्रों का अनुरेखण कीजिए:

i) $y = (x-4)^{2/3}$

ii) $y = 6x^{1/3} + 3x^{4/3}$

E8) मान लीजिए कि $f(x) = x^2 + px + q$ है। p और q के ऐसे मान ज्ञात कीजिए कि $f(1) = 3$ अंतराल [0, 2] पर f का एक चरम मान हो। क्या यह मान एक उच्चिष्ठ है या निम्निष्ठ है?

E9) फलन f के सम्मुख दिए अंतराल पर, उसके निरपेक्ष उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए, यदि कोई हैं:

i) $f(x) = (x^2 - 1),\ ]-\infty, +\infty[$ पर

ii) $f(x) = x^{2/3}(20 - x),\ [-1, 20]$ पर

iii) $f(x) = 2\sec x - \tan x,\ [0, \pi/4]$ पर

iv) $f(x) = \sin(\cos x),\ [0, 2\pi]$

E10) मान लीजिए कि कागज के एक वायुयान की प्रथम 12 सैकण्डों की उड़ान की गति की समीकरण $x = t - 2\sin t, y = 2 - 2\cos t\ (0 \le t \le 12)$ हैं। उसके उड़ान के इस पथ में उच्चतम और न्यूनतम बिंदु क्या-क्या हैं तथा वायुयान इन बिंदुओं पर कब होता है?

E11) 1 लीटर (1000cm^3) द्रव की धारिता वाला एक बेलनाकार बंद कनस्तर बनाया जाना है। इस कनस्तर के निर्माण में न्यूनतम धातु प्रयोग करने के लिए, उसकी ऊँचाई और त्रिज्या क्या होना चाहिए?

E12) वक्र $y = x^2$ पर एक बिंदु ज्ञात कीजिए, जो बिंदु (18, 0) के निकटतम हो।

E13) एक फर्म यह निर्धारित करती है कि उसके उत्पाद की x इकाइयों को प्रतिदिन p रुपए प्रति इकाई की दर से बेचा जा सकता है, जहाँ $x = 1000 - p$ है। प्रति दिन x इकाइयों को उत्पादित करने की लागत $C(x) = 3000 + 20x$ है।

i) राजस्व फलन R (x) ज्ञात कीजिए।

ii) लाभ फलन P (x) ज्ञात कीजिए।

iii) यह कल्पना करते हुए कि प्रतिदिन अधिकतम उत्पादन क्षमता 500 इकाई है, निर्धारित कीजिए कि अधिकतम लाभ के लिए उस फर्म को प्रतिदिन कितनी इकाइयों का उत्पादन करना चाहिए और बेचना चाहिए।

iv) अधिकतम लाभ ज्ञात कीजिए।

v) प्रति इकाई क्या मूल्य लिया जाए कि अधिकतम लाभ प्राप्त हो?

E14) वक्र $y=(1+x^2)^{-1}$ पर वह बिंदु ज्ञात कीजिए जिस पर स्पर्श रेखा की अधिकतम प्रवणता है।

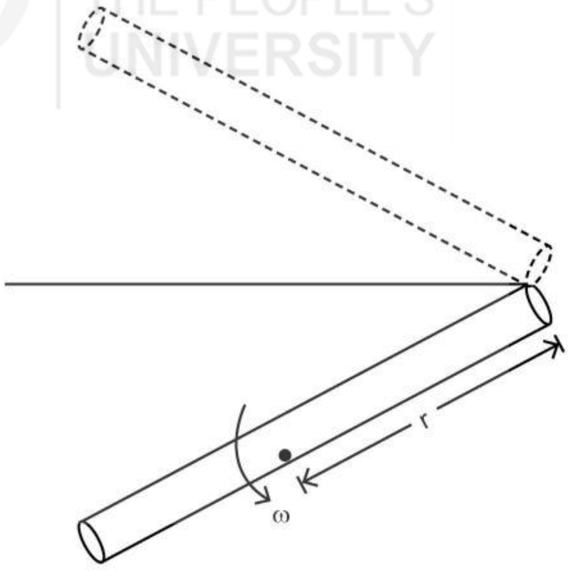
E15) आपके द्वारा प्रयोग किए सभी गुणों को बताते हुए, वक्र $y=(\ln x)/x$ का अनुरेखण कीजिए।

E16) वक्र $y=\frac{L}{1+Ae^{-kt}}$ का अनुरेखण कीजिए, जहाँ y समय t पर $(t\geq 0)$ जनसंख्या है तथा A, K और L धनात्मक अचर हैं।

E17) मान लीजिए कि एक खोखली ट्यूब अपने एक सिरे पर एक क्षैतिज अक्ष के प्रति एक अचर कोणीय वेग w रेडियन/सैकंड से घूर्णन कर रही है, जैसा कि चित्र 16 में दर्शाया गया है। परिकल्पना कीजिए कि जब ट्यूब घूर्णन कर रही है, तब कोई वस्तु बिना घर्षण के ट्यूब में फिसलने के लिए स्वतंत्र है। मान लीजिए कि उस वस्तु की समय $t\geq 0$ पर घूमने वाले केन्द्र बिंदु से दूरी r है तथा कल्पना कीजिए कि वह वस्तु विश्राम पर है और $r=0$ है, जब $t=0$ है। यदि ट्यूब $t=0$ पर क्षैतिज है और घूर्णन कर रही है, तो उस अवधि में जब वह वस्तु ट्यूब में है, $t=0$ है, तब $r=\frac{g}{2\omega^2}[\sinh(\omega t)-\sin(\omega t)]$ है। कल्पना कीजिए कि t सैकंडों में है तथा r मीटरों में है और $g=9.8\,m/s^2$ तथा $w=2$ रेडियन /s उपयोग कीजिए।

i) $0\leq t\leq 1$ के लिए, वक्र $r=f(t)$ का अनुरेखण कीजिए।

ii) यदि ट्यूब की लंबाई 1 m है, तो उस वस्तु द्वारा ट्यूब के सिरे पर पहुँचने में लिया गया समय ज्ञात कीजिए।



चित्र 16

E18) ध्रुवीय निर्देशांकों में दिए हुए निम्नलिखित वक्रों का अनुरेखण कीजिए:

i) $\theta=-\frac{3\pi}{4}$ iii) $r^2=\sin 2\theta$

ii) $r-2=2\cos\theta$ iv) $r=4\theta$

E19) θ के दिए हुए मानों के लिए, निम्नलिखित ध्रुवीय वक्रों की स्पर्श रेखाओं की प्रवणताएँ ज्ञात कीजिए:

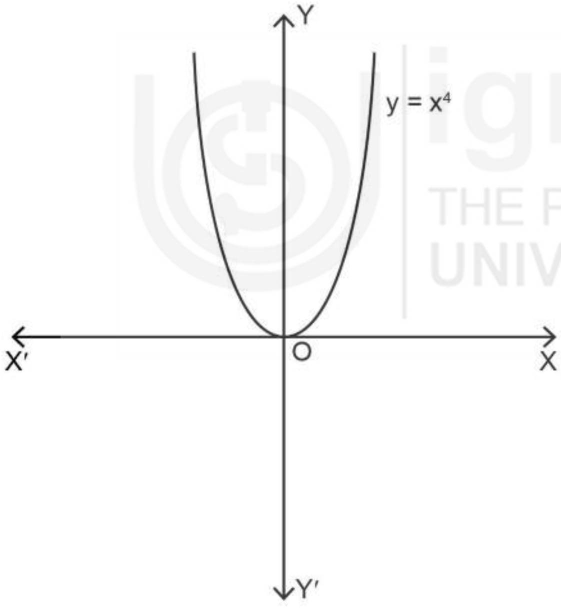
i) $r = 2\cos\theta;\ \theta = \pi/3$

ii) $r = \frac{1}{\theta};\ \theta = 2$

E20) दर्शाइए कि प्राचलिक समीकरणों $x = t^3 - 4t,\ y = t^2$ वाले वक्र स्वयं अपने से बिन्दु $(0, 4)$ पर प्रतिच्छेद करते हैं तथा इस प्रतिच्छेद बिन्दु पर वक्र की दो स्पर्श रेखाओं की समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल / उत्तर

E1) f के प्रथम दोनों अवकलजों की परिकलित करने पर, हम $f'(x) = 4x^3, f''(x) = 12x^2$ प्राप्त करते हैं। यहाँ $x < 0$ और $x > 0$ के लिए, $f''(x) > 0$ है, जिसका अर्थ है कि $x < 0$ और $x > 0$ के लिए, f ऊपर की ओर अवतल है। वस्तुतः, $]-\infty, +\infty[$ पर f ऊपर की ओर अवतल है। इस प्रकार, यहाँ कोई नतिपरिवर्तन बिंदु नहीं है तथा विशेष रूप में, यहाँ $x = 0$ पर कोई नतिपरिवर्तन बिंदु नहीं है, यद्यपि $f''(0) = 0$ है (चित्र 17)।



चित्र 17

E2) i) $[d, f]$ पर फलन f वर्धमान है।

ii) $[a, d]$ और $[f, g]$ पर f ह्रासमान है।

iii) अंतरालों $]a, b[$ और $]c, e[$ पर फलन f ऊपर की ओर अवतल है।

iv) $]b, c[$ और $]e, g[$ पर फलन f नीचे की ओर अवतल है।

v) $(b, f(b)), (c, f(c))$ और $(d, f(d))$ नतिपरिवर्तन बिंदु है।

E3) मान लीजिए कि $f(x) = \tan x - x$ है।

$f'(x) = \sec^2 x - 1$

$f'(x) \geq 0$ है, क्योंकि $0 < x < \frac{\pi}{2}$ पर $\sec^2 x \geq 1$ है।

अतः, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ पर f वर्धमान है।

इसलिए, $f(0) < f(x)$ है।

यहाँ $f(0) = 0$ है। इस प्रकार, $0 < \tan x - x$ है, जो $x < \tan x$ प्रदान करता है।

E4) i) $]-\infty, +\infty[$ पर वर्धमान

$\mathbb{R}$ पर ह्रासमान नहीं

$]-2, +\infty[$ पर ऊपर की ओर अवतल

$]-\infty, -2[$ पर नीचे की ओर अवतल

$x = -2$ पर नतिपरिवर्तन बिंदु है।

ii) $[0, +\infty[$ पर वर्धमान

$]-\infty, 0]$ पर ह्रासमान

$\left]-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right[$ पर ऊपर की ओर अवतल है।

$\left]-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right[$ और $\left]\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right[$ पर नीचे की ओर अवतल है।

नतिपरिवर्तन बिंदु $\left(+\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{3}\right)$ और $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{3}\right)$ हैं।

iii) $]-\infty, +\infty[$ पर वर्धमान

$\mathbb{R}$ पर ह्रासमान नहीं है

$]-\infty, -2[$ पर ऊपर की ओर अवतल है।

$]-2, +\infty[$ पर नीचे की ओर अवतल है।

$x = -2$ पर नतिपरिवर्तन बिंदु है।

iv) $[-1, +\infty[$ पर वर्धमान

$]-\infty, -1]$ पर ह्रासमान

$]-\infty, 0[$ और $]2, +\infty[$ पर ऊपर की ओर अवतल है।

$]0, 2[$ पर नीचे की ओर अवतल है।

$(0, 0)$ और $(2, 6(2)^{1/3})$ नतिपरिवर्तन बिंदु हैं।

E5) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ है।

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{2b}{6a}$$

इस प्रकार f का ठीक एक नतिपरिवर्तन बिंदु है।

E6) i) $x = -2$ पर सापेक्ष उच्चिष्ठ 5 है और $f(-2) = 5$।

ii) $x = 1$ पर सापेक्ष उच्चिष्ठ 5 है तथा $x = 2$ पर सापेक्ष निम्निष्ठ 4 है।

iii) $x = \pi$ पर सापेक्ष निम्निष्ठ 0 है तथा $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ पर सापेक्ष उच्चिष्ठ 1 है।

iv) $x = 0$ पर सापेक्ष उच्चिष्ठ 4 है तथा $x = 2, -2$ पर सापेक्ष निम्निष्ठ 0 है।

E7) i) वक्र के अनुरेखण के लिए, गुण इस प्रकार हैं:

i) **सममिति** : निर्देशांक अक्षों या मूलबिंदु के सापेक्ष कोई सममिति नहीं है। परंतु $y = (x-4)^{2/3}$ का आलेख रेखा $x = 4$ के सापेक्ष सममित है, क्योंकि यह $y = x^{2/3}$ के आलेख का y-अक्ष के सापेक्ष स्थानांतरण (दाईं ओर को चार बिंदु) है, जो कि y-अक्ष के सापेक्ष सममित है।

ii) **अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु** : (4, 0) और (0, 2.52)

iii) **अनंतस्पर्शियाँ** : कोई नहीं है, क्योंकि $f(x) = (x-4)^{2/3}$ प्रत्येक स्थान पर संतत है तथा साथ ही $\lim_{x\to+\infty}(x-4)^{2/3} = +\infty$ है और $\lim_{x\to-\infty}(x-4)^{2/3} = +\infty$

iv) **सापेक्ष चरम बिंदु** : अवकलज हैं:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{2}{3}(x-4)^{-1/3} = \frac{2}{3(x-4)^{1/3}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = -\frac{2}{9}(x-4)^{-4/3} = -\frac{2}{9(x-4)^{4/3}}$$

$x = 4$ एक क्रान्तिक संख्या है, क्योंकि वहाँ f अवकलनीय नहीं है तथा प्रथम अवकलज जाँच द्वारा क्रान्तिक संख्या एक सापेक्ष निम्निष्ठ है, क्योंकि $f'(x) < 0$ है, यदि $x < 4$ है तथा $f'(x) > 0$ है, यदि $x > 4$ है।

v) **अवतलता** : क्योंकि $f''(x) < 0$ है, जब $x = 4$ है, इसलिए $x < 4$ के लिए और $x > 4$ के लिए आलेख नीचे की ओर अवतल है।

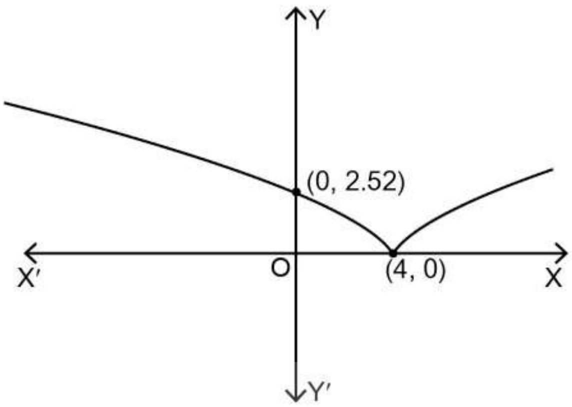
vi) **ऊर्ध्वाधर स्पर्श रेखाएँ** : क्योंकि $x = 4$ पर $f(x) = (x-4)^{2/3}$ संतत है तथा

$$\lim_{x\to4^+} f'(x) = \lim_{x\to4^+} \frac{2}{3(x-4)^{1/3}} = +\infty$$

और $\lim_{x\to4^-} f'(x) = \lim_{x\to4^-} \frac{2}{3(x-4)^{1/3}} = -\infty$ है।

यहाँ $x = 4$ पर चित्र 18 में दिए प्रकार की स्पर्श रेखा और उभयाग्र है।

उपरोक्त सभी गुणों को संयोजित करके, हम चित्र 18 में दर्शाए अनुसार वक्र का अनुरेखण कर सकते हैं।



चित्र 18

ii) दिये हुए वक्र के अनुरेखण के लिए प्रयोग किए जाने वाले **गुण** इस प्रकार हैं:

i) **सममिति** : निर्देशांक अक्षों या मूलबिंदु के सापेक्ष कोई सममिति नहीं है।

ii) **अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु** : $(0, 0)$ और $(-2, 0)$

iii) **अनंतस्पर्शियाँ** : कोई नहीं, क्योंकि प्रत्येक स्थान पर $f(x) = 6x^{1/3} + 3x^{4/3}$ संतत है, साथ ही क्योंकि

$$\lim_{x\to+\infty}(6x^{1/3} + 3x^{4/3}) = \lim_{x\to+\infty} 3x^{1/3}(2+x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(6x^{1/3} + 3x^{4/3}) = \lim_{x\to-\infty} 3x^{1/3}(2+x) = +\infty$$

iv) **सापेक्ष चरम बिंदु** : अवकलज हैं :

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2x^{-2/3} + 4x^{1/3} = 2x^{-2/3}(1+2x) = \frac{2(2x+1)}{x^{2/3}}$$

और $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = -\dfrac{4}{3}x^{-5/3} + \dfrac{4}{3}x^{-2/3} = \dfrac{4}{3}x^{-5/3}(-1+x) = \dfrac{4(x-1)}{3x^{5/3}}$

क्रान्तिक संख्या $x = \frac{1}{2}$ हैं। dy/dx का चिह्न $x = -\frac{1}{2}$ पर ऋणात्मक से धनात्मक में बदलता है, इसलिए प्रथम अवकलज जाँच द्वारा $x = -\frac{1}{2}$ पर वहाँ एक सापेक्ष निम्निष्ठ है।

v) **ह्रासमान और वर्धमान फलन** : फलन f ह्रासमान है जबकि $x < -0.5$ और वर्धमान है जबकि $x > -0.5$ है।

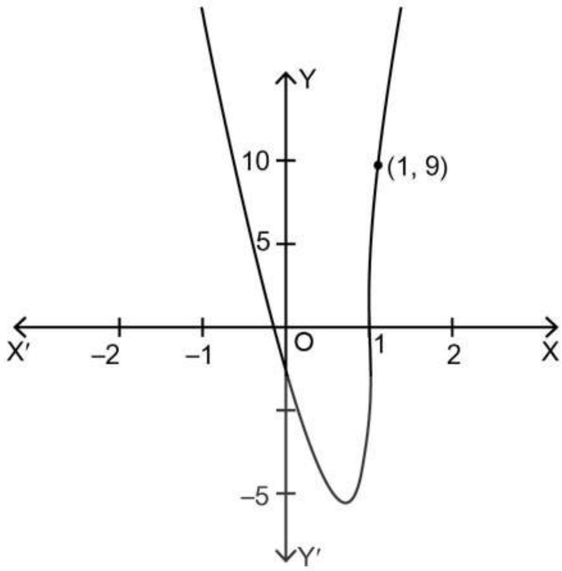
vi) **स्पर्श रेखाएँ** : $x = 0$ पर एक ऊर्ध्वाधर स्पर्श रेखा का बिंदु है, क्योंकि

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{2(2x+1)}{x^{2/3}} = +\infty$$

और $\displaystyle\lim_{x\to0^-} f'(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{2(2x+1)}{x^{2/3}} = +\infty$

vii) **अवतलता** : यहाँ $d^2y/dx^2 > 0$ है जब $x < 0$ है इसीलिए आलेख ऊपर की ओर अवतल है, और $\dfrac{d^2y}{dx^2} < 0$, जब $0 < x < 1$ के लिए नीचे की ओर अवतल है तथा पुनः $x > 1$ के लिए ऊपर की ओर अवतल है। $(0, 0)$ और $(1, 9)$ पर नतिपरिवर्तन बिंदु हैं।

उपरोक्त सभी गुणों को संयोजित करके, हम चित्र 19 में दर्शाए अनुसार वक्र का अनुरेखण करते हैं।



चित्र 19

E8) $f(1) = 3 = 1 + p + q \Rightarrow p + q = 2$

$f'(x) = 2x + p = 0 \Rightarrow x = -p/2$

क्योंकि $x = 1$ एक चरम मान है, इसलिए $p = -2$ है, जो $q = 4$ प्रदान करता है।

अब, $f''(x) = 2$ और $f''(1) = 2 > 0$ है। इसलिए, चरम मान निम्निष्ठ मान है।

E9) i) $x = 0$ पर निम्निष्ठ मान -1 है।

कोई उच्चिष्ठ नहीं।

ii) $x = 8$ पर उच्चिष्ठ मान 48 है।

$x = 0, 20$ पर निम्निष्ठ मान 0 है।

iii) $x = 0$ पर उच्चिष्ठ मान 2 है।

$x = \pi/6$ पर निम्निष्ठ मान $\sqrt{3}$ है।

iv) उच्चिष्ठ मान 0.841, $x = 0, 2\pi$ पर है।

निम्निष्ठ मान -0.841, $x = \pi$ पर है।

E10) $t = \pi, 3\pi$ पर उच्चिष्ठ $y = 4$ है।

$t = 0, 2\pi$ पर निम्निष्ठ $y = 0$ है।

E11) धातु का पृष्ठीय क्षेत्रफल $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ है, यहाँ r और h क्रमशः कनस्तर की त्रिज्या और ऊँचाई हैं।

साथ ही, $\pi r^2 h = 1000 \text{ cm}^3$ है।

इस प्रकार, $S = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$, जिससे $\frac{dS}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$ प्राप्त होता है।

$\frac{dS}{dr} = 0 \Rightarrow r = \frac{10}{(2\pi)^{1/3}}$ cm

अब $\frac{d^2S}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$, और $\frac{}{dr}\left(\frac{d^2S}{dr^2}\right)_{\text{at } r=\frac{10}{(2\pi)^{1/3}}} > 0, > 0$ है। इसलिए न्यूनतम है।

इस प्रकार ऊँचाई $h = \frac{20}{(2\pi)^{1/3}}$cm है।

E12) मान लीजिए कि वह बिंदु (x, y) है। (x, y) और $(18, 0)$ के बीच की दूरी $D = \sqrt{(x-18)^2 + (y-0)^2}$ है। क्योंकि बिंदु (x, y) वक्र $y = x^2$ पर स्थित है, इसलिए $D = \sqrt{(x-18)^2 + x^4}$ है।

मान लीजिए कि $L = D^2$ है।

इसलिए, $L = (x-18)^2 + x^4$

$\Rightarrow \frac{dL}{dx} = 2(x-18) + 4x^3$

क्रान्तिक संख्या $x = 2$ है।

$\frac{d^2L}{dx^2} = 2 + 12x^2$

$\left(\frac{d^2L}{dx^2}\right)_{\text{at } x=2} = 50 > 0$ है।

इस प्रकार, जब $x = 2$ है, तब दूरी न्यूनतम है। इस प्रकार, वाँछित बिंदु $(2, 4)$ है।

E13) i) $R(x) = xp = x(1000 - x)$ है।

ii) $P(x) = R(x) - ((x) = 980x - x^2 - 3000$ प्राप्त होता है।

iii) यदि $x \le 500$ है, तो $P'(x) = 980 - 2x$ है।

$P'(x) = 0$ से $x = 490$ प्राप्त होता है।

$P''(x) = -2 < 0$ इस प्रकार, अधिकतम लाभ है।

iv) $P(490) =$ ₹ 237100

v) $p = 1000 - 490 =$ ₹510

E14) वांछित बिंदु $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$ है।

E15) i) **सममिति** कोई नहीं

ii) **अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदु** : $(1, 0)$

iii) **अनंतस्पर्शियाँ** : क्योंकि $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ है और $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ है, इसलिए यह निष्कर्ष निकलता है कि $y = \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x}(\ln x)$ के मान बिना परिबद्धता के कम होते जाएँगे, जब $x \to 0^+$ है।

इसलिए, $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ है तथा आलेख की एक ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शी $x = 0$ है।

आप देख सकते हैं कि $x > 1$ के लिए, $(\ln x)/x > 0$ है।

हम नीचे देखेंगे कि x के पर्याप्त बड़े मानों के लिए, $y = (\ln x)/x$ ह्रासमान है। इसलिए x के पर्याप्त बड़े मानों के लिए, $y = (\ln x)/x$ ह्रासमान और धनात्मक है। सीमा $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ है। इस प्रकार, जब $x \to +\infty$ है, तब $(\ln x)/x$ की अनंतस्पर्शी $y = 0$ है।

iv) **वर्धमान और ह्रासमान फलन** : अवकलज हैं :

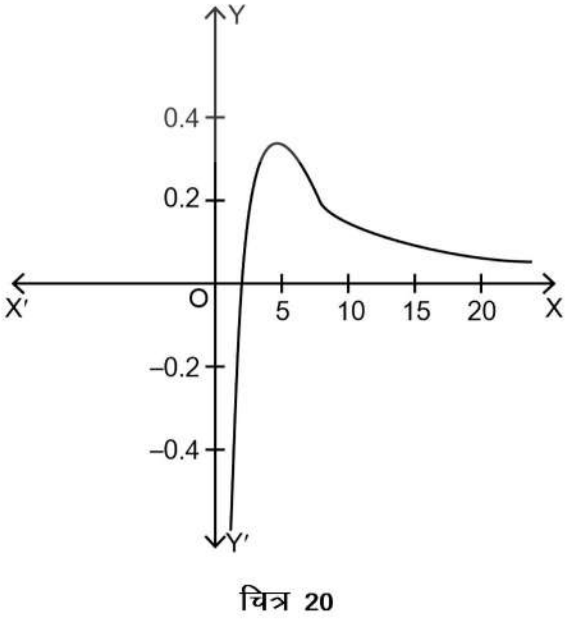
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(1/x) - (\ln x)(1)}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

और $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2(-1/x) - (1 - \ln x)(2x)}{x^4} = \frac{2x \ln x - 3x}{x^4} = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$ है।

क्योंकि सभी $x > 0$ के लिए, $x^2 > 0$ है, इसलिए $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ का वही चिह्न होगा जो $1 - \ln x$ का है। परंतु $\ln x$ एक वर्धमान फलन है, जिसमें $\ln e = 1$ है। इसलिए $x < e$ के लिए $1 - \ln x$ धनात्मक है तथा $x > e$ के लिए ऋणात्मक है।

v) **सापेक्ष चरम बिंदु** : $x = e$ पर एक चरम उच्चिष्ठ $(\ln e)/e = 1/e \approx 0.37$ है।

vi) **अवतलता** : क्योंकि सभी $x > 0$ के लिए, $x^3 > 0$ है, इसलिए $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$ चिह्न वही है जो $2 \ln x - 3$ का है। अब, $2 \ln x - 3 = 0$ है, जब $\ln x = \frac{3}{2}$ या $x = e^{3/2}$ है। पुनः, क्योंकि $\ln x$ एक वर्धमान फलन है, इसलिए $x < e^{3/2}$ के लिए $2 \ln x - 3$ ऋणात्मक है तथा $x > e^{3/2}$ के लिए यह धनात्मक है। इस प्रकार, नतिपरिवर्तन बिंदु $\left(e^{3/2}, \frac{3}{2}e^{-3/2}\right) \approx (4.48, 0.33)$ पर प्रकट होता है। चित्र 20 इस वक्र को दर्शाती है।

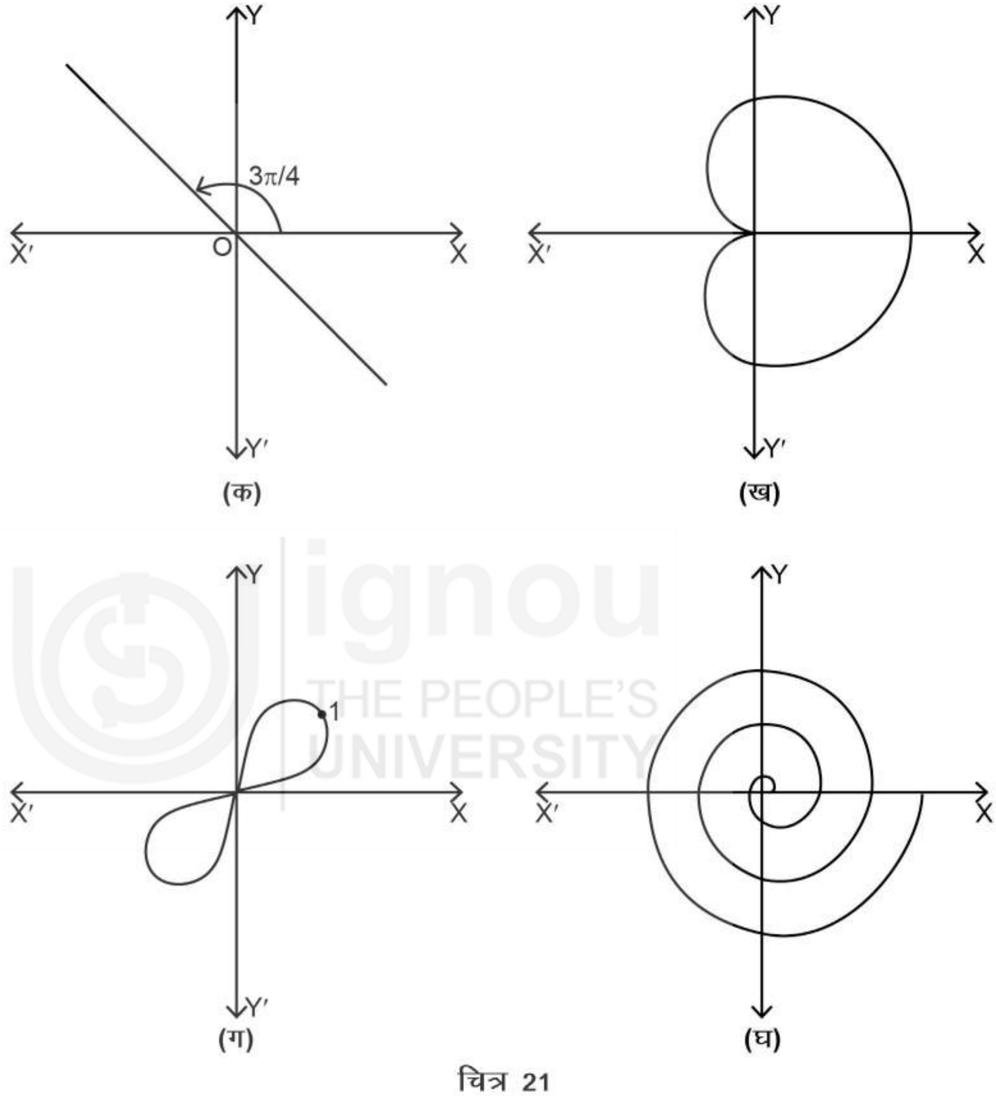


चित्र 20

E16) आप L, A और K के मानों की कल्पना करते हुए, स्वयं वक्र का अनुरेखण करना चाहेंगे।

E17) आप स्वयं इस वक्र का अनुरेखण करना चाहेंगे।

E18) i), ii), iii) और iv) के वक्र क्रमशः चित्र 21(क), 21(ख), 21(ग) और 21(घ) में दर्शाये गये हैं।



चित्र 21

E19) i) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

ii) $\frac{\tan 2 - 2}{2 \tan 2 + 1}$

E20) $y = \pm \frac{x}{2} + 4$

शब्दावली

Abscissa	भुज
Anti clockwise	वामावर्त
Approximation	सन्निकटन
Asymptote	अनंतस्पर्शी
Bending	झुकना
Clockwise	दक्षिणावर्त
Complex number	संमिश्र संख्या
Concave	अवतल
Concavity	अवतलता
Cone	शंकु
Conic-section	शंकु-परिच्छेद
Conjugate point	संयुग्मी बिन्दु
Convex	उत्तल
Convexity	उत्तलता
Criterion	निकष
Critical point	क्रान्तिक बिंदु
Curvature	वक्रता
Cusp	उभयाग्र
Double point	द्विक बिंदु
Ellipse	दीर्घवृत्त
Equiangular spiral	समानकोणिक सर्पिल
Extreme point	चरम बिंदु
Extreme value	चरम मान
Free hand curve	मुक्त हस्त वक्र
Horizontal	क्षैतिज
Hyperbola	अतिपरवलय
Imaginary number	अधिकल्पित संख्या
Inequality	असमिका
Initial line	आदिरेखा
Interior point	आंतरिक बिंदु
Isolated point	वियुक्त बिन्दु
Locus	बिन्दु-पथ
Maximum	उच्चिष्ठ
Mean value	माध्य मान
Minimum	निम्निष्ठ

Monotonicity	एकदिष्टता
Node	पात
Normal	अभिलंब
Parabola	परवलय
Periodicity	आवर्तिता
Point of inflection	नतिपरिवर्तन बिंदु
Polar coordinate	ध्रुवी निर्देशांक
Quadrant	चतुर्थांश
Radius of curvature	वक्रता त्रिज्या
Secant	छेदक रेखा
Section	परिच्छेद / भाग
Semi-cubical parabole	अर्धघन परवलय
Singular point	विचित्र बिंदु
Sketch	आलेख
Slant/oblique asymptote	तिर्यक् अनंतस्पर्शी
Spiral	सर्पिल
Strictly decreasing function	निरंतर ह्रासमान फलन
Strictly increasing function	निरंतर वर्धमान फलन
To deduce	निगमन करना
Tracing	अनुरेखण
Translation	स्थानांतरण
Vertical	ऊर्ध्वाधर
Symmetric	सममित
Rotation	घूर्णन