इंदिरा गांधी राष्ट्रीय
मुक्त विश्वविद्यालय
विज्ञान विद्यापीठ

BMTC-131
कलन

खंड
1
आवश्यक प्रारंभिक संकल्पनाएँ

पाठ्यक्रम प्रस्तावना 3

खंड प्रस्तावना 6

संकेत और प्रतीक 7

इकाई 1
समुच्चय और उन पर संक्रियाएँ 9

इकाई 2
फलन 45

इकाई 3
द्विविमीय निर्देशांक पद्धतियाँ 67

इकाई 4
सम्मिश्र संख्याएँ 87

इकाई 5
बहुपद समीकरण और उनके हल 120

विविध प्रश्न 146

शब्दावली 151

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति*

प्रो. रश्मि भारद्वाज
जी.जी.एस. इन्द्रप्रस्थ विश्वविद्यालय, दिल्ली

डॉ. सुनीता गुप्ता
दिल्ली विश्वविद्यालय

प्रो. अंबर हबीब
शिव नाडार विश्वविद्यालय
गौतम बुद्ध नगर

प्रो. एस. ए. कात्रे
पूणे विश्वविद्यालय

प्रो. वी. कृष्ण कुमार
एन. आई. एस. ई. आर., भुवनेश्वर

डॉ. अमित कुलश्रेष्ठ
आई. आई. एस. ई. आर., मोहाली

डॉ. अपर्ना मेहरा
आई. आई. टी., दिल्ली

प्रो. राहुल रॉय
भारतीय सांख्यिकीय संस्थान, दिल्ली

प्रो. मीना सहाय
लखनऊ विश्वविद्यालय

डॉ. शची श्रीवास्तव
दिल्ली विश्वविद्यालय

संकाय सदस्य, विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

डॉ. दीपिका
प्रो. परवीन सिंक्लेयर

प्रो. पूर्णिमा मित्तल
श्री पवन कुमार

प्रो. सुजाता वर्मा
डॉ. एस. वेंकटरामन

* पाठ्यक्रम अभिकल्प प्रोग्राम एक्सपर्ट समिति के सुझावों व यू.जी.सी.-सी.बी.सी.एस. सांचे पर आधारित है।

खंड निर्माण दल

प्रो. अंबर हबीब (*संपादक*)
शिव नाडार विश्वविद्यालय
गौतम बुद्ध नगर

प्रो. परवीन सिंक्लेयर
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

पाठ्यक्रम समन्वयकर्त्ता: प्रो. परवीन सिंक्लेयर तथा डॉ. दीपिका

अनुवाद

डॉ. महेन्द्र शंकर (सेवानिवृत्त)
एन.सी.ई.आर.टी.

प्रो. परवीन सिंक्लेयर
विज्ञान विद्यापीठ, इं.गां.रा.मु.वि.

सामग्री निर्माण

श्री राजीव गिरधर
सहायक कुलसचिव (प्रकाशन)
एम.पी.डी.डी. इग्नू

श्री हेमन्त कुमार परिदा
अनुभाग अधिकारी (प्रकाशन)
एम.पी.डी.डी. इग्नू

नवम्बर, 2019

© *इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय, 2018*

ISBN : 978-93-88498-42-5

सर्वाधिकार सुरक्षित। इस फार्म का कोई भी अंश इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की लिखित अनुमति लिए बिना मिमियोग्राफ़ अथवा किसी अन्य साधन से पुनः प्रस्तुत करने की अनुमति नहीं है।

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय के पाठ्यक्रमों के विषय में और अधिक जानकारी विश्वविद्यालय के कार्यालय मैदान गढ़ी, नई दिल्ली-110068 और इग्नू की वेबसाइट www.ignou.ac.in *से प्राप्त की जा सकती है।*

इंदिरा गाँधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की ओर से कुलसचिव, सामग्री निर्माण एव वितरक प्रभाग द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित।

लेज़र टाईपसेटिंग : डिज़ाईन क्रिएशन, E-mail: dzine.creations2@gmail.com

मुद्रक : आकाशदीप प्रिंटर्स, 20–अंसारी रोड दरियागंज, नई दिल्ली–110002

कलन

यह पाठ्यक्रम गणित का पहला पाठ्यक्रम है जिसका अध्ययन आप इस स्नातक उपाधि कार्यक्रम में करने वाले हैं। इस पाठ्यक्रम का लक्ष्य उन आधारभूत गणितीय संकल्पनाओं और तकनीकों की समझ को विकसित करना है जिनकी आवश्यकता आपको इसी कार्यक्रम के अन्य गणित पाठ्यक्रमों का अध्ययन करने में, तथा आपके द्वारा आगे किए जाने वाले किसी गणितीय अध्ययन या कार्य में पड़ सकती है।

कलन को दो व्यापक क्षेत्रों में विभाजित किया जाता है, अवकल कलन और समाकल कलन। व्यापक रूप से बात करें, तो अवकल कलन परिवर्तन का अध्ययन है तथा समाकल कलन हिस्सों को जोड़ने के बारे में अध्ययन है। उदाहरणार्थ, अवकल कलन जाँच की जाने वाली किसी पद्धति पर बदलते प्रतिबंधों का प्रभाव ज्ञात करने में, तथा इसी कारण उस पद्धति पर नियंत्रण हासिल करने में, हमारी सहायता करता है। गणितीय जाँच की यह प्रक्रिया संबंधित परिघटना के निदर्शन की शक्तिशाली तकनीक का उपयोग करती है। इन निदर्शों में प्रायः अवकल समीकरण संबद्ध होते हैं। अवकल कलन ऐसे निदर्शों के बनाने में उपयोगी है तथा समाकल कलन का उपयोग इन निदर्शों से जुड़ी अवकल समीकरणों को हल करने में किया जाता है। भौतिकी में जाने माने अनुप्रयोगों के अतिरिक्त, कलन पर आधारित गणितीय निदर्शों का उपयोग जनसंख्या पारिस्थितिकी, साइबरनेटिक्स, प्रबंधन कार्यों, अर्थशास्त्र और आयुर्विज्ञान के अध्ययन में किया जाता है।

इस पाठ्यक्रम में हम अवकल कलन की चर्चा करने के बाद समाकल कलन पर अपना ध्यान केन्द्रित करेंगे। परंतु, ऐतिहासिक रूप से देखा जाए, तो समाकल कलन पहले विकसित हुआ था। इसकी उत्पत्ति कर एकत्रित करने के उद्देश्य से भूमि को मापने की आवश्यकता से हुई। ऐसा कहा जाता है कि मिस्र की नील नदी प्रायः अपना रास्ता बदलती रहती थी, तथा विभिन्न वक्रीय परिसीमाओं वाली, इसके निकट की ज़मीनों को कर लगाने के लिए बार-बार मापने की आवश्यकता पड़ती थी। इसके कारण मिस्र सभ्यता में क्षेत्रमिति का विकास हुआ। वास्तव में, हम क्षेत्रमिति को समाकल कलन का पूर्वगामी मान सकते हैं।

कलन का आधुनिक विकास 17वीं शताब्दी के प्रसिद्ध गणितज्ञों न्यूटन (Newton) और लाइब्नीत्ज़ (Leibnitz) के अवकल कलन को विकसित करने के साथ प्रारंभ हुआ। कलन की प्रारंभिक सफ़लताओं में से एक हैली के पुच्छल तारे (Halley's comet) की अवधि की भविष्यवाणी थी। जैसा कि आप देख सकते हैं, कलन न केवल ऐसी प्राकृतिक परिघटनाओं के अध्ययन के लिए, बल्कि स्टॉक मार्केट जैसे कृत्रिम संस्थाओं के अध्ययन के लिए भी एक शक्तिशाली साधन प्रदान करता है। शताब्दियों तक ऑयलर, लग्रांज, बर्नौलीयों, गाउस, कौशी और रीमान जैसे यूरोप के अनेक गणितज्ञों ने इस विषय के विकास के लिए योगदान दिया।

अब कुछ शब्द इसके बारे में कि इस पाठ्यक्रम के दौरान हम आगे कैसे बढ़ेंगे। इस पाठ्यक्रम के पहले खंड में आपको गणित के दो आधारभूत संकल्पनाओं, अर्थात् समुच्चय और फलन, से परिचित कराया जाएगा। इस दौरान, आपको स्कूल में अध्ययन किये गए बहुत से संबंधित गणित को फिर से याद करने का मौका मिलेगा, जिसमें द्विविमीय समष्टि के निरूपण और अध्ययन के लिए दो महत्त्वपूर्ण निर्देशांक पद्धतियाँ भी

शामिल हैं। आगे, आप सम्मिश्र संख्याओं के संसार की एक झलक, और कुछ अधिक, प्राप्त करेंगे। अंत में, आप $\mathbb{R}$ पर कुछ बहुपद समीकरणों को हल करने की विधियों का अध्ययन करेंगे।

दूसरे खंड में आप वास्तविक संख्याओं के गुणों के अध्ययन से प्रारंभ करेंगे, जिनकी आपको बार-बार आवश्यकता पड़ेगी। आप सीमाओं और सांतत्य की संकल्पनाओं का भी अध्ययन करेंगे, जो कलन में, तथा अधिक व्यापक रूप में गणित में, एक केन्द्रीय भूमिका अदा करतीं हैं।

तीसरे खंड में आप एक अवकलज की परिभाषा और उसके आधारभूत गुणों के साथ अवकल कलन के अध्ययन को प्रारंभ करेंगे। आप कुछ फलनों के अवकलजों के लिए अनेक सूत्रों का अध्ययन करेंगे, जिनका प्रयोग प्रायः किया जाता रहता है, जैसे कि बहुपद फलन और त्रिकोणमितीय फलन। यह खंड उच्चतर कोटि के अवकलजों पर एक चर्चा तथा उच्चतर कोटि के अवकलजों को ज्ञात करने के लाइब्नीत्ज़ नियम के साथ समाप्त होता है।

चौथे खंड में आपको अवकलन के कुछ अनुप्रयोग प्राप्त होंगे। आप अध्ययन करेंगे कि वक्रों के विभिन्न ज्यामितीय गुणों के बारे में सूचना प्राप्त करने में किस प्रकार अवकलज सहायता कर सकते हैं। यह खंड विभिन्न प्रकारों की वक्रों के आरेखण पर चर्चा के साथ समाप्त होता है।

पाँचवाँ, और अंतिम खंड, समाकल कलन पर होगा। आप 'एक फलन का समाकल' और 'एक फलन का पूर्वग' की संकल्पनाओं का अध्ययन करेंगे। आप सामान्य फलनों जैसे बहुपद फलनों और त्रिकोणमितीय फलनों के समाकलों का भी अध्ययन करेंगे। आपको समाकलन की कुछ तकनीकों के अनुप्रयोग के लिए भी एक अवसर प्राप्त होगा, जैसे प्रतिस्थापन विधि, भागों द्वारा समाकलन तथा समानयन सूत्र। यह खंड लंबाइयों, क्षेत्रफलों और आयतनों में समाकल कलन के कुछ अनुप्रयोगों के साथ समाप्त होता है।

अब हमारे संकेतन के बारे में एक शब्द। प्रत्येक खंड में इकाइयाँ हैं और प्रत्येक इकाई अनुच्छेदों में विभाजित की गई है, जिसे आगे उप-अनुच्छेदों में भी विभाजित किया जा सकता है। इन अनुच्छेदों/उप-अनुच्छेदों को क्रमानुसार अंकित किया गया है। इसी तरह, एक इकाई में दिए गए प्रश्नों और महत्त्वपूर्ण समीकरणों को क्रमानुसार अंकित किया गया है। चूंकि विभिन्न इकाइयों की सामग्री अत्याधिक रूप से जुड़ी हुई है, इसलिए इनमें एक दूसरे के लिए संदर्भ दिए होंगे। इसके लिए **हम संकेतन अनुच्छेद x.y का प्रयोग करेंगे, जिसका अर्थ होगा इकाई x का अनुच्छेद y।**

इस संपूर्ण पाठ्यक्रम में सिद्धांतों के स्थान पर तकनीकों पर अधिक ज़ोर दिया जाएगा। हो सकता है आपको अनेक उपपत्तियाँ न मिलें। (आप यहां जिन प्रमेयों का अध्ययन कर रहे हैं, उनमें से अनेक की उपपत्तियां आपको तीसरे सेमेस्टर के पाठ्यक्रम, वास्तविक विश्लेषण, में मिलेंगे।)

इस पाठ्यक्रम का एक अन्य अनिवार्य हिस्सा इसका सत्रीय कार्य है, जो पूरे पाठ्यक्रम पर आधारित है। आपके अध्ययन केन्द्र पर शैक्षणिक परामर्शदाता (Counsellor) इसका मूल्यांकन करेंगे तथा विस्तृत टिप्पणियों के साथ आपको वापिस कर देंगे। इस प्रकार, सत्रीय कार्य एक शिक्षण और मूल्यांकन, दोनों का साधन है। आगे, आपको इस

पाठ्यक्रम की परीक्षा में बैठने की अनुमति तब तक नहीं मिलेगी जब तक आप अपने सत्रीय कार्य के उत्तरों को अध्ययन केन्द्र में जमा नहीं कराएंगे। इसलिए, कृपया इसे ठीक समय पर जमा करा दें।

जो पाठ्यक्रम सामग्री हमने आपको भेजी है, वह स्वयं में पर्याप्त है। यदि आपको किसी भाग को समझने में कठिनाई आए, तो अपने काउंसलर की सहायता लीजिए। साथ ही, यदि आप किसी विषय को अधिक गहराई के साथ अध्ययन करना चाहते हैं, तो भी आप अपने काउंसलर से परामर्श कर सकते हैं।

यहां एक **मित्रतापूर्ण सलाह** है कि इस पाठ्यक्रम में प्रस्तुत विभिन्न तकनीकों को सीखने के लिए, आपको सामग्री में दिए प्रश्न हल करने में बहुत अभ्यास करने की आवश्यकता है। आपको हल देखने से पहले, खंड में दिए सभी प्रश्नों को हल करने का प्रयास करना चाहिए। टयूटोरियल के एक भाग के रूप में, हमने प्रत्येक खंड के अंत में विविध उदाहरण और प्रश्न जोड़ दिए हैं। आपको इन प्रश्नों को भी करना चाहिए। इन प्रश्नों के अतिरिक्त, आप अपने अध्ययन केन्द्र के पुस्तकालय में कुछ अन्य पुस्तकों को भी पढ़ सकते हैं तथा उन पुस्तकों में से भी कुछ प्रश्न कर सकते हैं।

कुछ उपयोगी पुस्तकें और वेबसाइट निम्नलिखित हैं :

1. Essential Calculus, by James Stewart, Cengage Publication.
2. Calculus, by Anton, Bivens and Davis, Wiley Publications.
3. https://brilliant.org/courses/calculus-done-right.
4. https://www.mathisfun.com/calculus
5. www.math.mit.edu/Ndjk/calculus_beginners.

हमने एक विडियो प्रोग्राम भी तैयार किया है, जो आपके अध्ययन केन्द्र पर उपलब्ध होगा, जिसका नाम 'Limits' है, जो खंड 2 की सामग्री पर आधारित है।

आपको इस पाठ्यक्रम को सीखने की शुभकामनाओं सहित !

पाठ्यक्रम दल

खंड 1 आवश्यक प्रारंभिक संकल्पनाएँ

इस खंड के साथ, आप स्नातक कार्यक्रम के गणित में पहला कदम रख रहे हैं। आपने कक्षा XII तक गणित की पढ़ाई की होगी, जहाँ आपने यहाँ पढ़ाई जाने वाली कुछ संकल्पनाएँ पहले ही पढ़ ली होंगी। इनको फिर भी यहाँ इसलिए सम्मिलित किया गया है, क्योंकि ये आगे की पढ़ाई के लिए आवश्यक हैं, तथा इनको दोबारा पढ़ लेने से आपको सहायता मिलेगी।

शुरू में, यानी इकाई 1 में, आप 20वीं शताब्दि में विकसित एक आवश्यक संकल्पना, अर्थात् समुच्चय के बारे में सीखेंगे। यहाँ आपको समुच्चयों पर संक्रियाओं और उनके गुणों को दोबारा देखने का अवसर प्राप्त होगा।

इकाई 2 में आपको यह याद करने का अवसर मिलेगा कि एक फलन क्या है, तथा फलनों पर संक्रियाओं और विभिन्न प्रकार के फलनों के पुनः स्मरण के अवसर भी प्राप्त होंगे।

इकाई 3 में आप दो विमाओं के लिए दो निर्देशांक पद्धतियों पर विचार करेंगे। कार्तीय पद्धति से आप पहले से परिचित होंगे, लेकिन ध्रुवीय निर्देशांक पद्धति नई प्रतीत हो सकती है। इसी से ही संबद्ध इकाई 4 है, जो आपको सम्मिश्र संख्याओं और उनके गुणों से अवगत कराने पर केन्द्रित है। जैसे-जैसे आप इन इकाईयों को पढ़ेंगे, आपको इनके बीच संबद्धता स्पष्ट होती जाएगी।

अंत में, इकाई 5 में आप विभिन्न बहुपदों का, तथा इनके मूल किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं, का अध्ययन करेंगे। विशेष रूप से, हम घात 4 के बहुपदों तक की चर्चा करेंगे।

इस खंड के अंत में आप इसमें अध्ययन की गई संकल्पनाओं से संबंधित **विविध प्रश्नों का एक समुच्चय** देखेंगे। कृपया इन्हें अवश्य पढ़ें तथा स्वयं प्रत्येक प्रश्न को करने का प्रयास करें। इससे आपको संबंधित संकल्पनाओं के साथ जूझने में, तथा उन्हें अच्छे से समझने में, सहायता मिलेगी। अब, इस इकाई में प्रयुक्त कुछ चिह्नों के बारे में एक शब्द! प्रत्येक इकाई में आप प्रमेयों, उदाहरणों और सवालों को पाएंगे। किसी प्रमेय की उपपत्ति के अंत को चिह्न ■ से दर्शाया गया है। एक उदाहरण के अंत को *** से दर्शाया गया है। आगे, हर इकाई में जिन समीकरणों को संदर्भित करने की जरूरत है, उन्हें क्रमानुसार संख्याएँ दी गई हैं। यही बात इकाई में दी गई प्रश्नों और आकृतियों के लिए भी की गई है। E1, E2, इत्यादि प्रश्न व्यक्त करते हैं, तथा चित्र 1, चित्र 2, इत्यादि आकृतियों को व्यक्त करते हैं।

संकेत और प्रतीक (खंड 1 में प्रयोग होने वाले)

$\in (\notin)$	का सदस्य है (का सदस्य नहीं है)
$\subseteq (\subsetneq)$	का उपसमुच्चय है (का उचित उपसमुच्चय है)
$\not\subseteq (\not\supseteq)$	का उपसमुच्चय नहीं है (आविष्ट नहीं करता है)
$\supseteq (\supsetneq)$	आविष्ट करता है (उचित रूप से आविष्ट करता है)
$A \cup B$	समुच्चयों A और B का सम्मिलन
$A \cap B$	A और B का प्रतिच्छेदन
$A \setminus B$	समुच्चय A में समुच्चय B का पूरक
$A \times B$	A और B का कार्तीय गुणनफल
A^c	A का पूरक
$\mathbb{N}$	प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय
$\mathbb{Z}(\mathbb{Z}^*)$	पूर्णांकों (शून्येत्तर पूर्णांकों) का समुच्चय
$\mathbb{Q}(\mathbb{Q}^*)$	परिमेय संख्याओं (शून्येत्तर परिमेय संख्याओं) का समुच्चय
$\mathbb{R}(\mathbb{R}^*)$	वास्तविक संख्याओं (शून्येत्तर वास्तविक संख्याओं) का समुच्चय
$\mathbb{C}(\mathbb{C}^*)$	संमिश्र संख्याओं (शून्येत्तर संमिश्र संख्याओं) का समुच्चय
$\emptyset$	रिक्त समुच्चय
$\Rightarrow (\Leftrightarrow)$	निहित है (निहित है और से निहित है)
$< (\leq)$	से कम (से कम या बराबर)
$> (\geq)$	से ज़्यादा (से ज़्यादा या बराबर)
$\exists$	का अस्तित्व है
$\forall$	सभी के लिए
$\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right)$	$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ (a_1 a_2 \ldots a_n)$
$\therefore$	इसलिए / अतः
$f : X \to Y$	f समुच्चय X से समुच्चय Y तक का फलन है
$\{x \mid x, P$ को संतुष्ट करता है$\}$	ऐसे सभी x का समुच्चय जो गुण P को संतुष्ट करते हैं
$\wp(X)$	X का घात समुच्चय
$\lvert x \rvert$	वास्तविक, या संमिश्र संख्या, x का मापांक
$\mathrm{Re}\, z$	संमिश्र संख्या z का वास्तविक भाग
$\mathrm{Im}\, z$	संमिश्र संख्या z का अधिकल्पित भाग
$\mathrm{Arg}\, z$	संमिश्र संख्या z का मुख्य कोणांक
$\bar{z}$	संमिश्र संख्या z का संमिश्र संयुग्मी
$\deg f$	बहुपद f का घात
$\mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ (n बार) $(\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C}$ (n बार))

यूनानी अक्षर

α	ऐल्फ़ा	ν	न्यू
β	बीटा	ξ	ज़ाइ
γ	गामा	o	ओमिक्रॉन
δ	डेल्टा	π, Π	पाइ (पाइ का बड़ा अक्षर)
ε	एप्सिलॉन	ρ	रो
ζ	ज़ीटा	σ, Σ	सिग्मा (सिग्मा का बड़ा अक्षर)
η	ईटा	τ	टाओ
θ	थीटा	υ	अप्सिलॉन
ι	आयोटा	ϕ	फ़ाइ
K	कापा	χ	काइ
λ	लैम्डा	ψ	साइ
μ	म्यू	ω	ओमेगा

ignou
THE PEOPLE'S
UNIVERSITY

इकाई 1

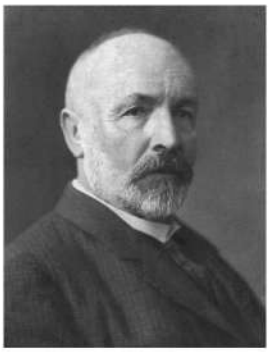
समुच्चय और उन पर संक्रियाएँ

संरचना **पृष्ठ संख्या**

1.1	प्रस्तावना	9
	उद्देश्य	10
1.2	समुच्चय	11
1.3	उपसमुच्चय	17
1.4	वेन आरेख	19
1.5	समुच्चयों पर संक्रियाएँ	22
	पूरकीकरण	22
	प्रतिच्छेदन	23
	सम्मिलन	27
	कार्तीय गुणनफल	30
1.6	संक्रियाओं पर नियम	32
	बंटन नियम	33
	द मौर्गन नियम	36
1.7	सारांश	37
1.8	हल/उत्तर	39

1.1 प्रस्तावना

बीजगणित के संसार में आपका स्वागत है! हम अपनी औपचारिक चर्चा एक मौलिक संकल्पना से प्रारंभ करते हैं, जो किसी भी तरह के बीजगणित को करने के लिए आवश्यक है। तो, शब्दों के उस संग्रह पर विचार कीजिए, जो एक दिए गए शब्दकोश में परिभाषित हैं। एक शब्द या तो इस संग्रह में होगा या नहीं होगा, जो इस पर निर्भर करेगा कि वह उस शब्दकोश में दिया गया है या नहीं। यह संग्रह, जैसा कि आप भाग 1.2 में देखेंगे, एक समुच्चय का उदाहरण है। जब भी आप गणित के किसी भी हिस्से का अध्ययन शुरु करेंगे, तब आप एक या अधिक समुच्चयों के साथ कार्य करेंगे। इसी कारण, हम समुच्चयों से संबंधित कुछ मूलभूत संकल्पनाओं तथा गुणों की चर्चा करने में कुछ समय लगाना चाहते हैं। इस अवधारणा को सर्वप्रथम जर्मन गणितज्ञ कैंटर



चित्र 1: जॉर्ज कैंटर
(1845-1918)

ने परिभाषित किया था। शुरु में समुच्चयों के विभिन्न उदाहरणों को, तथा समुच्चयों की व्याख्या करने की विभिन्न विधियों को, देखेंगे।

फिर भाग 1.3 में, एक समुच्चय के ऐसे 'भागों' की चर्चा करेंगे, जो खुद में समुच्चय हैं। भाग 1.4 में हम वेन आरेखों पर विचार करेंगे, जो समुच्चयों के बीच आंतरिक संबंधों का एक चित्रीय निरूपण होते हैं।

आप वास्तविक संख्याओं पर मूलभूत संक्रियाओं–जोड़, घटा, गुणन तथा विभाजन से अवश्य ही परिचित होंगे। जब हम इन संक्रियाओं में से किसी को भी लागू करते हैं, हम एक समय पर दो वास्तविक संख्याओं को इस तरह संयोजित करते हैं जिससे हमें एक अन्य वास्तविक संख्या प्राप्त हो। उदाहरणार्थ, यदि r और s दो वास्तविक संख्याएँ हैं, तो r–s भी एक वास्तविक संख्या है। इसी प्रकार, हम एक समय पर दो दिए हुए समुच्चयों पर कुछ संक्रियाओं को लागू करके, नए समुच्चय प्राप्त कर सकते हैं। भाग 1.5 में हम समुच्चयों के युग्मों पर चार संक्रियाओं की चर्चा करेंगे। ये संक्रियाएँ हैं : एक समुच्चय A का एक समुच्चय B में पूरक, A और B का सम्मिलन तथा प्रतिच्छेदन तथा A और B का कार्तीय गुणनफल। जैसा कि आप देखेंगे, सम्मिलन, प्रतिच्छेदन तथा कार्तीय गुणनफल की संक्रियाएँ समुच्चयों की कितनी भी संख्या पर, स्वाभाविक रूप से, लागू की जा सकती हैं।

अंत में, भाग 1.6 में, हम आपको इन संक्रियाओं से संबंधित कुछ नियमों से अवगत कराएँगे।

जैसा कि पहले बताया गया था, इस इकाई में सम्मिलित की गई सामग्री गणित के किसी भी पाठ्यक्रम के अध्ययन के लिए आवश्यक है। इसलिए, आप इस इकाई का सावधानीपूर्वक अध्ययन कीजिए।

अब, हम इस इकाई के उद्देश्यों की सूची देंगे। इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, कृपया इस सूची को पुनः पढ़ें तथा यह सूनिश्चित कर लें कि आपने ये उद्देश्य प्राप्त कर लिए हैं। इसको सूनिश्चित करने की एक विधि यह है कि इस इकाई में दिए **प्रत्येक प्रश्न को हल करने का प्रयास करें**, जब भी आप इस पर पहुँचते हैं। जब तक इस प्रश्न को अपनी संतुष्टि के अनुसार न कर लें, आगे न बढ़ें।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद, आपको निम्नलिखित करने में समर्थ हो जाना चाहिए :

- एक समूच्चय की पहचान करना;
- सूचीयन विधि अथवा गुण विधि द्वारा समूच्चयों की व्याख्या करना;
- परिमित और अपरिमित समुच्चयों के उदाहरण देना;
- वेन आरेखों द्वारा समुच्चयों के बीच संबंधों को निरूपित करना;
- समुच्चयों के युग्मों पर पूरकीकरण, प्रतिच्छेदन, सम्मिलन और कार्तीय गुणनफल की संक्रियाओं को स्पष्ट करना तथा उनको लागू करना;
- इन संक्रियाओं से संबंधित मूलभूत परिणामों को सिद्ध करना तथा उनको लागू करना;

- इन संक्रियाओं से संबंधित बंटन नियमों के कथन देना, उन्हें सिद्ध करना तथा उनको लागू करना;
- द मौर्गन नियमों के कथन देना, उन्हें सिद्ध करना तथा उनको लागू करना।

1.2 समुच्चय

आपने कई तरह के संग्रह देखे होंगे, जैसे कि, टिकटों का संग्रह, सिक्कों का संग्रह, कबड्डी में रूचि रखने वाले व्यक्तियों का संग्रह, इत्यादि। गणित में, इन संग्रहों में से कुछ को समुच्चय माना जाता है तथा कुछ को नहीं। आइए देखें क्यों।

राष्ट्रीय संग्रहालय, दिल्ली, के सिक्कों के संग्रह पर विचार करें। अब, कोई वस्तु दी जाने पर, आप सर्वप्रथम यह देख सकते हैं कि यह एक सिक्का है या नहीं। आगे, यदि यह एक सिक्का है, तो आप आसानी से मालूम कर सकते हैं कि यह संग्रहालय के संग्रह में से है या नहीं। साथ ही, आप जिस भी निष्कर्ष पर पहुँचेंगे, उसी निष्कर्ष पर विश्व के किसी भी भाग में रहने वाला व्यक्ति भी पहुँचेगा। अतः, इस बारे में एक सार्विक सहमति है कि एक वस्तु इस संग्रह में है या नहीं। यह निश्चितता इसलिए आती है क्योंकि यह संग्रह 'सुपरिभाषित' (well-defined) है।

अतः **एक सुपरिभाषित संग्रह** ऐसा संग्रह है जिसके लिए कोई भी वस्तु के दिए रहने पर, किसी भी स्थान पर किसी भी व्यक्ति को यह स्पष्ट हो जाए कि वह वस्तु उस संग्रह में है या नहीं। इसलिए, उदाहरणार्थ, उन सभी महिला विमानचालकों का संग्रह, जिन्होंने 2000 से अब तक एयर इंडिया में कार्य किया है, सुपरिभाषित है, क्योंकि कोई भी वस्तु (इंसान) या तो इस अवधि में एयर इंडिया में महिला विमानचालक है/थी या नहीं तथा इसी के अनुसार सुनिश्चित होगा कि वह इस संग्रह में है या नहीं। दूसरी ओर, सभी बुद्धिमान मानव प्राणियों का संग्रह सुपरिभाषित नहीं है। क्यों? कारण है कि, एक विशिष्ट मानव प्राणी एक व्यक्ति को बुद्धिमान प्रतीत हो सकता है तथा दूसरे व्यक्ति को नहीं। इसलिए, इस पर सहमत होने के लिए कि कौन बुद्धिमान है और कौन नहीं है कोई निष्पक्ष कसौटी नहीं है।

इस चर्चा से हम निम्नलिखित परिभाषा पर पहुँचते हैं।

परिभाषा : वस्तुओं का एक सुपरिभाषित संग्रह एक **समुच्चय** (set) कहलाता है।

आइए समुच्चयों के कुछ और उदाहरणों को देखें, जो आपके सामने पहले ही आ चुके होंगे। आप इनको इस पाठ्यक्रम में तथा अन्य गणित के पाठ्यक्रमों में, विस्तृत रूप से प्रयोग करेंगे।

i) प्राकृत संख्याओं का समुच्चय, जिसे $\mathbb{N}$ से व्यक्त किया जाता है।

ii) पूर्णांकों का समुच्चय, जिसे $\mathbb{Z}$ से व्यक्त किया जाता है।

iii) परिमेय संख्याओं का समुच्चय, जिसे $\mathbb{Q}$ से व्यक्त किया जाता है।

iv) वास्तविक संख्याओं का समुच्चय, जिसे $\mathbb{R}$ से व्यक्त किया जाता है।

इकाई 4 में आप संख्याओं के एक अन्य समुच्चय के बारे में सीखेंगे, यानी सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय, जिसे $\mathbb{C}$ से व्यक्त किया जाता है।

निम्नलिखित प्रश्नों को करने के बाद आपको यह आँकने में सहायता मिलेगी कि आप समुच्चय की संकल्पना को समझ पाए हैं या नहीं।

E1) नीचे दिए गए संग्रहों में से कौन से संग्रह समुच्चय हैं?

i) कबड्डी में रूचि रखने वाले सभी व्यक्तियों का संग्रह।

ii) उन सभी व्यक्तियों का संग्रह जो मंगल पर हो आए हैं।

iii) अभाज्य संख्याओं का संग्रह।

एक अभाज्य संख्या, 1 के अतिरिक्त वह प्राकृत संख्या होती है जिसके गुणनखंड केवल 1 और स्वयं हैं।

iv) एशियेटिक सोसायिटी पुस्तकालय का संग्रह।

v) ऐसे सभी आयतों का संग्रह जो वर्ग नहीं हैं।

vi) सभी मनोरंजक फिल्मों का संग्रह।

E2) मान लीजिए आपको एक टिकटों की एलबम दी जाती है। क्या इस एलबम में टिकटों का संग्रह एक समुच्चय है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

अब किसी एक समुच्चय की वस्तुओं पर विचार कीजिए, उदाहरण के लिए, एयर इंडिया के सभी महिला विमानचालकों के समुच्चय को लीजिए। ऐसी कोई भी महिला विमानचालक इस समुच्चय का 'सदस्य' है, तथा एक व्यक्ति जो एयर इंडिया में महिला विमानचालक नहीं है/थी इस समुच्चय का 'सदस्य' नहीं है, नीचे दी परिभाषा के अनुसार।

परिभाषा : एक वस्तु, जो एक समुच्चय में है, उस समुच्चय का एक **अवयव** (element), या **सदस्य,** कहलाता है।

उदाहरणार्थ संख्या 2, प्राकृत संख्याओं के समुच्चय $\mathbb{N}$ का एक अवयव है तथा (–2) इस समुच्चय का अवयव नहीं है।

सामान्यतः, लोग समुच्चयों को व्यक्त करने के लिए, अंगरेज़ी के बड़े अक्षरों A, B, C, इत्यादि का प्रयोग करते हैं। छोटे अक्षरों a, b, c, x, y, इत्यादि का प्रयोग प्रायः समुच्चयों के अवयवों को व्यक्त करने के लिए किया जाता है। प्रतीकात्मक रूप में, हम कथन 'a समुच्चय A का एक अवयव है' को $\mathbf{a \in A}$ लिखते हैं। यदि a समुच्चय A का अवयव नहीं है, अर्थात a समुच्चय A में नहीं है, तो हम इस तथ्य को $\mathbf{a \notin A}$ लिखते हैं। इसलिए, उदाहरणार्थ, यदि A अभाज्य संख्याओं का समुच्चय है, तो $5 \in A$ तथा $9 \notin A$.

प्रतीक '$\in$', 'का हिस्सा है' के लिए प्रयोग किया जाता है। इसका सुझाव एक इतालवी गणितज्ञ पीयानो (1858-1932) ने दिया था।

अब, आप जानते हैं कि एक वास्तविक संख्या का वर्ग सदैव ऋणेतर (non-negative) होता है। इसलिए, क्या उन सभी वास्तविक संख्याओं का संग्रह, जिनके वर्ग ऋणात्मक हैं, एक समुच्चय होगा? क्या ऐसी कोई संख्या है? नहीं। इसलिए, इस संग्रह में कोई भी अवयव नहीं है। परंतु, **यह सुपरिभाषित है,** क्योंकि यह प्रत्येक स्थान पर प्रत्येक व्यक्ति को स्पष्ट है कि इस संग्रह में कोई अवयव नहीं है। अतः, यह संग्रह एक समुच्चय है, परंतु इसका कोई सदस्य नहीं है, तथा इसका एक विशिष्ट नाम है।

परिभाषा : वह समुच्चय जिसमें कोई अवयव नहीं होता, **रिक्त समुच्चय** (empty set) कहलाता है। इसे प्रायः $\emptyset$ से व्यक्त किया जाता है।

अब, इस प्रश्न को करने का प्रयास कीजिए।

E3) निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य हैं? जो कथन असत्य हैं, उन्हें सही कथन बनाने के लिए बदलिए।

i) $0.2 \in \mathbb{N}$

ii) $\sqrt{9} \notin \mathbb{Z}$

iii) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

iv) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

v) उन सभी वर्गों का समुच्चय, जो आयत नहीं हैं, $\emptyset$ है।

vi) कोई भी वृत्त ऊपर E1 (v) में दिए समुच्चय का सदस्य है।

याद कीजिए कि $\sqrt{a}$ ऋणेतर वास्तविक संख्या a का ऋणेतर वर्गमूल दर्शाता है।

एक समुच्चय जिसमें कम से कम एक अवयव हो, एक **अरिक्त समुच्चय** (non-empty set) कहलाता है। हम प्रायः एक अरिक्त समुच्चय की दो विधियों से व्याख्या करते हैं– **सूचीयन विधि** तथा **गुण विधि**।

सूचीयन विधि : इस विधि में, हम समुच्चय के सभी सदस्यों लहरियादार कोष्ठकों में सूचीबद्ध करते हैं। उदाहरणार्थ, उन सभी प्राकृत संख्याओं का समुच्चय, जो 10 के गुणनखंड हैं, {1, 2, 5, 10} हैं। इस संकेतन का प्रयोग करते हुए, कुछ लोग रिक्त समुच्चय को { } द्वारा भी व्यक्त करते हैं।

याद रखिए कि यदि आप एक समुच्चय को प्रारंभ करने के लिए, खोलने वाला कोष्ठक { लिखते हैं, तो समुच्चय के अवयवों को सूचीबद्ध करने के बाद संगत बंद करने वाला कोष्ठक } लिखना ज़रूरी है।

परंतु तब क्या होगा जब किसी समुच्चय में बहुत अधिक अवयव हों? क्या हम उन सभी को लिख पाएँगे? इस स्थिति में, हम समुच्चय के कुछ ही अवयव सूचीबद्ध करते हैं, जो यह देखने/दर्शाने के लिए पर्याप्त हों कि ये अवयव किसी पैटर्न का अनुसरण कर रहे हैं। उदाहरण के लिए, प्राकृत संख्याओं के समुच्चय $\mathbb{N}$ को $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ आप यह पैटर्न देख सकते हैं कि अगला अवयव पिछले अवयव में 1 जोड़ कर प्राप्त होता है।

'...' यह दर्शाने की परंपरा है कि अवयव इसी के अनुसार आगे जारी रहते हैं।

इसी प्रकार, 10 और 100 के बीच में स्थित सभी सम संख्याओं का समुच्चय {12, 14, 16, ... 98} है। (ध्यान दीजिए कि दो संख्याओं a और b **के बीच** में स्थित होने का अर्थ है कि इसमें a और b सम्मिलित नहीं हैं।

समुच्चयों को निरूपित करने की यह विधि **सूचीयन विधि** (listing method) कहलाती है।

गुण विधि : समुच्चय की व्याख्या करने की दूसरी विधि में हम उसके अवयवों की व्याख्या उन सभी में निहित एक गुण के द्वारा करते हैं। उदाहरण के लिए, आसमान में सभी तारों के समुच्चय S पर विचार कीजिए। यहाँ सर्वनिष्ठ गुण है कि इनमें से प्रत्येक एक तारा है। इसलिए, हम इसे

S = {s, जहाँ s आसमान में एक तारा है} के रूप में लिख सकते हैं।

औपचारिक रूप से गणित में हम इसे $S = \{s \mid s$ आसमान में एक तारा है$\}$ लिखते हैं। s के बाद दी गई खड़ी रेखा 'जिसके लिए' या 'जिससे कि' व्यक्त करती है। (कुछ लेखक 'जिसके लिए' या 'जिससे कि' के लिए, '|' के स्थान पर ':' का प्रयोग करते हैं।)

अब, उन सभी प्राकृत संख्याओं के समुच्चय T पर विचार कीजिए, जो 5 के गुणज हैं। इस समुच्चय को

$T = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ और x, 5 का एक गुणज है$\}$

के रूप में लिखा जा सकता है। यह व्यक्त करता है कि T उन सभी x का समुच्चय है जहां x एक प्राकृत संख्या है तथा x, 5 का एक गुणज है। हम इसे एक थोड़े संक्षिप्त रूप में $T = \{x \in \mathbb{N} \mid$ x, 5 का एक गुणज है$\}$ भी लिख सकते हैं।

समुच्चय की व्याख्या करने की यह विधि **गुण विधि (property method)** कहलाती है।

कुछ स्थितियों में हम दिए गए समुच्चय को निरूपित करने के लिए इनमें से किसी भी विधि का प्रयोग कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, उपरोक्त समुच्चय T को सूचीयन विधि द्वारा $T = \{5, 10, 15, ...\}$ के रूप में लिखा जा सकता है। इसी तरह, 10 से छोटी सभी प्राकृत संख्याओं के समुच्चय E की निम्नलिखित रूपों में व्याख्या की जा सकती है :

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (सूचीयन विधि द्वारा)

$E = \{x \mid x,$ 10 से छोटी एक प्राकृत संख्या है$\}$
$E = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10\}$
$E = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ और $0 < x < 10\}$
} (गुण विधि द्वारा)

समुच्चय के लिए गुण विधि केवल तभी उपयोग की जा सकती है, जब उसके **सभी अवयवों** में कम से कम एक गुण विद्यमान हो।

परंतु, कभी-कभी एक समुच्चय को दोनों विधियों से निरूपित करना कठिन होता है। उदाहरणार्थ, आसमान में तारों के समुच्चय को लीजिए। आप इसे सूची विधि से किस प्रकार निरूपित करेंगे?

इसी तरह, तीन अवयवों के संग्रह {कोची, 5, π} पर विचार कीजिए। पहले तो, क्या यह एक समुच्चय है? चूंकि यह तीन वस्तुओं का एक सुपरिभाषित संग्रह है, इसलिए यह एक समुच्चय है। अतः, आप इस समुच्चय को गुण विधि द्वारा किस प्रकार निरूपित करेंगे? इन तीनों वस्तुओं में, इसके अतिरिक्त कि ये दिए हुए समुच्चय के अवयव हैं, कोई सर्वनिष्ठ गुण प्रतीत नहीं होता। इसलिए, गुण विधि यहाँ लागू नहीं कर सकते।

अब, उपरोक्त दोनों विधियों से निरूपित समुच्चय E पर विचार कीजिए। सहज रूप से आप देख सकते हैं कि ये दोनों समुच्चय एक ही हैं। इसे औपचारिक रूप में हम कैसे कहें?

परिभाषा : दो समुच्चय S और T **समान** कहलाते हैं यदि और केवल यदि S का प्रत्येक अवयव T का अवयव है तथा T का प्रत्येक अवयव S का अवयव है। इसे हम **S = T** से व्यक्त करते हैं।

अतः, यदि $A = \{1, 2, 3, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ और $C = \{2, 1, 3\}$ हैं, तो क्या $A = B$ और $B = C$ हैं? इन दोनों प्रश्नों का उत्तर 'हाँ' है, क्योंकि तीनों समुच्चयों में वही तीन अवयव हैं।

इसके आधार पर, हम निम्नलिखित टिप्पणियों पर पहुँचते हैं।

टिप्पणी 1: समुच्चय में अवयवों को लिखते समय, हमें उन्हें दोहराने से कोई लाभ नहीं मिलता। इसलिए, परंपरा यह है कि हम समुच्चय के किसी अवयव को दुबारा नहीं लिखते।

टिप्पणी 2: किसी समुच्चय में लिखे गए अवयवों के क्रम को बदलने से समुच्चय नहीं बदलता।

टिप्पणी 3: एक ही समुच्चय को परिभाषित करने के लिए अनेक गुण भी हो सकते हैं। उदाहरणार्थ, समुच्चय $\{2\}$ को गुण विधि द्वारा $\{x \mid 3x - 1 = 5\}$ या $\{x \mid x$ एक सम अभाज्य संख्या है$\}$ लिख सकते हैं।

अब आप निम्नलिखित प्रश्नों को करें।

E4) यदि संभव है, तो निम्नलिखित समुच्चयों की सूचीयन विधि द्वारा व्याख्या कीजिए :

i) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x$ अधिकतम ऋणात्मक पूर्णांक है$\}$

ii) $\{x \in \mathbb{Z} \mid 3x - 5 \leq 19\}$

iii) हिन्दी वर्णमाला के सभी अक्षरों का समुच्चय।

E5) यदि संभव है, तो निम्नलिखित समुच्चयों की गुण विधि द्वारा व्याख्या कीजिए :

i) $\{1, 4, 9, 16, ...\}$

ii) {इन्दिरा गाँधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय, π, 100^{100}}

iii) $\emptyset$

iv) {सितम्बर, अप्रैल, जून, नवम्बर}

E6) जाँच कीजिए कि $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 9\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 9\}$ है या नहीं।

आइए अब समुच्चयों के वर्गीकरण की एक विधि पर विचार करें, जो एक अर्थ में उनकी 'माप' पर निर्भर करती है।

कलन पाठ्यक्रम में भरती होने वाले इग्नू (IGNOU) के विद्यार्थियों के समुच्चय S पर विचार कीजिए। आपके हिसाब से इस समुच्चय में कितने अवयव हैं? इसमें 10000 अवयव तक हो सकते हैं। तो इस समुच्चय में परिमित संख्या में सदस्य हैं। इसी प्रकार $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x + 1 = 0\}$ में दो अवयव हैं, और इसीलिए यह परिमित है।

अब समुच्चय $\mathbb{Z}$ पर विचार कीजिए। क्या इसमें सदस्यों की संख्या परिमित है? किसी भी धनात्मक पूर्णांक n के लिए, आप सदैव पूर्णांक $n + 1$ ज्ञात कर सकते हैं (अथवा किसी भी ऋणात्मक पूर्णांक n के लिए आप $n - 1$ ज्ञात कर सकते हैं)। इसका अर्थ यह है कि हम जितने पूर्णांक ज्ञात कर सकते हैं उनका कोई अंत नहीं है। इसलिए, इस समुच्चय के सभी अवयवों की गिनती करना संभव नहीं है। यानी, इसमें अवयवों की संख्या परिमित नहीं है।

ये उदाहरण हमें निम्नलिखित परिभाषाओं की ओर ले जाते हैं।

परिभाषाएँ: i) परिमित संख्या में अवयवों वाला अरिक्त समुच्चय **परिमित (finite) समुच्चय** कहलाता है। एक समुच्चय जो परिमित न हो **अनंत (infinite) समुच्चय** कहलाता है।

ii) एक परिमित समुच्चय A में अवयवों की संख्या उस समुच्चय A का **गणनांक (cardinality)** कहलाती है, तथा इसे $|A|$ अथवा **card (A)** द्वारा व्यक्त किया जाता है। [हम अनंत समुच्चयों के गणनांक के बारे में बाद में बात करेंगे।]

iii) केवल एक ही अवयव वाला समुच्चय **एकल (singleton)** कहलाता है।

गणनांक के बारे में, अब एक महत्त्वपूर्ण बात।

टिप्पणी 4: परंपरा के अनुसार, हम **रिक्त समुच्चय को शून्य गणनांक वाला परिमित समुच्चय मानते हैं।**

परिमित समुच्चय का एक उदाहरण आसमान में तारों का समुच्चय है। क्या आप इससे सहमत हैं? यह ज़रुर है कि यदि आप उन्हें गिनने की कोशिश करें, तो ये बहुत अधिक प्रतीत होते हैं। परंतु, वर्तमान युग के खगोलशास्त्रियों के अनुसार इन्हें गिना जा सकता है, तथा इनकी संख्या लगभग 1000 अरब है!

परिमित समुच्चय का एक अन्य उदाहरण $\{\emptyset, -\sqrt{2}, \text{इग्नू}\}$ है, जिसकी गणनांक 3 है। दूसरी ओर, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ सभी अनंत समुच्चय हैं।

टिप्पणी 5: ध्यान दीजिए कि, उदाहरण के लिए, समुच्चय $\{0.3\}$ एकल है और यह संख्या 0.3 के बराबर नहीं हैं। किसी भी वस्तु x के लिए, **x और {x} में अंतर होता है।** वास्तव में $x \in \{x\}$:

अब आप कुछ प्रश्न करने का प्रयास करें।

E7) निम्नलिखित समुच्चयों में से कौन से अनंत हैं? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।

i) दिए हुए पानी के एक ड्रम में पानी के चम्मचों की संख्या।

ii) $\{x + 3 \mid x \in \mathbb{Q}\}$

iii) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$

iv) $\{\mathbb{N}\}$

v) वृत्त पर स्थित बिंदुओं का समुच्चय।

vi) $\emptyset$.

E8) निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य हैं? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

i) $\{\mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

ii) $\{\emptyset\}$ एक एकल है।

अब, आप समुच्चयों $\mathbb{N}$ और $\mathbb{Z}$ के साथ कार्य करते रहे हैं। आपने ध्यान दिया होगा कि $\mathbb{N}$ का प्रत्येक अवयव $\mathbb{Z}$ का एक अवयव है, परंतु इसका विलोम सत्य नहीं है। क्या अन्य समुच्चयों में भी इसी प्रकार के संबंध हैं? आइए देखें।

1.3 उपसमुच्चय

दो समुच्चयों A और B पर विचार कीजिए, जहाँ

A = इग्नू के सभी विद्यार्थियों का समुच्चय तथा

B = इग्नू की सभी महिला विद्यार्थियों का समुच्चय।

अब, इग्नू की प्रत्येक महिला विद्यार्थी निश्चित रूप से इग्नू की विद्यार्थी हैं। अतः, B का प्रत्येक अवयव A का भी अवयव है। ऐसी स्थिति में, हम कहते हैं कि B, A में आविष्ठ (contained) हैं।

निस्संदेह, इग्नू में पुरुष विद्यार्थी भी हैं। इसलिए, A में कम से कम एक अवयव x है जहां x, B का अवयव नहीं है। गणितीय रूप से, इसे हम निम्नलिखित रूप में लिखते हैं :

$\exists\, x \in A$ जिसके लिए $x \notin B$.

'$\exists$', 'का अस्तित्व है' को व्यक्त करता है।

इसे पढ़ा जाता है : A में ऐसे x का अस्तित्व है जिसके लिए x, B का अवयव नहीं है।

तो, B का प्रत्येक अवयव A का एक अवयव है, परंतु A में कुछ और अवयव भी हैं। इस स्थिति में हम कहते हैं कि B **उचित रूप से** (properly) A **में आविष्ट** है। अब, क्या आप सहमत होंगे कि $\mathbb{N}$ उचित रूप से $\mathbb{Z}$ में आविष्ट है? इन बातों से अब हम निम्नलिखित परिभाषाओं पर पहुंचते हैं।

परिभाषाएँ :

i) एक समुच्चय A किसी समुच्चय B का एक **उपसमुच्चय (subset)** कहलाता है, यदि A का प्रत्येक अवयव B में हो, तथा हम इस तथ्य को $\mathbf{A \subseteq B}$ द्वारा व्यक्त करते हैं। इस स्थिति में, हम यह भी कहते हैं कि **A, B में आविष्ट है** या **B, A को आविष्ट करता है,** जिसे $\mathbf{B \supseteq A}$ द्वारा व्यक्त करते हैं। यहाँ, हम यह भी कहते हैं कि B, A का **अधिसमुच्चय (superset)** है।

ii) यदि $A \subseteq B$ तथा $\exists\, y \in B$ जिससे कि $y \notin A$, तो हम कहते हैं कि A, B का एक **उचित उपसमुच्चय (proper subset)** है (या A उचित रूप से B में आविष्ट है)। हम इसे $\mathbf{A \subset B}$ या $\mathbf{A \subsetneq B}$ द्वारा व्यक्त करते हैं।

iii) यदि X और Y दो ऐसे समुच्चय हैं कि X का एक अवयव x है, जो B में नहीं है, तो हम कहते हैं कि **X, Y में आविष्ट नहीं है।** हम इस तथ्य को $\mathbf{X \not\subseteq Y}$ द्वारा व्यक्त करते हैं। अतः, $X \not\subseteq Y$ का अर्थ है कि $\exists\, x \in X$ जिसके लिए $x \notin Y$ है।

आइए जो हमने अभी परिभाषित किया है, उनके कुछ उदाहरणों पर दृष्टि डालें।

उदाहरण 1: समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ पर विचार कीजिए। क्या $A \subseteq A$ है? क्या $A \subsetneq A$ है? अपने उत्तरों के कारण दीजिए।

हल : चूंकि A का प्रत्येक अवयव निश्चित रूप से A में है, इसलिए हम इस नतीजे पर पहुंचते हैं कि $A \subseteq A$ है।

साथ ही, A का कोई भी अवयव ऐसा नहीं हो सकता जो A में न हो। इसलिए, A स्वयं का एक उचित समुच्चय नहीं हो सकता, अर्थात् $A \subsetneq A$ नहीं है।

***

इस उदाहरण से, हम निम्नलिखित टिप्पणी पर पहुँचते हैं।

टिप्पणी 6: किसी भी समुच्चय A के लिए, आप इसी तर्क का प्रयोग करते हुए दर्शा सकते हैं कि $A \subseteq A$ है। इस प्रकार, **कोई भी समुच्चय स्वयं अपना उपसमुच्चय होता है।** साथ ही, **कोई भी समुच्चय स्वयं अपना उचित उपसमुच्चय नहीं होता।** (क्यों?)

अब निम्नलिखित उदाहरण पर विचार कीजिए:

समुच्चयों A और B के ऐसे अनंततः अनेक युग्म हैं जिनके लिए $A \not\subseteq B$ है तथा $B \not\subseteq A$ है।

उदाहरण 2: दो ऐसे समुच्चयों का उदाहरण दीजिए जिनमें से कोई भी दूसरे का उपसमुच्चय नहीं हो।

हल : समुच्चयों $A = \{1, -1\}$ और $B = \{0, 1, 2\}$ पर विचार कीजिए। क्या $A \subseteq B$ है? हम देखते हैं कि $(-1) \in A$, परंतु $(-1) \notin B$. इसलिए, $A \not\subseteq B$. साथ ही, $B \not\subseteq A$. (क्यों?)

***

ध्यान दीजिए कि दो समुच्चयों A और B के दिए रहने पर, निम्नलिखित संभावनाओं में से एक और केवल एक ही सत्य है।

i) $A \subseteq B$, या

ii) $A \not\subseteq B$.

किसी भी समुच्चय A के लिए, $\phi \subseteq A$.

इस तथ्य का उपयोग करते हुए, हम दर्शा सकते हैं कि **रिक्त समुच्चय ϕ प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय है।**

अब, आइए कुछ क्षण के लिए, हम टिप्पणी 1 से पहले दिए बिंदु पर वापस आ जाएं, जहाँ हमने समान समुच्चयों को परिभाषित किया है। आइए देखें कि उपसमुच्चयों को लेते हुए इसका क्या अर्थ है।

निम्न समुच्चयों पर विचार कीजिए।

A = 10 से छोटी सम प्राकृत संख्याओं का समुच्चय, तथा

$B = \{2, 4, 6, 8\}$

'$\Leftrightarrow$', 'निहित है और से निहित है' या 'के समतुल्य है' को व्यक्त करता है।

A का प्रत्येक सदस्य B का भी सदस्य है, तथा इसका विलोम भी सत्य है। अर्थात्, $A \subseteq B$ और $B \subseteq A$. परंतु, हमारी परिभाषा से, हम यह भी देखते हैं कि $A = B$. अतः, हम प्राप्त करते हैं कि $A = B$ और एक साथ ($A \subseteq B$ और $B \subseteq A$) समतुल्य हैं। हम इसे **$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B$ और $B \subseteq A)$** से दर्शाते हैं।

टिप्पणी 7: किन्हीं दो समुच्चयों A और B के लिए, $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ और $B \subseteq A$.

अब निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए। इनको करते समय, याद रखिए कि किन्हीं दो समुच्चयों A और B के लिए, $A \subseteq B$ दर्शाने के लिए, आपको यह दर्शाना चाहिए कि यदि $a \in A$ है, तो $a \in B$, अर्थात् $a \in A \Rightarrow a \in B$.

'$\Rightarrow$', 'निहित है' को व्यक्त करता है।

साथ ही, **$A \not\subseteq B$ दर्शाने के लिए**, आपको यह दर्शाना चाहिए कि A में कम से कम एक अवयव ऐसा है जो B में नहीं है, अर्थात् $\exists\, x \in A$ जिसके लिए $x \notin B$ है।

E9) {1, 2, 3} के सभी उपसमुच्चयों को लिखिए। इनमें से कितनों में अवयवों की संख्या निम्नलिखित है?

i) कोई अवयव नहीं ii) एक अवयव iii) दो अवयव

iv) तीन अवयव v) तीन से अधिक अवयव

समुच्चय A के सभी उपसमुच्चयों का समुच्चय A का **घात समुच्चय** (power set) कहलाता है।

E10) दर्शाइए कि यदि $A \subseteq B$ और $B \subseteq C$, तो $A \subseteq C$. (इससे यह दर्शित होता है कि '$\subseteq$' एक **संक्रामक (transitive) संबंध** है, जैसा कि आप इकाई 2 में देखेंगे।)

E11) समुच्चय {इग्नू, 0.7, महात्मा गाँधी} का एक अधिसमुच्चय लिखिए।

अभी तक आपने समुच्चयों की व्याख्या करने की दो विधियाँ देखी हैं। समुच्चयों और उनके बीच संबंधों को निरूपित करने की एक अन्य विधि भी है। इसी के बारे में, हम अगले भाग में चर्चा करेंगे।

1.4 वेन आरेख



चित्र 2: जॉन वेन (1834-1923)

किसी स्थिति को यदि हम चित्रीय रूप से निरूपित कर पाते हैं, तो उसे प्रायः समझना आसान हो जाता है। इसी तरह समुच्चयों और उनमें संबंधों से जुड़े अनेक स्थितियों की अपनी समझ को आसान करने के लिए, हम उन्हें सरल आरेखों से निरूपित करते हैं, जो **वेन आरेख (Venn diagrams)** कहलाते हैं। एक अंग्रेज़ तर्कशास्त्री, जॉन वेन, ने इनका आविष्कार किया था। एक वेन आरेख को खींचने के लिए, आपको एक समष्टीय समुच्चय के बारे में जानना आवश्यक है।

दो या अधिक समुच्चयों से संबद्ध एक स्थिति पर विचार कीजिए, उदाहरणार्थ महिला फिल्म निर्देशकों का समुच्चय D तथा महिला वैज्ञानिकों का समुच्चय S. तब, हम पहले जिन समुच्चयों की बात कर रहे हैं, उन सभी का एक सुविधाजनक अधिसमुच्चय लेते हैं। उदाहरणार्थ, यहाँ हम इसे सभी महिलाओं के समुच्चय के रूप में ले सकते हैं। हम इस अधिसमुच्चय को **समष्टीय समुच्चय (universal set)** कहते हैं, तथा इसे **U** से व्यक्त करते हैं। इस प्रकार, यहाँ हमारा समष्टीय समुच्चय U सभी महिलाओं का समुच्चय है। यह इसलिए है, क्योंकि U समुच्चय D तथा साथ ही S को आविष्ट करता है। हम U को सभी मानव प्राणियों का समुच्चय भी ले सकते थे, जो ज़्यादा बड़ा अधिसमुच्चय होता।

समष्टीय समुच्चय अद्वितीय नहीं होता।

एक अन्य स्थिति पर विचार कीजिए, जिसमें पूर्णांकों और परिमेय संख्याओं के समुच्चय संबद्ध हैं। यहाँ, हम वास्तविक संख्याओं के समुच्चय $\mathbb{C}$ को अपना समष्टीय समुच्चय ले सकते हैं। हम $\mathbb{Q}$ को भी अपना समष्टीय समुच्चय ले सकते हैं, क्योंकि यह $\mathbb{N}$ और $\mathbb{Q}$ दोनों को आविष्ट करता है।

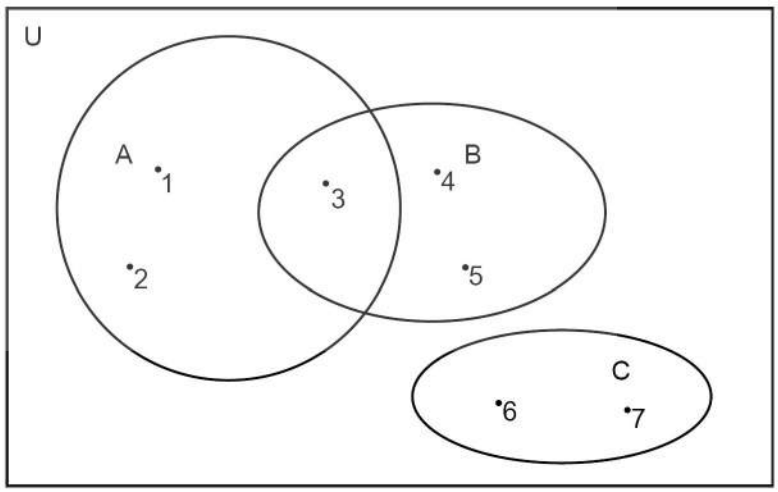
टिप्पणी 8: जैसा कि आप देख चुके हैं, एक दी हुई स्थिति में एक समष्टीय समुच्चय चुनने के लिए, हमारे पास अनेक संभावनाएँ होती हैं। प्रायः, हम ऐसा समष्टीय समुच्चय लेते हैं, जो सभी विचाराधीन समुच्चयों को अंतर्विष्ट करने के लिए ठीक उतना ही बड़ा हो।

अब, आइए एक उदाहरण की सहायता से देखें कि एक वेन आरेख कैसे खींचा जाता है। जो अभी हमने कहा है, उसे स्पष्ट करने के लिए, निम्नलिखित उदाहरण पर विचार कीजिए।

उदाहरण 3: समुच्चयों $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ और $C = \{6, 7\}$ को, $U = \{1, 2, ..., 10\}$ के साथ, निरूपित करने के लिए एक वेन आरेख खींचिए।

हल: आइए A को एक वृत्त से, B को एक दीर्घवृत्त से तथा C को एक अन्य बंद क्षेत्र से व्यक्त करें। बिंदु 8, 9 और 10 समुच्चयों A, B या C में से किसी में भी स्थित नहीं हैं, परंतु ये U में हैं। ध्यान दीजिए कि 3, A और B दोनों का अवयव है। इसलिए, यह वृत्त में स्थित है तथा दीर्घवृत्त में भी स्थित है। अतः, वृत्त और दीर्घवृत्त एक दूसरे को काटते हैं। साथ ही, ध्यान दीजिए कि A और C में कोई अवयव उभयनिष्ठ नहीं है। इसलिए, इनको निरूपित करने वाले क्षेत्र परस्पर नहीं काटते। इसी कारण, B और C को निरूपित करने वाले क्षेत्र परस्पर नहीं काटते। हम समष्टीय समुच्चय U को एक आयत से निरूपित करते हैं, जो इन सभी क्षेत्रों और बिंदुओं को परिबद्ध करता है, जैसा कि चित्र 3 में दर्शाया गया है।

ध्यान दीजिए कि चित्र 3 में A और C को वृत्तों के आकार में या अन्य आकार में भी निरूपित कर सकते थे।

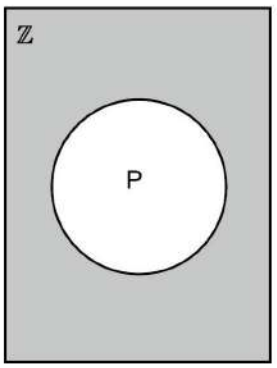


चित्र 3: एक वेन आरेख

***

टिप्पणी 9: ध्यान दीजिए कि वेन आरेख में जो क्षेत्र बनाए जाते हैं, उनका क्षेत्रफल संबंधित समुच्चयों के गणनांकों को वास्तविक रूप से निरूपित नहीं करते हैं। उदाहरणार्थ, चित्र 3 में A और B को निरूपित करने वाले क्षेत्रों के क्षेत्रफल बराबर नहीं हैं, जबकि A और B में अवयवों की संख्या एक ही है।

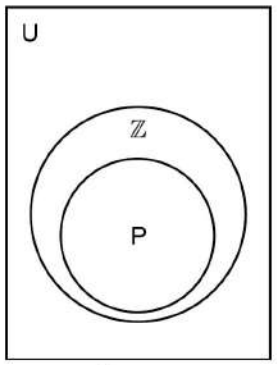
अतः, व्यापक रूप में, हम वेन आरेख कैसे खींचेंगे? मान लीजिए कि हम विभिन्न समुच्चयों A, B, C, ... पर चर्चा कर रहे हैं। ये परिमित या अपरिमित हो सकते हैं। हम एक समष्टीय समुच्चय U चुनते हैं। अतः, $A \subseteq U, B \subseteq U, C \subseteq U$, इत्यादि। हम वेन आरेख में इस स्थिति को इस प्रकार दर्शाते हैं :



चित्र 4

एक आयत का अंदर का भाग U को निरूपित करता है। समुच्चय A, B, C, इत्यादि को बंद क्षेत्रों के अंदर के हिस्सों से निरूपित करते हैं, जो पूरी तरह U को दर्शाने वाले आयत के अंदर होते हैं। ये क्षेत्र वृत्त, दीर्घवृत्त या अन्य किसी आकार के रूप में हो सकते हैं। साथ ही, हम यह मान कर चलते हैं **कि वेन आरेख में कोई भी परिबद्ध क्षेत्रफल एक अरिक्त समुच्चय निरूपित करता है।**

अब, स्थिति $P = \{2, 3, 5, 7, 11, ...\} \subseteq \mathbb{Z}$ के संगत वेन आरेख किस प्रकार का दिखाई देगा? चलो हम $\mathbb{Z}$ को ही अपना समष्टीय समुच्चय ले सकते हैं। तब, चित्र 4 में दिया आरेख जैसा वेन आरेख होगा। यदि हम एक अन्य समुच्चय U को अपना समष्टीय समुच्चय लें जो $\mathbb{Z}$ को उचित रूप में आविष्ट कर लेता है, जैसा कि $\mathbb{Q}$, तो हमें चित्र 5 जैसा वेन आरेख प्राप्त होगा। अतः, दोनों ही वेन आरेख अभाज्य संख्याओं के समुच्चय और $\mathbb{Z}$ के बीच के संबंध को निरूपित करते हैं।



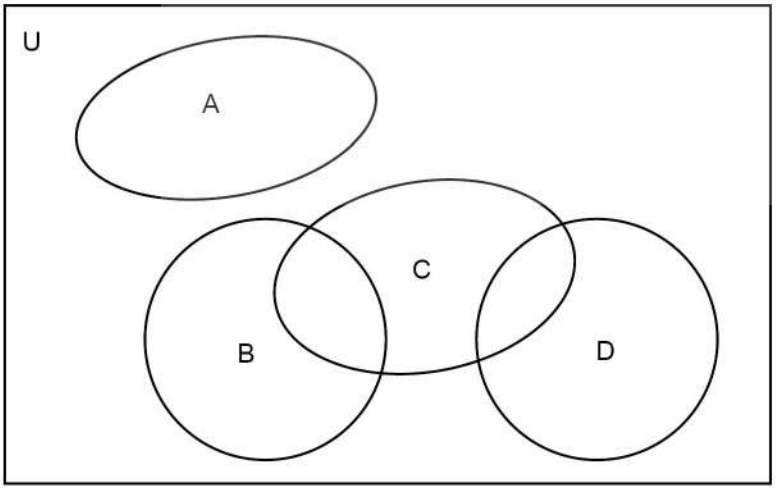
चित्र 5

अब इन प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E12) आप निम्नलिखित स्थिति को एक वेन आरेख में किस प्रकार निरूपित करेंगे?
सभी आयतों का समुच्चय, सभी वर्गों का समुच्चय तथा सभी समांतर चतुर्भुजों का समुच्चय।

E13) तीन समुच्चयों A, B और C को दर्शाने के लिए एक वेन आरेख खींचिए, जहाँ A और C में कुछ उभयनिष्ठ अवयव हैं, B अनंत है तथा C परिमित है।

अतः, एक वेन आरेख का क्या फ़ायदा होता है? इसे समझने के लिए नीचे दिए आरेख पर विचार कीजिए।



चित्र 6

एक ही नज़र में, आप स्थिति को मोटे तौर पर जान जाते हैं – यहाँ चार समुच्चय A, B, C और D हैं, जिनमें से A का अन्य तीनों के साथ कोई उभयनिष्ठ अवयव नहीं है,

B और C में उभयनिष्ठ अवयव हैं, C और D में उभयनिष्ठ अवयव हैं, B और D में कोई उभयनिष्ठ अवयव नहीं हैं। इस अकेले आरेख से हमें इतनी अधिक सूचना प्राप्त हो जाती है। इन आरेखों की यही उपयोगिता है।

अब जबकि आप वेन आरेखों से परिचित हो गए हैं, आइए उन विभिन्न विधियों पर विचार करें, जिनके द्वारा हम दो या अधिक दिए हुए समुच्चयों से नए समुच्चयों की रचना कर सकते हैं।

1.5 समुच्चयों पर संक्रियाएँ

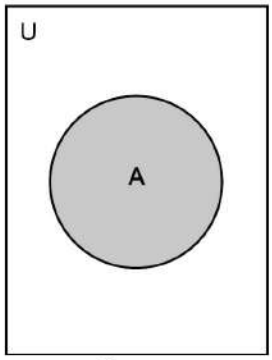
दो समुच्चयों $A = \{-1, 1\}$ और $B = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$ पर विचार कीजिए। हम इनसे अनेक विधियों द्वारा अन्य समुच्चय प्राप्त कर सकते हैं, उदाहरणार्थ, A के उन अवयवों को लेकर जो B में नहीं हैं, अथवा A और B दोनों में उभयनिष्ठ अवयवों को लेकर, इत्यादि। ये इन समुच्चयों पर संक्रियाओं के उदाहरण हैं। इस भाग में, हम समुच्चयों पर चार ऐसी संक्रियाओं की चर्चा करेंगे जिनका उपयोग आप बहुत बार करते रहेंगे।

1.5.1 पूरकीकरण

उपरोक्त दोनों समुच्चयों A और B पर विचार कीजिए। B में ऐसे अवयव हैं, जो A में नहीं हैं, जैसे $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, इत्यादि। ये अवयव समुच्चय $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$ बनाते हैं। इसी प्रकार, A में ऐसे अवयव हैं, जो B में नहीं हैं, जो समुच्चय $\{-1\}$ बनाते हैं। दिए हुए दो समुच्चयों से तीसरा समुच्चय प्राप्त करने की यह विधि नीचे परिभाषित की गई है।

परिभाषा : मान लीजिए कि A और B दो समुच्चय हैं। **B में A का पूरक (complement)**, जिसे $B \setminus A$ द्वारा व्यक्त करते हैं, तथा **'B पूरक A'** पढ़ते हैं, B के उन अवयवों का समुच्चय है जो A के अवयव नहीं हैं, अर्थात् $\{x \in B \mid x \notin A\}$ है।

इसी प्रकार, $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$.



चित्र 7

उस विशिष्ट स्थिति में, जब B समष्टीय समुच्चय U है, $B \setminus A, U \setminus A$ होता है। यह समुच्चय **A का पूरक** कहलाता है तथा इसे A' या A^c द्वारा व्यक्त किया जाता है।

यदि आप चित्र 7 को देखें, तो वेन आरेख में अछायांकित भाग $A^c = U \setminus A$ निरूपित करता है। वास्तव में, यह आरेख हमें यह भी दर्शाता है कि $x \in A^c$ यदि और केवल यदि $x \notin A$. इसी प्रकार, चित्र 4 में अछायांकित क्षेत्र समुच्चय $P = \{2, 3, 5, 7, ...\}$ को निरूपित करता है तथा छायांकित क्षेत्र $\mathbb{Z} \setminus P$ को निरूपित करता है।

टिप्पणी 10: ध्यान दीजिए कि **यदि $A \subset B$ है, तो $A \setminus B = \emptyset$** है, क्योंकि A का कोई ऐसा अवयव नहीं है जो B का अवयव नहीं है।

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E14) i) निम्नलिखित समुच्चयों को एक वेन आरेख में निरूपित कीजिए :
सभी अभाज्य संख्याओं का समुच्चय P, समुच्चय $\mathbb{Z}$ तथा समुच्चय $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

ii) क्या समुच्चय $\mathbb{Z} \setminus P$ परिमित है या अनंत? क्या समुच्चय $P \setminus \mathbb{Z}$ परिमित है? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।

E15) मान लीजिए कि A कोई समुच्चय है। समुच्चयों $A \setminus A$, $\emptyset \setminus A$, $A \setminus \emptyset$ और $(A^c)^c$ को लिखिए।

E16) समुच्चयों A और B का एक ऐसा उदाहरण दीजिए जिनके लिए

i) $A \setminus B \not\subset B$ हो।

ii) $A \setminus B \subset B$ हो।

$B \setminus A \subseteq B$

अब, आइए समुच्चयों पर एक अन्य संक्रिया पर विचार करें, जिसे दो या अधिक समुच्चयों का **प्रतिच्छेदन** कहा जाता है।

1.5.2 प्रतिच्छेदन

आइए $\mathbb{N}$ और $\{0, 1\}$ पर विचार करें। क्या इन दोनों समुच्चयों में कोई अवयव उभयनिष्ठ हैं। उदाहरणार्थ, 1 दोनों का अवयव है। वास्तव में केवल यही अवयव दोनों में उभयनिष्ठ है। इस प्रकार, $\{1\}$ समुच्चयों $\mathbb{N}$ और $\{0, 1\}$ का प्रतिच्छेदन है, नीचे दी परिभाषा के अनुसार।

परिभाषा : मान लीजिए कि एक समष्टीय समुच्चय U के दो उपसमुच्चय A और B हैं। **A और B का प्रतिच्छेदन (intersection)** U के उन अवयवों का समुच्चय होगा जो A और B दोनों में उभयनिष्ठ हैं। इसे $A \cap B$ द्वारा व्यक्त किया जाता है तथा 'A प्रतिच्छेदन B' पढ़ा जाता है।

इस प्रकार, $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ और } x \in B\}$.

इस संक्रिया को और आगे स्पष्ट करने के लिए, निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार कीजिए।

उदाहरण 4: मान लीजिए कि S अभाज्य संख्याओं का समुच्चय है तथा T समुच्चय $\{x \in \mathbb{Z} \mid x, 10 \text{ को विभाजित करता है}\}$ है। $S \cap T$ क्या होगा?

हल : हम $\mathbb{Z}$ को अपना समष्टीय समुच्चय लेते हैं। तब,

$S \cap T$ = उन पुर्णांकों का समुच्चय जो अभाज्य संख्याएँ हैं तथा 10 के विभाजक हैं।
$= \{2, 5\}$.

***

उदाहरण 5: मान लीजिए कि A बिहार में रहने वाले सभी मानव प्राणियों का समुच्चय है, B सभी महिलाओं का समुच्चय है तथा C भारत के सभी शहरों का समुच्चय है। $A \cap B$ और $A \cap C$ की व्याख्या कीजिए।

हल : हम U को सभी मानव प्राणियों तथा भारत के सभी शहरों का समुच्चय ले सकते हैं। तब, $A \cap B$ बिहार में रहने वाली सभी महिलाओं का समुच्चय है तथा $A \cap C$ रिक्त समुच्चय है।

***

अब आप निम्नलिखित प्रश्न कर सकते हैं।

E17) समुच्चय $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z}$ और $\mathbb{Z} \cap \phi$ प्राप्त कीजिए। प्रत्येक स्थिति में, स्पष्ट रूप से लिखिए कि U क्या है।

E17 को हल करते समय, आपने प्रतिच्छेदन संक्रिया के बारे में कुछ तथ्यों पर ध्यान दिया होगा। हम इन्हें निम्नलिखित प्रमेय में स्पष्ट रूप से लिख रहे हैं। आप इनमें से कुछ की उपपत्तियों का अध्ययन करेंगे, तथा फिर अन्य को स्वयं ही सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 1: एक समष्टीय समुच्चय U में किन्हीं दो समुच्चयों A और B के लिए,

i) $A \cap B \subseteq A$

ii) $A \cap B \subseteq B$

iii) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$

iv) $A \cap A = A$

v) $A \cap \phi = \phi = B \cap \phi$

vi) $A \cap U = A, B \cap U = B$

vii) $A \cap B = B \cap A$ (अर्थात्, समुच्चयों पर प्रतिच्छेदन की संक्रिया क्रमविनिमेय है)

viii) $A \setminus B = A \cap B^c$

ix) यदि U का कोई उपसमुच्चय C ऐसा है कि $C \subseteq A$ और $C \subseteq B$ तो $C \subseteq A \cap B$ होगा।

उपपत्ति : हम (i) और (ii) को सिद्ध करेंगे तथा अन्य को आप के द्वारा सिद्ध करने के लिए छोड़ देंगे (देखिए E18)। इसलिए, इन तथ्यों को सिद्ध करने के लिए, हमें यह दर्शाने की आवश्यकता है कि $A \cap B$ का प्रत्येक अवयव A का अवयव है तथा B का भी अवयव है। इसके लिए मान लीजिए कि $x \in A \cap B$. तब परिभाषा से, $x \in A$ और $x \in B$ है।

यह $A \cap B$ के किसी भी अवयव के लिए सत्य है।

इस प्रकार, $A \cap B \subseteq A$ और $A \cap B \subseteq B$ है। अतः, हमने (i) और (ii) दोनों को सिद्ध कर लिया है। ■

टिप्पणी 11: जब तक कि हम अपने समष्टीय समुच्चय के बारे में स्पष्ट नहीं हैं, प्रतिच्छेदन की संक्रिया अर्थहीन है। परंतु, हम प्रायः समष्टीय समुच्चय को स्पष्ट से नहीं लिखते हैं तथा यह मान लेते हैं कि इसे समझ लिया गया है।

साथ ही, इस पर भी ध्यान दीजिए कि, उदाहरणार्थ, उदाहरण 4 में यदि हमने समष्टीय समुच्चय $\mathbb{Q}$ लिया होता, तो भी हमें $S \cap T = \{2, 5\}$ प्राप्त होता है। इस प्रकार, समष्टीय

समुच्चय के चुनाव से समुच्चय $S \cap T$ में कोई परिवर्तन नहीं होता। वास्तव में, दो समुच्चयों के प्रतिच्छेदन में, इन दोनों समुच्चयों के अवयव ही संबद्ध होते हैं और इसीलिए यह समष्टीय समुच्चय के चुनाव से स्वतंत्र होता है।

अब, प्रमेय 1 के (i) और (ii) का प्रयोग करते हुए, निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E18) प्रमेय 1 के (iii) – (ix) को सिद्ध कीजिए।

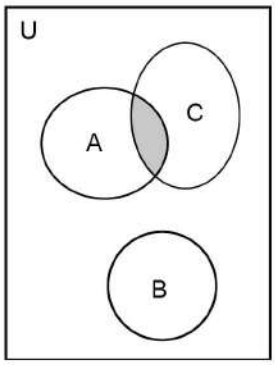
E19) क्या प्रमेय 1 (ix) सत्य रहता है, यदि हम प्रत्येक स्थान पर '$\subseteq$' को '$\subsetneq$' से बदल देते हैं? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

अब, ऋणात्मक परिमेय संख्याओं के समुच्चय $\mathbb{Q}^-$ तथा धनात्मक परिमेय संख्याओं के समुच्चय $\mathbb{Q}^+$ पर विचार कीजिए। तब, $\mathbb{Q}^- \cap \mathbb{Q}^+ = \emptyset$ है, अर्थात् इनमें कोई अवयव उभयनिष्ठ नहीं हैं। समुच्चयों का यह युग्म एक उदाहरण है उस संकल्पना की जिसे अब हम परिभाषित करेंगे।

परिभाषा : मान लीजिए A और B दो ऐसे समुच्चय हैं जिनके लिए $A \cap B = \emptyset$ है। तब, A और B को **परस्पर असंयुक्त** (या **असंयुक्त**) **(disjoint)** कहा जाता है।

उदाहरण के लिए, चित्र 7 में समुच्चय A और A^c असंयुक्त हैं। वास्तव में, किसी भी समुच्चय A के लिए, $A \cap A^c = \emptyset$ होता है। (क्यों?)

अब, आइए समुच्चयों के प्रतिच्छेदन को वेन आरेखों द्वारा निरूपित करें। चित्र 8 में छायांकित क्षेत्र समुच्चय $A \cap C$ को निरूपित करता है, जो आप देख सकते हैं कि अरिक्त है। साथ ही, ध्यान दीजिए कि A और B को निरूपित करने वाले क्षेत्र एक दूसरे की नहीं काटते हैं, अर्थात् $A \cap B = \emptyset$ है, अर्थात् A और B असंयुक्त हैं। इस आरेख से, हम यह भी देख सकते हैं कि न तो $A \subseteq C$ है और न ही $C \subseteq A$ है। आगे, $C \setminus A$ और $A \setminus C$ दोनों अरिक्त समुच्चय हैं। देखिये! एक वेन आरेख कितनी सूचना दे सकता है।



चित्र 8

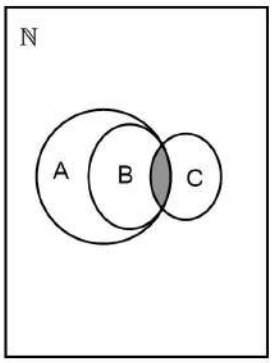
अब, एक क्षण के लिए, चित्र 4 पर वापिस जाइए। यह किस स्थिति को निरूपित करता है? यह दो समुच्चय A और B दर्शाता है जिनके लिए $A \subseteq B$. अतः, छायांकित क्षेत्र यह दर्शाता है कि $A \cap B = A$ है।

अभी तक हमने दो समुच्चयों के प्रतिच्छेदन पर विचार किया है। अब, आइए दो से अधिक समुच्चयों के प्रतिच्छेदन पर विचार करें पहले एक उदाहरण की सहायता से।

उदाहरण 6: मान लीजिए कि A, B और C क्रमशः $\mathbb{N}$ में 3, 6 और 10 के गुणजों के समुच्चय हैं। $A \cap B \cap C$ प्राप्त कीजिए। साथ ही, इन सभी समुच्चयों को निरूपित करने के लिए एक वेन आरेख भी खींचिए।

हल : यहाँ $A = \{3x \mid x \in \mathbb{N}\}$, $B = \{6x \mid x \in \mathbb{N}\}$ और $C = \{10x \mid x \in \mathbb{N}\}$ है।
आइए $U = \mathbb{N}$ लें।

$A \cap B \cap C$ में वे सभी प्राकृत संख्याएँ होंगी, जो इन तीनों समुच्चयों A, B और C के अवयव हैं। इस प्रकार,



चित्र 9: छायांकित क्षेत्र $A \cap B \cap C$ को निरूपित करता है।

$A \cap B \cap C = \{x \in \mathbb{N} \mid 3, 6$ और $10, x$ को विभाजित करते हैं$\}$

$= \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3a, x = 6b, x = 10c,$ किसी $a, b, c \in \mathbb{N}$ के लिए$\}$

$= \{x \in \mathbb{N} \mid 30, x$ को विभाजित करता है$\}$ (क्योंकि $30 \mid x$ यदि और केवल यदि '$3, 6$ और $10, x$ को विभाजित करते हैं').

$= \{30y \mid y \in \mathbb{N}\}$. (क्या आपने ध्यान दिया कि $3, 6$ और 10 का lcm, 30 है?)

अब चित्र 9 में दिए वेन आरेख पर विचार कीजिए, जहाँ हमने $\mathbb{N}$ में A, B, C और $A \cap B \cap C$ को दर्शाया है। यहाँ देखिए $B \subset A$ है और $A \setminus B$ समुच्चय C को प्रतिच्छेद नहीं करता है।

***

इस उदाहरण तथा प्रतिच्छेदन की आपकी समझ ने आपकी 3 और अधिक समुच्चयों के प्रतिच्छेदन की परिभाषा विकसित करने में सहायता की होगी। क्या यह उस परिभाषा से सुमेलित है, जो अब हम दे रहे हैं?

परिभाषा : एक समष्टीय समुच्चय U में **n समुच्चयों $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ के प्रतिच्छेदन** को समुच्चय $\{x \in U \mid x \in A_i \; \forall \; i = 1, 2, ..., n\}$ से परिभाषित किया जाता है। इसे $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ अथवा $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

'$\forall$', 'सभी के लिए' या 'हर एक के लिए' को व्यक्त करता है।

आइए तीन समुच्चयों के प्रतिच्छेदन से संबद्ध एक अन्य उदाहरण को देखें।

उदाहरण 7: मान लीजिए कि $S = \left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \middle| \frac{p}{q} = \frac{1}{2}\right\}$ और $T = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ है। $S \cap T \cap \mathbb{Q}$ ज्ञात कीजिए। आगे, S या T से अलग दो समुच्चय A और B ऐसे ज्ञात कीजिए जिनके लिए $A \cap B = S \cap T$.

हल: अब ध्यान दीजिए कि $S \subseteq \mathbb{Q}$ और $T \subseteq \mathbb{Q}$ है। इसलिए, $S \cap T \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \in S$ और $x \in T\} = S \cap T$ है, क्योंकि S का प्रत्येक अवयव या T का प्रत्येक अवयव पहले ही $\mathbb{Q}$ का एक अवयव है।

अब, $x \in S \cap T$ को लीजिए। क्योंकि $x \in S$, इसलिए किसी p, q के लिए, $2p = q$, $x = \frac{p}{q}$ है, अर्थात् $x = \frac{p}{2p}, p \neq 0$ है।

क्योंकि $x \in T$, इसलिए किसी $n \in \mathbb{N}$ के लिए $x = \frac{1}{n}$ है।

अतः, $\frac{p}{2p} = \frac{1}{n}$ दर्शाता है कि $n = 2$, अर्थात् $x = \frac{1}{2}$.

इसलिए, $S \cap T \cap \mathbb{Q} = S \cap T = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

अब समस्या के दुसरे भाग के लिए, हम ऐसे अनेक समुच्चय A और B ज्ञात कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{2}\right\}$ और $B = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq \frac{1}{2}\right\}$.

जाँच कीजिए कि $A \cap B = S \cap T$.

***

अब निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E20) मान लीजिए $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ और $C = \{1, 4, 7, 8\}$. $A \cap B \cap C$ निर्धारित कीजिए। इन सभी समुच्चयों को एक वेन आरेख में निरूपित कीजिए। साथ ही, सत्यापन कीजिए कि

i) $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C$,

ii) $A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C)$,

iii) $A \cap B \cap C = A \cap C \cap B$.

E21) यदि $A = \{6x \mid x \in \mathbb{N}\}$, $B = \{4x \mid x \in \mathbb{N}\}$ तथा C अभाज्य संख्याओं का समुच्चय है, तो $A \cap B \cap C$ ज्ञात कीजिए।

जो आपने E20 में दर्शाया है, वह केवल उन समुच्चयों के लिए ही सत्य नहीं है; यह किन्हीं तीन समुच्चयों A, B और C के लिए सत्य है। (i) और (ii) यह बताते हैं कि $\cap$ एक **साहचर्य (Associative)** संक्रिया है। जब हम इसे प्रमेय 1 (vii) के साथ संयोजित करते हैं, तब हम देखते हैं कि हम किन्हीं **n समुच्चयों का प्रतिच्छेदन उनमें से किन्हीं दो समुच्चयों का प्रतिच्छेदन लेकर प्राप्त कर सकते हैं।**

उदाहरणार्थ, यदि A, B, C और D समुच्चय हैं, तो

$$A \cap B \cap C \cap D = (A \cap B) \cap (C \cap D)$$
$$= (B \cap C) \cap (A \cap D), \text{ इत्यादि।}$$

इस प्रकार हम उन समुच्चयों को संयोजित करने के लिए पहले चुनते हैं जिनके प्रतिच्छेदन से हमें पूरे प्रतिच्छेदन को अधिक शीघ्रता से ज्ञात करने में सहायता मिलती है।

आइए समुच्चयों पर एक अन्य संक्रिया को देखें।

1.5.3 सम्मिलन

आइए पुंनः समुच्चय $\mathbb{N}$ और $\{0, 1\}$ पर आ जाएँ। आप देख चुके हैं कि $\mathbb{N} \setminus \{0,1\} = \{2, 3, 4,...\}$ तथा $\mathbb{N} \cap \{0, 1\} = \{1\}$. अब इस समुच्चय को लीजिए, जिसमें $\mathbb{N}$ के सभी अवयवों के साथ-साथ $\{0, 1\}$ के भी सभी अवयव हों। यह समुच्चय क्या होगा? यह $\{0, 1, 2,...\}$, अर्थात पूर्ण संख्याओं का समुच्चय **W** होगा। ध्यान दीजिए कि जब हम दोनों समुच्चयों के अवयवों को लेते हैं, तब 1 दुबारा आता है, परंतु एक समुच्चय में अवयव लिखते समय हम किसी अवयव को दुबारा नहीं लिखते हैं, जैसा कि भाग 1.2 में बताया जा चुका है।

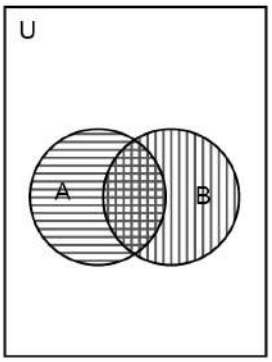
और अब, समुच्चयों $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 10\}$ और $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 10\}$ पर विचार कीजिए। उस समुच्चय को लीजिए, जिसमें A के तथा B के सभी अवयव हों, यह समुच्चय $\mathbb{R}$ होगा, क्योंकि कोई भी वास्तविक संख्या या तो 10 से छोटी होगी या उसके बराबर होगी अथवा 10 से बड़ी होगी या उसके बराबर होगी, और 10 दोनों समुच्चयों A और B में होगा।

इन उदाहरणों द्वारा हम उस संक्रिया को परिभाषित करने की ओर बढ़ रहे हैं, जिसका हमने इनमें इस्तेमाल किया।

परिभाषा: मान लीजिए कि एक समष्टीय समुच्चय U में दो समुच्चय A और B हैं। U के उन सभी अवयवों का समुच्चय, जो या तो A का भाग हो या B का भाग हो या A और B दोनों का भाग हो, A और B का **सम्मिलन (Union)** कहलाता है। इसे प्रतीकात्मक रूप में $A \cup B$ लिखा जाता है तथा 'A सम्मिलन B' पढ़ा जाता है।

इस प्रकार, $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A$ या $x \in B$ या $x \in A \cap B\}$.

परंतु आप जानते हैं कि $A \cap B \subseteq A$ होता है। इसलिए, $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$.
अंतः, $A \cup B$ में $A \cap B$ देने से अवयवों को दोहराना ही हो जाता है। तो $A \cap B$ को हटा लेते हैं, तथा $\mathbf{A \cup B = \{x \mid x \in A$ या $x \in B\}}$ लिखते हैं।



चित्र 10: रेखांकित क्षेत्र $A \cup B$ है, जिसका दुगुना रेखांकित क्षेत्र $A \cap B$ है।

इस प्रकार, उदाहरणार्थ, इस उप-भाग के प्रारंभ में आप देख चुके हैं कि
$\mathbb{N} \cup \{0, 1\} = \mathbf{W}$ और $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 10\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 10\} = \mathbb{R}$ हैं।

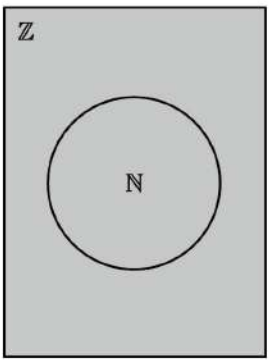
आगे बढ़ने से पहले, हम एक टिप्पणी देते हैं।

टिप्पणी 12: चंकि $A \cup B$ में A के और B के सभी अवयव आविष्ट होते हैं, इससे निष्कर्ष निकलता है कि $\mathbf{A \subseteq A \cup B}$ तथा $\mathbf{B \subseteq A \cup B}$.
वास्तव में, $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ होता है। हम इस तथ्य को चित्र 10 के अनुसार एक वेन आरेख में दर्शा सकते हैं। अब, आइए एक अन्य उदाहरण को देखें।

उदाहरण 8: $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$ ज्ञात कीजिए। इसे एक वेन आरेख में भी दर्शाइए।

हल : $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ तथा $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.
हम $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ या $x \in \mathbb{Z}\}$ ज्ञात करना चाहते हैं।
चंकि $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, इसलिए $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$. इससे हमें पता चलता है कि
$\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \{x \mid x \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$.

वेन आरेख चित्र 11 में दिया गया है जिसमें $\mathbb{Z}$ को समष्टीय समुच्चय लिया गया है।



चित्र 11: छायांकित क्षेत्र $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$, अर्थात् $\mathbb{Z}$ है।

***

उदाहरण 8 उस व्यापक तथ्य की विशेष स्थिति है जिसका अब हम कथन देकर सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 2: किन्हीं दो समुच्चयों A और B के लिए, $\mathbf{A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B}$.

उपपत्ति : यहाँ हमें दो कथन सिद्ध करने हैं।
इनमें से एक है कि यदि $A \subseteq B$, तो $A \cup B = B$ होगा।
दूसरा इसका **विलोम** है, अर्थात् यदि $A \cup B = B$, तो $A \subseteq B$ होगा।

पहले, आइए मानें कि $A \subseteq B$ है और फिर सिद्ध करें कि $A \cup B = B$.

इसके लिए, कोई $x \in A \cup B$ लीजिए।

यदि $x \in A$, तो $x \in B$, क्योंकि $A \subseteq B$ है।

यदि $x \notin A$, तो भी $x \in B$, क्योंकि $x \in A \cup B$ है।

अतः, $A \cup B$ का प्रत्येक अवयव B का एक अवयव है, अर्थात् $A \cup B \subseteq B$.

साथ ही, हम यह भी जानते हैं कि $B \subseteq A \cup B$. इसलिए टिप्पणी 7 से हमने सिद्ध कर लिया है कि $A \cup B = B$.

विलोमतः मान लीजिए कि $A \cup B = B$. हम यह भी जानते हैं कि $A \subseteq A \cup B$.

अतः, $A \subseteq B$, जिसे हम सिद्ध करना चाहते थे। ■

निम्नलिखित प्रश्नों को हल करते समय आप इस प्रमेय का प्रयोग कर सकते हैं।

E22) एक समष्टीय समुच्चय U में किन्हीं तीन समुच्चयों A, B और C के लिए, दर्शाइए कि

i) $A \cup A = A$.

ii) $A \cup B = B \cup A$, अर्थात् **सम्मिलन की संक्रिया क्रमविनिमेय हैं।**

iii) $A \cup \emptyset = A$.

iv) यदि $A \subseteq C$ और $B \subseteq C$, तो $A \cup B \subseteq C$.

v) $A \cup A^c = U$.

आप वेबसाइट https://www.youtube.com/watch?v=uR70knMr2Hg पर विडियो भी देख सकते हैं।

E23) मान लीजिए कि U वास्तविक रेखा $\mathbb{R}$ है, $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 1\}$ और $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x \le 3\}$ है। $A \cup B$ निर्धारित कीजिए। साथ ही, A और B से अलग $\mathbb{R}$ के ऐसे उपसमुच्चय S और T ज्ञात कीजिए जिनके लिए $S \cup T = A \cup B$ हो। S और T के अपने चुनाव का कारण दीजिए।

E24) यदि $A \cup B = \emptyset$ है, तो A और B में अवयवों की संख्या के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

जैसा कि हमने '$\cap$' की स्थिति में किया था, हम एक बहुत ही स्वाभाविक विधि से तीन या अधिक समुच्चयों के सम्मिलन को परिभाषित कर सकते हैं।

परिभाषा : किसी समष्टीय समुच्चय U में n समुच्चयों $A_1, A_2, ..., A_n$ का सम्मिलन एक समुच्चय $\{x \in U \mid x \in A_i$ **किसी** i के लिए जहाँ $1 \le i \le n\}$ होता है।

इसे $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n$ या $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

आइए एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 9: $A \cup B \cup C$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4, 5\}$ और $C = \{1\}$. साथ ही, जाँच कीजिए कि $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ है या नहीं।

हल: आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. साथ ही, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \setminus B = \{1\}$, $B \setminus A = \{4, 5\}$ तथा $A \cap B = \{2, 3\}$ है।

इसलिए, $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = \{1, 2, 3, 4, 5\} = A \cup B$.

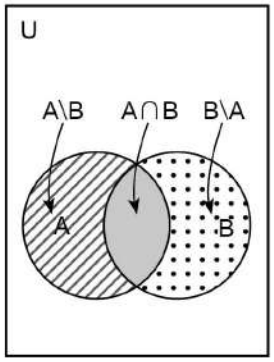
***

उपरोक्त उदाहरण में, आप यह भी देख सकते हैं कि $A \cup B \cup C$ और $(A \cup B) \cup C$ बराबर हैं, जो $A \cup (B \cup C)$ के बराबर है।

जो हमने उदाहरण 9 में देखा है, वे उन व्यापक तथ्यों की विशेष स्थितियाँ हैं जिन्हें हम निम्नलिखित प्रश्नों में आपको सिद्ध करने के लिए कहने जा रहे हैं।

समुच्चयों के सम्मिलन की संक्रिया साहचर्य है।

E25) एक समुच्चय U के तीन समुच्चयों A, B और C के लिए, दर्शाइए कि
$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.



चित्र 12: $A \cup B$ पूरे भरे हुए क्षेत्र से निरूपित है।

E26) किन्हीं दो समुच्चयों A और B के लिए, दर्शाइए कि
$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$.
(हम इस स्थिति को चित्र 12 में वेन आरेख में प्रदर्शित कर रहे हैं।)

आप E22 (ii) और E25 से देख सकते हैं कि हम कितनी भी संख्या में समुच्चयों के सम्मिलन को मालूम करने के लिए दो दो समुच्चयों के सम्मिलन को लेकर प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरणार्थ, यदि A, B, C और D चार समुच्चय हैं, तो

$$\begin{aligned} A \cup B \cup C \cup D &= [(A \cup B) \cup C] \cup D \\ &= A \cup [(B \cup C) \cup D] \\ &= A \cup [D \cup (B \cup C] \\ &= (A \cup D) \cup (B \cup C). \end{aligned}$$

आइए अब समुच्चयों पर चौथी संक्रिया की चर्चा करें, जिसकी बात हमने इस भाग के प्रारंभ में कही थी।

1.5.4 कार्तीय गुणनफल



चित्र 13: रने देकार्त

दिए हुए दो समुच्चयों से बनाए जा सकने वाला एक रोचक समुच्चय उनका कार्तीय गुणनफल है, जिसे एक फ्रॅंसीसी दार्शनिक और गणितज्ञ रने देकार्त (Rene Descartes) (1596 – 1650) के नाम पर रखा गया है। इन्होंने कार्तीय निर्देशांक पद्धति की भी खोज की, जिसे हम XY-समतल में बिंदुओं को आलेखित करने में प्रयोग करते हैं, तथा जिसकी चर्चा हम इकाई 3 में करेंगे। वास्तव में, इस संक्रिया को परिभाषित करने से देकार्त को निर्देशांक पद्धति की रचना करने में सहायता मिली। आगे, इसी से उन्हें बीजगणित के प्रयोग द्वारा ज्यामिति का अध्ययन कर उसे समझने में सहायता मिली।

आइए शुरू करें किसी सरकारी स्कूल की कक्षा 4 के सभी विद्यार्थियों के प्रथम नामों के समुच्चय A तथा उनकी जन्म तिथियों के समुच्चय B को लेते हुए। फिर, अवयवों के सभी युग्मों (a, b) को बनाएँ, जहाँ a समुच्चय A में है तथा b समुच्चय B में है। यह संग्रह सुपरिभाषित है। ध्यान दीजिए कि (सरला, 17) इस समुच्चय का एक अवयव हो सकता है परंतु (17, सरला) नहीं हो सकता है, क्योंकि सरला एक तिथि नहीं है तथा 17 एक नाम नहीं है। अतः, **युग्म को लिखने में क्रम महत्त्वपूर्ण है।** हम नीचे नया समुच्चय प्राप्त करने की इस विधि को परिभाषित कर रहे हैं।

परिभाषाएँ : i) मान लीजिए कि A और B दो समुच्चय हैं। युग्म (a, b), जिसमें पहला अवयव A से है तथा दूसरा अवयव B से है, एक **क्रमित युग्म (ordered pair)** कहलाता है।

ii) समुच्चयों A और B का **कार्तीय गुणनफल (Cartesian product)** $A \times B$ सभी क्रमित युग्मों (a, b) का समुच्चय होता है, जहाँ $a \in A$ और $b \in B$.

अर्थात् $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ और } b \in B\}$.

iii) दो क्रमित युग्म (a, b) और (c, d) **बराबर** कहे जाते हैं, यदि $a = c$ और $b = d$ होता है।

यदि $a \neq b$ है, तो (a, b) और (b, a) अलग क्रमित युग्म होते हैं।

उदाहरणार्थ, यदि $A = \{1, 2, 3\}$ और $B = \{4, 6\}$, तो

$A \times B = \{(1, 4), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (3, 6)\}$, तथा

$B \times A = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (6, 1), (6, 2), (6, 3)\}$.

आप देख सकते हैं कि $(1, 4) \in A \times B$, परंतु $(1, 4) \notin B \times A$.

इसलिए, $A \times B \neq B \times A$. (इकाई 3 का अध्ययन करते समय आप $A \times B$ का चित्रित निरूपण करना सीखेंगे।)

अब $A \times B$ किस प्रकार का दिखेगा यदि $A = \emptyset$ या $B = \emptyset$ होगा? इस स्थिति में, $A \times B$ में कोई भी अवयव नहीं हो सकता है। इस प्रकार, $A \times B = \emptyset$.

$A \times B = \emptyset$ iff $A = \emptyset$ या $B = \emptyset$ हो।

अब इन प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E27) यदि $A = \{2, 5\}$ और $B = \{2, 3\}$ है, तो $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$, $(A \times B) \cap (B \times A)$, $(A \times B) \cup (B \times A)$ और $A \setminus (B \times A)$ ज्ञात कीजिए।

E28) यदि $A \times B = \{(7, 2), (7, 3), (7, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$ है, तो A और B निर्धारित कीजिए।

E29) यदि $A \subseteq C$ और $B \subseteq D$, तो दर्शाइए कि $A \times B \subseteq C \times D$.

E30) $\mathbb{N} \times (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N})$ के तीन अलग-अलग अवयव ज्ञात कीजिए।

E31) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ के एक उचित अरिक्त उपसमुच्चय S का उदाहरण दीजिए। साथ ही $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus S$ का एक उदाहरण दीजिए।

उपरोक्त उदाहरणों और प्रश्नों में, क्या आपने $A \times B$ की गणनांक तथा A और B गणनांको में कोई संबंध ज्ञात किया? पुनः देखिए तथा नीचे दी हुई टिप्पणी पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 13: i) **यदि** $|A| = n, |B| = m,$ **तो** $|A \times B| = nm.$

ii) **यदि A और B अरिक्त समुच्चय हैं तथा इनमें से कोई एक अनंत है, तो $A \times B$ अनंत होगा।**

अब, जब हमने दो समुच्चयों के कार्तीय गुणनफल को परिभाषित कर लिया है, आइए इस परिभाषा को समुच्चयों की किसी भी संख्या के लिए विस्तृत करें।

परिभाषा : मान लीजिए कि n समुच्चय $A_1, A_2, ..., A_n$ हैं। तब, **इनका कार्तीय गुणनफल समुच्चय** $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(x_1, x_2, ...x_n) \mid x_i \in A_i \forall\ i = 1, 2, ..., n\}$ है।

अवयव $(x_1, x_2, ..., x_n)$ एक n-ट्युपल (n-tuple) कहलाता है।

उदाहरण के लिए, यदि $\mathbb{R}$ वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है, तो

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in \mathbb{R}, a_2 \in \mathbb{R}\}$,

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in \mathbb{R} \forall\ i = 1, 2, 3\}$, इत्यादि।

परंपरा के अनुसार $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ के लिए $\mathbb{R}^2$, तथा $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ (n बार) के लिए $\mathbb{R}^n$, लिखा जाता है। साथ ही, एक 2-ट्युपल को प्रायः एक **क्रमित युग्म** कहा जाता है तथा एक 3-ट्युपल को प्रायः एक **क्रमिक त्रिक (ordered triple)** कहा जाता है।

अब, निम्नलिखित प्रश्न को करने का प्रयास कीजिए।

E32) निम्नलिखित में से कौन से कार्तीय गुणनफल $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ में हैं? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।

i) $(3, 0)$ (ii) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (iii) $(1, 1, 1)$

iv) $\left(\frac{1}{2}, -5, \sqrt{2}\right)$ (v) $\{-2, 2, 3\}$

इस भाग में हमने समुच्चयों पर चार संक्रियाओं की चर्चा की है। आपने इनमें से कुछ संक्रियाओं के बीच में संबंध भी देखे हैं, जैसे कि E26 में। अब आइए देखें कि इन संक्रियाओं द्वारा संतुष्ट करने वाले कुछ और भी ऐसे संबंध हैं या नहीं, जिनकी सहायता से हम अधिक प्रभावी ढंग से इन्हें आगे बढ़ा पाएँगे।

1.6 संक्रियाओं पर नियम

आप बंटन (या वितरण) नियम से अवश्य ही परिचित होंगे, जो वास्तविक संख्याओं के गुणन और योग की संक्रियाओं को जोड़ता है। यह नियम है :

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \ \forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$.

यहाँ, हम कहते हैं कि योग पर गुणन बंटित है। इसी प्रकार, समुच्चयों पर उन संक्रियाओं को नियंत्रित करने वाले नियम भी हैं, जिनका आप अब तक अध्ययन कर चुके हैं। इस भाग में, आप ऐसे नियमों के दो प्रकारों का अध्ययन करेंगे।

1.6.1 बंटन नियम

इन नियमों के नाम से ही आपको एक धारणा हो गई होगी कि यहाँ क्या करने जा रहे हैं – शायद अंकगणित में जैसी प्रक्रिया होती है? आइए एक उदाहरण को देखें।

उदाहरण 10: जाँच कीजिए कि $\mathbb{N} \cap (\mathbb{Q} \cup \mathbb{R}) = (\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{N} \cap \mathbb{R})$ है या नहीं। साथ ही, यदि आप उपरोक्त समीकरण में $\cap$ और $\cup$ को परस्पर बदल दें, तो भी क्या आपको एक समीकरण प्राप्त होगा?

हल: इसकी जाँच करने के लिए कि $\mathbb{N} \cap (\mathbb{Q} \cup \mathbb{R}) = (\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{N} \cap \mathbb{R})$ है या नहीं, ध्यान दीजिए कि $\mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$ है, क्योंकि $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ है।

इसलिए, $\mathbb{N} \cap (\mathbb{Q} \cup \mathbb{R}) = \mathbb{N} \cap \mathbb{R} = \mathbb{N}$ है, क्योंकि, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ है। ... (1)

साथ ही, $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{N}$ तथा $\mathbb{N} \cap \mathbb{R} = \mathbb{N}$.

इसलिए, $(\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{N} \cap \mathbb{R}) = \mathbb{N} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$. ... (2)

इस प्रकार (1) और (2) से हम देखते हैं कि $\mathbb{N} \cap (\mathbb{Q} \cup \mathbb{R}) = (\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{N} \cap \mathbb{R})$. ... (3)

अतः, इस स्थिति में, $\cup$ पर $\cap$ बंटित है।

अब, यदि हम उपरोक्त (3) में $\cap$ और $\cup$ को परस्पर बदल दें, तो हम प्राप्त करते हैं : $\mathbb{N} \cup (\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}) = (\mathbb{N} \cup \mathbb{Q}) \cap (\mathbb{N} \cup \mathbb{R})$. ध्यान दीजिए कि यहाँ LHS और RHS दोनों $\mathbb{Q}$ के बराबर हैं। अतः, यह भी एक सही समीकरण है। अर्थात् इस स्थिति में, $\cap$ पर $\cup$ बंटित है।

'LHS' समीकरण के बाईं ओर के व्यंजक को दर्शाता है। 'RHS' उस समीकरण के दाईं ओर के व्यंजक को दर्शाता है।

***

जो यह उदाहरण हमें दर्शाता है वह निम्नलिखित प्रमेय की एक विशेष स्थिति है।

प्रमेय 3 (बंटन नियम): मान लीजिए कि किसी समष्टीय समुच्चय U के तीन उपसमुच्चय A, B और C हैं। तब,

i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, अर्थात् **प्रतिच्छेदन सम्मिलन पर बंटित होता** है;

ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, अर्थात् **सम्मिलन प्रतिच्छेदन पर बंटित होता** है।

उपपत्ति : हम (i) को सिद्ध करेंगे तथा आपसे (ii) को सिद्ध करने के लिए कहेंगे (देखिए E 33)।

1) हम जानते हैं कि दो समुच्चय बराबर होते हैं यदि और केवल यदि इनमें से प्रत्येक दूसरे का उपसमुच्चय हो। अतः, हम यह दर्शाएँगे कि

$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ तथा ... (4)

$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$. ... (5)

अब, $x \in A \cap (B \cup C)$

$\Rightarrow$ $x \in A$ और $x \in B \cup C$

$\Rightarrow$ $x \in A$ और ($x \in B$ या $x \in C$)

$\Rightarrow$ ($x \in A$ और $x \in B$) या ($x \in A$ और $x \in C$)

$\Rightarrow$ $x \in A \cap B$ या $x \in A \cap C$

$\Rightarrow$ $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

अतः, हमने प्रथम समावेश (1) को सिद्ध कर लिया है।

(5) को सिद्ध करने के लिए, आइए $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ लें।

$\Rightarrow$ $x \in A \cap B$ या $x \in A \cap C$

$\Rightarrow$ ($x \in A$ और $x \in B$) या ($x \in A$ और $x \in C$)

$\Rightarrow$ $x \in A$ और ($x \in B$ या $x \in C$)

$\Rightarrow$ $x \in A$ और $x \in B \cup C$

$\Rightarrow$ $x \in A \cap (B \cup C)$

अतः, हमने (5) को भी सिद्ध कर लिया है, और इसी तरह **प्रमेय 3** के (i) को सिद्ध कर लिया है। ■

क्या आपने ध्यान दिया कि (5) को सिद्ध करने में हमारे द्वारा दिया गया तर्क (4) को सिद्ध करने में हमारे द्वारा दिए गए तर्क के विपरीत था? वास्तव में, हम तर्क का दो-तरफ़ा प्रतीक का प्रयोग करते हुए, (4) और (5) की उपपत्तियों को संयोजित कर सकते थे, जैसा नीचे दर्शाया गया है।

$x \in A \cap (B \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in A$ और $x \in B \cup C$

$\Leftrightarrow x \in A$ और ($x \in B$ या $x \in C$)

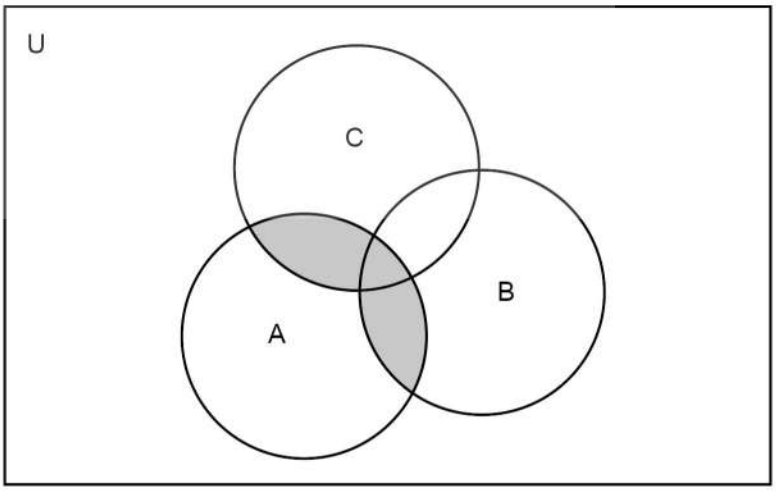
$\Leftrightarrow$ ($x \in A$ और $x \in B$) या ($x \in A$ और $x \in C$)

$\Leftrightarrow x \in A \cap B$ या $x \in A \cap C$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

यह प्रमेय 3 (i) को सिद्ध कर देता है।

चित्र 14 में, हमने प्रमेय 3 (i) का एक वेन आरेखित निरूपण दिया है।



चित्र 14: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

अब, निम्नलिखित प्रश्न को, दो-तरफ़ा तर्क के प्रतीक, $\Leftrightarrow$ का प्रयोग करते हुए, हल करने का प्रयास कीजिए।

E33) प्रमेय 3 के (ii) को सिद्ध कीजिए। इस कथन को एक वेन आरेख में भी निरूपित कीजिए।

अब आइए कुछ ऐसे गुणों पर विचार करें जो समुच्चयों के कार्तीय गुणनफल को समुच्चयों पर अन्य संक्रियाओं के साथ संबंध दर्शाती हैं।

प्रमेय 4: किन्हीं तीन समुच्चयों A, B और C के लिए, सिद्ध कीजिए कि $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ है, अर्थात् **समुच्चयों का कार्तीय गुणनफल समुच्चयों के सम्मिलन** पर बंटित होता है।

उपपत्तिः सर्वप्रथम, क्योंकि $A \subseteq A \cup B$, इसलिए $A \times C \subseteq (A \cup B) \times C$.

इसी प्रकार, $B \times C \subseteq (A \cup B) \times C$.

इसलिए, $(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$.

अतः, हमें यह सिद्ध करने की आवश्यकता है कि

$(A \cup B) \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C)$. ... (6)

इसके लिए, किसी भी क्रमित युग्म $(x, y) \in (A \cup B) \times C$ पर विचार कीजिए।

अब $(x, y) \in (A \cup B) \times C$

$\Rightarrow x \in A \cup B, y \in C$

$\Rightarrow x \in A$ या $x \in B, y \in C$

$\Rightarrow (x, y) \in A \times C$ या $(x, y) \in B \times C$

$\Rightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$

अतः, (6) सिद्ध हो गया तथा प्रमेय सिद्ध हो गया। ■

अब क्यों न एक प्रश्न को हल किया जाए?

E34) सिद्ध कीजिए कि $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$, **अर्थात् कार्तीय गुणनफल प्रतिच्छेदन पर बंटित होता है।**

आप शायद सोच रहे होंगे कि इन गुणों का क्या उपयोग है। आइए एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 11: मान लीजिए कि A अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय है तथा $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$. $(A \cap B) \cup (\mathbb{Q} \cap B)$ ज्ञात कीजिए।

हल : अब $A \cap B$ तथा $\mathbb{Q} \cap B$ ज्ञात करने का प्रयास कीजिए। इसके बाद, इनका प्रतिच्छेदन ज्ञात कीजिए। यह सवाल हल करने की एक विधि है, परंतु अधिक कठिन है। दुसरी ओर, ध्यान दीजिए कि $A \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$. अतः, बंटन नियमों का प्रयोग करते हुए, हम ज्ञात करते हैं कि $(A \cap B) \cup (\mathbb{Q} \cap B) = (A \cup \mathbb{Q}) \cap B = \mathbb{R} \cap B = B$.

अतः बंटन नियम ने हमारे परिकलनों को कितना सरल बना दिया!

***



चित्र 15: द मौर्गन

आइए अब पूरकीकरण की संक्रिया से संबद्ध कुछ नियमों पर विचार करें।

1.6.2 द मौर्गन नियम

अब हम दो नियमों की चर्चा करेंगे जो किसी समुच्चय के पूरक ज्ञात करने की संक्रिया का समुच्चयों के प्रतिच्छेदन या सम्मिलन से संबंध दर्शाते हैं। इन्हें एक अंग्रेज़ गणितज्ञ औगस्टस द मौर्गन (1806-1871) के नाम पर द मौर्गन नियम कहा जाता है। आइए एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 12: मान लीजिए कि $A = \{-2, 2\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, ...\}$ और $U = \mathbb{Z}$. जाँच कीजिए कि $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ है या नहीं।

हल : यहाँ $(A \cup B)^c = \mathbb{Z} \setminus \{-2, 1, 2, 3, 5, 7, ...\}$

$$= \{..., -5, -4, -3, -1, 0, 4, 6, 8, ...\}.$$

साथ ही, $A^c \cap B^c = (\mathbb{Z} \setminus \{-2, 2\}) \cap (\mathbb{Z} \setminus \{1, 3, 5, ...\})$

$$= \{..., -4, -3, -1, 0, 1, 3, 4, 5, ...\} \cap \{..., -3, -2, -1, 0, 2, 4, 6, ...\}$$

$$= \{..., -5, -4, -3, -1, 0, 4, 6, 8, ...\}.$$

अतः, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

***

यह रोचक तरीक़ा जिसमें पूरकीकरण की संक्रिया $\cup$ और $\cap$ को 'परस्पर बदल' देता है, केवल ऊपर वाले उदाहरण के लिए ही सत्य नहीं है, बल्कि सभी समुच्चयों के लिए सत्य है। आइए अब इन नियमों के कथन दें, तथा इन्हें सिद्ध करें।

प्रमेय 5 (द मौर्गन नियम): किसी समष्टीय समुच्चय U में किन्हीं दो समुच्चयों A और B के लिए,

i) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$,

ii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

उपपत्ति : जैसा कि प्रमेय 3 की स्थिति में किया था, हम यहाँ भी (i) को सिद्ध करेंगे तथा आपसे (ii) को सिद्ध करने के लिए कहेंगे (देखिए E35)। अतः, आइए $x \in (A \cap B)^c$ लें। अब,

$x \in (A \cap B)^c = U \setminus (A \cap B)$

$\Leftrightarrow$ $x \notin A \cap B$ (अर्थात् A और B दोनों में x नहीं है)

$\Leftrightarrow$ $x \notin A$ या $x \notin B$ (क्योंकि यदि $x \in A$ और $x \in B$ है, तो $x \in A \cap B$ होगा)

$\Leftrightarrow$ $x \in A^c$ या $x \in B^c$

$\Leftrightarrow$ $x \in A^c \cup B^c$

अतः, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. ■

समुच्चयों पर संक्रियाओं को प्रभावी ढंग से उपयोग करने के लिए द मौर्गन नियम बहुत लाभदायक हो सकते हैं। निम्नलिखित उदाहरण पर विचार कीजिए।

उदाहरण 13: समुच्चयों $\mathbb{Z}$, $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq \sqrt{2}\}$ और $U = \mathbb{Q}$ पर विचार कीजिए। $A^c \cup \mathbb{Z}^c$ ज्ञात कीजिए।

हल: अब, $A^c = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$ और $\mathbb{Z}^c = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ है।

क्या हम $A^c \cup \mathbb{Z}^c$ को इस प्रकार लिख सकते हैं कि इसके अवयव हमें स्पष्ट हो जाएँ? ऐसा लगता नहीं है।

परंतु, द मौर्गन नियमों से, हमें $A^c \cup \mathbb{Z}^c = (A \cap \mathbb{Z})^c$ प्राप्त है।

अब, $A \cap \mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > \sqrt{2}\} = \{2, 3, ...\}$.

अतः, $(A \cap \mathbb{Z})^c = \mathbb{Q} \setminus (A \cap \mathbb{Z}) = \mathbb{Q} \setminus \{2, 3, 4, ...\}$.

अतः, $A^c \cup \mathbb{Z}^c = \mathbb{Q} \setminus \{2, 3, 4, ...\}$ है, जो वाँछित समुच्चय के अवयवों को स्पष्ट कर देता है।

***

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E35) प्रमेय 5 के (ii) को सिद्ध कीजिए।

E36) A और B के लिए, द मौर्गन नियमों का सत्यापन कीजिए, जहाँ $A = \{1, 2\}$ और $B = \{2, 3, 4\}$. (सुविधा की दृष्टि से, आप $U = \{1, 2, 3, 4\}$, अर्थात् $U = A \cup B$ ले सकते हैं। निस्संदेह, ये नियम किसी अन्य U के लिए भी सत्य होंगे।)

E37) एक समष्टीय समुच्चय U में किन्हीं तीन समुच्चय A, B और C के लिए, सिद्ध कीजिए कि $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$. साथ ही, यह भी लिखिए कि समुच्चय U क्या हो सकता है।

E38) क्या कथन 'किन्हीं तीन समुच्चयों A, B और C के लिए, $(A \setminus B) \times C = A \setminus (B \times C)$' सत्य है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

अब तक आप समुच्चयों, उन पर अनेक संक्रियाओं तथा इन संक्रियाओं से संबंधित नियमों से परिचित हो गए होंगे। आइए अब देखें कि इस इकाई में हमने क्या-क्या किया है।

1.7 सारांश

समुच्चयों पर अपनी चर्चा में, हमने निम्नलिखित बिंदुओं पर ग़ौर किया है।

1. समुच्चय वस्तुओं का एक सुपरिभाषित संग्रह होता है।
2. समुच्चयों को निरूपित करने के लिए, सूचीयन विधि और गुण विधि। कुछ समुच्चयों को दोनों विधियों से निरूपित किया जा सकता है तथा कुछ को इनमें से केवल एक ही विधि द्वारा।
3. 'उपसमुच्चय', 'उचित उपसमुच्चय', 'अधिसमुच्चय', 'समष्टीय समुच्चय', 'परिमित समुच्चय' और 'अनंत समुच्चय' की संकल्पनाएँ।

4. समुच्चय A और B बराबर होते हैं यदि और केवल यदि A, B का उपसमुच्चय है और B, A का उपसमुच्चय है। अर्थात् $A = B$ यदि और केवल यदि $A \subseteq B$ और $B \subseteq A$.

5. A, B का उपसमुच्चय नहीं है, यदि $\exists\, a \in A$ जिसके लिए $a \notin B$ है।

6. वेन आरेखों द्वारा समुच्चयों और उनके संबंधों का चित्रीय निरूपण, तथा इस प्रकार के निरूपण की उपयोगिता।

7. एक समुच्चय B में समुच्चय A के पूरक की परिभाषा और उदाहरण। इसे $B \setminus A$ से व्यक्त किया जाता है।

   $B \setminus A = \{x \in B \mid x \notin A\}$.

   जब B समष्टीय समुच्चय हो, तब $B \setminus A$ को A का पूरक कहते हैं, तथा इसे A' या A^c द्वारा व्यक्त किया जाता है।

8. एक समष्टीय समुच्चय U में दो समुच्चयों A और B के प्रतिच्छेदन की परिभाषा और उदाहरण से $A \cap B$ से व्यक्त किया जाता है।

   $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ और } x \in B\}$.

   यह परिभाषा, स्वाभाविक रूप में, दो से अधिक समुच्चयों के लिए विस्तृत हो जाता है :

   $A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_n = \{x \in U \mid x \in A_i \,\forall\, i = 1, 2, ..., n\}$.

9. समुच्चयों के प्रतिच्छेदन की संक्रिया के अनेक गुण।

10. एक समष्टीय समुच्चय U में दो समुच्चयों A और B के सम्मिलन की परिभाषा और उदाहरण। इसे $A \cup B$ से व्यक्त किया जाता है।

    $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ या } x \in B\}$.

    इस परिभाषा को, स्वाभाविक रूप में, दो से अधिक समुच्चयों के लिए विस्तृत किया जा सकता है:

    $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \{x \in U \mid x \in A_i, \text{ किसी } i = 1, 2, .., n \text{ के लिए}\}$.

11. समुच्चयों के सम्मिलन के अनेक गुण।

12. समुच्चयों A और B के कार्तीय गुणनफल की परिभाषा और उदाहरण। इसे $A \times B$ से व्यक्त किया जाता है।

    $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$.

    यह परिभाषा n समुच्चयों के कार्तीय गुणनफल के लिए विस्तृत किया जा सकता है:

    $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in A_i \,\forall\, i = 1, 2, ..., n\}$.

13. समुच्चयों के कार्तीय गुणनफल के अनेक गुण।

14. बंटन नियमों के कथन और उपपत्ति : किन्हीं तीन समुच्चयों A, B और C के लिए,

    $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

    $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

15. द मौर्गन नियमों के कथन और उपपत्ति। किन्हीं दो समुच्चयों A और B के लिए,

    $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;

    $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

अब, हमारा सुझाव है कि आप भाग 1.1 में दिए उद्देश्यों पर वापिस लौटें तथा देखें कि क्या ये आपने प्राप्त कर लिए हैं। इसकी जाँच करने की एक विधि यह है कि आप इस इकाई के सभी प्रश्नों को हल करें। यदि आप यह जानना चाहते हैं कि हमारे हल क्या हैं, हम इन्हें अगले भाग में दे रहे हैं। परंतु कृपया इन्हें तब तक न देखें जब तक आप स्वयं इन प्रश्नों को हल करने का प्रयास न कर लें।

1.8 हल / उत्तर

E1) (ii) - (v) समुच्चय हैं।

(i) समुच्चय नहीं है, क्योंकि एक व्यक्ति यह सोच सकता है कि उदाहरण के लिए, आशा उस खेल में रूचि रखती है, जबकि दूसरा व्यक्ति यह सोच सकता है कि वह रूचि नहीं रखती है। अतः, रूचि की जाँच करने के लिए कोई स्पष्ट कसौटियाँ नहीं हैं। इसी लिए यह संग्रह सुपरिभाषित नहीं है।

इसी प्रकार, (vi) भी समुच्चय नहीं है।

E2) एक दिया हुआ टिकटों का संग्रह एक समुच्चय है, क्योंकि एक वस्तु दी रहने पर, यह किसी भी व्यक्ति को स्पष्ट है कि सर्वप्रथम यह टिकट है या नहीं; तथा दूसरे यदि वह टिकट है, तो वह इस संग्रह में है या नहीं।

E3) (iii), (v) सत्य हैं। अन्य को बदलने की अनेक विधियाँ हो सकती हैं। उदाहरणार्थ, $\in$ को $\notin$ में बदलना या कथन सत्य बनाने के लिए उपयुक्त संख्या या समुच्चय चुनना। उदाहरणार्थ, (i) को $0.2 \notin \mathbb{N}$ या $0.2 \in \mathbb{Q}$ के रूप में बदला जा सकता है।

E4) i) $\{-1\}$

ii) यह 8 से छोटे या उसके बराबर सभी पूर्णांकों का समुच्चय है, अर्थात् $\{..., -3, -2, ..., 6, 7, 8\}$.

(iii) {अ, आ, ..., स, ह}

E5) i) $\{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$

ii) इसकी गुण विधि द्वारा व्याख्या नहीं की जा सकती, क्योंकि तीनों अवयवों में कुछ भी उभयनिष्ठ नहीं है।

iii) $\{x \mid x$ एक सम पूर्णांक है$\}$

iv) हम अनेक निरूपण प्राप्त कर सकते हैं (देखिए टिप्पणी 3)। उदाहरणार्थ,

$\emptyset = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ विषम और सम दोनों है$\}$

$\emptyset = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 0\}$

v) $\{x \mid x$ केवल 30 दिनों वाला महीना है$\}$.

E6) LHS पर समुच्चय $\{3\}$ है। RHS पर समुच्चय $\{-3, 3\}$ है। इसलिए, ये बराबर नहीं हैं।

E7) i) पानी के चम्मचों की संख्या 1000 या दस लाख हो सकती है, परंतु कोई संख्या ही होगी। इस प्रकार, यह समुच्चय परिमित है।

ii) यदि x और y अलग-अलग परिमेय संख्याएँ हैं, तो $x+3$ और $y+3$ भी अलग परिमेय संख्याएँ होंगी। इसलिए, प्रत्येक $x \in \mathbb{Q}$ के लिए, दिए हुए समुच्चय

का एक अवयव होगा, तथा ये सभी अवयव उतने ही होंगे, जितने कि $\mathbb{Q}$ में अवयवों की संख्या है। क्योंकि $\mathbb{Q}$ में अनंततः अनेक अवयव हैं, इसलिए यह समुच्चय भी अनंत होगा।

iii) यह अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय है, तथा अनंत है।

iv) $\{\mathbb{N}\}$ एक एकल है, जिसमें केवल एक ही अवयव है $\mathbb{N}$. इस प्रकार, यह परिमित है।

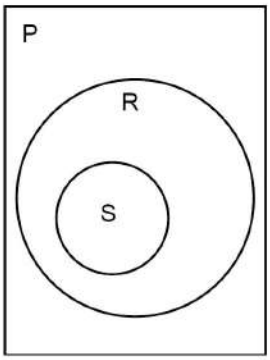
v) वृत्त पर स्थित किन्हीं दो बिंदुओं के बीच में सदैव वृत्त पर स्थित एक बिंदु होगा। इसलिए, यह समुच्चय अनंत है।

vi) परंपरा अनुसार, यह समुच्चय परिमित है।

यदि किसी परिमित समुच्चय A में n अवयव हों, तो उसके घात समुच्चय में 2^n अवयव होते हैं।

E8) i) असत्य, क्योंकि RHS पर अनंत समुच्चय है तथा LHS पर एक एकल है।

ii) सत्य, क्योंकि इस समुच्चय में एक ही अवयव ϕ है।



चित्र 16

E9) $\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

जैसा कि आप देख सकते हैं (i)-(iv) तक के उत्तर क्रमशः 1, 3, 3, 1 हैं। चूंकि दिए हुए समुच्चय का गणनांक 3 है, इसलिए किसी भी उपसमुच्चय में उससे अधिक अवयव नहीं हो सकते। इस प्रकार, (v) का उत्तर 'कोई नहीं' है।

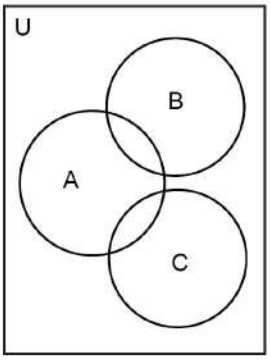
E10) मान लीजिए कि $x \in A$.

तब, $A \subseteq B \Rightarrow x \in B$.

अब, $x \in B$ और $B \subseteq C \Rightarrow x \in C$.

$\therefore x \in A \Rightarrow x \in C$.

चूंकि यह किसी भी $x \in A$ के लिए सत्य है, $A \subseteq C$.

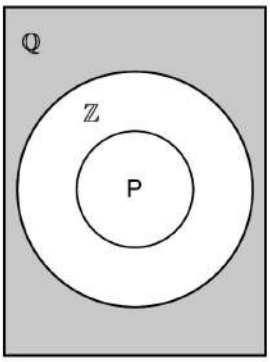


चित्र 17

E11) यहाँ अनंततः अनेक संभावनाएँ हैं। इनमें से एक स्वयं दिया हुआ समुच्चय ही हो सकता है! अन्य समुच्चय {3, 0.7, इग्नू, महात्मा गाँधी} हो सकता है।

E12) S, R और P क्रमशः वर्गों, आयतों और समांतर चतुर्भुजों के समुच्चय हैं। चूंकि $S \subseteq R \subseteq P$ है, इसलिए हमने चित्र 16 के वेन आरेख में $U = P$ लिया है।

E13) एक संभव आरेख चित्र 17 में दिया है। ध्यान दीजिए कि क्योंकि B अनंत है तथा C परिमित है, इसका यह अर्थ नहीं है कि उनको प्रदर्शित करने वाले क्षेत्र बहुत अलग क्षेत्रफलों के हों।



चित्र 18: छायांकित क्षेत्र $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ है।

E14) i) ध्यान दीजिए कि $P \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. हम $\mathbb{Q}$ को U मान लेते हैं (देखिए चित्र 18)।

ii) $\mathbb{Z} \setminus P = \{x \in \mathbb{Z} \mid x$ एक अभाज्य संख्या नहीं है$\}$

इसमें निश्चित रूप से, एक उपसमुच्चय के रूप में, सभी ऋणात्मक पूर्णांकों का समुच्चय आविष्ट होगा, जो अनंत है। अतः, $\mathbb{Z} \setminus P$ अनंत है।

$P \setminus \mathbb{Z} = \{p \mid p$ एक अभाज्य संख्या है तथा $p \notin \mathbb{Z}$.

$= \phi$, क्योंकि प्रत्येक अभाज्य संख्या एक पूर्णांक है।

इसलिए, $P \setminus \mathbb{Z}$ परिमित है।

E15) $A \setminus A = \phi, \phi \setminus A = \phi, A \setminus \phi = A$,

$(A^c)^c = A$, क्योंकि $x \in A \Leftrightarrow x \notin A^c \Leftrightarrow x \in (A^c)^c$.

E16) (i) उदाहरणार्थ, $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N} \not\subset \mathbb{N}$. ऐसे अनेक उदाहरण हैं।

(ii) यह केवल तभी सत्य हो सकता है, यदि $A \setminus B = \phi$ हो, क्योंकि यदि $\exists\, x \in A \setminus B$ तो $x \notin B$. लेकिन $A \setminus B \subseteq B \Rightarrow x \in B$. तो हम एक अंतर्विरोध पर पहुँच जाते हैं, जब तक $A \setminus B = \phi$ नहीं है। अतः, किन्हीं दो समुच्चयों A और B जिनके लिए $A \setminus B = \phi$ एक मान्य उदाहरण होगा।

E17) क्रमशः $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \phi$ हैं। इन सभी स्थितियों में U को $\mathbb{Q}$ लिया जा सकता है। निस्संदेह, U के लिए अनेक विकल्प हैं।

E18) iii) (i) से हम जानते हैं कि $A \cap B \subseteq A$ है। हमें यह सिद्ध करने की आवश्यकता है कि इस स्थिति में $A \subseteq A \cap B$.

इसके लिए, मान लीजिए कि $x \in A$. तब, क्योंकि $A \subseteq B$, इसलिए $x \in B$. इस प्रकार, $x \in A \cap B$.

$\therefore A \subseteq A \cap B$.

चूंकि $A \subseteq A \cap B \subseteq A$, इसलिए हम देखते हैं कि $A = A \cap B$.

iv) $A = B$ के साथ (iii) के अनुप्रयोग से, हम $A \cap A = A$ प्राप्त करते हैं।

v) $A \cap \phi \subseteq \phi$, (ii) के अनुप्रयोग से।

साथ ही, $\phi \subseteq A \cap \phi$, क्योंकि ϕ प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय है।

$\therefore A \cap \phi = \phi$.

vi) क्योंकि $A \subseteq U$, इसलिए उपरोक्त (iii) से हमें परिणाम प्राप्त हो जाता है।

vii) $A \cap B \subseteq B$ और $A \cap B \subseteq A$. $\therefore A \cap B \subseteq B \cap A$.

इसी प्रकार, $B \cap A \subseteq A \cap B$.

$\therefore A \cap B = B \cap A$.

viii) $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A$ और $x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in A$ और $x \in B^c$

$\Leftrightarrow x \in A \cap B^c$.

$\therefore A \setminus B = A \cap B^c$.

(ध्यान दीजिए कि हमने प्रत्येक स्तर पर दो-तरफ़ा तर्क का प्रतीक $\Leftrightarrow$ का प्रयोग किया है, तथा इस तरह साथ-साथ ही यह दर्शाया है कि $A \setminus B \subseteq A \cap B^c$ तथा $A \cap B^c \subseteq A \setminus B$.)

ix) मान लीजिए कि $x \in C$. तब, $C \subseteq A \Rightarrow x \in A$. इसी प्रकार, $x \in B$. इसलिए, $x \in A \cap B$. अतः, $C \subseteq A \cap B$.

E19) नहीं। उदाहरणार्थ, यदि $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4\}$ और $C = \{1, 2\}$, तो $C \subsetneq A$ और $C \subsetneq B$, परंतु C **उचित रूप** से $A \cap B$ में आविष्ट नहीं है। वास्तव में, यह $A \cap B$ के ठीक बराबर है।

E20) $A \cap B \cap C = \{4\}$.

$(A \cap B) \cap C = \{3, 4\} \cap C = \{4\}$.

$A \cap (B \cap C) = A \cap \{4\} = \{4\}$.

$A \cap C \cap B = (A \cap C) \cap B = \{1, 4\} \cap B = \{4\}$.

E21) $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = \{12n / n \in \mathbb{N}\} \cap C = \emptyset$, क्योंकि C अभाज्य संख्याओं का समुच्चय है तथा $A \cap B$ का कोई भी अवयव एक अभाज्य संख्या नहीं है।

E22) i) चूंकि $A \subseteq A$, इसलिए प्रमेय 2 द्वारा $A \cup A = A$.

ii) $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ या $x \in B$.
$\Leftrightarrow$ $x \in B$ या $x \in A$.
$\Leftrightarrow$ $x \in B \cup A$.
$\therefore$ $A \cup B = B \cup A$.

iii) $\emptyset \subseteq A \Rightarrow A \cup \emptyset = A$, प्रमेय 2 द्वारा।

iv) मान लीजिए कि $x \in A \cup B$. तब, $x \in A$ या $x \in B$. दोनों स्थितियों में $x \in C$, क्योंकि $A \subseteq C$ और $B \subseteq C$. इस प्रकार,
$x \in A \cup B \Rightarrow x \in C$.
$\therefore$ $A \cup B \subseteq C$.

v) उपरोक्त (iv) द्वारा, $A \cup A^c \subseteq U$.
अब, आइए दर्शाएँ कि $U \subseteq A \cup A^c$.
मान लीजिए $x \in U$. तब, या तो $x \in A$ या $x \notin A$.
अर्थात् या तो $x \in A$ या $x \in U \setminus A = A^c$.
अतः, $x \in A \cup A^c$.
इसलिए, $U \subseteq A \cup A^c$.
अतः, समानता सिद्ध हो गई है।

E23) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 3\}$.
$S = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \le x \le 3\}$ और $T = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid 0 \le x \le 3\}$ लीजिए।
तब, $S \cup T \subseteq A \cup B$.
साथ ही, किसी $x \in A \cup B$ के लिए, x या तो परिमेय है या अपरिमेय है। इसी के अनुसार, $x \in S$ या $x \in T$.
अतः, $A \cup B \subseteq S \cup T$.
इसी प्रकार, $S \cup T = A \cup B$.
S और T के ऐसे अनेक युग्म हो सकते हैं जो इस प्रतिबंध को संतुष्ट करते होंगे। ऐसे एक और युग्म को खोजिए।

E24) चूंकि $A \subseteq A \cup B = \emptyset$, इसलिए हम देखते हैं कि $A \subseteq \emptyset$. साथ ही, $\emptyset \subseteq A$ सदैव है।
$\therefore$ $A = \emptyset$. इसी प्रकार $B = \emptyset$. इसलिए, $|A| = |B| = 0$.

E25) सर्वप्रथम, आइए दर्शाएँ कि $(A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$.
चूंकि $A \cup B \subseteq A \cup B \cup C$ और $C \subseteq A \cup B \cup C$, इसलिए E22 से,
$(A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$.
विलोमतः, मान लीजिए कि $x \in A \cup B \cup C$. तब, $x \in A$ या $x \in B$ या $x \in C$.
यदि $x \in A$, तो $x \in A \cup B \subseteq (A \cup B) \cup C$.
इसी प्रकार, यदि $x \in B$ या $x \in C$, तो $x \in (A \cup B) \cup C$.
इसलिए, $A \cup B \cup C \subseteq (A \cup B) \cup C$.
अतः, $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$.

इसी प्रकार, आप दर्शा सकते हैं कि $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$.

E26) $A \setminus B \subseteq A \subseteq A \cup B$, $B \setminus A \subseteq B \subseteq A \cup B$, $A \cap B \subseteq A \cup B$.

$\therefore$ $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) \subseteq A \cup B$.

विलोमतः, मान लीजिए कि $x \in A \cup B$. तब, $x \in A$ या $x \in B$. अब x के लिए केवल तीन संभावनाएँ हैं :

i) $x \in A$ परन्तु $x \notin B$, अर्थात् $x \in A \setminus B$.

ii) $x \in A$ और $x \in B$, अर्थात् $x \in A \cap B$.

iii) $x \in B$ परन्तु $x \notin A$, अर्थात् $x \in B \setminus A$.

इस प्रकार, $A \cup B \subseteq (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$.

अतः हमने परिणाम सिद्ध कर लिया है।

E27) $A \times B = \{(2, 2), (2, 3), (5, 2), (5, 3)\}$

$B \times A = \{(2, 2), (3, 2), (2, 5), (3, 5)\}$

$A \times A = \{(2, 2), (2, 5), (5, 2), (5, 5)\}$.

$(A \times B) \cap (B \times A) = \{2, 2\}$

$(A \times B) \cup (B \times A) = \{(2, 2), (2, 3),(5, 2),(5, 3),(3, 2), (2, 5), (3, 5)\}$

$A \setminus (B \times A)$ $\{2, 5\}$.

E28) A = प्रत्येक युग्म में प्रथम अवयवों का समुच्चय = $\{7, 2\}$.

B = प्रत्येक युग्म में द्वितीय अवयवों का समुच्चय = $\{2, 3, 4\}$.

E29) मान लीजिए कि $(x, y) \in A \times B$. चूंकि $x \in A \subseteq C$, इसलिए $x \in C$. इसी प्रकार, $y \in D$. अतः, $(x, y) \in C \times D$. अतः $A \times B \subseteq C \times D$.

E30) उदाहरणार्थ, $(1, 0), \left(1, \frac{1}{2}\right), (1, 37.525252...)$. आप अनंततः अनेक अवयव चुन सकते हैं।

E31) ऐसे अनेक उदाहरण हो सकते हैं। एक $S = \{(0, 0)\}$. तब,
$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus S = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}$ और $x, y \neq 0\}$.

E32) (i) नहीं है, क्योंकि यह केवल एक क्रमित युग्म है, एक त्रिक नहीं है।

(ii) नहीं है, क्योंकि $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$.

(iii) है, क्योंकि $1 \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$.

(iv) नहीं है, क्योंकि $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.

(v) नहीं है, क्योंकि यह एक क्रमित त्रिक नहीं है; यह तीन अवयवों का एक समुच्चय है।

E33) $x \in A \cup (B \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in A$ या $x \in (B \cap C)$

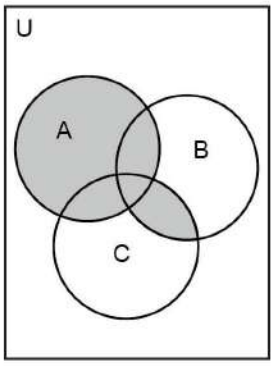
$\Leftrightarrow x \in A$ या $(x \in B$ और $x \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A$ या $x \in B)$ और $(x \in A$ या $x \in C)$

$\Leftrightarrow x \in A \cup B$ और $x \in A \cup C$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

अतः प्रमेय 3 (ii) सिद्ध हो गया है। (इस स्थिति का एक चित्र द्वारा निरूपण चित्र 19 में दिया गया है।)



चित्र 19: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

E34) $(x, y) \in (A \cap B) \times C$

$\Leftrightarrow$ $x \in (A \cap B)$ और $y \in C$

$\Leftrightarrow$ ($x \in A$ और $x \in B$) और $y \in C$

$\Leftrightarrow$ $(x, y) \in A \times C$ और $(x, y) \in B \times C$

$\Leftrightarrow$ $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$.

अतः, दोनों समुच्चय बराबर हैं।

E35) $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B$

$\Leftrightarrow$ $x \notin A$ और $x \notin B$

$\Leftrightarrow$ $x \in A^c$ और $x \in B^c$

$\Leftrightarrow$ $x \in A^c \cap B^c$.

अतः, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

E36) $A \cup B = U$. $\therefore (A \cup B)^c = \phi$.

साथ ही, $A^c = \{3, 4\}$, $B^c = \{1\}$.

$\therefore$ $A^c \cap B^c = \phi$.

$\therefore$ $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

आगे $A \cap B = \{2\}$. $\therefore (A \cap B)^c = \{1, 3, 4\}$.

$\therefore$ $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$.

E37) चूंकि $A \setminus B \subseteq A$, इसलिए $(A \setminus B) \times C \subseteq A \times C$. ... (7)

यदि $(x, y) \in (A \setminus B) \times C$, तो $x \in A \setminus B$, अर्थात् $x \notin B$.

$\Rightarrow$ $(x, y) \notin B \times C$. ... (8)

(7) और (8) हमें बताते हैं कि $(A \setminus B) \times C \subseteq (A \times C) \setminus (B \times C)$. ... (9)

विलोमतः, मान लीजिए कि $(x, y) \in (A \times C) \setminus (B \times C)$.

तब $(x, y) \in A \times C$ और $(x, y) \notin B \times C$.

अतः, $x \in A$, $y \in C$, और $x \notin B$.

इसलिए, $x \in A \setminus B$, $y \in C$.

इस प्रकार, $(x, y) \in (A \setminus B) \times C$.

इससे सिद्ध होता है कि $(A \times C) \setminus (B \times C) \subseteq (A \setminus B) \times C$. ... (10)

(9) और (10) को मिलाने पर, समानता सिद्ध हो जाती है।

U के लिए एक संभावना $(A \times C) \cup B$.

E38) $(A \setminus B) \times C$ का कोई भी अवयव क्रमित युग्म (a, c) होगा, जहाँ $a \in A$, $a \notin B$, $c \in C$.

दूसरी और, $A \setminus (B \times C)$ का कोई भी अवयव A का एक अवयव है तथा एक युग्म नहीं है। इसलिए आपको इस कथन को असत्य होने की अपेक्षा रखनी चाहिए। आप इस बात को एक उदाहरण लेकर दर्शा सकते हैं।

मान लीजिए $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \mathbb{N}$.

तब, $(A \setminus B) \times C = \{2\} \times \mathbb{N}$, जबकि

$A \setminus (B \times C) = \{1, 2\}$.

अतः, $(A \setminus B) \times C \neq A \setminus (B \times C)$.

इकाई 2

फलन

संरचना **पृष्ठ संख्या**

2.1	प्रस्तावना	45
	उद्देश्य	46
2.2	संबंध	46
2.3	फलन	49
2.4	फलनों का संयोजन	54
2.5	द्विआधारी संक्रियाएँ	60
2.6	सारांश	62
2.7	हल / उत्तर	63

2.1 प्रस्तावना

अब जब आप समुच्चयों और उन पर संक्रियाओं से परिचित हो गए हैं, हम इस इकाई में इनमें से एक संक्रिया पर अपना ध्यान केन्द्रित करेंगे। आप देखेंगे कि किस प्रकार कार्तीय गुणनफल विभिन्न विधियों से, विभिन्न नाम देकर, प्रयोग किया जाता है।

हम इस इकाई का प्रारंभ भाग 2.2 में संबंधों की चर्चा के साथ करेंगे, जो $A \times B$ के उपसमुच्चय ही हैं, जहाँ A और B समुच्चय हैं। हम कुछ ऐसे गुणों वाले संबंधों का भी अध्ययन, जो उन्हें स्वतुल्य, सममित, संक्रामक या तुल्यता संबंध बनाते हैं।

भाग 2.3 में, हम कुछ ऐसे संबंधों पर अपना अध्ययन केन्द्रित करेंगे, जो फलन कहलाते हैं। इस संकल्पना को आपने स्कूल में भी सीखा होगा। व्यापक रूप में फलनों के अध्ययन के अतिरिक्त, हम फलनों के कुछ विशेष गुणों पर विचार भी करेंगे जो उन्हें एकैकी या एकैकी आच्छादक बना देते हैं।

अगले भाग, अर्थात् भाग 2.4 में, हम दो फलनों को जोड़ने की एक विधि को देखेंगे, जो इन फलनों का संयोजन कहलाती है। आप देखेंगे कि ज़रूरी नहीं कि दो फलनों का संयोजन हमेशा परिभाषित हो। आप यह भी अध्ययन करेंगे कि किन प्रतिबंधों के अधीन फलनों के संयोजन को परिभाषित किया जा सकता है। इस भाग में आप यह भी देखेंगे कि एकैकी आच्छादक फलन क्यों व्युत्क्रमणीय होता है।

अंत में, भाग 2.5 में, हम एक विशेष प्रकार के फलन $S \times S \to S$ को देखेंगे, जहाँ S एक समुच्चय है। यह वास्तव में S के अवयवों के युग्मों पर एक संक्रिया है। इसी कारण से इसे S पर **द्विआधारी** संक्रिया कहा जाता है। आप देखेंगे कि वास्तव में आप द्विआधारी संक्रियाओं के साथ प्राइमरी स्कूल से ही काम करते आ रहे हैं। और, अब भी जो आप गणित करेंगे उसमें भी आप को यह संक्रियाएं मिलती ही रहेंगी।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद, आप निम्नलिखित कर पाएँगे :

- स्पष्ट करना कि एक समुच्चय A से समुच्चय B तक एक संबंध क्या होता है;
- स्वतुल्य, सममित या संक्रामक संबंधों के उदाहरण देना;
- एक समुच्चय A से समुच्चय B तक के फलनों की परिभाषा देना, तथा उनके उदाहरण देना;
- स्पष्ट करना कि कोई फलन कब एकैकी, आच्छादक या एकैकी आच्छादक होता है;
- उपयुक्त प्रतिबंधों के अंतर्गत दो फलनों के संयोजन प्राप्त करना;
- समुच्चयों पर द्विआधारी संक्रियाओं को परिभाषित करना और उनके उदाहरण देना।

2.2 संबंध

आप लोगों के बीच के संबंध की संकल्पना से पहले से ही परिचित हैं। उदाहरणार्थ, दो लोगों A और B के बीच माँ-बच्चे का एक संबंध होता है, यदि और केवल यदि A, B की माता है या B, A की माता है। इसी प्रकार, हम पूर्णांकों में संबंध ज्ञात कर सकते हैं, उदाहरणार्थ, दो पूर्णांकों में संबंध होता है यदि एक दूसरे का गुणनखंड है। परंतु आम भाषा के प्रयोग में है। और गणित की भाषा के प्रयोग में 'संबंध' शब्द के अर्थ में अंतर है। उदाहरणार्थ, यदि $\mathbb{N}$ पर R संबंध 'का एक गुणनखंड है' है, तो 1, 5 का गुणनखंड है, परंतु 5, 1 का गुणनखंड नहीं है, तथा हम इसे 1 R 5 लिखते हैं, परंतु 5 R 1 नहीं। अतः, हम देखते हैं कि R अवयवों के एक युग्म को संबंधित करता है तथा इसमें क्रम का महत्त्व है। यहाँ, यदि हम R को $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ का एक समुच्चय मान लें, तो
$R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \, R \, y\}$ है तथा $(1, 5) \in R$ है, परंतु $(5, 1) \notin R$.

गणित में, किसी समुच्चय S पर एक संबंध R समुच्चय S के अवयवों के बीच एक विशेष प्रकार की संबंधता दर्शाता है। यदि इस संबंध द्वारा $a \in S, b \in S$ से संबंधित है, तो हम **a R b**, या $(a, b) \in R$, लिखते हैं, और ठीक इसी तरह हम एक समुच्चय पर एक संबंध को परिभाषित करते हैं।

परिभाषा : किसी समुच्चय S पर एक **संबंध (Relation)** R, $S \times S$ का एक उपसमुच्चय होता है।

उदाहरणार्थ, यदि $\mathbb{Q}$ पर एक संबंध 'से बड़ा है' है, तो 3 R 2 है (क्योंकि $3 > 2$ है)
तथा $\frac{1}{n} R \frac{1}{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$. इस प्रकार, यहाँ $R \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $(3, 2) \in R$, किसी $n \in \mathbb{N}$ के लिए $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right) \in R$ तथा $(0, 2) \notin R$.

टिप्पणी 1: क्योंकि S पर एक संबंध $S \times S$ का एक उपसमुच्चय होता है, इसलिए S पर दो संबंध R_1 और R_2 अलग होंगे यदि समुच्चय R_1 और R_2 अलग हों, अर्थात् $R_1 \neq R_2$ हो। उदाहरणार्थ, $S = \{1, 2, 3\}$, $R_1 = \{(1, 1), (1, 2)\}$ और $R_2 = \{(2, 1), (1\ 2)\}$ पर विचार कीजिए। तब, R_1 और R_2 दोनों S पर संबंध हैं, क्योंकि ये $S \times S$ के उपसमुच्चय हैं। परंतु $R_1 \neq R_2$.

अब निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए, जो समुच्चय पर संबंधों पर आधारित हैं।

E1) मान लीजिए कि $\mathbb{N}$ सभी प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है तथा R संबंध $\{(a, a^2) \mid a \in \mathbb{N}\}$ है। बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या नहीं। अपने उत्तरों के लिए कारण भी दीजिए।

i) 2 R 3, ii) 3 R 9,

iii) 9 R 3, iv) $(\sqrt{3}, 3) \in R$.

E2) इग्नू के पाठ्यक्रमों के समुच्चय पर दो अलग संबंध दीजिए।

अब हम कुछ विशेष प्रकार के संबंधों पर नज़र डालेंगे, जिन्हें आप गणित के अन्य पाठ्यक्रमों में प्रायः प्रयोग करेंगे।

परिभाषा : किसी समुच्चय S पर परिभाषित एक संबंध R को

i) **स्वतुल्य (reflexive)** कहते हैं, यदि $a\ R\ a\ \forall\ a \in S$ हो, अर्थात् $(a, a) \in R\ \forall\ a \in S$.

ii) **सममित (symmetric)** कहते हैं, यदि $a\ R\ b \Rightarrow b\ R\ a\ \forall\ a, b \in S$ हो, अर्थात् $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$.

iii) **संक्रामक (transitive)** कहते हैं, यदि $a\ R\ b$ और $b\ R\ c \Rightarrow a\ R\ c\ \forall\ a, b, c \in R$, अर्थात् $(a, b) \in R$ और $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$.

इन संकल्पनाओं से आप को आदी कराने की सहायता के लिए, निम्नलिखित उदाहरणों को लीजिए।

उदाहरण 1: उन मानव प्राणियों, जो 2016 में जीवित थे, का समुच्चय H लीजिए। H पर संबंध R पर विचार कीजिए, जो 'a R b यदि और केवल यदि समुच्चय H में किन्हीं दो मानव प्राणियों a और b के लिए 1 जनवरी 2016 को a और b के समान भार थे' से दिया जाता है। क्या R स्वतुल्य, सममित या संक्रामक है? अपने उत्तरों के कारण दीजिए।

हल : किसी भी मानव प्राणी का निश्चित रूप से उतना ही भार होगा, जितना उसका खुद का है। अतः, प्रत्येक $h \in H$ के लिए $h\ R\ h$ है। इसलिए R स्वतुल्य है।

यदि $a, b \in H$ इस प्रकार हैं कि a और b के समान भार हैं, तो b और a के निश्चित रूप से समान भार होंगे। अतः, $a\ R\ b \Rightarrow b\ R\ a\ \forall\ a, b \in H$. इस प्रकार, R सममित है। अंत में, $a, b, c \in H$ के लिए, यदि a और b के समान भार हैं तथा b और c के समान भार हैं, तो a और c के भी समान भार होंगे।

अतः, a R b और b R c $\Rightarrow$ a R c. इस प्रकार, R संक्रामक है।

***

उदाहरण 2: $\mathbb{Z}$ पर संबंध R पर विचार कीजिए, जो 'a R b यदि और केवल यदि $a \gneq b$' द्वारा दिया जाता है। निर्धारित कीजिए कि R स्वतुल्य, सममित या संक्रामक है या नहीं।

'$a \gneq b$' व्यक्त करता है कि 'a, b से बड़ा है।'

हल : क्योंकि $a \gneq a$ सत्य नहीं है, इसलिए a R a सत्य नहीं है। अतः, R स्वतुल्य नहीं है। यदि $a \gneq b$ है, तो निश्चित रूप से $b \gneq a$ सत्य नहीं है। अर्थात् a R b से b R a नहीं निकलता है। अतः, R सममित नहीं है।

क्योंकि $a \gneq b$ और $b \gneq c$ से $a \gneq c$ प्राप्त होता है, इसलिए a R b और b R c $\Rightarrow$ a R c. इस प्रकार, R संक्रामक है।

***

उदाहरण 3: मान लीजिए कि S एक अरिक्त समुच्चय है। मान लीजिए $\wp(S)$, S के घात समुच्चय, अर्थात् S के सभी उपसमुच्चयों के समुच्चय, को व्यक्त करता है। अर्थात् $\wp(S) = \{A \mid A \subseteq S\}$. $\wp(S)$ पर $R = \{(A, B) \mid A \subseteq B\}$ द्वारा संबंध R को परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि R स्वतुल्य, सममित या संक्रामक है या नहीं।

हल : क्योंकि $A \subseteq A \; \forall \; A \in \wp(S)$, इसलिए $(A, A) \in R \; \forall \; A \in \wp(S)$. इस प्रकार R स्वतुल्य है।

मान लीजिए कि $(A, B) \in R$. तब, $A \subseteq B$. परंतु B का A में आविष्ट होना आवश्यक नहीं है। उदाहरणार्थ, $(\phi, S) \in R$ है, परंतु $(S, \phi) \notin R$. इस प्रकार, R सममित नहीं है। यदि $A \subseteq B$ और $B \subseteq C$. तो $A \subseteq C \; \forall \; A, B, C \in \wp(S)$, अर्थात् $(A, B) \in R$ और $(B, C) \in R \Rightarrow (A, C) \in R$. (इकाई 1 का E10 देखिए।)

इस प्रकार, R संक्रामक है।

***

टिप्पणी 2: इस भाग में अभी तक दिए गए सभी उदाहरणों में, जब हमने X से X तक या X से Y तक के संबंधों की बात की है, तब X और Y अरिक्त थे। परंतु एक संबंध को रिक्त समुच्चय पर भी परिभाषित किया जा सकता है। इसको **रिक्त संबंध (empty relation)** कहते हैं।

अब आप निम्नलिखित प्रश्नों को कीजिए।

E3) $\mathbb{R}$ पर संबंध 'a R b यदि और केवल यदि a = b' पर विचार कीजिए। जाँच कीजिए कि क्या R स्वतुल्य, सममित या संक्रामक है।

E4) संबंध $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, '$(a, b) \in \mathbb{R}$ यदि और केवल यदि 5, $\mathbb{N}$ में $a - b$ को विभाजित करता है' द्वारा परिभाषित है। क्या R

i) स्वतुल्य है?

ii) सममित है?

iii) संक्रामक है?

अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।

E5) उदाहरणों द्वारा दर्शाइए कि E1 में दिया संबंध स्वतुल्य, सममित या संक्रामक क्यों नहीं है।

E6) जाँच कीजिए कि $R = \{(A, B) \mid A \not\subset B, A, B \in \wp(S)\}$ संक्रामक है या नहीं, जहाँ S में कम से कम दो अवयव हैं।

E3 में दिया संबंध स्वतुल्य, सममित और संक्रामक है। यह ऐसे संबंध का उदाहरण है जिसे अब हम परिभाषित करेंगे।

परिभाषा : किसी समुच्चय S पर एक संबंध R **तुल्यता संबंध (equivalence relation)** कहलाता है, यदि R स्वतुल्य, सममित और संक्रामक होता है। आप इन संबंधों के बारे में, गणित के अन्य पाठ्यक्रमों में काफी पढेंगे और उपयोग करेंगे।

अब आइए 'एक समुच्चय पर संबंध' को एक समुच्चय से दूसरे समुच्चय तक के संबंध के रूप में व्यापीकृत करें। आप देख चुके हैं कि समुच्चय X पर एक संबंध $X \times X$ का एक उपसमुच्चय होता है। अतः, शायद आप व्यापकीकृत रूप की निम्नलिखित परिभाषा की अपेक्षा कर रहे हों।

परिभाषा : मान लीजिए कि X और Y दो समुच्चय हैं। **X से Y तक का एक संबंध** $X \times Y$ का एक उपसमुच्चय है।

उदाहरणार्थ, मान लीजिए कि H मानव प्राणियों का समुच्चय है $W \subseteq H$ भारत में महिला ड्राइवरों का समुच्चय है तथा Y भारत में 2 अक्टूबर, 2018 को वैध ड्राइविंग लाइसेंसों का समुच्चय है। तब, $R = \{(w, y) \mid w \in W, y \in Y\}$, H से Y तक एक संबंध है। ध्यान दीजिए कि $R = W \times Y$, $H \times Y$ का एक उपसमुच्चय है।

इक अन्य उदाहरण $H \times L$ का उपसमुच्चय R है, जहाँ H मानव प्राणियों का समुच्चय है तथा L विश्व में 2018 में भाषाओं का समुच्चय है, जहाँ $(h, \ell) \in R$ यदि और केवल यदि h भाषा ℓ प्रयोग करती है। अतः, उदाहरण के लिए, $(x, I) \in R$, जहाँ I भारतीय इंगित भाषा है तथा x इस भाषा को प्रयोग करती है।

आइए अब विशेष प्रकार के ऐसे संबंधों पर नज़र डालें, जिनमें युग्म के दूसरे अवयव का चुनाव बहुत अधिक महत्त्वपूर्ण है।

2.3 फलन

संबंध $R = H \times L$ पर विचार कीजिए, जो हमने ऊपर भाग 2.2 के अंत में दिया था। यहाँ हम यह भी कहते हैं कि $x R y$ यदि $(x, y) \in R$ है। ध्यान दीजिए कि x मानव प्राणी है/था तथा y, 2018 में इस्तेमाल की जाने वाली एक भाषा है।

अब, आइए R के एक उपसमुच्चय R′ को लें, जहाँ 'x R′ y यदि और केवल यदि $x \in H$ तथा y, x की प्रथम भाषा है'। अब क्योंकि प्रत्येक व्यक्ति की एक और केवल एक ही

प्रथम भाषा होती है, इसलिए x दिया रहने पर, एक और केवल एक ही $y \in L$ होगा जिसके लिए $(x, y) \in R'$ है। अतः, $R' \subseteq H \times L$ है।

ध्यान दीजिए कि

i) प्रत्येक $x \in H$ के लिए, **कम से कम एक** $y \in L$ है जिसके लिए $(x, y) \in R'$ है।

ii) प्रत्येक $x \in H$ के लिए, **केवल एक** $y \in L$ है जिसके लिए $(x, y) \in R'$ है।

इस प्रकार का संबंध R′ एक 'फलन' का उदाहरण है, जैसा कि आप शीघ्र ही देखेंगे।

आइए एक अन्य उदाहरण लें। मान लीजिए H मानव प्राणियों का समुच्चय है तथा W महिलाओं का समुच्चय है। मान लीजिए कि H से W तक R_M एक ऐसा संबंध है कि प्रत्येक $h \in H$ के लिए, $h R_M w$ है, जहाँ w, h को जन्म देने वाली माँ है। तब, हम देखते हैं कि

i) प्रत्येक $h \in H$ के लिए, $\exists\, w \in W$ जिसके लिए $h R_M w$ है।

ii) प्रत्येक $h \in H$ के लिए, केवल एक ऐसा w है जिसके लिए $h R_M w$ है।

iii) H के अनेक ऐसे अवयव, मान लीजिए $\cap_1, \cap_2, \ldots h_\cap$ हो सकते हैं, जिनकी एक ही जन्म देने वाली माँ m हो, अर्थात् $h_1 R_M m, h_2 R_M m, \ldots, h_n R_M m$.

ऊपर दिए गए R_M के गुण हमें बताते हैं कि R_M एक 'फलन' है।

परिभाषाएँ : i) एक अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B तक का **फलन (function)** f, A से B तक एक संबंध है जो A के प्रत्येक अवयव को B के एक और केवल एक ही अवयव से जोड़ता है। इसे $\mathbf{f : A \to B}$, या $\mathbf{A \xrightarrow{f} B}$, लिखा जाता है।

फलन की यह परिभाषा 1837 में दिरिख़ले (Dirichlet) ने दी थी, तथा तभी से प्रयोग की जा रही है।

ii) यदि $f, a \in A$ से अवयव $b \in B$ को जोड़ता है, तो हम $\mathbf{f(a) = b}$ लिखते हैं, तथा b, a **पर फलन f का मान** कहलाता है।

iii) A, f का **प्राँत (domain)** कहलाता है तथा B, f का **सह-प्राँत (co-domain)** कहलाता है।

iv) समुच्य $f(A) = \{f(a) \in A\}$, f का **परिसर (range)** कहलाता है। जैसा कि आप देख सकते हैं, f का परिसर f के सह-प्राँत का उपसमुच्चय है, अर्थात् $f(A) \subseteq B$.

ध्यान दीजिए कि यदि $f : A \to B$ है, तो

i) A के प्रत्येक अवयव को हम B के किसी एक अवयव से संबद्ध करते हैं।

ii) A के प्रत्येक अवयव को, हम B के **केवल एक** ही अवयव से संबद्ध करते हैं। अतः, यदि $a \in A$ तथा $f(a) = b_1$ और $f(a) = b_2$, तो $b_1 = b_2$ होगा। अर्थात्, यदि (a, b_1) और (a, b_2) फलन f के अवयव हैं, तो $b_1 = b_2$ होगा।

iii) A के दो या अधिक अवयवों को B के एक ही अवयव से संबद्ध किया जा सकता है, अर्थात् $a_1, a_2 \in A$ ऐसे हो सकते हैं जिनके लिए $a_1 \neq a_2$ लेकिन $(a_1, b) = (a_2, b)$.

टिप्पणी 3: 'फलन' के लिए सामान्यतः इस्तेमाल किए जाने वाले कुछ अन्य शब्द हैं। प्रतिचित्रण (mapping), रूपांतरण (transformation), संकारक (operator).

एक उदाहरण पर विचार कीजिए। मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3\}$ और $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. $f : A \to B$ को $f(1) = 1, f(2) = 4, f(3) = 9$ से परिभाषित कीजिए। तब, f एक फलन है, जिसका प्राँत A, सह-प्राँत B और परिसर $\{1, 4, 9\}$ है।

इस स्थिति में, ध्यान दीजिए कि प्रत्येक $x \in A$ के लिए, $f(x) = x^2$. हम इसे $f : A \to B : f(x) = x^2$ या $f\{(x, x^2) \mid x \in A\}$ लिख सकते हैं। यदि हम $g : A \to B$ को $g(1) = 1, g(2) = 1, g(3) = 4$ से परिभाषित करते हैं, तो g भी एक फलन है, जिसके प्राँत और सह-प्राँत वही हैं जो f के हैं, अर्थात् क्रमशः A और B हैं। परंतु g का परिसर $\{1, 4\}$ है।

टिप्पणी 4: उपरोक्त उदाहरण से हमें यह पता चलता है कि एक ही प्राँत और सह-प्राँत वाले अनेक विभिन्न फलन परिभाषित किए जा सकते हैं।

टिप्पणी 5: जब A से B तक का कोई संबंध एक फलन की शर्तों को संतुष्ट नहीं करता है, तब हम कह सकते हैं कि यह एक **सुपरिभाषित फलन नहीं** है।

उदाहरणार्थ, यदि $A = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ तथा $B = \{1, 5, 7\}$, तो $\alpha(1) = 1, \alpha(1) = 5$ वाला $\alpha: A \to B$ सुपरिभाषित नहीं है। (क्यों?)

अब कुछ प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E7) मान लीजिए कि X कोची के निवासियों का समुच्चय है तथा Y सभी 10-अंक वाली संख्याओं का समुच्चय है। X से Y तक, स्पष्ट रूप से उसके प्राँत और परिसर को देते हुए, एक फलन परिभाषित कीजिए।

E8) i) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} : f(n) = \dfrac{n}{n+1}$ पर विचार कीजिए। दर्शाइए कि f एक फलन है।

ii) एक ऐसे फलन g को परिभाषित कीजिए जिसका प्राँत और सह-प्राँत वही हों, जो उपरोक्त f के हैं, परंतु उनके प्राँत में कम से कम एक x ऐसा हो, जिसके लिए $f(x) \neq g(x)$ हो।

E9) $\mathbb{N}$ से $\mathbb{Q}$ तक एक संबंध परिभाषित कीजिए जो फलन नहीं हो। संबंध के अपने चुनाव की पुष्टि दीजिए।

E8 हमें नीचे परिभाषित धारणा की ओर ले जाता है।

परिभाषा: दो फलनों **f और g को बराबर** कहा जाता है, यदि

i) प्राँत f = प्राँत g हो, तथा

ii) $f(x) = g(x) \; \forall \; x \in$ प्राँत f (जिसका मतलब है कि परिसर f = परिसर g).

इस प्रकार, उदाहरणार्थ, फलन $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x - 1$ और $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : g(0) = 7$, $g(x) = x - 1, \forall \; x \neq 0, x \in \mathbb{R}$ बराबर नहीं हैं, क्योंकि $f(0) \neq g(0)$.

अब इससे संबंधित एक प्रश्न करने का प्रयास कीजिए।

E10) यदि f और g प्राँत A और परिसर B वाले दो फलन हैं, तो f = g. यह कथन सत्य है या नहीं? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

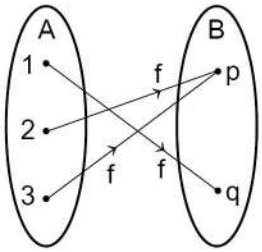
आइए अब विशेष गुणों वाले फलनों को देखें।

'f एकैकी है' को संक्षिप्त रुप से 'f, 1 – 1 है' से दर्शाया जाता है।

परिभाषा: फलन $f : A \to B$ एक **एकैकी (injective) फलन** कहलाता है, यदि f, A के अवयवों को B के अलग-अलग अवयवों से संबंधित कराता है, अर्थात् यदि $a_1, a_2 \in A$. तथा $a_1 \neq a_2$ है, तो $f(a_1) \neq f(a_2)$.

दूसरे शब्दों में, **f, 1 – 1 है यदि** $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$. यदि f एकैकी है, तो यह एक **एकैक (injection)** भी कहलाता है।

उदाहरणार्थ, फलन $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, ..., 10\} : f(i) = 1, = f(2) = 4, f(3) = 9$ पर विचार कीजिए। आप देख सकते हैं कि यह प्राँत के अलग अवयवों को सह-प्राँत के अलग अवयवों पर ले जाता है। अतः f, 1 – 1 है।



चित्र 1: $f : A \to B$

अब, आइए समुच्चयों और फलनों के एक अन्य उदाहरण पर विचार करें। मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3\}, B = \{p, q\}$ है। मान लीजिए कि $f : A \to B, f(1) = q, f(2) = p, f(3) = p$ द्वारा परिभाषित है। तब, f एक फलन है, जिसमें f का परिसर = B = f का सह-प्राँत है। (f का चित्रित निरूपण चित्र 1 में दिया गया है।) जैसा कि आप देखेंगे, यह एक आच्छादक फलन का उदाहरण है।

परिभाषा : फलन $f : A \to B$ एक **आच्छादक (onto** or **surjective)** फलन, कहलाता है, यदि f का परिसर उसके सह-प्राँत B के बराबर है। दूसरे शब्दों में, f आच्छादक होता है, यदि $f(A) = B$. इसका अर्थ है कि किसी $b \in B$ के लिए, एक $a \in A$ ऐसा है जिससे कि $f(a) = b$ है।

यदि f आच्छादक है, तो इसे **आच्छादन** भी कहते हैं।

आपको इस प्रकार के फलन अनेक बार अपने गणित पाठ्यक्रमों में देखने को मिलेंगे।

आइए एक आच्छादक फलन के एक अन्य उदाहरण पर विचार करें। दो अरिक्त समुच्चयों A और B पर विचार कीजिए। हम फलन $\pi_1 : A \times B \to A : \pi_1((a, b)) = a$ से परिभाषित करते हैं। π_1, $A \times B$ का A पर **प्रक्षेप (projection)** कहलाता है। आप देख सकते हैं कि π_1 का परिसर संपूर्ण A है, क्योंकि किसी भी $a \in A$ के लिए, $\pi_1(a, b) = a$ है, चाहे b कुछ भी हो। अतः, π_1 आच्छादक है। ध्यान दीजिए कि यदि B में एक से अधिक अवयव हों, तो π_1, 1 – 1 नहीं होगा। (क्यों?)

इसी प्रकार, $\pi_1 : A \times B \to B : \pi_2((a, b)) = b$, $A \times B$ का B पर प्रक्षेप, एक आच्छादक फलन है।

क्योंकि π_1 (या π_2) आच्छादक फलन है, इसलिए हम यह भी कहते हैं कि π_1 (क्रमशः π_2) $A \times B$ से A (क्रमशः B) **पर** आच्छादक फलन है।

और अब हम एक ऐसे फलन को परिभाषित करते हैं जो उन दोनों गुणों का संयोजन है, जिनका अध्ययन अभी आपने किया है।

परिभाषाः यदि कोई फलन $f: A \to B$ एकैकी और आच्छादक दोनों है, तो यह ए**कैकी आच्छादक (bijective)** फलन, या **एकैकी आच्छादन,** कहलाता है।

आइए, कुछ फलनों के उदाहरण पर विचार करें। पहला ऐसे फलन का है जिसका आप बार-बार प्रयोग करेंगे।

उदाहरण 4: मान लीजिए कि A कोई भी अरिक्त समुच्चय है। फलन
$I_A : A \to A : I_A(a) = a, A$ पर **तत्समक फलन (identity function)** कहलाता है। दर्शाइए कि I_A एकैकी आच्छादक है।

हल : किसी भी $a \in A$ के लिए, $I_A(a) = a$ है। इस प्रकार, I_A का परिसर संपूर्ण A है। अर्थात् I_A एकैकी है।

I_A, 1 – 1 भी है, क्योंकि यदि $a_1, a_2 \in A$ ऐसे हैं कि $a_1 \neq a_2$, तो $I_A(a_1) \neq I_A(a_2)$. इस प्रकार, I_A एकैकी आच्छादक है।

***

उदाहरण 5: फलन $f: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\} : f(1) = f(2) = f(3) = 1$ को परिभाषित करते हैं। यह फलन f एक **अचर (constant)** फलन का उदाहरण है। जाँच कीजिए कि f एकैकी आच्छादक है या नहीं।

हलः f का प्राँत $\{1, 2, 3\}$ है तथा परिसर एकल $\{1\} \neq \{1, 2, 3\}$ है। अतः, f आच्छादक नहीं है।

$f: A \to B : f(a) = c \; \forall \; a \in A$ एक **अचर फलन** कहलाता है।

आगे, $f(1) = f(2)$ और $1 \neq 2$ है, इसलिए f एकैकी भी नहीं है।

***

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E11) मान लीजिए कि $f(n) = n + 5$ द्वारा $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ परिभाषित है। f को उसके प्राँत और परिसर के कार्तीय गुणनफल के एक उपसमुच्चय के रूप में लिखिए। सिद्ध कीजिए कि f एकैकी है परंतु आच्छादक नहीं है।

E12) मान लीजिए कि $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : f(n) = n + 5$ है। सिद्ध कीजिए कि f एकैकी और आच्छादक दोनों हैं।

E13) अचर फलन $f: X \to \{c\}$ को एकैकी होने के लिए, X को किस प्रकार का होना चाहिए? क्या f आच्छादक है? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।

आगे बढ़ने से पहले, आइए संक्षिप्त रूप से परिमितता पर दृष्टि डाल लें। इकाई 1 में हमने परिमित और अनंत समुच्चयों की चर्चा की थी। आइए देखें कि इसका गणितीय रूप से क्या अर्थ है।

उदाहरण 6: दर्शाइए कि कोई भी **समुच्चय A परिमित होता है यदि और केवल यदि किसी $n \in \mathbb{N}$ के लिए, A और $\{1, 2, ..., n\}$ के बीच एक एकैकी आच्छादन होता है।**

हल : मान लीजिए A एक परिमित समुच्चय है और $|A| = m$. मान लीजिए कि $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. $f = A = \{1, 2, ..., m\} : f(a_i) = i$ को परिभाषित कीजिए।
आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि f एकैकी और आच्छादक दोनों हैं तथा इसी लिए एकैकी आच्छादक है। विलोमतः, मान लीजिए कि किसी $n \in \mathbb{N}$ के लिए, A से $\{1, 2, ..., n\}$ तक g एक एकैकी आच्छादक फलन है। क्योंकि g आच्छादक है, इसलिए इसका परिसर वही है जो इसका सह-प्राँत है, अर्थात् $\{g(a) \mid a \in A\} = \{1, 2, ..., n\}$ है।
अतः, $|g(A)| = n$ है।
क्योंकि g, 1 – 1 है, इसलिए $|A| = |g(A)| = n$ है। इसीलिए A परिमित है।

***

टिप्पणी 6: प्रायः, उदाहरण 6 में दिया गया प्रतिबंध परिमितता की परिभाषा मानी जाती है।

अब आइए दिए हुए फलनों से नए फलनों को बनाने की एक बहुत महत्त्वपूर्ण विधि का अध्ययन करें।

2.4 फलनों का संयोजन

आइए, शुरू करें दो फलनों $f = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{N}\}$ और $g = \{(z, -z) \mid z \in \mathbb{Z}\}$ को लेकर। यहाँ f का परिसर $\mathbb{Z}$ का एक उपसमुच्चय है, और $\mathbb{Z}$, g का प्राँत है। आइए f और g को 'मिला कर', h को निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित करें :

प्राँत h = प्राँत f, सह-प्राँत h = सह-प्राँत g तथा परिसर $h \subseteq$ परिसर g.

$x \in \mathbb{N}$ के लिए, $h(x) = g(f(x))$

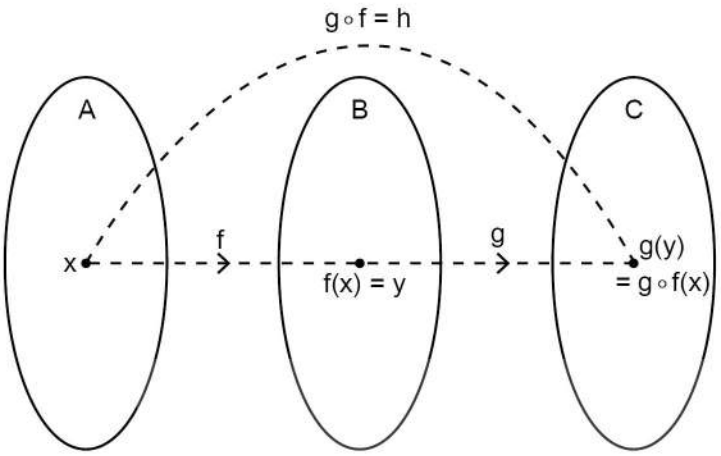
$= g(x^2) = -x^2$ लीजिए (देखिए चित्र 2)।

इसलिए, $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : h(x) = g(f(x))$.

अधिक व्यापक रूप में, यदि $f : A \to B$ और $g : B \to C$ फलन हैं, तो एक नया फलन $h : A \to C$ प्राप्त करने के लिए, g और f को मिलाकर बनाने की एक स्वाभाविक विधि है, जो नीचे दी है :

प्रत्येक $x \in A$ के लिए, $h(x)$ को सूत्र $h(x) = g(f(x))$ द्वारा परिभाशित किया जाता है।

ध्यान दीजिए कि $f(x) \in B$ है। इसलिए, $g(f(x))$, C का एक अवयव होगा। इस फलन h को g और f का **संयोजन** कहते हैं तथा इसे $g \circ f$ लिखा जाता है। $g \circ f$ का प्राँत A है तथा इसका सह-प्राँत C है, अर्थात् $g \circ f : A \to C$ है (देखे चित्र 2)।



चित्र 2: f और g का संयोजन

आइए इसके कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 7: मान लीजिए कि $f(x) = x^2$ और $g(x) = x + 1$ द्वारा $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ और $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ परिभाषित हैं। क्या $g \circ f$ या $f \circ g$ परिभाषित हैं? यदि हाँ, तो $g \circ f$ क्या है, तथा $f \circ g$ क्या है?

हल: हम, देखते हैं कि f का परिसर $\mathbb{R}$ का एक उपसमुच्चय है, और $\mathbb{R}$, g का प्राँत है। इसलिए, $g \circ f$ परिभाषित है।

परिभाषा से, $\forall\, x \in \mathbb{R}, g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = x^2 + 1.$

अब, आइए देखें कि क्या $f \circ g$ परिभाषित है। क्योंकि g का परिसर f के प्राँत का एक उपसमुच्चय है, इसलिए $f \circ g$ परिभाषित है। अतः,

$\forall\, x \in \mathbb{R}, f \circ g(x) = f(g(x)) = [g(x)]^2 = (x + 1)^2.$

अतः, $f \circ g$ और $g \circ f$ दोनों परिभाषित हैं, परंतु $g \circ f \neq f \circ g$. (उदाहरणार्थ, $g \circ f(1) \neq f \circ g(1)$.)

***

उदाहरण 8: मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3\}, B = \{p, q, r\}$ और $C = \{x, y\}$ हैं। मान लीजिए कि $f : A \to B, f(1) = p, f(2) = q, f(3) = r$ द्वारा परिभाषित है। मान लीजिए कि $g : B \to C, g(p) = x, g(q) = y, g(r) = y$ द्वारा परिभाषित है। निर्धारित कीजिए कि $f \circ g$ और $g \circ f$ परिभाषित किए जा सकते हैं या नहीं।

हल : यहाँ प्राँत $f = A$, परिसर $f = \{p, r\}$, प्राँत $g = B$ और परिसर $g = C$. $f \circ g$ के परिभाषित होने के लिए, यह आवश्यक है कि g का परिसर f के प्राँत का उपसमुच्चय हो। क्योंकि C, A का उपसमुच्चय नहीं है, इसलिए $f \circ g$ को परिभाषित नहीं किया जा सकता है।

क्योंकि f का परिसर g के प्राँत का उपसमुच्चय है, इसलिए $g \circ f$ परिभाषित है। साथ ही, $g \circ f : A \to C$ इस प्रकार है कि

$g \circ f(1) = g(f(1)) = g(p) = x,$

$g \circ f(2) = g(f(2)) = g(p) = x,$

$g \circ f(3) = g(f(3)) = g(r) = y.$

इसलिए, $g \circ f$ आच्छादक है। ध्यान दीजिए कि g भी आच्छादक है।

***

टिप्पणी 7: ध्यान दीजिए कि $g \circ f$ के परिभाषित होने के लिए हमें केवल परिसर $f \subseteq$ प्राँत g की ज़रूरत है। यहाँ सह-प्राँत f को प्राँत g के बराबर होना आवश्यक नहीं है।

तो, अब आइए संयोजन की संक्रिया को औपचारिक रूप से परिभाषित करें।

परिभाषा : मान लीजिए कि $f: A \to B$ और $g: C \to D$ दो ऐसे फलन जिनके लिए परिसर $f \subseteq C$ है। तब, **g और f का संयोजन (composition)** फलन $g \circ f: A \to D : g \circ f(a) = g(f(a))$ होता है।

अब फलनों के संयोजन पर कुछ प्रश्न कीजिए।

E14) निम्नलिखित में से प्रत्येक भाग में, f और g दोनों $\mathbb{R}$ से $\mathbb{R}$ तक फलन हैं। $f \circ g$ और $g \circ f$ को परिभाषित कीजिए।

i) $f(x) = 5x, g(x) = x + 5,$

ii) $f(x) = 5x, g(x) = x/5.$

E15) पुष्टि देते हुए, फलनों f और g का एक ऐसा उदाहरण दीजिए जहाँ न तो $f \circ g$ परिभाषित हो और न ही $g \circ f$ परिभाषित हो।

E16) मान लीजिए कि $f: A \to B$ और $g: C \to D$ दो फलन हैं जहाँ $B \subseteq C$.
निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।

i) परिसर $g \supseteq$ परिसर $g \circ f$.

ii) परिसर $g =$ परिसर $g \circ f$.

iii) यदि f एकैकी है, तो $g \circ f$ भी एकैकी होगा।

iv) यदि g आच्छादक है, तो $g \circ f$ भी आच्छादक होगा।

E16 करते समय, शायद आपके दिमाग़ में एक प्रश्न उठा हो कि $g \circ f$ के गुणों तथा f और g के गुणों में किसी प्रकार का संबंध है या नहीं। उदाहरणार्थ, यदि $g \circ f$ आच्छादक या $1 - 1$ है, तो हम क्या अपेक्षा कर सकते हैं? इस संदर्भ में, निम्नलिखित प्रमेय पर विचार कीजिए।

प्रमेय 1: मान लीजिए कि $f: A \to B$ और $g: C \to D$ दो ऐसे फलन हैं कि $g \circ f$ परिभाषित है। तब,

i) यदि $g \circ f$ एकैकी है, तो f भी एकैकी होगा।

ii) यदि $g \circ f$ आच्छादक है, तो g भी आच्छादक होगा।

उपपत्ति: ध्यान दीजिए कि $g \circ f: A \to D : g \circ f(x) = g(f(x))$.

आइए पहले (i) को सिद्ध करें। हमें दिया है कि $g \circ f$, $1 - 1$ है। यह दर्शाने के लिए कि f एकैकी है, मान लीजिए कि $a_1, a_2 \in A$ ऐसे हैं कि $f(a_1) = f(a_2)$.

तब, $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$, क्योंकि g सुपरिभाषित है।

अतः, $g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2)$.

$a_1 = a_2$, क्योंकि $g \circ f$ एकैकी है।

अतः, हमने दर्शा दिया है कि $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$, अर्थात् f एकैकी है।

अब, आइए (ii) को सिद्ध करें। यहाँ, हमें दिया है कि $g \circ f$ आच्छादक है। यह दर्शाने के लिए कि g आच्छादक है, मान लीजिए कि $d \in D$ है। क्योंकि $g \circ f$ आच्छादक है, इसलिए एक $a \in A$ ऐसा है कि $g \circ f(a) = d$ है। इसका अर्थ है कि $g(f(a)) = d$ है। इस प्रकार, किसी भी $d \in D$ के दिए रहने पर, $\exists f(a) \in C$, जिसके लिए $g(f(a)) = d$, जो यह दर्शाता है कि g आच्छादक है। ■

उपरोक्त प्रमेय में, क्या आपने ध्यान दिया कि जब $g \circ f$ एकैकी है, हमने g की एकैकिता के बारे में कुछ भी नहीं कहा है? क्या आप अपेक्षा करते हैं कि g एकैकी होगा? उदाहरणार्थ, यदि $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : f(n) = \sqrt{n}$ है तथा $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : g(x) = x^2$ है, तो $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : g \circ f(n) = n$ है। अतः, $g \circ f$, 1 – 1 है, परंतु g नहीं है। (क्यों?)

अब हम एक प्रमेय पर आते हैं, जो हमें यह दर्शाता है कि तत्समक फलन उसी प्रकार व्यवहार करता है, जिस प्रकार गुणन के लिए, संख्या $1 \in \mathbb{R}$ करती है। अर्थात्, यदि हम किसी फलन f का एक 'उपयुक्त' तत्समक फलन के साथ संयोजन लें (देखिए उदाहरण 4), तो हमें वही फलन f प्राप्त हो जाता है।

प्रमेय 2: मान लीजिए कि A और B समुच्चय हैं।

i) किसी भी फलन $f : A \to A$ के लिए, $f \circ I_A = I_A \circ f = f$ होता है।

ii) किसी भी फलन $g : B \to A$ के लिए, $I_A \circ g = g$ और $g \circ I_B = g$ होता है।

उपपत्ति : हम यहाँ (i) को सिद्ध करेंगे तथा (ii) की उपपत्ति आपके लिए छोड़ रहे हैं (देखिए E17)।

(i) क्योंकि f और I_A दोनों A से A तक परिभाषित हैं, इसलिए दोनों संयोजन $f \circ I_A$ और $I_A \circ f$ परिभाषित हैं। इसके साथ ही,

$\forall x \in A, f \circ I_A(x) = f(I_A(x)) = f(x)$. अतः, $f \circ I_A = f$.

साथ ही, $\forall x \in A, I_A \circ f(x) = I_A(f(x)) = f(x)$. अतः, $I_A \circ f = f$. ■

प्रमेय 2 की उपपत्ति पूरी करने के लिए, प्रश्नों के अगले संग्रह को करने का प्रयास कीजिए।

E17) प्रमेय 2 (ii) को सिद्ध कीजिए।

E18) दर्शाइए कि यदि f और g ऐसे दो फलन हैं कि $f \circ g$ एकैकी है, तो g का एकैकी होना आवश्यक नहीं है।

E17 को करते समय, क्या आपने ध्यान दिया कि पहली समिका में I_A का प्रयोग क्यों किया गया तथा दूसरी समिका में I_B का प्रयोग क्यों किया गया है? जब हमने पहले 'उपयुक्त' तत्समक फलन कहा था, उसका यही मतलब था। हमें ऐसे समुच्चय के तत्समक फलन को चुनने की आवश्यकता है जिससे संबंधित संयोजन परिभाषित हो जाए।

अब, शून्येतर वास्तविक संख्याओं के समुच्चय $\mathbb{R}^*$ की स्थिति में, आप जानते हैं कि $x \in \mathbb{R}^*$ दिया रहने पर $\exists y \in \mathbb{R}^*$ जिससे कि $xy = 1$ है। यह संख्या y, x का गुणनात्मक प्रतिलोम कहलाती है। इसी प्रकार, कुछ फलनों के लिए, हम प्रतिलोम फलन परिभाषित कर सकते हैं। यहाँ संख्याओं के गुणन के स्थान पर, हम फलनों का संयोजन लेंगे।

उदाहरणार्थ, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x + 3$ पर विचार कीजिए। यदि हम $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : g(x) = x - 3$ परिभाषित करें, तो $f \circ g$ और $g \circ f$ दोनों परिभाषित हैं।
आगे, $f \circ g(x) = f(g(x)) = g(x) + 3 = (x - 3) + 3 = x \; \forall \; x \in \mathbb{R}$.
अतः, $f \circ g = I_{\mathbb{R}}$ है। आप इसका भी सत्यापन कर सकते हैं कि $g \circ f = I_{\mathbb{R}}$.
इस स्थिति में, हम g को f का प्रतिलोम कहते हैं, जैसे आप निम्न परिभाषा में देखेंगे।

परिभाषा : मान लीजिए $f : A \to B$ एक दिया हुआ फलन है। यदि एक ऐसा फलन $g : B \to A$ है जिससे कि $f \circ g = I_B$ और $g \circ f = I_A$ हो, तो g, f का **प्रतिलोम (inverse)** कहलाता है, तथा हम इसे $\mathbf{g = f^{-1}}$ लिखते हैं।

अतः, परिभाषा से पहले दिए उदाहरण में, $g = f^{-1}$ और $f = g^{-1}$ है। ध्यान दीजिए कि इस उदाहरण में, f, x में 3 को जोड़ता है तथा g इसका विपरीत करता है, अर्थात् x में से 3 को घटाता है। अतः वास्तव में f और g, x पर एक दूसरे की क्रियाओं का शून्यीकरण कर देते हैं। इस प्रकार, एक दिए हुए फलन का प्रतिलोम ज्ञात करने की कुंजी है : f^{-1} प्राप्त करने के लिए, $f(x)$ से x वापिस प्राप्त करने का प्रयास कीजिए।

एक अन्य उदाहरण के लिए, $f(x) = 3x + 5$ द्वारा परिभाषित $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ लीजिए। हम $3x + 5$ से x कैसे वापिस प्राप्त कर सकते हैं? एक विधि यह है कि पहले 5 घटाएँ और फिर उसे 3 से भाग दें। अतः, हम $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : g(r) = \frac{r - 5}{3}$ से कोशिश करते हैं। हम पाते हैं कि

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{f(x) - 5}{3} = \frac{(3x - 5) - 5}{3} = x \; \forall \; x \in \mathbb{R}.$$

साथ ही, $f \circ g(x) = 3\,(g(x)) + 5 = 3\left[\frac{(x - 5)}{3}\right] + 5 = x \; \forall \; x \in \mathbb{R}$.

आइए देखें कि आपने एक फलन का प्रतिलोम प्राप्त करने की प्रक्रिया को समझ लिया है या नहीं।

E19) निम्नलिखित के प्रतिलोम क्या हैं?

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{x}{3}$,

ii) $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} : g(r) = 2r + \frac{5}{7}$.

उपरोक्त चर्चा ने आपके मन में एक प्रश्न उठाया होगा : क्या सभी फलनों के प्रतिलोम होते हैं? इसका उत्तर देने के लिए, निम्नलिखित उदाहरण पर विचार कीजिए।

उदाहरण 9: मान लीजिए कि $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 1 \; \forall x \in \mathbb{R}$ एक अचर फलन है। क्या f का कोई प्रतिलोम है?

हल : यदि f का प्रतिलोम $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ है, तो हमें $f \circ g = I_{\mathbb{R}}$ प्राप्त होगा, अर्थात् $\forall x \in \mathbb{R}$, $f \circ g(x) = x$. अब, उदाहरण के लिए, $x = 5$ लीजिए। हमें $f \circ g(5) = 5$ प्राप्त होना चाहिए,

अर्थात् $f(g(5)) = 5$ होना चाहिए। परंतु $f(g(5)) = 1$ है, क्योंकि $f(x) = 1 \forall x$. अतः, हम एक अंतर्विरोध पर पहुँच जाते हैं। इसलिए, f का कोई प्रतिलोम नहीं है।

***

इस उदाहरण को ध्यान में रखते हुए, आप उन प्रतिबंधों के बारे में पूछ सकते हैं जिनके अधीन f का एक प्रतिलोम होगा। इसका उत्तर निम्नलिखित प्रमेय में है।

प्रमेय 3: फलन $f: A \to B$ का प्रतिलोम होता है यदि और केवल यदि f एक एकैकी आच्छादक फलन है।

उपपत्ति : यहाँ, हमें दो कथनों को सिद्ध करना होगा :

i) यदि f एकैकी आच्छादक है, तो f का एक प्रतिलोम है।

ii) यदि f का एक प्रतिलोम है, तो f एकैकी आच्छादक है।

अतः, पहले मान लीजिए कि f एकैकी आच्छादक है। हम एक फलन $g: B \to A$ परिभाषित करेंगे तथा सिद्ध करेंगे कि $g = f^{-1}$ है।

मान लीजिए कि $b \in B$. क्योंकि f आच्छादक है, इसलिए $B = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$ है। अतः, कोई $a \in A$ ऐसा है कि $f(a) = b$ है। क्योंकि f एकैकी है, इसलिए ऐसा केवल एक $a \in A$ ही है। हम A के इस अद्वितीय अवयव a को $g(b)$ ले लेते हैं। अर्थात्, $b \in B$ दिया रहने पर, हम $g(b) = a$ परिभाषित करते हैं, जहाँ A का अवयव a ऐसा है जिसके लिए $f(a) = b$ है।

ध्यान दीजिए कि क्योंकि f आच्छादक है, इसलिए हम केवल $g(f(a)) = a$ द्वारा $g: B \to A$ को परिभाषित कर रहे हैं। यह परिभाषा सुनिश्चित कर देता है कि $g \circ f = I_A$.

हमें अभी भी यह दर्शाने की आवश्यकता है कि $f \circ g = I_B$. इसके लिए, मान लीजिए कि $b \in B$ और $g(b) = a$. तब, g की परिभाषा से, $f(a) = b$. इसलिए, $f \circ g(b) = f(a) = b$. अतः, $f \circ g = I_B$.

इस प्रकार, $f \circ g = I_B$ और $g \circ f = I_A$. इससे $g = f^{-1}$ सिद्ध हो जाता है।

आइए अब (ii) को सिद्ध करें। मान लीजिए कि f का एक प्रतिलोम है, और यह $g = f^{-1}$ है। हमें यह सिद्ध करना है कि f एकैकी आच्छादक है।

अब, $f \circ g = I_B$ और $g \circ f = I_A$ है। उदाहरण 4 से, आप जानते हैं कि I_A और I_B दोनों 1–1 और आच्छादी हैं। अतः, $f \circ g$ और $g \circ f$ दोनों $1 - 1$ और आच्छादी हैं।

अब प्रमेय 1 से, क्योंकि $g \circ f, 1 - 1$ है, इसलिए f भी $1 - 1$ है। साथ ही, क्योंकि $f \circ g$ आच्छादी है, इसलिए f भी आच्छादी है।

इस प्रकार, f एकैकी और आच्छादी है।

अतः, प्रमेय सिद्ध हो गया है। ■

इस प्रकार, उदाहरण 9 के फलन f में उपरोक्त प्रमेय के अनुप्रयोग से, हमें तुरंत ज्ञात हो जाएगा कि f^{-1} का अस्तित्व नहीं है, क्योंकि f एकैकी नहीं है।

अब निम्नलिखित प्रश्न को करने का प्रयास कीजिए।

E20) नीचे दिए अनुसार $\mathbb{R}$ से $\mathbb{R}$ तक परिभाषित फलनों f_1, f_2, f_3 पर विचार कीजिए। प्रत्येक के लिए, निर्धारित कीजिए कि क्या इसका एक प्रतिलोम है तथा जब प्रतिलोम का अस्तित्व हो, तो उसे ज्ञात कीजिए।

i) $f_1(x) = x^2 \; \forall \; x \in \mathbb{R}$;

ii) $f_2(x) = 0 \; \forall \; x \in \mathbb{R}$;

iii) $f_3(x) = 11x + 7 \; \forall \; x \in \mathbb{R}$.

इस भाग में, हमने फलनों पर एक संक्रिया की चर्चा की है। इससे पहले आपने समुच्चयों पर सम्मिलन और प्रतिच्छेदन जैसी संक्रियाओं का अध्ययन किया था। आइए इन सभी संक्रियाओं को एक व्यापक रूप से देखें।

2.5 द्विआधारी संक्रियाएँ

आप वास्तविक संख्याओं के समुच्चय पर योग और गुणन की संक्रियाओं से परिचित हैं। योग एक फलन है, जो $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ को $\mathbb{R}$ के अवयव $a + b$ से संबद्ध करता है। अतः, यह $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ से $\mathbb{R}$ तक एक फलन है। दूसरे शब्दों में, $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : +(a, b) = a + b$. क्या आप देख सकते हैं कि गुणन भी $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ से $\mathbb{R}$ तक एक फलन है? ये फलन $\mathbb{R}$ के किसी भी युग्म पर किए जा सकते हैं। ये द्विआधारी संक्रियाओं के उदाहरण हैं, जिन्हें अब हम परिभाषित करने जा रहे हैं।

परिभाषा : किसी अरिक्त समुच्चय S पर एक **द्विआधारी संक्रिया (binary operation)** $S \times S$ से S तक एक फलन होती है।

इस प्रकार, S पर एक द्विआधारी संक्रिया S के अवयवों के एक युग्म को S के एक अद्वितीय अवयव से संबद्ध करती है। शब्द 'द्विआधारी' का अर्थ 'युग्मों से संबद्ध' है। परंपरा अनुसार, एक द्विआधारी संक्रिया को $+, \circ, *$, इत्यादि जैसे प्रतीकों द्वारा व्यक्त किया जाता है। जैसा कि पहले बताया जा चुका है, $\mathbb{R}$ पर $+$ आर $\times$ द्विआधारी संक्रियाएँ हैं। एक अन्य उदाहरण है

$$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : a * b = \frac{a + b}{2}.$$

एक अन्य उदाहरण के लिए, एक समुच्चय X लीजिए, तथा उसके घात समुच्चय $\wp(X)$ को लीजिए। तब, $\cap : \wp(X) \times \wp(X) \to \wp(X) : \cap(A, B) = A \cap B$ एक द्विआधारी संक्रिया है। कुछ द्विआधारी संक्रियाओं के विशेष गुण हैं, जिन्हें अब हम परिभाषित कर रहे हैं।

परिभाषा : एक समुच्चय S पर एक द्विआधारी संक्रिया $*$ को

i) S के एक **उपसमुच्चय T पर संवृत (closed)** कहते हैं यदि $t_1 * t_2 \in T \; \forall \; t_1, t_2 \in T$.

ii) **क्रमविनिमेय (commutative)** कहते हैं यदि $a * b = b * a \; \forall \; a, b \in S$.

iii) **साहचर्य (associative)** कहते हैं यदि $(a * b) * c = a * (b * c) \; \forall \; a, b, c \in S$.

उदाहरणार्थ, $\mathbb{R}$ पर योग और गुणन की संक्रियाएँ क्रमविनिमेय तथा साहचर्य हैं। परंतु घटाने की संक्रिया न तो $\mathbb{R}$ पर क्रमविनिमेय है और न ही साहचर्य है। क्यों? क्या $a, b \in \mathbb{R}$ के लिए $a - b = b - a$ है? या क्या $(a - b) - c = a - (b - c)\ \forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$ है? नहीं, जैसा कि आप जानते हैं। साथ ही, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ पर घटाना संवृत नहीं है, क्योंकि, उदाहरण के तौर पर, $1 \in \mathbb{N}, 2 \in \mathbb{N}$ परंतु $1 - 2 \notin \mathbb{N}$.

अब एक प्रश्न कीजिए।

E21) मान लीजिए कि X एक समुच्चय है तथा $\wp(X)$ इसका घात समुच्चय है।

i) दर्शाइए कि $\wp(X)$ पर पूरकीकरण और सम्मिलन द्विआधारी संक्रियाएँ हैं। इन संक्रियाओं में से कौन-सी क्रमविनिमेय हैं तथा कौन-सी साहचर्य हैं? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।

ii) क्या $\wp(X)$ पर कार्तीय गुणनफल एक द्विआधारी संक्रिया है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

अब आइए दो द्विआधारी संक्रियाओं को जोड़ने वाले एक गुण को देखें। भाग 1.6 में आप बंटन गुण के कुछ उदाहरणों को देख चुके हैं। आपको याद होगा कि $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ किसी समुच्चय U के उपसमुच्चयों A, B और C के लिए, यह दर्शाता है कि सम्मिलन की संक्रिया प्रतिच्छेदन की संक्रिया पर बंटित है। आइए इस संकल्पना को अधिक व्यापक रूप में परिभाषित करें।

परिभाषा: यदि किसी समुच्चय S पर $\circ$ और $*$ दो द्विआधारी संक्रियाएँ हैं, तो हम कहते हैं कि $*, \circ$ पर बंटित है, यदि

$a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$ और

$(b \circ c) * a = (b * a) \circ (c * a)\ \forall\ a, b, c \in S.$

एक उदाहरण पर विचार कीजिए।

उदाहरण 10: मान लीजिए कि $a * b = \dfrac{a + b}{2}\ \forall\ a, b \in \mathbb{R}$. सिद्ध कीजिए कि $\mathbb{R}$ में गुणन की संक्रिया $*$ पर बंटित है।

हल : हमें देखना होगा कि $a\,(b * c) = a\,b * a\,c$ और $(b * c)\,a = ba * ca$ है या नहीं

अब, $a\,(b * c) = a\,\dfrac{(b + c)}{2} = \dfrac{ab + ac}{2} = ab * ac.$

साथ ही, $(b * c)\,a = \dfrac{(b + c)}{2}\,a = \dfrac{ba + ca}{2} = ba * ca.$

अतः, गुणन $*$ पर बंटित है।

***

अब एक प्रश्न को करने का प्रयास कीजिए।

E22) $\mathbb{R}$ पर परिभाषित निम्नलिखित द्विआधारी संक्रियाओं के लिए, निर्धारित कीजिए कि ये क्रमविनिमेय या सहचारी हैं या नहीं। क्या इनमें से कोई $\mathbb{N}$ पर संवृत है?

i) $x \oplus y = x + y - 5$

ii) $x * y = 2(x + y)$

iii) $x \Delta y = \frac{x - y}{2}$

यह भी जाँच कीजिए कि क्या $\mathbb{R}$ में $\oplus, \Delta$ पर बंटित है या नहीं।

हम यहाँ फलनों पर अपनी चर्चा को समाप्त करते हैं। निःसंदेह आप इकाई से सीखा गया पाठ को गणित के प्रत्येक पाठ्यक्रम का अध्ययन करते समय आगे बढ़ाएँगे। अब के लिए, आइए संक्षेप में देखें कि हमने इस इकाई में क्या चर्चा की है।

2.6 सारांश

इस इकाई में आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है।

1) एक समुच्चय S से एक समुच्चय T तक एक संबंध की परिभाषा, और इसके उदाहरण।

2) एक समुच्चय S पर एक संबंध R

   i) स्वतुल्य होता है यदि $a\,R\,a\ \forall\ a \in S$ हो, अर्थात् $\{(a, a) \mid a \in S\} \subseteq R$,

   ii) सममित होता है यदि $a\,R\,b \Rightarrow b\,R\,a\ \forall\ a, b \in S$, अर्थात् $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R\ \forall\ a, b \in S$,

   iii) संक्रामक होता है यदि $a\,R\,b, b\,R\,c \Rightarrow a\,R\,c\ \forall\ a, b, c \in S$, अर्थात् $(a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R\ \forall\ a, b, c \in S$.

   iv) एक तुल्यता संबंध होता है यदि यह स्वतुल्य, सममित और संक्रामक हो।

3) प्राँत S, सह-प्राँत T और परिसर R वाले फलन की परिभाषा, और उदाहरण।

4) दो फलन बराबर होते हैं यदि और केवल यदि प्राँत f = प्राँत g तथा $f(x) = g(x)\ \forall\ x \in$ प्राँत f होता है।

5) एक फलन $f : A \to B$.

   i) एकैकी (या 1–1) होता है यदि $a_1 \neq a_2$ के साथ $a_1, a_2 \in A \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.

   ii) आच्छादक (या आच्छादी) होता है यदि प्रत्येक $b \in B$ के लिए $\exists\ a \in A$ जिसके लिए $f(a) = b$ हो।

   iii) एकैकी आच्छादक होता है यदि f एकैकी और आच्छादक दोनों हो।

6) फलनों $f : A \to B$ और $g : C \to D$ का संयोजन, जहाँ g का परिसर A का उपसमुच्चय हो, फलन $f \circ g : C \to B : f \circ g(c) = f(g(c))$.

7) कोई फलन व्युत्क्रमणीय कब होता है, तथा तब उसके प्रतिलोम को स्पष्ट रूप से परिभाषित करना।

8) किसी समुच्चय S पर द्विआधारी संक्रिया की परिभाषा, और उसके उदाहरण।

9) S पर एक द्विआधारी संक्रिया S के एक उपसमुच्च्य पर कब संवृत होती है, या कब क्रमविनिमेय होती है, या कब साहचर्य होती है।

10) किसी समुच्चय S पर एक द्विआधारी संक्रिया कब S पर अन्य द्विआधारी संक्रिया पर बंटित होती है।

2.7 हल / उत्तर

E1) $(2, 3) \notin R$ क्योंकि $3 \neq 2^2$. इसी प्रकार, $(9, 3) \notin R$. $(\sqrt{3}, 3) \notin R$, क्योंकि $\sqrt{3} \notin \mathbb{N}$. इस प्रकार, केवल (ii) ही सत्य है, क्योंकि $3 \in \mathbb{N}$ के लिए $3 \, R \, 3^2$ है।

E2) यदि S, इग्नू के पाठ्यक्रमों का समुच्चय है, तो

$R^1 = \{(C_1, C_2) \mid C_1, C_2,$ इग्नू के प्रथम स्तर के पाठ्यक्रम हैं$\}$ और

$R_2 = \{(M, N) \mid M$ बीए प्रोग्राम का एक पाठ्यक्रम है तथा एन. बी. एस. सी. प्रोग्राम का एक पाठ्यक्रम है$\}$ पर विचार कीजिए।

तब, R_1 और R_2, $S \times S$ के उपसमुच्चय हैं, जो बराबर नहीं हैं।

E3) R स्वतुल्य है, क्योंकि $a = a \; \forall \; a \in \mathbb{R}$.

R सममित है, क्योंकि $a = b \Rightarrow b = a \; \forall \; a, b \in \mathbb{R}$.

R संक्रामक है, क्योंकि $a = b, b = c \Rightarrow a = c \; \forall \; a, b, c \in \mathbb{R}$.

E4) i) R स्वतुल्य नहीं है, क्योंकि किसी भी $a \in \mathbb{N}$ के लिए, $a - a = 0$ है। अतः, ऐसी कोई प्राकृतिक संख्या n नहीं है, जिसके लिए $5n = a - a$ हो।

ii) यदि $5 \mid (a - b)$ है, तो $\exists n \in \mathbb{N}$ जिससे कि $5n = a - b$ है। यदि $\exists m \in \mathbb{N}$ जिससे कि $5m = b - a = -5n$ है, तो $m = -n$, जो एक अंतर्विरोध है, क्योंकि n और $-n$ दोनों एक साथ $\mathbb{N}$ में नहीं हो सकते हैं। अतः, R सममित नहीं है।

iii) यदि $\mathbb{N}$ में $5 \mid (a - b)$ और $5 \mid (b - c)$, तो सिद्ध कीजिए कि $\mathbb{N}$ में $5 \mid (a - c)$. अतः, R संक्रामक है।

E5) ऐसे अनेक उदाहरण हो सकते हैं। हम ये उदाहरण दे रहे हैं :

$(2, 2) \notin R$.

$(2, 4) \in R$, परंतु $(4, 2) \notin R$.

$(2, 4) \in R$, $(4, 16) \in R$, परंतु $(2, 16) \notin R$.

E6) समुच्चय $S = \{a, b\}$ पर विचार कीजिए। तब, $\{a\} \, R \, \{b\}$ और $\{b\} \, R \, \{a\}$ हैं, परंतु $\{a\} \, R \, \{a\}$ सत्य नहीं है। अतः, R संक्रामक नहीं है।

E7) यदि हम यह मानें कि कोची के प्रत्येक निवासी के पास एक और केवल एक ही मोबाइल फोन नंबर है, तो हम $f : X \to Y : f(x) =$ (x का मोबाइल नंबर) परिभाषित कर सकते हैं। दूसरी विधि यह हो सकती है कि यदि हम X के सभी अवयवों

को 1 (अर्थात् 10-अंक के रूप में 00...01) से आगे लिख कर, उसे उसका निवासी नंबर कह सकते हैं, तो हम परिभाषित कर सकते हैं :

$g : X \to Y : g(x) =$ (x का निवासी नंबर).

f और g के प्राँत कोची के निवासियों का समुच्चय है।

परिसर $f = \{x$ का मोबाइल नंबर $| x \in X\}$,

परिसर $g = \{x$ का निवासी नंबर $| x \in X\}$.

E8) i) प्रत्येक $n \in \mathbb{N}$ के लिए, $\frac{n}{n+1} \in \mathbb{Q}$.

साथ ही, यदि $n, m \in \mathbb{N}$ ऐसे हैं कि $n = m$, तो $\frac{n}{n+1} = \frac{m}{m+1}$ होगा।

अतः, प्रत्येक $n \in \mathbb{N}$ के लिए, एक अद्वितीय अवयव $q \in \mathbb{Q}$ है जिससे कि $f(n) = q$. यहाँ, $q = \frac{n}{n+1}$.

अतः f सुपरिभाषित है।

ii) $\mathbb{N}$ से $\mathbb{Q}$ तक ऐसे अनेक फलन हो सकते हैं। उदाहरणार्थ, $g(n) = n$, या $h(n) = \frac{n+1}{n}$ लीजिए। आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि $f(n) \neq g(n)$ और $f(n) \neq h(n)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

E9) उदाहरण के लिए, $\mathbb{N}$ से $\mathbb{Q}$ तक संबंध R लीजिए, जहाँ
$R = \{(1, 1), (1, -1), (2, 2), (2, -2), ...\}$ है। क्योंकि $\mathbb{N}$ का कोई भी अवयव R के अंतर्गत $\mathbb{Q}$ के एक ही अवयव से संबंधित नहीं है, (उदाहरणार्थ, (2, 2) और (2, –2) दोनों R में हैं), इसलिए R एक फलन नहीं है।

E10) यह असत्य है। उदाहरणार्थ, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x$ और $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : g(x) = x + 1$ लीजिए। तब, f और g के प्राँत $\mathbb{R}$ हैं, जो उनका परिसर भी है। परंतु $f(x) \neq g(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

E11) प्राँत $f = \mathbb{N}$, परिसर $f = \{6, 7, ...\}$, सह-प्राँत $f = \mathbb{N}$ है। अतः,
$f = \{(n, n + 5) | n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N} \times$ परिसर f.

f आच्छादक नहीं है, क्योंकि परिसर $f \neq$ सह-प्राँत f.

अब इसकी जाँच करने के लिए कि f एकैकी है, मान लीजिए कि $f(m) = f(n)$, जहाँ $m, n \in \mathbb{N}$.

तब, $m + 5 = n + 5$, जिसका अर्थ $m = n$ है। इस प्रकार, f, 1 – 1 है।

E12) इस स्थिति में, किसी भी $z \in \mathbb{Z}$ के लिए, $\exists\ z - 5 \in \mathbb{Z}$ जिससे कि $f(z - 5) = z$.
अतः, परिसर $f = \mathbb{Z}$ है। इसलिए, f आच्छादक है।

जैसा कि E11 में दिखाया है, f, 1 – 1 है। अतः, f एकैकी आच्छादक है।

E13) सर्वप्रथम, परिभाषा से $X \neq \emptyset$ है।

आगे, यदि X में एक से अधिक अवयव हैं, मान लीजिए x_1, x_2, तो $x_1 \neq x_2$ है, परंतु $f(x_1) = c = f(x_2)$. इसका अर्थ होगा कि f एकैकी नहीं है।

अतः, f के एकैकी होने के लिए X को एकल होना चाहिए।

f आच्छादक है क्योंकि परिसर f = सह-प्रांत f = {c}.

E14) i) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x + 5) = 5 (x + 5) \; \forall \; x \in \mathbb{R}$.
$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(5x) = 5x + 5 \; \forall \; x \in \mathbb{R}$.

ii) $f \circ g(x) = x, g \circ f(x) = x$.

ध्यान दीजिए कि (ii) में $f \circ g = g \circ f$, परंतु (i) में नहीं।

E15) अनेक उदाहरण हैं। एक निम्नलिखित है :

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : f(n) = -n$ और $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} : g(n) = \frac{1}{n}$ परिभाषित कीजिए।

तब, परिसर $f = \{-1, -2, -3, ...\} \subset \mathbb{N}$ = प्राँत g.

परिसर $g = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\} \subset \mathbb{N}$ = प्राँत f.

इस प्रकार, न तो $g \circ f$ परिभाषित है और न ही $f \circ g$ परिभाषित है।

E16) $g \circ f : A \to D$.

i) सत्य, क्योंकि यदि $y \in$ परिसर $g \circ f$, तो $\exists \; x \in A$ जिससे कि $g \circ f(x) = y$.
इसका अर्थ है कि $g(f(x)) = y$, जो यह दर्शाता है कि $y \in$ परिसर g.
अतः, परिसर $g \circ f \subseteq$ परिसर g.

ii) असत्य, क्योंकि उदाहरण के लिए, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : f(n) = -n$ और
$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : g(z) = z^2$ लीजिए। तब, $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : g \circ f(n) = n^2$.
अतः, $0 \in$ परिसर g, परंतु $0 \notin$ परिसर $(g \circ f)$.

iii) असत्य। उदाहरण के लिए, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : f(z) = -z$ लीजिए तथा g वही लीजिए जो उपरोक्त (ii) में है। यहाँ जाँच कीजिए कि f, 1 – 1 है परंतु $g \circ f$, 1 – 1 नहीं है।

iv) असत्य। उदाहरण के लिए, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : f(n) = -n$ तथा
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : g(x) = x + 5$ लीजिए। तब, जाँच कीजिए कि g आच्छादक है, परंतु $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : g \circ f(n) = 5 - n$ आच्छादक नहीं है।

E17) ध्यान दीजिए कि $I_B : B \to B, g : B \to A, I_A : A \to A$ हैं।

अतः, $I_A \circ g$ और $g \circ I_B$ सुपरिभाषित हैं, तथा $I_A \circ g : B \to A, g \circ I_B : B \to A$ हैं।
साथ ही, $I_A \circ g(b) = g(b) \; \forall \; b \in B$ तथा $g \circ I_B = g(b) \; \forall \; b \in B$.
अतः, परिणाम प्राप्त हो जाता है।

E18) उदाहरणार्थ, उदाहरण 8 में $g \circ f$ आच्छादक है, परंतु f आच्छादक नहीं है। आप ऐसे अनेक उदाहरण ज्ञात कर सकते हैं।

E19) (i) $\frac{x}{3}$ से x प्राप्त करने के लिए, हमें 3 से गुणा करने की आवश्यकता है। अतः, आइए $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : g(r) = 3r$ परिभाषित करें।

तब, $g \circ f$ और $f \circ g$ दोनों परिभाषित हैं।

साथ ही, $g \circ f(x) = g\left(\frac{x}{3}\right) = x = I_{\mathbb{R}}(x)$ तथा $f \circ g(x) = f(3x) = x = I_{\mathbb{R}}(x)$.

ii) $2r + \frac{5}{7}$ से r प्राप्त करने के लिए, हमें पहले $\frac{5}{7}$ घटाने और फिर 2 से भाग देने की आवश्यकता है। अतः, आइए $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} : h(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{7}\right)$ परिभाषित

करें। इसके बाद, जाँच कीजिए कि $h \circ g$ और $g \circ h$ दोनों परिभाषित हैं तथा $I_{\mathbb{Q}}$ के बराबर हैं।

E20) i) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f_1(x) = x^2$, $1 - 1$ नहीं है क्योंकि, उदाहरणार्थ, $f_1(1) = f_1(-1)$ और $1 \neq -1$. अतः, f_1 का कोई प्रतिलोम नहीं है।

ii) f_2 न तो एकैकी है और न ही आच्छादक है। अतः, f_2 का प्रतिलोम नहीं है।

iii) f_3 एकैकी आच्छादक है, और इसी लिए इसका प्रतिलोम है। वास्तव में, हम आसानी से देख सकते हैं कि $11x + 7$ से x प्राप्त करने के लिए पहले 7 घटाते हैं और फिर 11 से भाग देते हैं।

अतः, यदि हम $g(y) = \frac{y-7}{11}$ द्वारा $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ को परिभाषित करें, फिर आप जाँच करें कि $f_3 \circ g = g \circ f_3 = I_{\mathbb{R}}$. अतः, f_3 का प्रतिलोम g है।

E21) i) X के किन्हीं दो उपसमुच्चयों A और B के लिए, हमें X के उपसमुच्चय $A \setminus B, A \cup B$ प्राप्त होते हैं। अतः, पूरकीकरण और सम्मिलन $\wp(X)$ पर द्विआधारी संक्रियाएँ हैं।

X को $\mathbb{N}$ मान लीजिए। तब, उदाहरण के लिए,

$\{1, 2\} \setminus \{2, 3\} \neq \{2, 3\} \setminus \{1, 2\}$.

अतः, पूरकीकरण क्रमविनिमेय नहीं है।

इसी प्रकार, आप देख सकते हैं कि

$(\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{1, 2\}) \setminus \{4, 5\} \neq \{1, 2, 3, 4\} \setminus (\{1, 2\} \setminus \{4, 5\})$

जिससे पता चलता है कि पूरकीकरण साहचर्य नहीं है।

परंतु, जैसा कि आपने भाग 1.5 में देखा है, सम्मिलन क्रमविनिमेय और साहचर्य दोनों है।

ii) एक अरिक्त समुच्चय X के किन्हीं दो उपसमुच्चयों A और B के लिए, $A \times B$, X का उपसमुच्चय नहीं है। यह $X \times X$ का उपसमुच्चय है। इसलिए, $\wp(X)$ पर कार्तीय गुणनफल एक द्विआधारी संक्रिया नहीं है।

E22) i) जाँच कीजिए कि $x \oplus y = y \oplus x$ तथा
$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$. परंतु उदाहरण के लिए,
$1 \oplus 1 = -1 \notin \mathbb{N}$. अतः $\mathbb{N}$ पर $\oplus$ संवृत नहीं है।

ii) $*$ क्रमविनिमेय है परंतु साहचर्य नहीं है, क्योंकि $(x * y) * z = 2[2x + 2y + z]$ तथा $x * (y * z) = 2[x + 2y + 2z]$.

परंतु, $x, y \in \mathbb{N}$ के लिए, $x * y \in \mathbb{N}$ है, यानी $*$, $\mathbb{N}$ पर संवृत है।

iii) $x \Delta y$ न तो क्रमविनिमेय है और न ही साहचर्य है। साथ ही, $\mathbb{N}$ पर Δ संवृत नहीं है।

अब, $x, y, z \in \mathbb{R}$ के लिए,

$x \oplus (y \Delta z) = x + (y \Delta z) - 5 = x + \frac{y-z}{2} - 5$ पर विचार कीजिए। साथ ही

$$(x \oplus y) \Delta (x \oplus z) = (x + y - 5) \Delta (x + z - 5) = \frac{(x + y - 5) - (x + z - 5)}{2}$$
$$= \frac{y - z}{2}.$$

इसलिए, $x \oplus (y \Delta z) \neq (x \oplus y) \Delta (x \oplus z)$

अतः, $\oplus, \Delta$ पर बंटित नहीं है।

इकाई 3

द्विविमीय निर्देशांक पद्धतियाँ

इकाई की रूपरेखा

		पृष्ठ संख्या
3.1	प्रस्तावना	67
	उद्देश्य	68
3.2	कार्तीय निर्देशांक पद्धति	68
3.3	रेखा के समीकरण	72
	अक्षों के समांतर रेखाएँ	72
	प्रवणता-अंतःखंड रूप	73
	बिंदु-प्रवणता रूप	74
	दो-बिंदु रूप	75
3.4	फलन का आलेख	77
3.5	ध्रुवीय निर्देशांक पद्धति	81
3.6	सारांश	83
3.7	हल / उत्तर	84

3.1 प्रस्तावना

हम पहले संक्षेप में उस पद्धति की चर्चा करेंगे, जिसका अध्ययन आप स्कूल में पहले ही कर चुके होंगे, यानी कार्तीय निर्देशांक पद्धति समतल में बिंदुओं को निरूपित करने की इस पद्धति का एक फ्रॉंसीसी गणितज्ञ रने देकार्त ने, जिनके बारे में आप इकाई 1 में पढ़ चुके हैं, 17वीं शताब्दि के प्रारंभ में परिचय कराया था। यह कहा जाता है कि रने देकार्त बचपन में अधिक बीमार रहते तथा इसी कारण उनको प्रातः देर तक बिस्तर में रहने की अनुमति थी। एक दिन, जब वे बिस्तर में लेटे हुए थे, उन्होंने छत के कोने के निकट एक मकड़ी को देखा। उसकी गति ने देकार्त को छत पर उसकी स्थिति निर्धारित करने की समस्या के बारे में सोचने को मजबूर कर दिया। उन्होंने निर्णय लिया कि छत के कोने से उस मकड़ी की पूर्व की ओर तथा उत्तर की ओर तक की दूरियों की जानकारी होना ही पर्याप्त है! ऐसा कहा जाता है कि इसी सोच ने निर्देशांक ज्यामिति के विकास के लिए बीज बोए।

भाग 3.2 में आप निर्देशांकों की संकल्पना का अध्ययन करेंगे, तथा देखेंगे कि किस प्रकार देकार्त की पद्धति संपूर्ण समतल ज्यामिति के अध्ययन में सहायता करती है। विशेष रूप से, आप भाग 3.3 में एक सरल रेखा के विभिन्न बीजीय निरूपणों का

अध्ययन करेंगे। भाग 3.4 में आप कार्तीय पद्धति का प्रयोग करते हुए, आलेखों के साथ कार्य करेंगे, जो फलनों को देखने की एक ज्यामितीय विधि है। जैसे-जैसे आप भाग 3.3 और 3.4 को पढ़ते जाएँगे, आप विभिन्न वक्रों के बीजीय और ज्यामितीय निरूपणों के बीच निकट संबंध को देखेंगे।

यहां तक की पढ़ाई करते हुए आपने सोचा होगा कि देकार्त ही केवल ऐसे व्यक्ति थे जिन्होंने समतल में बिंदुओं के स्थान निर्धारित करने की विधि को बनाया। परंतु, भाग 3.5 में आप समतल में बिंदुओं को निर्धारित करने की एक अन्य पद्धति का अध्ययन करेंगे, जो कलन और विश्लेषण के आपके अध्ययन में बहुत महत्त्वपूर्ण है। यह है ध्रुवीय निर्देशांक पद्धति, जो प्राचीन काल से ही, सीमित रुप में, अनऔपचारिक तरह से जानी जाती है। यह पद्धति इकाई 4 का अध्ययन करने में भी बहुत उपयोगी होगी।

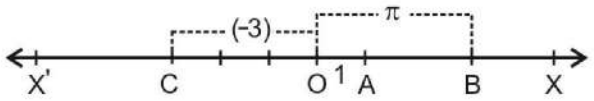
उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद, आप :

- स्पष्ट कर सकेंगे कि एक कार्तीय पद्धति क्या है;
- समतल में सरल रेखाओं के विभिन्न बीजीय निरूपणों को देने के लिए, कार्तीय पद्धति का उपयोग कर सकेंगे;
- कार्तीय निर्देशांक पद्धति में फलनों को ज्यामितीय रूप से उनके आलेखों द्वारा निरूपित कर सकेंगे;
- ध्रुवीय निर्देशांक पद्धति तथा इसके कार्तीय निर्देशांक पद्धति के बीच संबंध को स्पष्ट कर सकेंगे, जिसमें मूलबिंदु और ध्रुव संपाती हैं तथा x-अक्ष और ध्रुवीय अक्ष संपाती हैं;
- ध्रुवीय निर्देशांक पद्धति में, फलनों को उनके आलेखों द्वारा ज्यामितीय रूप से निरूपित कर सकेंगे।

3.2 कार्तीय निर्देशांक पद्धति

आप बिंदु, रेखा, वृत्त, इत्यादि की संकल्पनाओं से पहले से ही परिचित होंगे। आपको यह भी याद होगा कि वास्तविक संख्याओं को चित्र 1 में दिखाई गई जैसी संख्या रेखा पर निरूपित किया जाता है। यहाँ 0 शून्य को व्यक्त करता है, $\overrightarrow{OX}$ पर अन्य बिंदु धनात्मक वास्तविक संख्याओं को व्यक्त करते हैं तथा $\overrightarrow{OX'}$ पर बिंदु ऋणात्मक वास्तविक संख्याएँ निरूपित करते हैं। यदि हम $\overrightarrow{OX}$ पर एक बिंदु A ऐसा लें कि OA की लंबाई 1 इकाई है, तो A इस संख्या रेखा पर 1 को व्यक्त करता है।

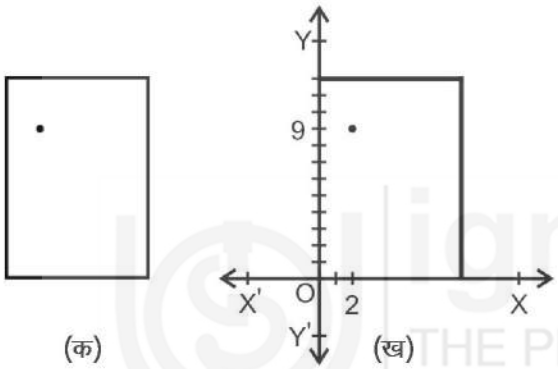


चित्र 1: वास्तविक संख्या रेखा

अतः, उदाहरणार्थ, π को B द्वारा व्यक्त किया जाएगा, जहाँ दूरी OB लगभग 3.1416 है। इसी प्रकार, –3 को C द्वारा व्यक्त किया जाएगा, जहाँ दूरी OC दूरी OA की तिगुनी है, और C $\overrightarrow{OX'}$ पर स्थित है, अर्थात् 'ऋणात्मक' दिशा की ओर।

टिप्पणी 1: ध्यान दीजिए कि संख्या रेखा को क्षैतिज दर्शाना आवश्यक नहीं है। यह खड़ी भी दिखाई जा सकती है या क्षैतिज से किसी भी कोण पर झुकी हो सकती है।

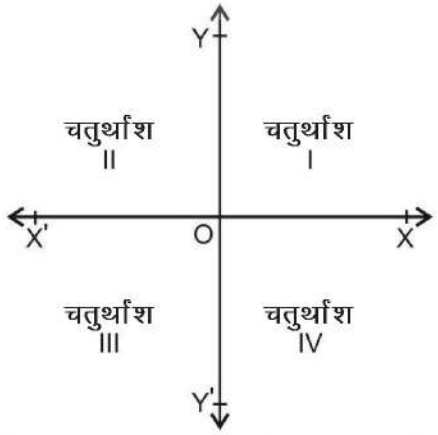
अब, मान लीजिए कि आप काग़ज़ की एक शीट पर एक बिंदु बनाते हैं [जैसा चित्र 2 (क) में है], जो मैं नहीं देख सकती हूँ। अब, मैं आपसे इस काग़ज़ पर लगाए गए बिंदु की स्थिति की व्याख्या इस प्रकार करने को कहती हूँ जिससे कि मैं उसको मन में देख सकूँ (याद रखिए कि मैं काग़ज़ और बिंदु को देख नहीं सकती हूँ)। आप इसे किस प्रकार करेंगे? शायद आप कहेंगे कि "बिंदु काग़ज़ के ऊपरी आधे भाग में है" या "यह काग़ज़ के बाएँ किनारे के निकट है"। क्या इनमें से कोई भी कथन बिल्कुल सही तरह से बिंदु की स्थिति निश्चित करता है? नहीं। परंतु यदि आप कहें "बिंदु काग़ज़ के बाएँ किनारे से 2 cm की दूरी पर है", तो कुछ तस्वीर बनाने में मेरी सहायता करेगा, परंतु फिर भी सही-सही से बिंदु की स्थिति निश्चित नहीं करेगा। परंतु, यदि आप मुझे यह भी बता देते हैं कि बिंदु निचले किनारे से ऊपर की ओर 9 cm की दूरी पर भी है, तो मैं बिल्कुल सही से कह सकती हूँ कि बिंदु कहाँ स्थित है।



चित्र 2: बिंदु की स्थिति को पूरी तरह सही रूप से निश्चित करने के लिए, इसकी कम से कम दो असमानांतर रेखाओं से दूरियों की जानकारी आवश्यक है।

तो, आपने क्या किया? आपने बिंदु की स्थिति परस्पर दो लंब रेखाओं, अर्थात् काग़ज़ के बाएँ किनारे के अनुदिश रेखा तथा काग़ज़ के निचले किनारे के अनुदिश रेखा [चित्र 2 (ख)] से उसकी दूरियाँ देकर निश्चित कर दी है।

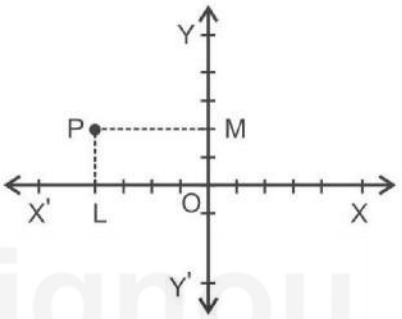
वास्तव में, यही कार्तीय निर्देशांक पद्धति का आधार है। हम समतल में कोई भी बिंदु O लेकर उसे नियत कर देते हैं। फिर, O से होकर जाती एक क्षैतिज रेखा X′OX और एक खड़ी रेखा Y′OY खींचते हैं। ये रेखाएँ काग़ज़ के पूरे समतल को चार भागों में बाँट देती हैं, जो **चतुर्थांश (quadrants)** कहलाते हैं (पहला, दूसरा, तीसरा और चौथा), जैसा कि चित्र 3 में दर्शाया गया है।



चित्र 3: x-अक्ष, y-अक्ष और चार चतुर्थांश

बिंदु O **मूलबिंदु (origin)** कहलाता है तथा रेखाएँ X′OX और Y′OY क्रमशः **x-अक्ष** और **y-अक्ष** कहलाती हैं। मूलबिंदु O से शुरु करते हुए, हम $\overrightarrow{OX}$ पर बराबर दूरियों पर बिंदु 1, 2, 3, ... अंकित करते हैं तथा $\overrightarrow{OX'}$ पर बिंदु –1, –2, –3, ... अंकित करते हैं, जैसा कि चित्र 1 में दर्शाया गया है। इसी प्रकार, हम $\overrightarrow{OY}$ पर 1, 2, 3, ... और $\overrightarrow{OY'}$ पर –1, –2, –3, ... अंकित करते हैं। $\overrightarrow{OX}$ और $\overrightarrow{OY}$ अक्षों के धनात्मक भाग हैं तथा $\overrightarrow{OX'}$ और $\overrightarrow{OY'}$ अक्षों के ऋणात्मक भाग हैं। अब, याद कीजिए कि इस ढाँचे का प्रयोग करते हुए, हम किसी समतल पर किसी बिंदु को किस प्रकार निरूपित करते हैं। मान लीजिए कि समतल में P कोई बिंदु है। हमने पहले से मूलबिंदु और दोनों अक्ष नियत कर लिए हैं। अब P से होकर, हम क्रमशः x-अक्ष और y-अक्ष पर लंब PL और PM खींचते हैं (देखिए चित्र 4), जहाँ x-अक्ष पर L स्थित है तथा y-अक्ष पर M स्थित है। तब, PL बिंदु P की x-अक्ष से दूरी है तथा PM उसकी y-अक्ष से दूरी है। साथ ही, ध्यान दीजिए कि PM = OL और PL = OM है।

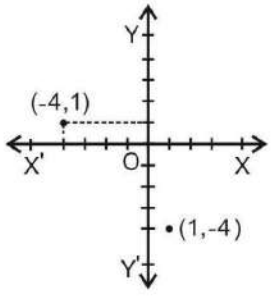
AB रेखाखंड $\overline{AB}$ की लंबाई व्यक्त करता है।



चित्र 4

x-अक्ष पर L जिस संख्या को निरूपित करता है वह P का **x-निर्देशांक** कहलाता है। y-अक्ष पर M जिस संख्या को निरूपित करता है वह P का **y-निर्देशांक** कहलाता है। ये दोनों मिल कर P के निर्देशांक (coordinates) कहलाते हैं तथा इन्हें एक युग्म (OL, OM) के रूप में लिखा जाता है। इस प्रकार, यदि OL = –4 इकाई और OM = 2 इकाई, तो P के निर्देशांक (–4, 2) हैं। व्यंजक **P (–4, 2)** यह सूचित करता है कि P के निर्देशांक –4 और 2 हैं, जहाँ –4 इसका x-निर्देशांक है तथा 2 इसका y-निर्देशांक है। ध्यान दीजिए कि हम पहले x-निर्देशांक को लिखते हैं और बाद में y-निर्देशांक को लिखते हैं। यह परंपरा इस पद्धति के सभी प्रयोगकर्त्ताओं ने स्वीकार की है। इस परंपरा का प्रयोग करने पर, बिंदु (1, –4) और बिंदु (–4, 1) अलग-अलग हैं, जैसा कि आप चित्र 5 में देख सकते हैं।

बिंदु (x, y) और (y, x) अलग हैं, जब तक कि x = y न हो।



चित्र 5

किसी समतल में बिंदुओं को निरूपित करने की यह विधि **द्विविमीय कार्तीय निर्देशांक पद्धति** कहलाती है, गणितज्ञ देकार्त के नाम पर, जिन्होंने इसकी खोज की। यहाँ एक महत्त्वपूर्ण संबंधित टिप्पणी पढ़िए।

टिप्पणी 2: i) वे बिंदु जिनके दोनों निर्देशांक धनात्मक हों, चतुर्थांश I में स्थित हैं।

ii) वे बिंदु जिनके दोनों निर्देशांक ऋणात्मक हों, चतुर्थांश III में स्थित हैं।

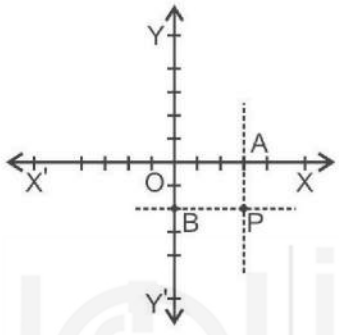
iii) वे बिंदु जिनका x-निर्देशांक, ऋणात्मक है तथा y-निर्देशांक धनात्मक है, चतुर्थांश II में स्थित हैं।

iv) वे बिंदु, जिनका x-निर्देशांक धनात्मक है तथा y-निर्देशांक ऋणात्मक है, चतुर्थांश IV में स्थित हैं।

v) **अक्षों पर स्थित बिंदु किसी भी चतुर्थांश में स्थित नहीं हैं।**

अब, हम यहाँ तक चर्चित बिंदुओं का सारांश देते हैं। यदि हमें किसी समतल पर एक बिंदु P की स्थिति ज्ञात है, तो हम कार्तीय निर्देशांक पद्धति में P के संगत वास्तविक संख्याओं का एक युग्म (x, y) ज्ञात कर सकते हैं। इस युग्म में पहली संख्या x-निर्देशांक तथा दूसरी संख्या y-निर्देशांक कहलाती है, तथा इनका युग्म P के निर्देशांक कहलाता है।

अब, इसकी विपरीत दिशा के बारे में क्या कहा जा सकता है, अर्थात् वास्तविक संख्याओं का एक युग्म (x, y) दिया रहने पर, क्या हम समतल में एक और केवल एक बिंदु P ज्ञात कर सकते हैं, जिसके लिए x, y उसके निर्देशांक हों? इसका उत्तर देने के लिए आइए किसी युग्म, मान लीजिए, (3, –2) पर विचार कीजिए। मान लीजिए कि चित्र 6 में A और B, $\overrightarrow{OX}$ के अनुदिश 3 तथा $\overrightarrow{OY'}$ के अनुदिश –2 को व्यक्त करते हैं।



चित्र 6

A से होकर, y-अक्ष के समांतर एक रेखा खींचिए तथा B से होकर, x-अक्ष के समांतर एक रेखा खींचिए। उस बिंदु P के निर्देशांक क्या हैं, जिस पर ये रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं? आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि ये (OA, OB), अर्थात् (3, –1.5) हैं।

इसी विधि द्वारा, अब आप देख सकते हैं कि **किस प्रकार कोई (x, y) ∈ ℝ × ℝ दिया रहने पर, समतल में एक अद्वितीय बिंदु P का अस्तित्व है जिसके निर्देशांक (x, y) हैं।**

कार्तीय निर्देशांक पद्धति समुच्चय ℝ × ℝ को निरूपित करती है।

इस प्रकार, आपने देखा कि समतल में स्थित बिंदुओं तथा एक कार्तीय निर्देशांक पद्धति के बीच, जिसमें X′OX और Y′OY नियत हैं, 1 से 1 संगति है।

अब, इन प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E1) क्रमशः कार्तीय निर्देशांकों (–2, 2.5), (2, –2.5) (3.45, 0) और (0, –3.45) वाले बिंदुओं को आलेखित कीजिए।

E2) समतल के किन चतुर्थांशों में (x, y) स्थित होगा, यदि :

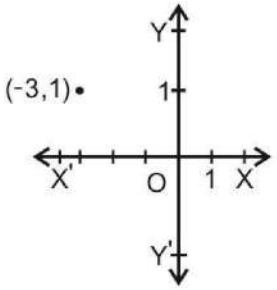
i) $xy > 0$?

ii) $xy < 0$?

iii) $xy = 0$?

अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।

आइए इस भाग को एक महत्वपूर्ण टिप्पणी के साथ समाप्त करते हैं।



चित्र 7: कार्तीय निर्देशांक पद्धति में बिंदु (–3, 1), जिसमें x-अक्ष के अनुदिश इकाई y-अक्ष के अनुदिश इकाई से अलग है।

टिप्पणी 3: इस भाग में एक बात जिसका आपने अध्ययन किया है वह है कि x और y अक्षों के अनुदिश किस प्रकार बिंदु अंकित करते हैं। यहाँ पर दिए गए उदाहरणों में आपने x-अक्ष और y-अक्ष के अनुदिश समान (एक ही) इकाई का प्रयोग किया है। अतः, उदाहरणार्थ, यदि x-अक्ष के अनुदिश OA = 1 इकाई है तथा y-अक्ष के अनुदिश OB = 1 इकाई है, तो OA = OB है। परंतु ऐसा होना आवश्यक नहीं है। आप x-अक्ष के अनुदिश एक इकाई का प्रयोग कर सकते हैं तथा y-अक्ष के अनुदिश दूसरी इकाई का (देखें चित्र 7)।

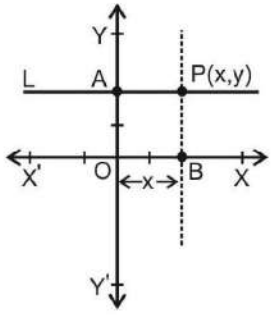
आइए अब उस विधि को देखें जिससे कार्तीय पद्धति में, समतल में रेखाओं को निरूपित किया जा सकता है।

3.3 रेखा के समीकरण

एक द्विविमीय समष्टि एक निर्देशांक पद्धति के साथ एक समतल का निरूपण है।

इस भाग में हम द्विविमीय समष्टि में बीजीय रूप से सरल रेखाओं को निरूपित करने की विधियों की चर्चा करेंगे। चूकि आप इससे स्कूल के समय से ही परिचित होंगे, इसलिए हम इस पर अधिक समय नहीं लगाएंगे। हम दोनों अक्षों में से किसी भी अक्ष के समांतर रेखाओं से प्रारंभ करते हैं।

3.3.1 अक्षों के समांतर रेखाएँ



चित्र 8: y = 2 को निरूपित करने वाली रेखा L है।

x-अक्ष के समांतर एक रेखा L पर विचार कीजिए, जो y-अक्ष को A (0, 2) पर प्रतिच्छेद करती है। अब, इस पर कोई भी बिंदु P (x, y) लीजिए, जैसा कि चित्र 8 में है। आप देख सकते हैं कि P से y-अक्ष पर लंब रेखा L के अनुदिश है तथा इसीलिए y-अक्ष को A पर प्रतिच्छेद करता है। इसलिए, y = 2 है। इस प्रकार, आप देख सकते हैं कि दी हुई रेखा के प्रत्येक बिंदु P का y-निर्देशांक 2 है।

इसके विलोम, निर्देशांकों (x, 2) वाला कोई भी बिंदु Q लीजिए। इसका अर्थ है कि Q से y-अक्ष पर लंब उसे बिंदु (0, 2) पर प्रतिच्छेद करता है। अतः, यह लंब L के अनुदिश है। इसलिए, L पर Q स्थित होगा, चाहे x का मान कुछ भी हो।

इस प्रकार, इस रेखा L में वही और केवल वही बिंदु हैं जिनके निर्देशांक (x, y), y = 2 को संतुष्ट करते हैं। **अतः रेखा L समीकरण y = 2 को निरूपित करती है।**

इसी प्रकार, **x-अक्ष के समांतर किसी भी रेखा के लिए,** जो y-अक्ष को (0, a), $a \in \mathbb{R}$ पर प्रतिच्छेद करती है, उसका समीकरण होगा

$$y = a \quad \ldots (1)$$

y-अक्ष के समांतर एक रेखा के समीकरण के बारे में आप क्या कह सकते हैं? निम्नलिखित प्रश्नों को करते समय, इसके बारे में सोचिए।

E3) y-अक्ष के समांतर उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x-अक्ष को निम्नलिखित पर प्रतिच्छेद करती है :

i) $(-3, 0)$

ii) $(b, 0)$, किसी अचर b के लिए।

E4) निर्देशांक अक्षों के समीकरण क्या हैं?

यदि आपने E3 को हल कर लिया है, तो आपने देखा होगा कि y-अक्ष के समांतर कोई भी रेखा निम्नलिखित रूप की होती है :

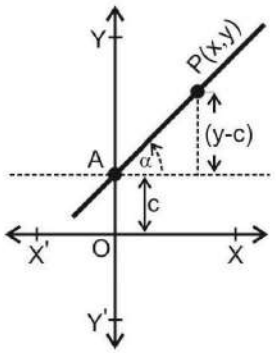
$\mathbf{x = b}$, किसी $b \in \mathbb{R}$ के लिए। ... (2)

अब, आइए ऐसी रेखा के समीकरण को प्राप्त करें, जो किसी अक्ष के समांतर नहीं है। यहां हम इसके चार रूपों की चर्चा करेंगे।

3.3.2 प्रवणता-अंतःखंड रूप

एक ऐसी रेखा पर विचार कीजिए, जो किसी भी अक्ष के समांतर नहीं है। मान लीजिए यह x-अक्ष की धनात्मक दिशा से वामावर्त दिशा (anticlock-wise direction) में मापने पर, $\alpha, \alpha \neq 0, \frac{\pi}{2}$ का कोण बनाती है, तथा y-अक्ष को मान लीजिए A (0, c) पर प्रतिच्छेद करती है। तब, यदि इस रेखा पर P (x, y) कोई भी बिंदु है तो आप चित्र 9 से देख सकते हैं कि $\tan \alpha = \frac{y - c}{x}$ है। इस प्रकार, $y = x \tan \alpha + c$ है।

अर्थात, $y = mx + c$ जहाँ $m = \tan \alpha$. ... (3)



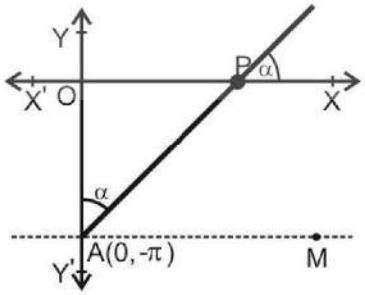
चित्र 9: L को $y = x \tan \alpha + c$ द्वारा निरूपित किया जाता है।

m रेखा L का क्षैतिज से झुकाव दर्शाता है। यह L की **प्रवणता (slope)** कहलाता है। c को y-अक्ष पर L का **अंतःखंड (intercept)** कहते हैं। इस प्रकार, $y = mx + c$ एक रेखा की समीकरण का **प्रवणता-अंतःखंड** रूप है। आइए एक उदाहरण देखें।

अक्ष पर 'अंतःखंड' मूलबिंदु से उस बिंदु की दूरी है जिस पर रेखा अक्ष को काटती है।

उदाहरण 1: उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो x-अक्ष और y-अक्ष से समान कोण बनाती है तथा जो y-अक्ष को $(0, -\pi)$ पर प्रतिच्छेद करती है।

हल : मान लीजिए कि उस रेखा द्वारा x-अक्ष से बनाया गया कोण α है। तब, चित्र 10 को देखिए। रेखा $A(0, -\pi)$ से होकर जाती है। मान लीजिए रेखा x-अक्ष को P पर प्रतिच्छेद करती है। यदि हम $\overleftrightarrow{AM}, \overrightarrow{OX}$ के समांतर खींचें, तो $\angle MAP = \alpha$.



चित्र 10

साथ ही, हमें यह भी दिया है कि $\angle PAY = \alpha$ है। इस प्रकार, $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ है। अतः, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ है।

अतः, रेखा का समीकरण $y = x \tan \frac{\pi}{4} + (-\pi)$, अर्थात्, $y = x - \pi$ है।

***

अब निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E5) उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो y-अक्ष की ऋणात्मक दिशा से 1 का अंतःखंड काटती है तथा x-अक्ष से 120° का कोण बनाती है।

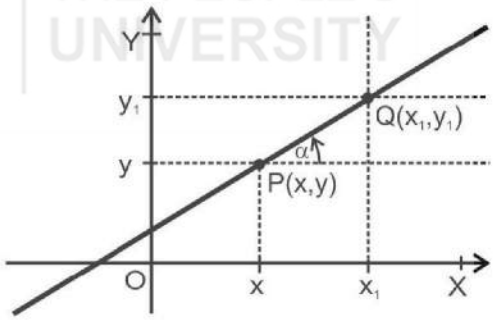
E6) उस रेखा का समीकरण क्या है, जो मूलबिंदु से होकर जाती है तथा x-अक्ष से कोण θ बनाती है, जहाँ $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$?

आइए अब रेखाओं के बीजीय निरूपण की एक अन्य विधि को देखें, जो रूप (3) से संबंधित है।

3.3.3 बिंदु-प्रवणता रूप

अब, मान लीजिए कि हमें एक रेखा की प्रवणता m ज्ञात है परंतु उसके द्वारा y-अक्ष पर काटा गया अंतःखंड ज्ञात नहीं है। हमें यह भी ज्ञात है कि बिंदु (x_1, y_1) इस रेखा पर स्थित है। तब, क्या हम रेखा का समीकरण प्राप्त कर सकते हैं? मान लीजिए कि $P(x, y)$ इस रेखा पर कोई भी बिंदु है, रेखा की प्रवणता $m = \tan \alpha$ है तथा $Q(x_1, y_1)$ दिया हुआ बिंदु है। अब चित्र 11 से हम देखते हैं कि

$m = \tan \alpha = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ है। (ध्यान दीजिए कि $x_1 \neq x$, क्योंकि यह रेखा y-अक्ष के समांतर नहीं है।) इस प्रकार,



चित्र 11: $m = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$

$$y - y_1 = m (x - x_1) \quad \ldots (4)$$

जो रेखा का **बिंदु-प्रवणता** रूप है।

आइए एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 2: उस रेखा L का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखा $3y = x - \sqrt{3}$ के समांतर है तथा जो $\left(-1, -\frac{1}{7}\right)$ से होकर जाती है।

हल : क्योंकि L रेखा $3y = x - \sqrt{3}$, अर्थात् $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}$ के समांतर है, इसलिए L की प्रवणता वही होगी जो प्रवणता इस रेखा की है, यानी कि $\frac{1}{3}$ साथ ही, हमें यह भी ज्ञात है कि L बिंदु $\left(-1, -\frac{1}{7}\right)$ से होकर जाती है। इस प्रकार, (4) से, इसका समीकरण

$y - \left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{3}(x - (-1))$ है।

$$\Leftrightarrow \quad y+\frac{1}{7}=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{21}$$

***

अब एक प्रश्न को करने का प्रयास कीजिए, जो आपको रूपों (3) और (4) के बीच निकट संबंध देखने में सहायता करेगा।

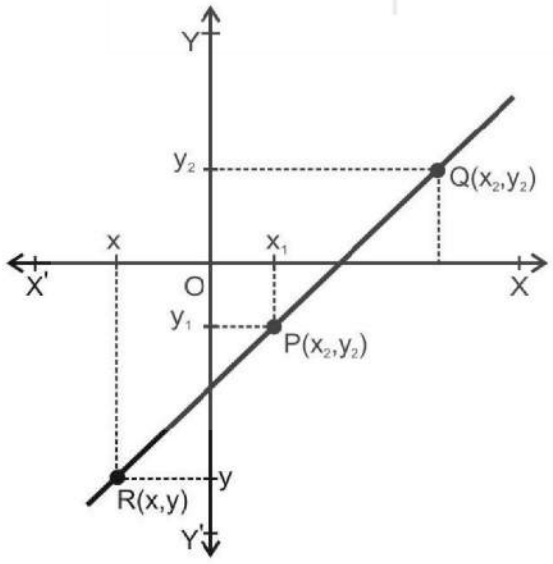
E7) यदि L एक प्रवणता m वाली रेखा है जो y-अक्ष से लंबाई c का अंतःखंड काटती है, तो आप इसका समीकरण ज्ञात करने में (4) का प्रयोग कैसे कर सकते हैं?

आइए अब एक अन्य रूप पर विचार करें।

3.3.4 दो-बिंदु रूप

अब, मान लीजिए कि एक रेखा है, जो अक्षों के समांतर नहीं है, परंतु हमें इसकी प्रवणता ज्ञात नहीं है। क्या हम इसका समीकरण ज्ञात कर सकते हैं? हाँ, यदि हमें इस पर स्थित दो अलग बिंदु ज्ञात हों। आइए देखें कैसे?

मान लीजिए कि $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ एक रेखा L पर दो अलग बिंदु हैं तथा रेखा अक्षों के समांतर नहीं है। मान लीजिए कि $R(x, y)$ इस रेखा पर कोई भी बिंदु है (देखिए चित्र 12)।



चित्र 12: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

मान लीजिए m L की प्रवणता है। तब $m=\frac{y_1-y}{x_1-x}$. (ध्यान दीजिए कि $x_1-x\neq 0$ है। (क्यों?))

आप देख सकते हैं कि $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ भी होगा।

इस प्रकार, $\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y_1 - y}{y_2 - y_1} = \frac{x_1 - x}{x_2 - x_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\mathbf{y - y_1}}{\mathbf{y_2 - y_1}} = \frac{\mathbf{x - x_1}}{\mathbf{x_2 - x_1}}$$

जो **रेखा का दो-बिंदु** रूप कहलाता है।

जैसा कि आप देख सकते हैं, रेखा की प्रवणता वास्तव में ज्ञात है। यह $\frac{\mathbf{y_2 - y_1}}{\mathbf{x_2 - x_1}}$ है।

साथ ही, y-अक्ष पर इसके अंतःखंड को (5) के y-अक्ष, अर्थात् $x = 0$, के प्रतिच्छेद बिंदु को ज्ञात करके प्राप्त किया जा सकता है, जैसा कि नीचे दिया गया है।

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{-x_1}{x_2 - x_1}$$

अर्थात् $y = y_1 - x_1\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$

आइए एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 3: उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका x-अक्ष पर अंतःखंड 2 है और जो $\left(\frac{1}{\pi}, \pi\right)$ से होकर जाती है।

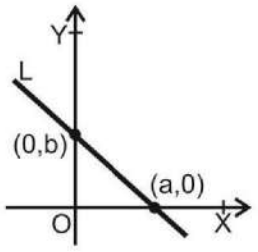
हल : हम जानते हैं कि वाँछित रेखा $(2, 0)$ और $\left(\frac{1}{\pi}, \pi\right)$ से होकर जाती है।

अतः, (5) से, इसका समीकरण है $\frac{y - 0}{\pi - 0} = \frac{x - 1/\pi}{2 - 1/\pi}$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{\pi}{2\pi - 1}(\pi x - 1)$$

***

अब एक प्रश्न को करने का प्रयास कीजिए, जो आपको रेखा के एक अन्य जाने माने रूप की ओर ले जाएगा।



चित्र 13: L, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ से दिया जाता है।

E8) i) मान लीजिए कि हम यह जानते हैं कि एक रेखा का x-अक्ष पर अंतःखंड 2 है तथा y-अक्ष पर -3 है। तब, दर्शाइए कि इसका समीकरण $\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1\right)$ है।

[**संकेत**: देखिए कि आप (5) का प्रयोग कैसे कर सकते हैं।]

ii) अधिक व्यापक रूप में, यदि एक रेखा L x-अक्ष पर अंतःखंड $a(\neq 0)$ काटती है तथा y-अक्ष पर $b(\neq 0)$ काटती है (देखिए चित्र 13), तो दर्शाइए कि इसका समीकरण है :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \ldots (6)$$

---

(6) को L के समीकरण का **अंतःखंड रूप** कहते हैं।

अब, क्या आपने यहाँ पर अध्ययन की गई रेखाओं के सभी समीकरणों के एक समान लक्षण पर ध्यान दिया है? ये सभी दो चरों में रैखिक हैं, अर्थात् ये $ax + by + c = 0$ के

रूप के हैं, जहाँ $a, b, c \in \mathbb{R}$ तथा a और b में से कम से कम एक शून्येतर है। यह संयोगवश नहीं है, जैसा कि हमें नीचे आने वाला प्रमेय बताता है। (हम इस परिणाम को सिद्ध नहीं करेंगे।)

प्रमेय 1: कोई भी दो चरों वाला रैखिक समीकरण द्विविमीय समष्टि में एक सरल रेखा को निरूपित करता है। विलोमतः, समतल में एक सरल रेखा का समीकरण दो चरों वाला रैखिक समीकरण होता है।

अतः, उदाहरणार्थ, $2x + 3y - 1 = 0$ एक रेखा को निरूपित करता है। इसकी प्रवणता क्या है? इसे ज्ञात करने के लिए, हम इसे पुनः $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ के रूप में लिखते हैं। x का गुणांक, यानी $-\frac{2}{3}$ ही प्रवणता है। क्या आप इससे सहमत हैं कि इसके x और y अक्षों पर अंतःखंड क्रमशः $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ हैं? आप इसकी जाँच इस रेखा के क्रमशः x और y अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिंदुओं को ज्ञात करके कर सकते हैं।

अब आप एक प्रश्न हल करने का प्रयास क्यों नहीं करते?

E9) i) उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो $y + x + 1 = 0$ के समांतर है तथा $(0, 0)$ से होकर जाती है।

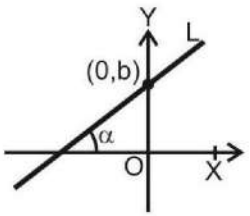
ii) ऊपर (i) में प्राप्त रेखा पर लंब उस रेखा का समीकरण क्या है जो $(2, 1)$ से होकर जाती है?

अब, आइए रेखाओं और रैखिक समीकरणों पर अपनी चर्चा को समाप्त करें तथा अधिक व्यापक समीकरणों की ओर चलें। हम एक ऐसे संकल्पना की चर्चा करेंगे जो हमें इस पाठ्यक्रम के बाक़ी खंडों में ज्यामितीय रूप से फलनों के निरूपण में सहायता करेगी।

3.4 फलन का आलेख

इकाई 2 में आपने फलनों का अध्ययन किया था। वहाँ आपने देखा कि फलन f कार्तीय गुणनफल $A \times B$ का विशेष गुणों वाला एक उपसमुच्चय होता है, जहाँ A, f का प्राँत है तथा B, f का सहप्राँत है। इस भाग में हम कार्तीय निर्देशांकों का प्रयोग करते हुए, f के ज्यामितीय निरूपण पर दृष्टि डालेंगे, जबकि $A \times B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ है।

पिछले भाग में आप एक प्रकार के फलनों के लिए इसका अध्ययन पहले ही कर चुके हैं। क्या आप इससे सहमत हैं? क्या एक रेखा किसी फलन का $\mathbb{R}$ से $\mathbb{R}$ तक निरूपण नहीं है? उदाहरणार्थ, कोई भी रेखा, मान लीजिए $2x = 3y + 7$, को लीजिए। यह बिंदुओं $\left\{\left(x, \frac{2x-7}{3}\right) \middle| x \in \mathbb{R}\right\}$ का समुच्चय है, और $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ का उपसमुच्चय है। जाँच कीजिए कि यह संबंध एक फलन की सभी प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है। अतः, इसे एक फलन $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{3}(2x - 7)$ के रूप में भी लिखा जा सकता है।

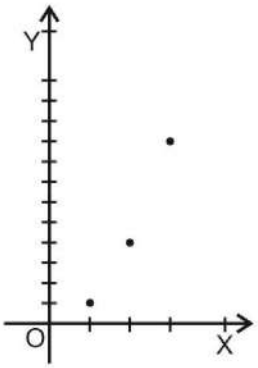


चित्र 14:
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = ax + b$ को L निरूपित करता है।

अतः यह फलन रेखा $2x = 3y + 7$, अर्थात् $y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$ द्वारा निरूपित है, जिसकी प्रवणता $\frac{2}{3}$ है और y-अंतःखंड $\frac{7}{3}$ है। व्यापक रूप से, फलन $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$ प्रवणता a और y-अंतःखंड b वाली एक रेखा द्वारा निरूपित होता है, जैसा कि चित्र 14 में दर्शाया गया है। f का यह निरूपण **f का आलेख** कहलाता है।

अधिक व्यापक रूप से, कोई फलन $A \subseteq \mathbb{R}$ से $B \subseteq \mathbb{R}$ तक दिया रहने पर, हमें निम्नलिखित परिभाषा प्राप्त है :

परिभाषा : मान लीजिए कि f प्राँत A और सह-प्राँत B वाला एक फलन है, जहाँ A और B, $\mathbb{R}$ के उपसमुच्चय हैं। **f का आलेख (graph)** $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ का उपसमुच्चय $\{(x, f(x)) | x \in A\}$ है।



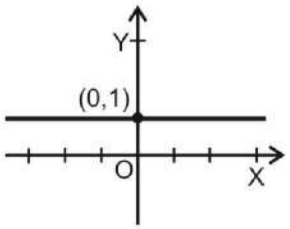
चित्र 15

इस प्रकार, जब यह समुच्चय कार्तीय पद्धति प्रयोग करते हुए, निरूपित किया जाता है, तब हम इसे फलन की ज्यामितीय दृष्टि के रूप में देखते हैं। जैसा कि आप देख चुके हैं, यदि फलन एक रैखिक बहुपद है, तो इसका आलेख एक सरल रेखा होता है। आइए कुछ और उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 4: फलन $f: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, ..., 10\} : f(1) = 1, f(2) = 4, f(3) = 9$ का आलेख खींचिए।

हल : हम कार्तीय पद्धति में समुच्चय $\{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$ के बिंदुओं को आलेखित करते हैं (देखिए चित्र 15)। इस प्रकार, f का आलेख चित्र 15 में दर्शाए गए तीन बिंदु हैं।

***



चित्र 16: $y = 1$

उदाहरण 5: अचर फलन $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(r) = 1$ का आलेख खींचिए।

हल : इस फलन का आलेख $\{(r, 1) | r \in \mathbb{R}\}$ को निरूपित करने वाले बिंदुओं का समुच्चय, अर्थात् चित्र 16 में दर्शाई गई रेखा $y = 1$ है।

***

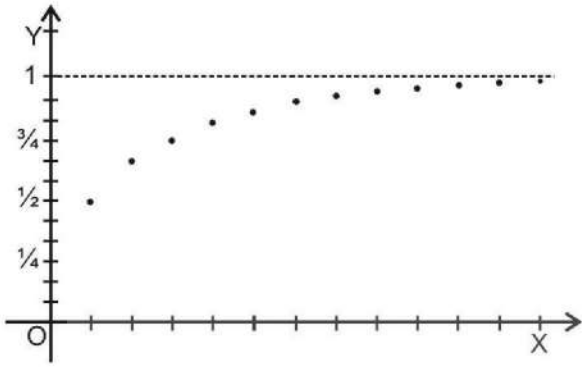
उदाहरण 5 हमें निम्नलिखित टिप्पणी की ओर ले जाती है।

टिप्पणी 4: चित्र 16 में आलेख को देखिए। y-अक्ष के अनुदिश कोई भी मान b ऐसा लीजिए कि $b \neq 1$ हो। आप देख सकते हैं कि रेखा $y = b$ इस आलेख को कहीं भी प्रतिच्छेद नहीं करती। परंतु f के सह-प्राँत $\mathbb{R}$ में b स्थित है। यह क्या दर्शाता है? यह हमें बताता है कि **f आच्छादक नहीं है** (देखिए इकाई 2)। अधिक व्यापक रूप में, किसी फलन के आलेख को देखने पर, हम बता सकते हैं कि यह आच्छादक है या नहीं। यदि फलन के सह-प्राँत के किसी एक अवयव b के लिए भी रेखा $y = b$ आलेख को प्रतिच्छेद नहीं करती है तो फलन आच्छादक नहीं है। आच्छादकता की जाँच के लिए, यहाँ एक उदाहरण है।

उदाहरण 6: इकाई 2 के E8 (i) में दिए फलन का आलेख खींचिए। इसके बाद, आलेख को देख कर जाँच कीजिए कि क्या यह फलन आच्छादक है।

हल: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q} : f(n) = \frac{n}{n+1}$.

चित्र 17 में दिया गया है। ध्यान दीजिए कि हमने सुविधा की दृष्टि से x-अक्ष और y-अक्ष के अनुदिश अलग-अलग इकाइयाँ प्रयोग की हैं।



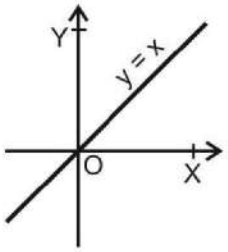
चित्र 17: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} : f(n) = \frac{n}{n+1}$ का आलेख

आप देख सकते हैं कि इस आलेख में अनंततः अनेक बिंदु हैं, जो रेखा $y = 1$ के निकटतर होते जाते हैं, परंतु उसके नीचे ही स्थित होते हैं, चाहे n कितना ही बड़ा हो जाए। अब, 1, f के सह-प्रांत $\mathbb{Q}$ में है, परंतु $y = 1$, f के आलेख को प्रतिच्छेद नहीं करती है। यह हमें बताती है कि f आच्छादक नहीं है।

***

उदाहरण 7: $\mathbb{R}$ से $\mathbb{R}$ तक तत्समक फलन का आलेख खींचिए।

हल : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(r) = r$. इसका आलेख समुच्चय $\{(r, r) \mid r \in \mathbb{R}\}$ है, जिसे चित्र 18 में खींचा गया है। आप देख सकते हैं कि यह रेखा $y = x$ है।



चित्र 18: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(r) = r$ का आलेख

***

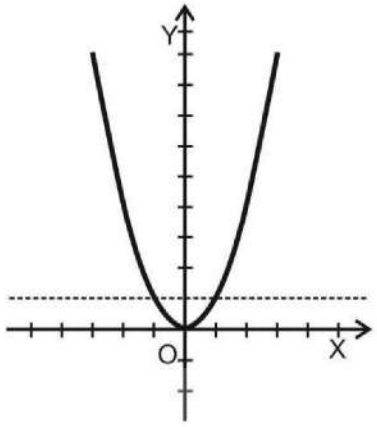
उदाहरण 7 से हम एक महत्त्वपूर्ण बात पर पहुँचते हैं।

टिप्पणी 5: यदि आप चित्र 18 के आलेख की जाँच करें तथा x-अक्ष के समांतर कोई रेखा, मान लीजिए, $y = b$ लें, तो यह आलेख को केवल एक ही बिंदु, अर्थात् (b, b) पर प्रतिच्छेद करेगी। आलेख का यह गुण हमें बताता है कि f, $1 - 1$ है (देखिए इकाई 2)। अधिक व्यापक रूप में, **यदि $f : A \to B \subseteq \mathbb{R}$ तथा $\forall b \in B$, $y = b$ फलन f के आलेख को ज्यादा से ज्यादा एक ही बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है, तो f, $1 - 1$ होता है।** यदि एक भी $b \in B$ के लिए, दो या अधिक प्रतिच्छेद बिंदु हो जाएँ, तो f, $1 - 1$ नहीं होगा।

उदाहरण 8: फलन $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : g(x) = x^2$ का आलेख खींचिए। इससे, निर्णय लीजिए कि क्या

i) g, $1 - 1$ है या नहीं।
ii) g आच्छादक है या नहीं।

हल : g का आलेख समुच्चय $\{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ है। जैसा कि आप देख सकते हैं, यह परवलय $y = x^2$ है, जिसे चित्र 19 में दर्शाया गया है।



चित्र 19: वक्र जो $\{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}\}$ को निरूपित करता है।

i) आलेख से आप देख सकते हैं कि, उदाहरणार्थ रेखा $y = 1$ आलेख को दो बिंदुओं $(1, 1)$ और $(-1, 1)$ पर प्रतिच्छेद करती है। अतः $g, 1 - 1$ नहीं है।

ii) आलेख से आप देख सकते हैं कि किसी $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha < 0$ के लिए, $y = \alpha$ आलेख को प्रतिच्छेद नहीं करती है। अतः g आच्छादक नहीं है।

***

f मापांक फलन

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

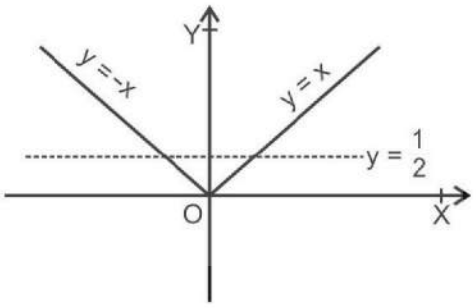
को परिभाषित करता है।

उदाहरण 9: $f(x) = x$, यदि $x \geq 0$ है तथा $f(x) = -x$, यदि x, यदि $x < 0$ है द्वारा परिभाषित $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ का आलेख खींचिए। आगे आलेख की जाँच करके निर्णय कीजिए कि f एकैकी आच्छादक है या न।

$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

हल : इस फलन का आलेख खींचने के लिए, ध्यान दीजिए कि यह ऋणात्मक वास्तविक संख्याओं $\mathbb{R}^-$ के लिए तथा ऋणेतर संख्याओं $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ के लिए अलग प्रकारों से परिभाषित है। अतः, आलेख समुच्चय सम्मिलन $\{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}^+\} \cup \{(0, 0)\} \cup \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}^-\}$ है। इसे चित्र 20 में दर्शाया गया है।



चित्र 20: | x | का आलेख

उदाहरण 9 में, यदि आप यह दिखाएं कि f आच्छादक नहीं है, तब भी आपने दर्शा दिया होगा कि f एकैकी आच्छादक नहीं है।

आप देख सकते हैं कि $\mathbb{R}^+$ पर, यह रेखा $y = x$ है तथा $\mathbb{R}^-$ पर यह रेखा $y = -x$ है। साथ ही, इसे देखने से पता चलता है कि $y = \frac{1}{2}$ इसे दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है। अतः, f एकैकी नहीं है, और इस प्रकार एकैकी आच्छादक नहीं है।

***

अब आप कुछ संबंधित प्रश्न क्यों नहीं करते?

E10) नीचे दिए फलनों के आलेख खींचिए :

i) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : f(n) = n + 5;$

ii) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : g(n) = n + 5;$

iii) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : h(r) = r + 5.$

उपरोक्त तीनों आलेखों में आप क्या अंतर देखते हैं? एकैकिता तथा आच्छादकता से संबंधित अंतरों को सम्मिलित कीजिए।

E11) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ का आलेख खींचिए।

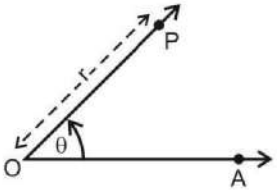
इससे निर्णय लीजिए कि क्या f एकैकी आच्छादक है या नहीं।

E12) उस फलन $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ का आलेख खींचिए, जो $\frac{x}{\pi} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 1$ से दी जाने वाली रेखा को निरूपित करता है। जाँच कीजिए कि f एकैकी आच्छादक है या नहीं।

अभी तक हम कार्तीय निर्देशांकों के साथ कार्य कर रहे थे। परंतु समतल में बिंदुओं की स्थिति निर्धारित करने के लिए एक अन्य बहुत अधिक उपयोगी निर्देशांक पद्धति है। आइए देखें कि यह क्या है।

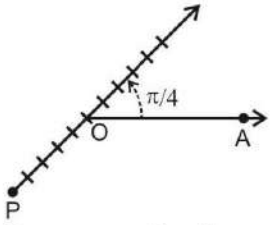
3.5 ध्रुवीय निर्देशांक पद्धति

आप 'कोण' और 'त्रिज्या' की संकल्पनाएँ पहले देख चुके हैं। इन संकल्पनाओं के प्रयोग से समतल में किसी बिंदु की स्थिति निर्धारित की जा सकती है। आइए देखें कैसे।



चित्र 21: ध्रुव O, ध्रुवीय अक्ष $\overrightarrow{OA}$ लेते हुए P की त्रिज्या r तथा P का ध्रुवीय कोण θ, P के ध्रुवीय निर्देशांक हैं।

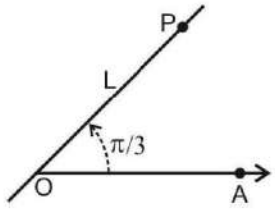
सबसे पहले, हम समतल में एक बिंदु O नियत करते हैं, जिसे **ध्रुव (pole)** कहते हैं। इसके बाद, हम एक अक्ष नियत करते हैं, जो प्रायः O से होकर जाने वाली क्षैतिज किरण होती है तथा **ध्रुवीय अक्ष (polar axis)** कहलाती है, जिसे चित्र 21 में $\overrightarrow{OA}$ से दर्शाया गया है। फिर हम समतल में किसी भी बिंदु P की स्थिति निर्धारित कर सकते हैं यदि हमें दूरी OP, मान लीजिए r तथा कोण AOP, मान लीजिए θ रेडियन, ज्ञात हों। r बिंदु P का **रेडियन निर्देशांक,** या **त्रिज्या,** कहलाता है, तथा θ P का **कोणीय निर्देशांक (angular coordinate)** या **ध्रुवीय कोण (polar angle)** कहलाता है। इस प्रकार, समतल में एक बिंदु P दिया रहने पर, हम इसे निर्देशांकों के युग्म (r, θ) से निरूपित कर सकते हैं, जहाँ r बिंदु O से P की "दिष्ट दूरी" है तथा $\angle AOP = \theta$ है, जिसे वामावर्त दिशा में रेडियनों में मापा गया है। हमने द्विष्ट दूरी शब्द का प्रयोग किया है, क्योंकि r ऋणात्मक भी हो सकता है। उदाहरणार्थ, चित्र 22 में बिंदु P को $\left(5, \frac{5\pi}{4}\right)$ या $\left(-5, \frac{\pi}{4}\right)$ द्वारा निरूपित किया जा सकता है, क्योंकि धनात्मक दूरी उस किरण की दिशा में होगी जो ध्रुवीय अक्ष से $\frac{5\pi}{4}$ का कोण बनाती है। व्यापक रूप में, (r, θ) दिया रहने पर, r धनात्मक है, यदि उसे उस किरण के अनुदिश मापें जो ध्रुवीय अक्ष से कोण θ बनाती है तथा r ऋणात्मक है, यदि इसे उस किरण के अनुदिश मापें जो ध्रुवीय अक्ष के साथ $\pi + \theta$ कोण बनाती है।



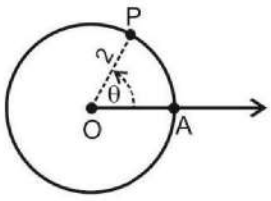
चित्र 22: P के ध्रुवीय निर्देशांक $\left(-5, \frac{\pi}{4}\right)$ हैं।

ध्यान दीजिए कि इस विधि द्वारा ध्रुव O के निर्देशांक, (0, θ) है, जहां θ कोई भी कोण हो सकता है।

एक बिंदु के अनेक अलग-अलग ध्रुवीय निर्देशांक युग्म होते हैं।



चित्र 23: रेखा $L, \theta = \frac{\pi}{3}$ से दी जाती है।



चित्र 24: वृत्त $r = 2$

इस प्रकार, आपने देखा कि किसी भी बिंदु P के लिए, वास्तविक संख्याओं का एक युग्म (r, θ) उसके संगत होता है। ये P के **ध्रुवीय निर्देशांक** कहलाते हैं। जैसा कि आप देख चुके हैं, ये निर्देशांक अद्वितीय नहीं हैं।

अब, यदि हम θ को नियत करें, मान लीजिए $\theta = \frac{\pi}{3}$, तथा r को सभी वास्तविक मान लेने दें, तो हमें रेखा $\overleftrightarrow{OP}$ प्राप्त हो जाती है (देखिए चित्र 23), जहाँ $\angle AOP = \frac{\pi}{3}$ है।

इसी प्रकार, r को नियत करके, मान लीजिए $r = 2$, तथा O को सभी वास्तविक मान लेने दें, तो बिंदु $P(2, \theta)$ त्रिज्या 2 वाला एक वृत्त अनुरेखित करता है, जिसका केन्द्र ध्रुव होगा (देखिए चित्र 24)।

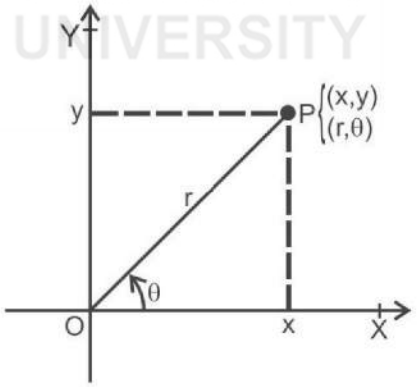
टिप्पणी 6: θ के ऋणात्मक मान का अर्थ है कि कोण का परिमाण $|\theta|$ है, परंतु इसे दक्षिणावर्त दिशा में लिया जाएगा। उदाहरणार्थ, बिंदु $\left(2, -\frac{\pi}{2}\right)$ को $\left(2, \frac{3\pi}{2}\right)$ से भी निरूपित किया जा सकता है।

जैसा कि आपने शायद अनुमान लगा लिया होगा, कार्तीय निर्देशांक (x, y) और ध्रुवीय निर्देशांक (r, θ) बहुत ही निकट रूप से संबंधित हैं। क्या आप इस संबंध को ज्ञात कर सकते हैं? चित्र 25 देखकर शायद आप सहमत हों कि यह संबंध है :

$$x = r\cos\theta, \; y = r\sin\theta \qquad ...(7)$$

इससे हमें प्राप्त होता है :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \; \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad ...(8)$$



चित्र 25: ध्रुवीय और कार्तीय निर्देशांक

ध्यान दीजिए कि यहाँ मूलबिंदु और ध्रुव संपाती हैं तथा x-अक्ष और ध्रुवीय अक्ष भी संपाती हैं। यही स्थिति प्रायः होती है।

टिप्पणी 7: यदि किसी बिंदु के ध्रुवीय निर्देशांकों को अद्वितीय होना है, तो हमें θ को $0 \le \theta < 2\pi$ तक सीमित करने की आवश्यकता होगी। (तब ध्रुव के ध्रुवीय निर्देशांक $(0, 0)$ होंगे।) जैसा कि आप देख सकते हैं, यह प्रतिबंध कार्तीय पद्धति की अद्वितीयता के संगत है।

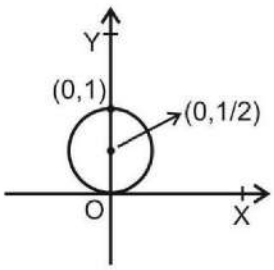
हम (7) और (8) का प्रयोग अधिकतर समीकरणों के साथ कार्य करते समय करते हैं। विशेष रूप से जहाँ दो बिंदुओं के बीच संबंध को r और θ के पदों में आसानी से दिया जा सकता है। उदाहरणार्थ, एक वृत्त का कार्तीय समीकरण $x^2 + y^2 = 25$ सरल ध्रुवीय

रूप में $r = 5$ बन जाती है। इसलिए, हम कार्तीय रूप के स्थान पर इस सरल रूप के प्रयोग को प्राथमिकता दे सकते हैं।

किसी वक्र के r और θ के पदों में समीकरण को **ध्रुवीय समीकरण (polar equation)** कहते हैं। आप इस रूप को इस पाठ्यक्रम तथा गणित के अन्य पाठ्यक्रमों में प्रायः प्रयोग करेंगे। आइए एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 10: वक्र $r = \sin\theta$ का आलेख खींचिए।

हल : $r = \sin\theta$ कार्तीय रूप में $x^2 + y^2 = y$ द्वारा दिया जाने वाला वक्र है। यह समीकरण $x + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ के तुल्य है, जो त्रिज्या $\frac{1}{2}$ और केन्द्र $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ वाले वृत्त को दर्शाता है। हमने इसका आलेख चित्र 26 में दिया है।



चित्र 26: $r = \sin\theta$ का आलेख

***

अब, ध्रुवीय निर्देशांकों से अवगत होने के लिए, निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E13) वक्र $r\cos\theta = 1$ का आलेख खींचिए।

E14) निम्नलिखित समीकरणों के कार्तीय रूप ज्ञात कीजिए :

i) $r^2 = 3r\sin\theta$

ii) $r = a(1 - \cos\theta)$, जहाँ a एक अचर है।

ध्रुवीय निर्देशांक पद्धति के विकास और उपयोग का इतिहास बहुत रोचक है। वास्तव में, यह दूसरी शताब्दि ई.पू. की बात है, जब प्राचीन यूनानी खगोलशास्त्री हिप्पारकस (Hipparchus) ने इसका प्रयोग तारों की स्थितियाँ निर्धारित करने में किया। हमारे समय के निकटतर, 17वीं शताब्दि के जर्मन गणितज्ञ जेकब बर्नेली (Bernoulli) को इस पद्धति को औपचारिक रूप देने तथा वक्रों के अध्ययन में इसको प्रयोग करने का श्रेय जाता है।

ध्रुवीय निर्देशांक पद्धति वक्रों के विभिन्न गुणों का अध्ययन करने तथा उन्हें खींचने के लिए उपयोगी है। आप अगले इकाई में ही, एक सम्मिश्र संख्या के ज्यामितीय निरूपण का अध्ययन करते समय, इसे उपयोगी पाएँगे।

आइए अब इसका सारांश दें कि आपने इस इकाई में क्या अध्ययन किया है।

3.6 सारांश

इस इकाई में, हमने संक्षिप्त रूप में द्विविमीय वैश्लेषिक ज्यामिति की कुछ प्रारंभिक संकल्पनाओं का चर्चा की है। विशेष रूप से, आपने निम्नलिखित बातों पर ग़ौर किया है :

1. 2D कार्तीय पद्धति द्विविमीय समष्टि को निरूपित करती है, जिसमें समष्टि में बिंदुओं तथा $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ के बिंदुओं में एकैकी संगति होती है।

2. कार्तीय पद्धति में, x-अक्ष के समांतर कोई भी रेखा $y = a$ द्वारा निरूपित होती है तथा y-अक्ष के समांतर कोई भी रेखा $x = b$ द्वारा निरूपित होती है, जहाँ a और b कोई अचर हैं।

3. रेखा का समीकरण :

   i) प्रवणता-अंतःखंड रूप में $y = mx + c$ है,

   ii) बिंदु-प्रवणता रूप में $y - y_1 = m(x - x_1)$ है,

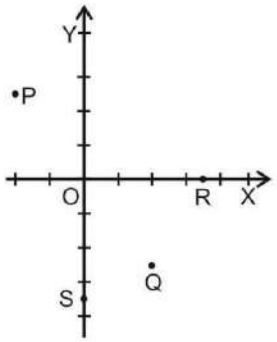
   iii) दो-बिंदु रूप में $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ है,

   iv) अंतःखंड रूप में, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ है।

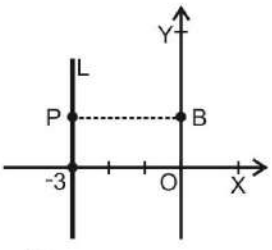
4. **ध्रुवीय निर्देशांक पद्धति :** समतल में स्थित एक बिंदु P को वास्तविक संख्याओं के एक युग्म (r, θ) से निरूपित किया जा सकता है, जहाँ r ध्रुव O से P की दिष्ट दूरी है तथा θ वह कोण है जो OP ध्रुवीय अक्ष के साथ बनाता है और जिसे वामावर्त दिशा में रेडियनों में मापा जाता है। r (जो त्रिज्या कहलाता है) तथा θ (जो ध्रुवीय कोण कहलाता है) P के **ध्रुवीय निर्देशांक** कहलाते हैं। ये P के कार्तीय निर्देशांकों (x, y) से $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ और $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ द्वारा संबंधित हैं।

5. एक समतल में, r और θ बिंदुओं को अद्वितीय रूप से केवल तभी निरूपित करते हैं, यदि हम यह निश्चित करें कि या तो $0 \le \theta < 2\pi$ है या $-\pi \le \theta < \pi$ है।

अगली इकाई में, हम उन संख्याओं की चर्चा करेंगे जिन्हें कार्तीय और ध्रुवीय पद्धतियों द्वारा निरूपित किया जाता है। परंतु इस इकाई पर जाने से पहले, कृपया यह सुनिश्चित कर लें कि आपने **भाग 3.1 में सूचीबद्ध इकाई के उद्देश्य प्राप्त कर लिए हैं।** इसकी जाँच करने की एक विधि यह है कि आप सुनिश्चित कर लें कि आपने इस इकाई में दिए सभी प्रश्नों को हल कर लिया है। इन प्रश्नों के हल/उत्तर अगले भाग में दिए जा रहे हैं।



चित्र 27



चित्र 28: –L, x = –3 दर्शाता है।

3.7 हल/उत्तर

E1) बिंदु P(–2, 2.5), Q(2, –2.5), R(3.45, 0), S(0, –3.45) चित्र 27 में दर्शाए गए हैं।

E2) i) $xy > 0 \Rightarrow x > 0, y > 0$ या $x < 0, y < 0$.
इस प्रकार, (x, y) चतुर्थांश I या III में स्थित होगा।

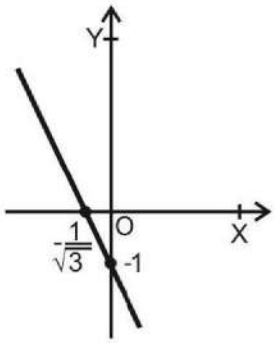
ii) उपरोक्त (i) में दिए तर्क की तरह, (x, y) चतुर्थांश II या IV में स्थित होगा।

iii) $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ या $y = 0$.
इस प्रकार, $(x, y) = (0, y)$ या $(x, y) = (x, 0)$ है। इसके अनुसार, बिंदु y-अक्ष पर या x-अक्ष पर स्थित होगा।

E3) i) चित्र 28 में दिखाए गए रेखा L पर विचार कीजिए। यह रेखा y-अक्ष के समांतर है तथा (–3, 0) से होकर जाती है। L पर कोई भी बिंदु P(x, y) लीजिए। P से y-अक्ष पर लंब खींचिए जो उसे B पर काटता है। तब, $x = PB = -3$ है। इस प्रकार, L पर कोई भी बिंदु $(-3, y)$, $y \in \mathbb{R}$ के रूप का

होगा। विलोमतः, यदि आप कोई बिंदु $(-3, r), r \in \mathbb{R}$ आलेखित करें, तो यह L पर ही स्थित होगा। इस प्रकार, L का समीकरण $x = -3$ है।

ii) उपरोक्त (i) के तर्क की ही तरह, इस रेखा का समीकरण $x = b$ होगा।



चित्र 29: $y = -(\sqrt{3}x + 1)$

E4) x और y अक्षों को क्रमश : $y = 0$ और $x = 0$ द्वारा दिया जाता है।

E5) चित्र 29 में हमने रेखा खींच दी है। इसका समीकरण $y = mx + c$ है, जहाँ $c = -1$ और $m = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$ है। इस प्रकार, वाँछित समीकरण $y = -(\sqrt{3}x + 1)$ है।

E6) यहाँ $c = 0$ है, क्योंकि रेखा y-अक्ष को $(0, 0)$ पर प्रतिच्छेद करती है। इस प्रकार, समीकरण $y = x \tan\theta$ है।

E7) हमें दिया है कि L की प्रवणता m है तथा $(0, c)$ इस पर स्थित है। इस प्रकार, (4) के प्रयोग से, हमें इसका समीकरण $y - c = m(x - 0)$ अर्थात् $y = mx + c$ प्राप्त होता है।

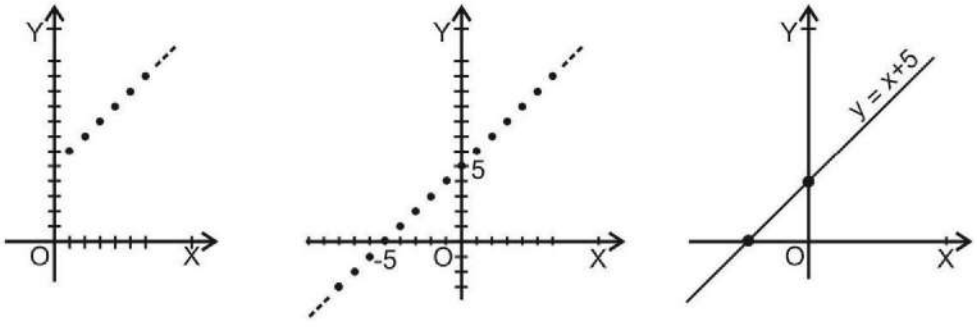
E8) i) $(2, 0)$ और $(0, -3)$ रेखा पर स्थित हैं। इस प्रकार, इसका दो-बिंदु रूप
$\frac{y-0}{-3-0} = \frac{x-2}{0-2}$ अर्थात्, $2y = 3(x - 2)$ है।
हम इसे पुनः $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ के रूप में लिख सकते हैं।

ii) $(a, 0)$ और $(0, b)$ रेखा पर स्थित हैं। इस प्रकार, इसका समीकरण
$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a} \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ है।

E9) i) $y + x + 1 = 0$ की प्रवणता -1 है। इसलिए, दी हुई रेखा के समांतर किसी भी रेखा की प्रवणता -1 है। इस प्रकार, वाँछित रेखा $y + x + c = 0$ के रूप की होगी, जहाँ $c \in \mathbb{R}$. चूंकि $(0, 0)$ इस पर स्थित है, इसलिए $0 + 0 + c = 0$, अर्थात् $c = 0$. इस प्रकार, वाँछित रेखा $y + x = 0$ है।

ii) रेखा $y + x = 0$ की प्रवणता -1, अर्थात् $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ है। इस प्रकार, इस पर लंब कोई भी रेखा x-अक्ष से कोण $\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \pm \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ बनाती है। आप इसकी जाँच करें कि इन दोनों मानों से एक ही रेखा प्राप्त होती है। अतः, इस रेखा की प्रवणता $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ होगी। इस प्रकार, वाँछित रेखा का समीकरण $y = x + c$ है, जहाँ $c \in \mathbb{R}$. चूंकि $(2, 1)$ इस पर स्थित है, इसलिए $1 = 2 + c$, जिससे $c = -1$ मिलता है। इस प्रकार, वाँछित रेखा $y = x - 1$ है।

E10) f, g और h के आलेख क्रमश : चित्र 30 (क), (ख), (ग) में दिए हैं।



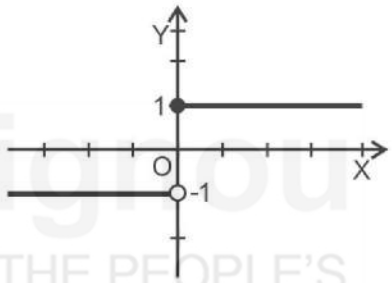
(क) (ख) (ग)

चित्र 30

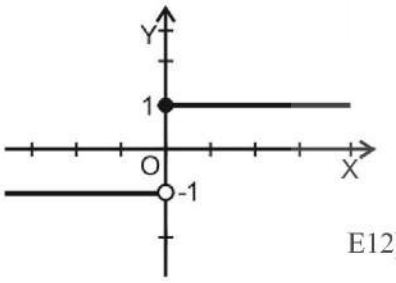
जैसा कि आप देख सकते हैं, चित्र 30(क) में आलेख अनंततः अनेक बिंदु दर्शाता है, जो सभी पहले चतुर्थांश में स्थित हैं। चित्र 30(ख) में आप इन्हीं बिंदुओं को देखेंगे तथा साथ ही एक बिंदु x-अक्ष पर और एक बिंदु y-अक्ष पर है, चार बिंदु दूसरे चतुर्थांश में हैं तथा अनंततः अनेक बिंदु तीसरे चतुर्थांश में हैं। चित्र 30(ग) में आप को रेखा $y = x + 5$ प्राप्त हो रही है। साथ ही, f और g के आलेखों के सभी बिंदु वास्तव में इसी रेखा पर स्थित हैं। इस प्रकार, f का आलेख g के आलेख का एक उचित उपसमुच्चय है, जो h के आलेख का एक उचित उपसमुच्चय है।

एकैकिता पर विचार करते हुए, आप जाँच कर सकते हैं कि ये तीनों एकैकी हैं। आच्छादकता पर विचार करते हुए, (i) आच्छादक नहीं है, क्योंकि उदाहरणार्थ, $1 \in \mathbb{N}$ है, परंतु $y = 1$ आलेख को प्रतिच्छेद नहीं करती है। आप जाँच कर सकते हैं कि (ii) और (iii) आच्छादक हैं।

E11) यहाँ f के आलेख में दो भाग हैं, जो $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ के लिए $y = 1$ है तथा $\mathbb{R}^{-1}$ के लिए $y = -1$ है। अतः, आलेख चित्र 31 में दर्शाए अनुसार है। **हम बिंदु (1, 0) को यह दर्शाने के लिए वृत्त से घेरते हैं कि यह आलेख में सम्मिलित नहीं है।**



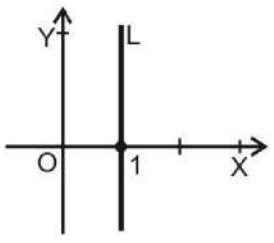
चित्र 31: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ का आलेख।



चित्र 32

आलेख से आप देख सकते हैं कि, उदाहरणार्थ $0 \in \mathbb{R}$ परंतु $y = 0$ (अर्थात् x-अक्ष) आलेख को प्रतिच्छेद नहीं करती है। अतः, f, 1 – 1 नहीं है। इसलिए, f एकैकी आच्छादक नहीं है। **(यह आप इसकी जाँच करके भी दर्शा सकते हैं कि यह आच्छादक नहीं है।)**

E12) दिया हुआ समीकरण रैखिक है। अतः, यह एक रेखा द्वारा निरूपित होता है। अब दिए गए समीकरण की तुलना E8(ii) के समीकरण से करने पर, आप देख सकते हैं कि इस रेखा के x-अक्ष और y-अक्ष पर अंतःखंड क्रमशः π और $\sqrt{2}$ हैं। इस प्रकार, इसका आलेख चित्र 32 में दर्शाए अनुसार है। आप आलेख की जाँच करके दर्शा सकते हैं कि यह एकैकी आच्छादक है।



चित्र 33

E13) यदि हम कार्तीय निर्देशांकों में बदलते हैं तो वक्र $x = 1$ है। यह चित्र 33 में रेखा L है।

E14) i) चुंकि $r^2 = x^2 + y^2$ और $y = r \sin\theta$, इसलिए समीकरण $x^2 + y^2 = 3y$ बन जाता हैं।

ii) समीकरण बन जाता है :

$\sqrt{x^2 + y^2} = a\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$, क्योंकि $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ है।

$\Rightarrow x^2 + y^2 + a(x - \sqrt{x^2 + y^2}) = 0.$

इकाई 4

सम्मिश्र संख्याएँ

संरचना **पृष्ठ संख्या**

4.1	प्रस्तावना	87
	उद्देश्य	88
4.2	सम्मिश्र संख्या क्या है	88
4.3	सम्मिश्र संख्या के विभिन्न निरूपण	92
	ज्यामितीय निरूपण	92
	ध्रुवीय निरूपण	93
4.4	बीजीय संक्रियाएँ	96
	योग और घटाना	96
	गुणन और विभाजन	99
4.5	द मुआव्र प्रमेय के अनुप्रयोग	103
	त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ	104
	सम्मिश्र संख्या के मूल	106
4.6	सारांश	110
4.7	हल / उत्तर	111

4.1 प्रस्तावना

अभी तक के अपने अध्ययन में आपने प्राकृतिक संख्याओं, पूर्णांकों, परिमेय संख्याओं तथा वास्तविक संख्याओं के साथ काम किया है। आपको यह भी ज्ञात होगा कि $\mathbb{N}$ में कूछ कमी होने के कारण अनेक सदियों पहले के गणितज्ञों को ऋणात्मक संख्याओं को परिभाषित करना पड़ा। और इस प्रकार समुच्चय $\mathbb{Z}$ की उत्पत्ति हुई। इसी प्रकार के कारणों से $\mathbb{Z}$ को $\mathbb{Q}$ तक तथा $\mathbb{Q}$ को $\mathbb{R}$ तक इतिहास के विभिन्न स्तरों पर विस्तृत किया गया। तब, एक वक़्त ऐसा आया कि गणितज्ञों को लगा कि $\mathbb{R}$ भी पर्याप्त नहीं है, उदाहरणार्थ, $x^2 + 1 = 0$ जैसे समीकरणों के हलों को खोजते समय। क्योंकि $x^2 + 1 = 0$ का $\mathbb{R}$ में कोई हल नहीं है, इसलिए लंबे समय तक यह स्वीकार कर लिया गया था कि $x^2 + 1 = 0$ का कोई हल नहीं है। भारतीय गणितज्ञों महावीर (850 A.D. में) तथा भास्कर (1150 A.D. में) ने स्पष्टतः यह कहा कि किसी भी ऋणात्मक संख्या का कोई वर्गमूल नहीं होता है। 16वीं सदी में एक इतालवी गणितज्ञ कार्दानो (Cardano)



चित्र 1: कार्दानो (1501-1526) ने अधिकल्पित संख्याओं के अस्तित्व को अपनी 1545 में प्रकाशित पुस्तक, आर्स मैगना, में स्वीकार किया।

ने द्विघात समीकरण $x^2 - 10x + 40 = 0$ को हल करने का प्रयास किया। उसने ज्ञात किया कि $x_1 = 5 + \sqrt{-15}$ और $x_2 = 5 - \sqrt{-15}$ इस समीकरण को संतुष्ट करते हैं। परंतु, $\sqrt{-15}$ क्या होता है? उन्होंने, तथा अन्य गणितज्ञों ने, ऐसे ऐसे व्यंजकों को कुछ अर्थ प्रदान करने का प्रयास किया। वास्तविक जीवन की स्थितियों के हलों के गणितीय निदर्शों को बनाते समय भी, 17वीं और 18वीं सदी के गणितज्ञों के सम्मुख ऐसे समीकरणों के अनेक उदाहरण आते रहे जिनके कोई वास्तविक मूल नहीं थे। इस कमी को दूर करने के लिए, एक सम्मिश्र संख्या की संकल्पना धीरे-धीरे बनने लगी। प्रसिद्ध गणितज्ञ गाउस (Gauss) (1777-1855) ने $5 + \sqrt{-15}$ जैसी संख्याओं को 'सम्मिश्र संख्या' का नाम दिया, तथा इस नाम को लोकप्रिय बनाया।

19वीं सदी के प्रारंभ में, सम्मिश्र संख्याओं के एक ज्यामितीय निरूपण को विकसित किया गया। इस निरूपण से ही सम्मिश्र संख्याएँ सभी गणितज्ञों को स्वीकृत हो गईं। तबसे ही सम्मिश्र संख्याएँ गणित की सभी शाखाओं में प्रवेश कर गई हैं। वास्तव में, आधुनिक भौतिकी और अभियांत्रिकी के अनेक क्षेत्रों के विकास के लिए, भी इन्हें आवश्यक पाया गया है।

इस इकाई में, आपको भाग 4.2 में सम्मिश्र संख्याओं से परिचित होने का एक अवसर प्राप्त होगा। सम्मिश्र संख्याओं को निरूपित करने की अनेक विभिन्न विधियाँ हैं, जिनका अध्ययन आप भाग 4.3 में करेंगे। आगे, भाग 4.4 में, आप सम्मिश्र संख्याओं पर आधारभूत बीजीय संक्रियाओं का अध्ययन करेंगे। अंत में, भाग 4.5 में, हम आपको द मुआव्र (De Moivre) प्रमेय से परिचय कराएँगे, तथा आप देखेंगे कि इसे इतना महत्त्वपूर्ण क्यों समझा जाता है।

हम पुनः ज़ोर देकर कहना चाहेंगे कि आपके द्वारा अध्ययन किए जाने वाले गणित के किसी भी पाठ्यक्रम में, आपको सम्मिश्र संख्याओं की समझ और ज्ञान की आवश्यकता पड़ेगी, जिसको हमने इस इकाई के माध्यम से आपको प्रदान करने का प्रयास किया है। अतः, कृपया इसका सावधानीपूर्वक अध्ययन कीजिए, हर प्रश्न को उसपर पहुँचने पर कीजिए, तथा सुनिश्चित कर लें कि आपने निम्नलिखित उद्देश्य प्राप्त कर लिए हैं।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद, आपको निम्नलिखित में समर्थ हो जाना चाहिए :

- सम्मिश्र संख्या को परिभाषित करना;
- एक सम्मिश्र संख्या के बीजीय, ज्यामितीय और ध्रुवीय निरूपणों का विवरण देना;
- दो सम्मिश्र संख्याओं को जोड़ना, घटाना, गुणा करना तथा भाग देना;
- त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं को सिद्ध करने में द मुआव्र प्रमेय का अनुप्रयोग करना;
- $z \in \mathbb{C}$ के nवें मूलों को ज्ञात करने के लिए, द मुआव्र प्रमेय का अनुप्रयोग करना, जहाँ $n \in \mathbb{N}$.

4.2 सम्मिश्र संख्या क्या है

आइए रैखिक समीकरण $2x + 3 = 0$ पर विचार करें। आप जानते हैं कि इसका एक हल, अर्थात्, $x = \frac{-3}{2}$ है। परंतु, क्या आप इस जैसे हर समीकरण यानि कि $ax + b = 0$ जहाँ

$a, b \in \mathbb{R}$ तथा $a \neq 0$ का हमेशा एक वास्तविक हल प्राप्त कर सकते हैं? क्या वाँछित हल $x = \frac{-b}{a}$ है? ऐसा ही है, क्योंकि $a\left(\frac{-b}{a}\right) + b = 0$.

अब, यदि हम $\mathbb{R}$ पर किसी भी द्विघात समीकरण के वास्तविक हलों को प्राप्त करने का प्रयास करें, तो क्या होता है? उदाहरण के लिए, एक ऐसी ही समीकरण $x^2 - 1 = 0$, अर्थात् $x^2 = 1$ पर विचार कीजिए। इस समीकरण के दो वास्तविक हल हैं, $x = 1$ और $x = -1$, परंतु समीकरण $x^2 + 1 = 0$, अर्थात $x^2 = -1$ के बारे में आप क्या कह सकते हैं? क्या इस समीकरण का $\mathbb{R}$ में कोई हल है? क्योंकि किसी भी वास्तविक संख्या का वर्ग ऋणेतर है, इसलिए ऐसी कोई संख्या $x \in \mathbb{R}$ नहीं है जिससे कि $x^2 = -1$ हो। परंतु, जैसी कि भाग 4.1 में चर्चा की गई है, गणितज्ञों द्वारा किए गए अध्ययनों में $x^2 = -1$ के प्रकार के अनेक समीकरण उभर रहे थे। वास्तव में, लगभग 250 A.D. से ही गणितज्ञों को वास्तविक जीवन की स्थितियों से ऐसे द्विघात समीकरण प्राप्त होते रहे जिनके कोई वास्तविक हल नहीं थे। 16वीं शताब्दि में जाकर दो इतालवी गणितज्ञों, कार्दानो और बोम्बेल्ली, ने संख्या पद्धति में ऋणात्मक संख्याओं के वर्गमूलों को सम्मिलित करके उसका विस्तार करने की एक गंभीर चर्चा प्रारंभ की। अगले दो सौ वर्षों में, कई और ऐसे उदाहरण सामने आए, जिनमें ऋणात्मक संख्याओं के वर्गमूलों के प्रयोग ने वास्तविक जीवन समस्याओं के हलों को ज्ञात करने में सहायता की।



चित्र 2: गाउस (1777-1855) को प्रायः 'गणितज्ञों का राजकुमार' कहा जाता है।

1777 में, स्विस गणितज्ञ ऑयलर (Euler) ने नाम "अधिकल्पित एकक" का प्रयोग किया, जिसे उन्होंने i द्वारा व्यक्त किया। उन्होंने $i = \sqrt{-1}$ परिभाषित किया। कुछ ही समय बाद, महान गणितज्ञ कार्ल फ्रेड्रिक गाउस ने नाम 'सम्मिश्र संख्याओं' का प्रयोग $3i\left(=3\sqrt{-1}\right), 1+i\left(=1+\sqrt{-1}\right)$ अथवा $-2+i\sqrt{5}\left(=-2+\sqrt{-5}\right)$ जैसी संख्याओं के लिए किया। आजकल, न केवल इन संख्याओं को स्वीकार किया गया है, अपितु इनका भारी प्रयोग गणित के प्रत्येक क्षेत्र तथा उनके अनुप्रयोगों में किया जाता है।

[सम्मिश्र संख्याओं के संक्षिप्त इतिहास के लिए, आप वेबसाइट **www.math.uri.edu/~merino/spring06/mth562/ShortHistoryComplexNumbers2006.pdf]** को भी देख सकते हैं।]

इस प्रकार, आपने देखा है कि पिछली शताब्दियों में, जैसी-जैसी आवश्यकता अनुभव हुई, संख्या पद्धतियों को $\mathbb{N}$ से $\mathbb{N} \cup \{0\}$ तक, फिर $\mathbb{Z}$ तक, फिर $\mathbb{Q}$ तक, फिर $\mathbb{R}$ तक, तथा अंत में सम्मिश्र संख्याओं तक विस्तृत किया जाता रहा।

आइए अब सम्मिश्र संख्या को औपचारिक रूप से परिभाषित करें।

परिभाषा : i) **सम्मिश्र संख्या (complex number)** $x + iy$ के रूप का एक व्यंजक होता है, जहाँ x और y वास्तविक संख्याएँ हैं तथा $i = \sqrt{-1}$ अधिकल्पित एकक (imaginary uint) है।

ii) सम्मिश्र संख्या $x + iy$ में, x उसका **वास्तविक भाग (real part)** तथा y उसका **अधिकल्पित भाग (imaginary part)** कहलाता है। हम $x = \text{Re}\,(x + iy)$ तथा $y = \text{Im}\,(x + iy)$ लिखते हैं।

सावधानी : i) याद रखिए कि i एक वास्तविक संख्या नहीं है।

ii) $\text{Im}(x + iy)$ वास्तविक संख्या y है, संख्या iy नहीं।

हम सभी सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय को $\mathbb{C}$ द्वारा व्यक्त करते हैं।

अतः, $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

परंपरा अनुसार, हम प्रायः $\mathbb{C}$ के अवयव को z द्वारा व्यक्त करेंगे। अतः, जब भी हम एक सम्मिश्र संख्या z की बात करेंगे, तब हमारा मतलब होगा किसी $z = x + iy$, किसी $x, y \in \mathbb{R}$ के लिए। वास्तव में, $\mathbf{z = Rez + i\, Imz}$ होता है।

इसे प्रायः सम्मिश्र संख्या का **बीजीय** (या मानक, या **आयताकार**) **निरूपण** कहा जाता है।

सम्मिश्र संख्याओं को लिखते समय एक अन्य परंपरा है, जिसे हम नीचे टिप्पणी के रूप में दे रहे हैं।

टिप्पणी 1: जब आप भाग 4.4.2 का अध्ययन करेंगे, तब आप देखेंगे कि $iy = yi \; \forall \; y \in \mathbb{R}$. इसी कारण, हम सम्मिश्र संख्या $x + iy$ को $x + yi$ के रूप में भी लिख सकते हैं। परंपरा अनुसार, हम किसी भी सम्मिश्र संख्या $x + iy$ को, जिसके लिए $y \in \mathbb{Q}$, $x + yi$ के रूप में लिखते हैं। उदाहरणार्थ, हम $2 + i1$, $2 + i\frac{3}{2}$ और $2 + i\frac{5}{9}$ के स्थान पर क्रमशः $2 + 1i$, $2 + \frac{3}{2}i$ और $2 + \frac{5}{9}i$ लिखना पसंद करते हैं।

परंतु, यदि $z = a + i\sqrt{b}, b \in \mathbb{R}$ के रूप का है, तो हम z को इसी रूप में लिखते हैं, न कि $z = a + \sqrt{b}\, i$.

आगे, **हम 1i को i तथा 0i को 0 लिखते हैं।**

अब जब आप जान गए हैं कि एक सम्मिश्र संख्या क्या है, क्या आप इससे सहमत होंगे कि निम्नलिखित संख्याएँ $\mathbb{C}$ में हैं?

$$0, 1, 5 + \sqrt{-15}, 3i, \sqrt{2}, \sqrt{-2}$$

इनमें से प्रत्येक एक सम्मिश्र संख्या है, क्योंकि

$$0 = 0 + 0i$$
$$1 = 1 + 0i$$
$$5 + \sqrt{-15} = 5 + i\sqrt{15}$$
$$3i = 0 + 3i$$
$$\sqrt{2} = \sqrt{2} + 0i$$
$$\sqrt{-2} = 0 + i\sqrt{2}$$

$\sqrt{-a} = i\sqrt{a} \; \forall \; a \geq 0.$

इन उदाहरणों से, आपने यह अनुभव कर लिया होगा कि कुछ सम्मिश्र संख्याओं के वास्तविक भाग या अधिकल्पित भाग शून्य हो सकते हैं। इनके लिए, हम अलग से नाम देते हैं।

परिभाषा : सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ पर विचार कीजिए।

यदि $y = 0$ है, तो हम कहते हैं कि z **शुद्धतः वास्तविक (purely real)** है।

यदि $x = 0$ है, तो हम कहते हैं कि z **शुद्धतः अधिकल्पित (purely imaginary)** है।

हम प्रायः शुद्धतः वास्तविक संख्या $x + 0i$ को केवल x लिखते हैं, तथा शुद्धतः अधिकल्पित संख्या $0 + iy$ को केवल iy लिखते हैं, जैसा कि आपने उपरोक्त उदाहरणों में ध्यान दिया होगा।

अब निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E1) निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए :

z	Re z	Im z
$\frac{1+\sqrt{-23}}{2}$		
i		
	0	0
$\frac{-1+\sqrt{3}}{5}$		

E2) क्या $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

तो, आपने देखा कि $x + iy \in \mathbb{C}$ दिया रहने पर, हम इससे एक अद्वितीय बिंदु $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ संबद्ध करते हैं। इसका विलोम भी सत्य है। अर्थात्, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ दिया रहने पर, हम इससे एक अद्वितीय सम्मिश्र संख्या $x + iy$ संबद्ध कर सकते हैं। इसका अर्थ है कि सम्मिश्र संख्या की निम्नलिखित परिभाषा हमारी पिछली परिभाषा के तुल्य है।

परिभाषा : सम्मिश्र संख्या वास्तविक संख्याओं का एक क्रमित युग्म है। समुच्चयों की भाषा में (देखिए इकाई 1), हम कह सकते हैं कि $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

इस परिभाषा की सहायता से, क्या आप कह सकते हैं कि दो सम्मिश्र संख्याएँ कब बराबर होती हैं?

परिभाषा : दो सम्मिश्र संख्याएँ (x_1, y_1) और (x_2, y_2) बराबर होती हैं यदि और केवल यदि $x_1 = x_2$ और $y_1 = y_2$.

दूसरे शब्दों में, $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$ यदि और केवल यदि $x_1 = x_2$ और $y_1 = y_2$.

इस प्रकार, $\mathbb{C}$ के दो अवयव बराबर होते हैं यदि और केवल यदि उनके वास्तविक भाग बराबर हों तथा उनके अधिकल्पित भाग बराबर हों।

अतः, उदाहरणार्थ, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ है, परंतु $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \neq \frac{-1}{2} + i\frac{1}{2}$.

अब, इसके बारे में एक प्रश्न है।

E3) k और m के किन वास्तविक मानों के लिए,

i) $\sqrt{k} + 3i = \sqrt{3} + im$.

ii) $ki - m \in \mathbb{R}$?

अब, कोई भी सम्मिश्र संख्या दी हुई रहने पर, हम एक बहुत स्वाभाविक विधि से, एक संबंधित सम्मिश्र संख्या को नीचे दिए अनुसार परिभाषित कर सकते हैं।

परिभाषा : मान लीजिए कि $z = x + iy \in \mathbb{C}$ है। z का **सम्मिश्र संयुग्मी (conjugate)** (या केवल, **z का संयुग्मी**) सम्मिश्र संख्या $\bar{z} = x - iy$ है।

इस प्रकार, $\text{Re}\,\bar{z} = \text{Re}\,z$ तथा $\text{Im}\,\bar{z} = -\text{Im}\,z$ है।

उदाहरणार्थ, यदि $z = 15 + i$, तो $\bar{z} = 15 - i$.

और यदि $z = 0$, तो $\text{Re}\,z = \text{Im}\,z = 0$. अतः, $\text{Re}\,\bar{z} = \text{Im}\,\bar{z} = 0$. इसलिए, $\bar{z} = 0$.

भाग 4.4.2 में आप सम्मिश्र संयुग्मी के एक महत्त्वपूर्ण उपयोग को देखेंगे। परंतु, अभी अभ्यास के लिए कुछ प्रश्न हैं!

E4) $-5, \sqrt{-5}, 2+3i, 2-3i$ के संयुग्मी प्राप्त कीजिए।

z के संयुग्मी का संयुग्मी z होता है $\forall z \in \mathbb{C}$.

E5) किस $z \in \mathbb{C}$ के लिए, $z = \bar{z}$ होगा?

E6) किसी भी $z \in \mathbb{C}$ के लिए, दर्शाइए कि $\overline{\bar{z}} = z$ होता है।

इस भाग में, हमने सम्मिश्र संख्याओं को निरूपित करने की बीजीय, या मानक, विधि देते हुए एक सम्मिश्र संख्या को परिभाषित किया है। आइए ऐसी संख्याओं को निरूपित करने की अन्य विधियों पर विचार करें।

4.3 सम्मिश्र संख्या के विभिन्न निरूपण

आप जानते हैं कि हम वास्तविक संख्याओं को ज्यामितीय रूप से संख्या रेखा पर निरूपित कर सकते हैं। वास्तव में, वास्तविक संख्याओं तथा संख्या पर स्थित बिंदुओं में एक-एक संगतता होती है। आप यह भी देख चुके हैं कि $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. अतः, भाग 3.2 के अध्ययन द्वारा विकसित अपनी समझ का प्रयोग करते हुए, क्या आप सम्मिश्र संख्याओं को ज्यामितीय रूप से निरूपित करने की किसी विधि के बारे में सोच सकते हैं? आइए देखें।

4.3.1 ज्यामितीय निरूपण

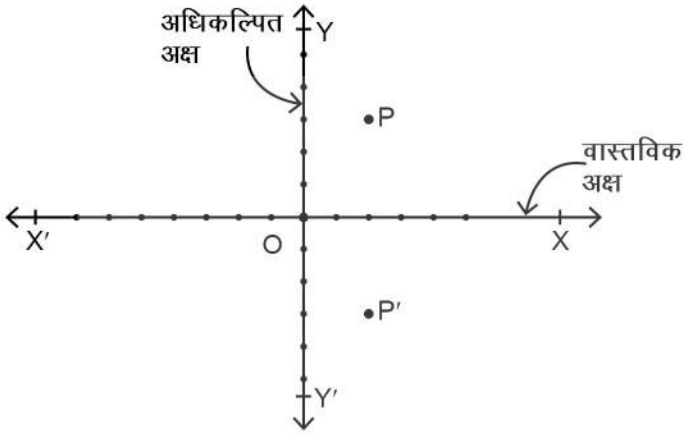
चूंकि एक सम्मिश्र संख्या z वास्तविक संख्याओं $\text{Re}\,z$ और $\text{Im}\,z$ के एक युग्म से दी जाती है, इसलिए इकाई 3 के आपके अध्ययन से शायद आपकी भी वही सोच हो जिसने 18वीं और 19वीं शताब्दियों के गणितज्ञों को सम्मिश्र संख्याओं को समतल में बिंदुओं से निरूपित करने की सोच की ओर बढ़ाया। यह ज्यामितीय निरूपण 19वें सदी के शुरू में प्रदान किया गया। इसे स्विस गणितज्ञ जे. आर. आरगां के नाम पर **आरगां आरेख (Argand diagram)** कहा जाता है। इन्होंने ही इस विचार को फैलाया। रोचक बात यह है कि इसके कुछ वर्ष पहले गणितज्ञ वैसल (Wessel) ने इस विचार की व्याख्या की थी।

आइए देखें कि एक आरगां आरेख होता क्या है। एक कार्तीय निर्देशांक पद्धति में XOY समतल में अक्षों OX और OY को लीजिए। इकाई 3 से आप जानते हैं कि समतल के किसी भी बिंदु को उसके कार्तीय निर्देशांकों द्वारा निर्धारित किया जाता है। अब, हम किसी सम्मिश्र संख्या $x + iy$ को लेते हैं। हम इसे समतल में कार्तीय निर्देशांक (x, y) वाले बिंदु द्वारा निरूपित करते हैं। इस प्रकार, सम्मिश्र संख्याओं के वास्तविक भागों को क्षैतिज अक्ष पर आलेखित किया जाता है, तथा अधिकल्पित भागों को खड़े

अक्ष पर आलेखित किया जाता है। सम्मिश्र संख्याओं का यह निरूपण आरगां आरेख कहलाता है।

आरगां आलेख में x-अक्ष **वास्तविक अक्ष** कहलाती है तथा y-अक्ष **अधिकल्पित अक्ष** कहलाती है।

उदाहरणार्थ, चित्र 3 में P सम्मिश्र संख्या $2+3i$ को निरूपित करता है, जिसका वास्तविक भाग 2 है तथा अधिकल्पित भाग 3 है। और, चित्र 3 में P′ कौन सी संख्या को निरूपित करता है? P′ संख्या $2-3i$ के संगत है, जो P का संयुग्मी है।



चित्र 3: एक आरगां आरेख

चित्र 3 से, आपने यह नोट किया होगा कि **एक आरगां आरेख में $\bar{z}$ को निरूपित करने वाला बिंदु z को निरूपित करने वाले बिंदु का वास्तविक अक्ष में परावर्तन है,** जहाँ $z \in \mathbb{C}$.

बिंदु (a, b) का x-अक्ष में **परावर्तन (reflection)** बिंदु (a, –b) है, तथा y-अक्ष में बिंदु (–a, b) है।

अब, आप यह जानते हैं कि कोई भी वास्तविक संख्या एक सम्मिश्र संख्या होती है (जो शुद्धतः वास्तविक संख्या कहलाती है)। एक आरगां आरेख में शुद्धतः वास्तविक संख्याएँ कहाँ स्थित होंगी? क्या वे वास्तविक अक्ष पर स्थित नहीं होंगी? इसी प्रकार, शुद्धतः अधिकल्पित संख्याएँ अधिकल्पित अक्ष पर स्थित होंगी।

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E7) क) $\mathbb{C}$ के निम्नलिखित अवयवों को एक आरगां आरेख में निरूपित कीजिए :
$3, -1+i, \overline{-1+i}, i.$

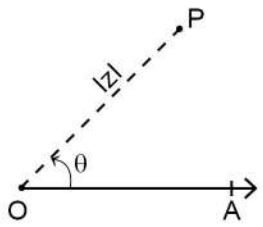
ख) समुच्चयों $S_1 = \{2+iy \mid y \in \mathbb{R}\}$, $S_2 = \{x+3i \mid x \in \mathbb{R}\}$ तथा $S_3 = \{x+ix \mid x \in \mathbb{R}\}$ को एक आरगां आरेख में निरूपित कीजिए।

E8) एक आरगां आरेख में बिंदुओं $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, (2, 0) और (0, –2) द्वारा ज्यामितीय रूप से निरूपित $\mathbb{C}$ के अवयवों का बीजीय निरूपण दीजिए।

आइए अब सम्मिश्र संख्याओं को निरूपित करने की एक अन्य विधि पर विचार करें।

4.3.2 ध्रुवीय निरूपण

किसी भी शून्येतर सम्मिश्र संख्या $z = x+iy$ पर विचार कीजिए। हम इसे चित्र 4 में P से आरगां आरेख में निरूपित करते हैं। जैसा कि आप जानते हैं, हम इसे इसके कार्तीय निर्देशांकों द्वारा अद्वितीय रूप से एक बिंदु से निरूपित कर सकते हैं। परंतु, इकाई 3 से

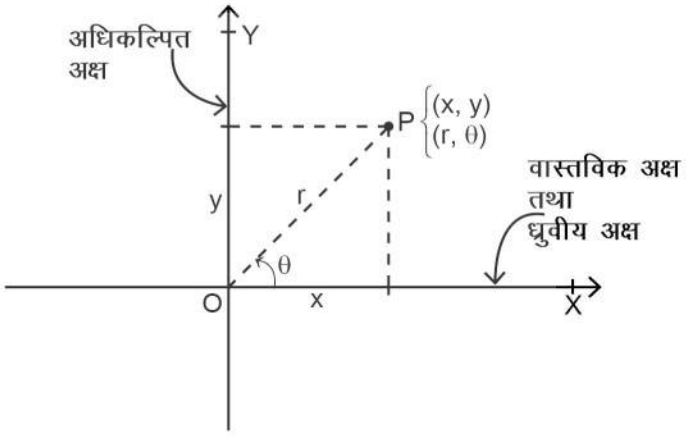


चित्र 4: ध्रुवीय निर्देशांक $|z|$ और θ वाले सम्मिश्र संख्या का ध्रुवीय निरूपण

आप यह भी जानते हैं कि हम इसे ध्रुवीय निर्देशांकों (r, θ) द्वारा भी निरूपित कर सकते हैं। याद कीजिए कि दूरी $OP = r$ है। हम इसे z का **मापांक (modulus)** कहते हैं तथा इसे $|z|$ द्वारा व्यक्त करते हैं। आगे, θ सम्मिश्र संख्या z का एक **कोणांक (argument)** कहलाता है।

तब, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ है।

अब, आइए एक आरगां आरेख में ध्रुव और ध्रुवीय अक्ष को वास्तविक और अधिकल्पित अक्षों के साथ मिला दें, जैसा कि चित्र 5 में दर्शाया गया है।



चित्र 5: कार्तीय और ध्रुवीय निर्देशांकों के बीच संबंध

साथ ही, यदि हम $|z| = r$ लिखते हैं, तब, आप चित्र 5 से यह देख सकते हैं कि

$\sin\theta = \frac{y}{r}$ तथा $\cos\theta = \frac{x}{r}$ है।

$$\therefore \quad x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \qquad \ldots (1)$$

साथ ही, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

अब, z के मापांक और कोणांक पर कुछ महत्त्वपूर्ण टिप्पणियाँ!

टिप्पणी 2: इकाई 3 से आप जानते हैं कि (r, θ) अद्वितीय केवल तभी होते हैं यदि हम θ को $0 \le \theta < 2\pi$, या $-\pi < \theta \le \pi$, तक सीमित कर देते हैं। सम्मिश्र संख्याओं की स्थिति में, $|z| \ge 0\ \forall\ z \in \mathbb{C}$. साथ ही, अद्वितीयता, के लिए, परंपरा द्वारा θ पर प्रतिबंध $-\pi < \theta \le \pi$ है। हम θ के इस अद्वितीय मान को z का **मुख्य कोणांक (principal argument)** कहते हैं, तथा इसे **Arg z** द्वारा व्यक्त करते हैं।

इस प्रकार, किसी भी सम्मिश्र संख्या के ध्रुवीय निर्देशांक $r \ge 0$ और $-\pi < \theta \le \pi$ को संतुष्ट करते हैं।

टिप्पणी 3: i) $z \in \mathbb{C}$, परंतु $|z| \in \mathbb{R}$.

ii) यदि z वास्तविक है, तो $|z|$ क्या होगा? यह केवल z का निरपेक्ष मान होगा (देखिए उदाहरण 9, इकाई 3)।

iii) $z = 0$ के लिए, $|z| = 0$ है तथा कोणांक परिभाषित नहीं है।

(1) और टिप्पणी 2 से हमें निम्न परिभाषा मिलती है।

परिभाषा : कोई भी सम्मिश्र संख्या दी हुई होने पर हम इसे $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ के रूप में लिख सकते हैं, जहाँ $r = |z|$ तथा $\theta = \text{Arg } z$. यह z का ध्रुवीय रूप (polar form) कहलाता है।

ध्यान दीजिए कि $z = x + iy$ दिया रहने पर, हम $\text{Arg } z = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ प्राप्त करने के लिए (1) का प्रयोग कर सकते हैं। परंतु, क्योंकि $-\pi$ और π के बीच में एक से अधिक कोणों के लिए एक ही tan मान होता है, उदाहरणार्थ $\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$ और $\frac{-3\pi}{4}$, इसलिए हमें यह ज्ञात करने के लिए कि बिंदु (x, y) किस चतुर्थांश में स्थित होगा, एक आरगां आरेख अवश्य खींचना चाहिए तथा इससे Arg z का सही मान प्राप्त करना चाहिए।

आइए एक उदाहरण को देखें।

उदाहरण 1: (क) $\sqrt{3}+i, -(\sqrt{3}+i)$ तथा $\overline{\sqrt{3}+i}$ के मापांक और मुख्य कोणांक प्राप्त कीजिए। इस तरह, इनके ध्रुवीय रूप प्राप्त कीजिए।

ख) यदि $|z| = 2$ और $\text{Arg } z = \frac{\pi}{3}$, तो z का बीजीय निरूपण प्राप्त कीजिए।

ग) यदि $|z| = \frac{\pi}{2}$ और $\text{Arg } z = \frac{\pi}{2}$, तो z का बीजीय निरूपण प्राप्त कीजिए।

हल: क) मान लीजिए कि $z_1 = \sqrt{3}+i, z_2 = -(\sqrt{3}+i)$ और $z_3 = \overline{\sqrt{3}+i}$.

अब, $\text{Re}\,z_1 = \sqrt{3}, \text{Im}\,z_1 = 1$ है। इस प्रकार, $\sqrt{3}+i$ बिंदु $(\sqrt{3}, 1)$ के संगत है, जो प्रथम चतुर्थांश में स्थित है। हम प्राप्त करते हैं कि

$|z_1| = \sqrt{(\text{Re}\,z_1)^2 + (\text{Im}\,z_1)^2} = 2$, तथा

$\text{Arg } z_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}\,z_1}{\text{Re}\,z_1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$ या $\frac{-5\pi}{6}$.

क्योंकि z_1 प्रथम चतुर्थांश में स्थित है, इसलिए $\text{Arg } z_1$ को 0 और $\frac{\pi}{2}$ के बीच होना चाहिए।

इस प्रकार, $\text{Arg } z_1 = \frac{\pi}{6}$. अतः, $\sqrt{3}+i$ का ध्रुवीय रूप $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ है।

अब, आइए $z_2 = -(\sqrt{3}+i) = -\sqrt{3} + (-1)i$ पर विचार करें। यहाँ, $|z_2| = 2$ तथा

$\text{Arg } z_2 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ है, z_1 की तरह।

परंतु $-(\sqrt{3}+i)$ तीसरे चतुर्थांश में स्थित है। अतः, $\text{Arg } z_2 = \frac{-5\pi}{6}$. इस प्रकार, z_2 का ध्रुवीय रूप $2\left(\cos\frac{5\pi}{6} - i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ है।

अंत में, आइए $z_3 = \overline{\sqrt{3}+i} = \sqrt{3} - i$ को देखें।

आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि $|z_3| = 2$, तथा

$\text{Arg } z_3 = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-\pi}{6}$, क्योंकि z_3 चौथे चतुर्थांश में स्थित है।

इस प्रकार, z_3 का ध्रुवीय रूप $2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ है।

ख) आप जानते हैं कि $z = |z|(\cos(\text{Arg}\, z) + i\sin(\text{Arg}\, z))$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 1 + i\sqrt{3}.$$

ग) यहाँ, $z = \frac{\pi}{2}\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2}i.$

***

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E9) E7 (क) में लिखी सम्मिश्र संख्याओं के ध्रुवीय रूप लिखिए।

E10) $z \in \mathbb{C}$ के लिए, z और $\bar{z}$ के मापांकों तथा मुख्य कोणांकों के बीच संबंधों को ज्ञात कीजिए।

E11) दर्शाइए कि $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $\mathbb{R}^2$ में वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ पर स्थित बिंदुओं का समुच्चय है।

आप एक सम्मिश्र संख्या के ध्रुवीय रूप को बहुत उपयोगी पाएँगे जब आप अगले भाग में सम्मिश्र संख्याओं के गुणन और विभाजन का अध्ययन करेंगे।

4.4 बीजीय संक्रियाएँ

आप $\mathbb{R}$ में योग, घटाना, गुणन और विभाजन की संक्रियाओं से पहले से ही परिचित हैं। इस भाग में, हम इन संक्रियाओं की $\mathbb{C}$ में चर्चा करेंगे। आइए सर्वप्रथम पहली दो संक्रियाओं पर विचार करें।

4.4.1 योग और घटाना

कोई भी दो सम्मिश्र संख्याएँ मान लीजिए $z_1 = 3 + 2i$ और $z_2 = 4 + \frac{1}{2}i$ को लीजिए। आपके हिसाब से, $z_1 + z_2$ क्या होगा? क्या आप इसे प्राप्त करने के लिए, दोनों के वास्तविक भागों तथा अधिकल्पित भागों को नहीं जोड़ेंगे? यदि आप ऐसा करते हैं, तो आप सही हैं, अर्थात् $z_1 + z_2 = (3+4) + \left(2 + \frac{1}{2}\right)i = 7 + \frac{5}{2}i.$

आइए इस प्रक्रिया को औपचारिक रूप से किन्हीं दो सम्मिश्र संख्याओं के लिए परिभाषित करें।

परिभाषा : दो सम्मिश्र संख्याओं $z_1 (= x_1 + iy_1)$ और $z_2 (= x_2 + iy_2)$ का योग सम्मिश्र संख्या $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ होता है।

क्रमित युग्मों के रूप में,

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$

आइए एक उदाहरण को देखें।

उदाहरण 2: निम्नलिखित का योग ज्ञात कीजिए :

i) $3 + i$ और $-2 + 4i$,

ii) -5 और $5 - i$.

हल : i) $(3+i)+(-2+4i)=(3+(-2))+(1+4)i=1+5i.$

ii) $(-5)+(5-i)=(-5+0i)+(5-i)=(-5+5)+(0-1)i=-i.$

***

उदाहरण 3: दर्शाइए कि कोई भी सम्मिश्र संख्या एक शुद्धतः वास्तविक संख्या और एक शुद्धतः अधिकल्पित संख्या का योग होती है।

हल : $z = x + iy$ लीजिए। अब $(x + iy) = (x + 0i) + (0 + iy)$.

यहाँ $x + 0i$ शुद्धतः वास्तविक है तथा $0 + iy$ शुद्धतः अधिकल्पित है। इस प्रकार, परिणाम प्राप्त हो जाता है।

***

निम्नलिखित प्रश्नों में, हम आपसे $\mathbb{C}$ में योग के कुछ बहुत महत्त्वपूर्ण गुणों का सत्यापन करने को कह रहे हैं।

E12) i) $2 + 3i$ और $\overline{2+3i}$ का योग ज्ञात कीजिए। $z+\bar{z}\in\mathbb{R}\ \forall z\in\mathbb{C}$

ii) दर्शाइए कि किसी भी $z \in \mathbb{C}$ के लिए, $z+\bar{z}=2\ \mathrm{Re}\ z$.

E13) दर्शाइए कि $\overline{z_1+z_2}=\bar{z_1}+\bar{z_2}\ \forall\ z_1, z_2\in\mathbb{C}$.

E14) (क) दर्शाइए कि किन्हीं $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ के लिए $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

(ख) दर्शाइए कि किन्हीं $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ के लिए, $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

E15) एक ऐसा अवयव $a + ib \in \mathbb{C}$ ज्ञात कीजिए जिससे कि $z + (a + ib) = z\ \forall\ z \in \mathbb{C}$ हो।

E14) (क) हमें बताता है कि $\mathbb{C}$ में योग क्रमविनिमेय है।

E14 (ख) हमें बताता है कि $\mathbb{C}$ में योग साहचर्य है।

यदि आपने इन प्रश्नों को हल कर लिया है, तो आपने यह अनुभव कर लिया होगा कि $\mathbb{C}$ में योग अधिकतर उन गुणों को संतुष्ट करता है, जो $\mathbb{R}$ में योग संतुष्ट करता है। साथ ही, E15 में जो आपने ज्ञात किया है उसके कारण हम कहते हैं कि $0 + i0\ (= 0)$, $\mathbb{C}$ में **योज्य तत्समक (additive identity)** है।

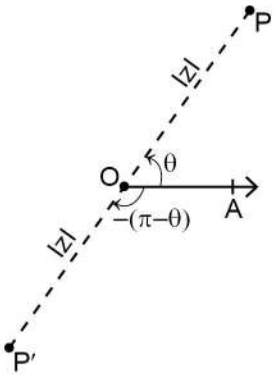
अब, क्या आप $\mathbb{C}$ में घटाने की संक्रिया को परिभाषित कर सकते हैं? इसके लिए आइए पहले $z \in \mathbb{C}$ के लिए $-z$ को परिभाषित करें। आप शायद निम्नलिखित परिभाषाओं पर पहले ही पहुँच चुके होंगे, ये बहुत ही स्वाभाविक हैं।

परिभाषाएँ : 1) $z = x + iy \in \mathbb{C}$ दिया रहने पर, $-z$ सम्मिश्र संख्या $(-x) + i(-y)$ है।

2) दो **सम्मिश्र संख्याओं** $z_1 (= x_1 + iy_1)$ **और** $z_2 (= x_2 + iy_2)$ **का अंतर** $z_1 - z_2$ निम्नलिखित द्वारा परिभाषित किया जाता है :

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

अतः, किसी भी $z \in \mathbb{C}$ के लिए, आप $z - z$ क्या होगा? आइए देखें। $z = x + iy$ लीजिए। तब, $z - z = (x - x) + i(y - y) = 0$, जो $\mathbb{C}$ में योज्य तत्समक है। यह हमें बताता है कि किसी भी $z \in \mathbb{C}$ के लिए, $(-z)$ सम्मिश्र संख्या z का **योज्य प्रतिलोम (additive inverse)** है।



चित्र 6: z और –z को क्रमशः P और P′ द्वारा निरूपित किया गया है।

अब निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E16) i) $(3 - 2i) - \overline{(3 - 2i)}$ ज्ञात कीजिए।

ii) किसी भी $z \in \mathbb{C}$ के लिए, $z - \bar{z}$ ज्ञात कीजिए।

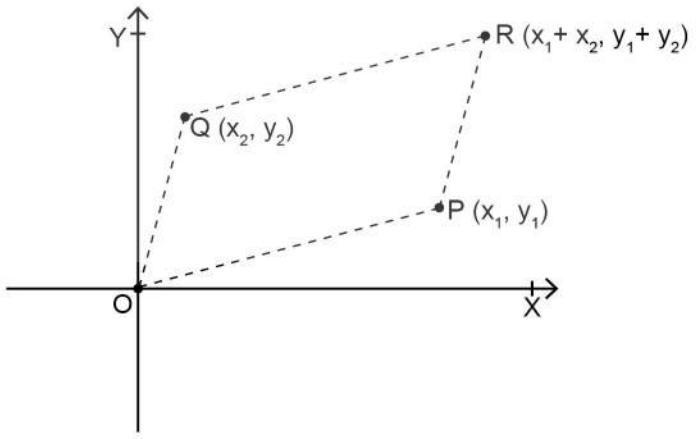
E17) निम्नलिखित के बीच संबंध ज्ञात कीजिए, जहाँ $z \in \mathbb{C}$

i) $|z|$ और $|-z|$,

ii) Arg z और Arg $(-z)$ (देखिए चित्र 6)।

अब हम सम्मिश्र संख्याओं के योग के ज्यामितीय निरूपण पर एक संक्षिप्त टिप्पणी देंगे।

टिप्पणी 5: दो सम्मिश्र संख्याओं के योग का एक रोचक ज्यामितीय निरूपण होता है। एक आरगां आरेख (चित्र 7) पर विचार कीजिए, जिसमें हम दो सम्मिश्र संख्याओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) को बिंदुओं P और Q द्वारा निरूपित कर रहे हैं। यदि हम बग़ल के भुजाओं O P और O Q वाले समांतर चतुर्भुज को पूरा करते हैं, तो इसका चौथा शीर्ष R योग $(x_1, y_1) + (x_2, y_2)$ को निरूपित करता है। सदिश बीजगणित में, आप इसी प्रकार के योग के समांतर चतुर्भुज नियम को पाएंगे।



चित्र 7: $\mathbb{C}$ में योग का ज्यामितीय निरूपण

अभी तक आपने देखा कि हमने किस प्रकार $\mathbb{R}$ में योग (और घटा) के उपयोग द्वारा स्वाभाविक रूप से $\mathbb{C}$ में योग (और घटा) को परिभाषित किया है। आइए देखें कि क्या हम यही गुणन और विभाजन के लिए भी कर सकते हैं। आपको इन संक्रियाओं के लिए मानक रूप के बदले ध्रुवीय रूप अधिक उपयोगी लग सकता है।

4.4.2 गुणन और विभाजन

आइए, शुरू करें दो सम्मिश्र संख्याओं को उनके ध्रुवीय रूपों में लेकर, मान लीजिए, $z_1 = 2 = 2(\cos 0 + i \sin 0)$ और $z_2 = -3 = 3(\cos \pi + i \sin \pi)$. ध्यान दीजिए कि z_1 और z_2 असल में वास्तविक संख्याएँ हैं, तथा हम जानते हैं कि

$$z_1 z_2 = -6 = 6(\cos \pi + i \sin \pi) = (2)\,(3)\{\cos(0+\pi) + i \sin(0+\pi)\}$$
$$= |z_1||z_2|\{\cos(\text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2) + i \sin(\text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2)\}.$$

इससे आपको यह देखने में सहायता मिल सकती है कि $\mathbb{C}$ में गुणन को हम नीचे दर्शाए अनुसार क्यों परिभाषित करते हैं।

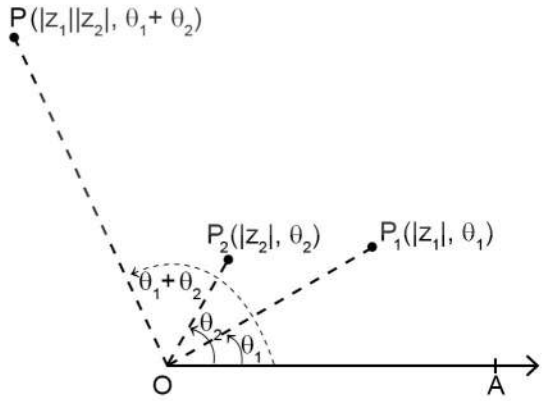
परिभाषा : दो सम्मिश्र संख्याओं $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$ और $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$ के **गुणनफल** को एक सम्मिश्र संख्या $\mathbf{z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2 + 2k\pi) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + 2k\pi)]}$ के रूप में परिभाषित करते हैं, जहाँ $k \in \mathbb{Z}$ इस प्रकार है कि $-\pi < \theta_1 + \theta_2 + 2k\pi \leq \pi$ है।

उदाहरणार्थ, यदि $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)$ तथा $z_2 = \sqrt{7}(\cos\pi + i \sin\pi)$, तो

$$z_1 z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)\sqrt{7}(\cos\pi + i \sin\pi)$$
$$= \sqrt{2}\sqrt{7}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right)\right]$$
$$= \sqrt{2}\sqrt{7}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \sin\frac{7\pi}{6}\right)$$
$$= \sqrt{2}\sqrt{7}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right], \text{ क्योंकि } -\pi < \text{Arg } z \leq \pi \text{ है।}$$

इस प्रकार $z_1 z_2 = |z_1||z_2|\{\cos(\text{Arg}\, z_1 + \text{Arg}\, z_2 - 2\pi) + i \sin(\text{Arg}\, z_1 + \text{Arg}\, z_2 - 2\pi)\}$ है।

चित्र 8 में आप दो सम्मिश्र संख्याओं के गुणन का एक चित्रीय निरूपण देख सकते हैं। जैसा कि आप देख सकते हैं, इसमें सदिशों का पैमानीकरण और घूर्णन शामिल है।



चित्र 8: ध्रुवीय रूप में बिंदुओं P_1 और P_2 से निरूपित सम्मिश्र संख्याओं का गुणनफल का निरूपण P है।

आइए एक अन्य उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 4: $z_1 = 2(\cos 1 + i \sin 1)$ और $z_2 = \cos 3 + i \sin 3$ के गुणनफल को ध्रुवीय रूप में प्राप्त कीजिए।

हल : यहाँ $|z_1| = 2$, $\text{Arg}\, z_1 = 1$, $|z_2| = 1$ और $\text{Arg}\, z_2 = 3$ है।

इसलिए, $z_1 z_2 = 2\{\cos(1+3) + i\sin(1+3)\}$

$= 2(\cos 4 + i\sin 4)$.

ध्यान दीजिए कि $\text{Arg}\,(z_1 z_2) \neq 4$ है, क्योंकि $4 > \pi$ है। हमें एक ऐसे पूर्णांक k को चुनने की आवश्यकता है कि $-\pi < 4 + 2k\pi \leq \pi$. यहाँ, $k = -1$ से हमारा उद्देश्य पूरा हो जाता है। इस प्रकार, $\text{Arg}(z_1 z_2) = 4 - 2\pi$.

अतः, $z_1 z_2 = 2\{\cos(4-2\pi) + i\sin(4-2\pi)\}$.

***

अब, कुछ प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए, जिनसे आपको गुणन के कुछ रोचक गुण देखने में सहायता मिलेगी।

E18) $z.1$, $z.0$, $z.i$, $z.\bar{z}$ $\forall\, z \in \mathbb{C}$ को ज्ञात कीजिए।।

E19) (क) दर्शाइए कि $z_1 z_2 = z_2 z_1 \;\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

$z\bar{z} \in \mathbb{R} \;\forall\, z \in \mathbb{C}$.

(ख) दर्शाइए कि $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) \;\forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

यदि आपने E19 (क) और E19 (ख) को कर लिया है, तो आपने यह दर्शा दिया है कि $\mathbb{C}$ में गुणन क्रमशः क्रमविनिमेय और साहचर्य होता है।

अब, आइए विभाजन पर विचार करें। यदि मैं $\frac{z_1}{z_2} = z_1 . z_2^{-1}$ ज्ञात करना चाहती हूँ, तो मुझे z_2^{-1} को ध्रुवीय रूप में ज्ञात करने की एक अच्छी विधि की जरूरत है, और फिर परिणाम प्राप्त करने के लिए इसे z_1 से गुणा करूँगी। अतः, $z \neq 0$ के लिए z^{-1} प्राप्त करने के लिए, एक उदाहरण पर विचार कीजिए। $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ को लीजिए। तब,

$$z^{-1} = \frac{1}{3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\cos^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4}\right)}, \; (a+ib)\,(a-ib) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2 \text{ के प्रयोग से।}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

अतः, $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$ और $\text{Arg}(z^{-1}) = \text{Arg}(-z)$ है।

अधिक व्यापक रूप में, इन्हीं चरणों का उपयोग करते हुए, हम देखते हैं कि यदि $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ और $z \neq 0$ है, तो

$z^{-1} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$ है। ... (2)

अब, यदि $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ और $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ है,

तो $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$

$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)$, (2) के प्रयोग से

$= \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\}$

अतः $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2 + 2k\pi) + i\sin(\theta_1 - \theta_2 + 2k\pi)\}$, ... (3)

जहाँ $k \in \mathbb{Z}$ इस प्रकार है कि $-\pi < \theta_1 - \theta_2 + 2k\pi \leq \pi$ है।

आइए एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 5: $\frac{z_1}{z_2}$ को ध्रुवीय रूप में ज्ञात कीजिए, जहाँ $z_1 = 6(\cos\pi + i\sin\pi)$ और

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

हल: यहाँ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$, तथा

$\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}\, z_1 - \text{Arg} z_2 + 2k\pi$, जहाँ $-\pi < \text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \leq \pi$ हो।

इस प्रकार, $\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \pi - \left(\frac{-\pi}{4}\right) - 2\pi = -\frac{3\pi}{4}$.

अतः, $\frac{z_1}{z_2} = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

***

अब, निम्नलिखित प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E20) z_1 और z_2 के ध्रुवीय रूप ज्ञात कीजिए, जहाँ $z_1 = -6$ और $z_2 = 1 + i$. इस तरह, z_1z_2 और $\frac{z_1}{z_2}$ के ध्रुवीय रूप प्राप्त कीजिए।

अब आइए सम्मिश्र संख्याओं पर इन संक्रियाओं को मानक रूप का प्रयोग करते हुए देखें। यह मार्ग कुछ चक्करदार है।

मान लीजिए कि $z_1 = x_1 + iy_1$ और $z_2 = x_2 + iy_2$ हैं। तब, इकाई 3 से आप जानते हैं कि यदि z_1 और z_2 के ध्रुवीय निर्देशांक क्रमशः (r_1, θ_1) और (r_2, θ_2) हों, तो $x_1 = r_1\cos\theta_1$, $y_1 = r_1\sin\theta_1$, $x_2 = r_2\cos\theta_2$ और $y_2 = r_2\sin\theta_2$ होता है।

आप यह भी जानते हैं कि

$z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$

$= r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + ir_1r_2(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\}$ है।

$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

$\cos(A + B)$
$= \cos A\cos B - \sin A\sin B$
$\sin(A + B)$
$= \sin A\cos B + \cos A\sin B$

इसी के अनुसार, हमें निम्नलिखित परिभाषा प्राप्त है।

परिभाषा : दो सम्मिश्र संख्याओं $z_1 = x_1 + iy_1$ और $z_2 = x_2 + iy_2$ के **गुणनफल $z_1 z_2$ का मानक रूप** $\mathbf{z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1)}$ द्वारा दिया जाता है।
अथवा, क्रमित युग्मों की भाषा में,

$(x_1, y_1).(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ होता है।

उदाहरणार्थ, $(1, 2)\,(-3, 2) = [1.(-3) - 2.2, 1.2 + (-3)2] = (-7, -4).$

आइए इसकी जाँच करें और देखें कि इस परिभाषा के अनुसार i^2 क्या है।
$i^2 = i.i = (0 + i)\,(0 + i) = (0 - 1) + i(0 - 0) = -1$, जैसा होना चाहिए!

E18 और E19 को हल करते समय, आप $\mathbb{C}$ में गुणन के कुछ गुण देख चुके हैं। यदि आप निम्नलिखित प्रश्नों को करें तो आप कुछ और गुणों की खोज करेंगे।

E21) $(x, y)\,.\,(1, 0), (x, y).(0, 1)\ (x, y).(0, 0), (x, 0).(y, 0)$ तथा
$(x, y).(1, 1)\ \forall\ (x, y) \in \mathbb{C}$ प्राप्त कीजिए।

E22) दर्शाइए कि $(x, y).\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = (1, 0)\ \forall\ (x, y) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$

[ध्यान दीजिए कि $x^2 + y^2 \neq 0$, क्योंकि $(x, y) \neq (0, 0).$]

यदि आपने इन प्रश्नों को हल कर लिया है, तो आपने अवश्य ही यह अनुभव किया होगा कि

i) $\mathbf{z.1 = z}\ \forall\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}$, अर्थात् $\mathbb{C}$ का गुणनात्मक तत्समक 1 है;

ii) $\mathbf{z.0 = 0}\ \forall\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}$;

iii) $i(x + iy) = -y + ix\ \forall x, y \in \mathbb{R}$;

iv) यदि $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, तो हमारी गुणन की परिभाषा $\mathbb{R}$ के लिए सामान्य गुणन की परिभाषा के साथ संपाती है;

v) किसी शून्येतर अवयव $z \in \mathbb{C}$ के लिए $\exists z' \in \mathbb{C}$ जिससे कि $zz' = 1$ है। इस स्थिति में, हम कहते हैं कि z का **गुणनात्मक प्रतिलोम (multiplicative inverse)** z' है। अतः, $z' = \frac{1}{z}$.

अब, आइए देखें कि एक सम्मिश्र संख्या का एक शून्येतर सम्मिश्र संख्या से भागफल के मानक रूप को किस प्रकार प्राप्त किया जाता है। हम उसी प्रकार की प्रक्रिया का प्रयोग करेंगे जो आपने पहले (उदाहरण 5 से पहले) $\frac{z_1}{z_2}$ प्राप्त करने में प्रयोग की थी। एक उदाहरण पर विचार कीजिए।

उदाहरण 6: $\frac{2 + 3i}{1 - i}$ को मानक रूप में प्राप्त कीजिए।

हल : आइए $\frac{2 + 3i}{1 - i}$ को $\overline{1 - i} = 1 + i$ द्वारा गुणा और भाग करें। तो,

$$\left(\frac{2+3i}{1-i}\right)\left(\frac{1+i}{1+i}\right)=\frac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-1+5i}{1+1}=\frac{-1}{2}+\frac{5}{2}i.$$

$z\bar{z}=|z|^2\in\mathbb{R}\forall z\in\mathbb{C}.$

अतः, $\frac{2+3i}{1-i}=\frac{-1}{2}+\frac{5}{2}i.$

***

यदि आपने इस विधि को समझ लिया है जो हमने उपरोक्त उदाहरण को हल करने में प्रयोग की है, तो आपको निम्नलिखित प्रश्नों को करने में कोई समस्या नहीं होगी।

E23) $\frac{-2+i}{\sqrt{-3}+i\sqrt{-4}}$ को मानक रूप में प्राप्त कीजिए, और इस तरह ध्रुवीय रूप में प्राप्त कीजिए।

E24) $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ और $c^2+d^2\neq 0$ के लिए, $\frac{a+ib}{c+id}$ को मानक रूप में लिखिए।

E25) दर्शाइए कि $\frac{1}{z}=\frac{1}{|z|^2}\bar{z}\ \forall\ z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. इस तरह दर्शाइए कि $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}\ \forall\ z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

E26) एक आरगां आरेख में $z_1, z_2, \bar{z}_2, \frac{1}{z_2}$ और $\frac{z_1}{z_2}$ को निरूपित कीजिए, जहाँ $z_1=-1-2i, z_2=2-3i$.

हम अगले भाग में ध्रुवीय रूप में गुणन और विभाजन का बहुत अधिक मात्रा में प्रयोग करेंगे। इस पर जाने से पहले, आइए आपको एक नियम बता दें, जो $\mathbb{C}$ में '+' और 'x' को संबंधित करता है। क्या आपको इस प्रकार के नियम की $\mathbb{R}$ में जानकारी है? आपने बंटन नियम का प्रयोग बहुत बार किया होगा। यह कहता है कि $a(b+c)=ab+ac\ \forall a, b, c\in\mathbb{R}$ होता है। यही नियम $\mathbb{C}$ के लिए भी लागू होता है। आप प्रयास करके इसे क्यों नहीं दर्शाते (देखिए E27)?

E27) i) जाँच कीजिए कि
$(1+i)\left\{\left(\sqrt{2}-3i\right)+(5+i)\right\}=(1+i)\left(\sqrt{2}-3i\right)+(1+i)(5+i)$ है या नहीं।

$\mathbb{C}$ में गुणन योग पर बंटित होता है।

ii) दर्शाइए कि $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3\ \forall z_1, z_2, z_3\in\mathbb{C}$.

आइए अब एक ऐसे प्रमेय की चर्चा करें जो सम्मिश्र संख्याओं के लिए बहुत उपयोगी है।

4.5 द मुआव्र प्रमेय के अनुप्रयोग

पिछले भाग में आपने पढ़ा कि यदि $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ और $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$, तो

$z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$ होता है।

विशेष रूप में, यदि $z_1=z_2$, तो $r_1=r_2, \theta_1=\theta_2$ तथा इसी लिए हम पाते हैं कि $z_1^2=r_1^2(\cos 2\theta_1+i\sin 2\theta_1)$.

वास्तव में, यह एक सुंदर सूत्र की एक विशेष स्थिति है, जिसमें नीचे दिए प्रमेय का उपयोग होता है। यह फ्राँसीसी गणितज्ञ अब्राहम द मुआव्र (De Moivre) के नाम पर



चित्र 9: द मुआव्र (1667-1754)

रखी, **द मुआव्र प्रमेय** है। आपको यह जानकर आश्चर्य होगा कि द मुआव्र ने इस परिणाम का कथन स्पष्ट रूप से कभी नहीं दिया था। परंतु ऐसा प्रतीत होता है कि उन्हें इस परिणाम का ज्ञान था तथा उन्होंने इसे अपने 1730 के लेखनों में प्रयोग किया था। गणितज्ञ ऑयलर ने 1748 में इस परिणाम का स्पष्ट रूप से कथन दिया और इसे सिद्ध किया। हम यहाँ इस परिणाम को सिद्ध नहीं करेंगे, परंतु इसका कथन देंगे, तथा इसके कुछ परिणामों की चर्चा करेंगे।

प्रमेय 1 (द मुआव्र प्रमेय) : किसी भी $n \in \mathbb{Z}$ और किसी भी कोण θ के लिए,
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

यह कथन कितना सरल है, तथा कितना सुंदर है। उदाहरणार्थ, इस प्रमेय से तुरंत यह निकलता है कि यदि

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}$, तो $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n$

$= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$, द मुआव्र प्रमेय के प्रयोग से।

जैसे, $z^7 = r^7(\cos 7\theta + i\sin 7\theta)$ तथा $z^{-100} = r^{+00}\{\cos(100\theta) - i\sin(100\theta)\}$.

हमने अभी दर्शाया है कि

$$[r(\cos\theta + i\sin)]^n = r^n(\cos n + i\sin n\theta)\ \forall r \geq 0,\ \theta \in ,\ n \in Z.$$

यह समिका केवल θ या r या n के विशेष मानों के लिए ही सत्य **नहीं है**। यह इन चरों के सभी मानों के लिए सत्य है, जैसा कि बॉक्स में दर्शाया गया है। ऐसी समिका एक **सर्वसमिका (identity)** कहलाती है। इस प्रकार, एक सर्वसमिका ऐसी समिका होती है, जो संबद्ध चरों के उन सभी मानों के लिए सत्य होती है जिन पर यह लागू है। अब हम कुछ सर्वसमिकाओं पर विचार करेंगे जो द मुआव्र प्रमेय के प्रयोग से सिद्ध की जाती हैं।

4.5.1 त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

प्रमेय 1 का सबसे अधिक उपयोगी अनुप्रयोग ऐसी सर्वसमिकाओं को सिद्ध करने में है, जिनमें $\sin\theta, \cos\theta$, इत्यादि जैसे त्रिकोणमितीय अनुपात शामिल हैं। आइए एक उदाहरण को देखें।

उदाहरण 7: किसी भी $\theta \in \mathbb{R}$ के लिए, $\cos\theta$ और $\sin\theta$ के पदों में $\cos 4\theta$ के लिए सूत्र ज्ञात कीजिए।

हल : द मुआव्र प्रमेय द्वारा,

$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos 4\theta + i\sin 4\theta,\ \forall\theta \in \mathbb{R}$. ... (4)

हम (4) के बाएँ पक्ष को द्विपद प्रसार (binomial expansion) का प्रयोग करते हुए प्रसारित भी कर सकते हैं। तब,

$${}^nC_m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$
$\forall n, m \in \mathbb{N}, n \geq m$.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = (\cos\theta)^4 + {}^4C_1(\cos\theta)^3(i\sin\theta) + {}^4C_2(\cos\theta)^2(i\sin\theta)^2 + {}^4C_3\cos\theta(i\sin\theta)^3 + (i\sin\theta)^4$$
$$= \cos^4\theta + 4i\sin\theta\cos^3\theta - 6\sin^2\theta\cos^2\theta - 4i\sin^3\theta\cos\theta + \sin^4\theta \quad \ldots (5)$$

अब, आप यह जानते हैं कि दो सम्मिश्र संख्याएँ बराबर होती हैं यदि और केवल यदि उनके वास्तविक भाग बराबर हों तथा उनके अधिकल्पित भाग बराबर हों।

इस प्रकार, (4) और (5) में वास्तविक भागों की तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं।

$\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\sin^2\theta\cos^2\theta + \sin^4\theta.$

***

आप इसी प्रकार निम्नलिखित प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E28) $\cos\theta$ के पदों में $\cos 3\theta$ का सूत्र तथा $\sin\theta$ के पदों में $\sin 3\theta$ का सूत्र ज्ञात कीजिए।

अब, किसी भी $m \in \mathbb{N}$ के लिए, आइए z^m को देखें, जहाँ $z \in \mathbb{C}$ ऐसा है कि $|z| = 1$.

तब, द मुआव्र प्रमेय द्वारा,

$z^m = \cos m\theta + i\sin m\theta$, तथा

$z^{-m} = \cos(-m)\theta + i\sin(-m)\theta = \cos m\theta - i\sin m\theta.$

इस प्रकार, $z^m + z^{-m} = 2\cos m\theta$, तथा $z^m - z^{-m} = 2i\sin m\theta.$ ... (6)

हम इन संबंधों का प्रयोग $\cos^m\theta$ और $\sin^m\theta$ को $\forall\, m \in \mathbb{Z}$ क्रमशः $\cos m\theta$ और $\sin m\theta$ के पदों में व्यक्त करने में कर सकते हैं, आइए एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 8: $2^{4n-2}(\cos^{4n}\theta + \sin^{4n}\theta)$ को θ के गुणजों के कोसाइनों या साइनों के पदों में प्रसारित कीजिए, जहाँ $\theta \in \mathbb{R}$.

हल : समीकरण (6) में $m = 1$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$2\cos\theta = z + \frac{1}{z}$ और $2i\sin\theta = z - \frac{1}{z}.$

$$\therefore\ 2^{4n}\cos^{4n}\theta = \left(z + \frac{1}{z}\right)^{4n}$$

$$= z^{4n} + 4nz^{4n-1}\frac{1}{z} + {}^{4n}C_2 z^{4n-2}\frac{1}{z^2} + \cdots + {}^{4n}C_{2n}z^{2n}\frac{1}{z^{2n}} + \cdots + 4nz\frac{1}{z^{4n-1}} + \frac{1}{z^{4n}},$$

द्विपद प्रसार से।

$$= \left(z^{4n} + \frac{1}{z^{4n}}\right) + 4n\left(z^{4n-2} + \frac{1}{z^{4n-2}}\right) + \cdots + {}^{4n}C_{2n}. \quad \text{... (7)}$$

साथ ही, $2^{4n}\sin^{4n}\theta = \left(z - \frac{1}{z}\right)^{4n}$, क्योंकि $i^{4n} = (i^4)^n = 1.$

$$= \left(z^{4n} + \frac{1}{z^{4n}}\right) - 4n\left(z^{4n-2} + \frac{1}{z^{4n-2}}\right) + \cdots + {}^{4n}C_{2n} \quad \text{... (8)}$$

इस प्रकार, (7) और (8) से प्राप्त होता है :

$$2^{4n}(\cos^{4n}\theta + \sin^{4n}\theta) = 2\left(z^{4n} + \frac{1}{z^{4n}}\right) + 2\left({}^{4n}C_2\right)\left(z^{4n-4} + \frac{1}{z^{4n-4}}\right) + \cdots + 2\left({}^{4n}C_{2n}\right)$$

$= 2\left\{2\cos 4n\theta + 2\left({}^{4n}C_2\right)\cos(4n-4)\theta + \ldots\right\} + 2\left({}^{4n}C_{2n}\right)$ (6) के प्रयोग से।

$$\therefore\ 2^{4n-2}(\cos^{4n}\theta + \sin^{4n}\theta) = \cos 4n\theta + {}^{4n}C_2\cos(4n-4)\theta + \cdots + \frac{1}{2}{}^{4n}C_{2n}.$$

***

उदाहरण 8 में जो हमने प्रक्रिया दर्शाई है वह त्रिकोणमितीय फलनों से संबद्ध अवकल समीकरणों को हल करने में बहुत उपयोगी है, जैसा कि आप दूसरे सिमेस्टर के पाठ्यक्रम में देखेंगे। यह ऐसे फलनों के **लाप्लास (Laplace)** रूपांतरण ज्ञात करने में भी उपयोगी है। अब क्यों नहीं आप कुछ संबंधित प्रश्न करने का प्रयास करें?

E29) द मुआव्र प्रमेय के अनुप्रयोग से सिद्ध कीजिए कि

i) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$,

ii) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$.

E30) θ के गुणजों के कोसाइनों के पदों में $\cos^6\theta - \sin^6\theta$ का प्रसार कीजिए।

आइए अब एक अन्य क्षेत्र को देखें, जिसमें द मुआव्र प्रमेय का बहुत सफ़लतापूर्वक अनुप्रयोग किया जा सकता है।

4.5.2 सम्मिश्र संख्या के मूल

आइए किसी शून्येतर वास्तविक संख्या r को लें। यदि $r > 0$ है, तो इसके $\mathbb{R}$ में दो वर्गमूल $\sqrt{r}$ और $-\sqrt{r}$ हैं। यदि $r < 0$ है, तो $-r > 0$ है। अतः, $(-r)$ के दो अलग वर्गमूल $\pm\sqrt{-r} \in \mathbb{R}$ होंगे। अब प्रश्न यह है कि यदि $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ है, तो क्या z के भी $\mathbb{C}$ में दो अलग वर्गमूल होंगे? वास्तव में, सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय का एक और अधिक शक्तिशाली गुण है, जो गणित में इसके महत्व का एक बड़ा कारण है। यह गुण है :

> कोई भी $n \in \mathbb{N}$ और $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ दिया रहने पर, हम अलग-अलग $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ ज्ञात कर सकते हैं जिससे कि $z_k^n = z \ \forall\ k = 1, \ldots, n$ हो।

इनमें से प्रत्येक z_k को **z का nवाँ मूल (nth root)** कहते हैं।

इस प्रकार, **प्रत्येक सम्मिश्र संख्या के $\mathbb{C}$ में n अलग** nवें मूल होते हैं, जहाँ $n \in \mathbb{N}$. इन सभी मूलों को ज्ञात करने के लिए, हमें द मुआव्र प्रमेय तथा साथ ही निम्नलिखित प्रमेय की आवश्यकता है।

प्रमेय 2: मान लीजिए कि x एक धनात्मक वास्तविक संख्या है तथा $n \in \mathbb{N}$. तब, एक और केवल एक ऐसी धनात्मक वास्तविक संख्या b होती है जिससे कि $b^n = x$.

हम प्रमेय 2 से प्राप्त अद्वितीय धनात्मक nवें मूल को $x^{1/n}$ से व्यक्त करते हैं।

हम यहाँ b के अस्तित्व को सिद्ध नहीं करेंगे, क्योंकि यह इस पाठ्यक्रम के स्तर से ऊपर है। परंतु अद्वितीयता को दर्शाना इतना कठिन नहीं है, जैसा कि आप निम्नलिखित प्रश्न को हल करते समय देखेंगे।

E31) मान लीजिए कि x एक वास्तविक संख्या है तथा $n \in \mathbb{N}$ है। दर्शाइए कि धनात्मक वास्तविक संख्या r, जिससे कि $r^n = x$ है, अद्वितीय है।

[**संकेत** : मान लीजिए कि $r, s \geq 0$ इस प्रकार हैं कि $r^n = x = s^n$. मान लीजिए कि $r \neq s$ है। तब, $r^n - s^n = 0$, तथा $r - s \neq 0$. अब आपको एक विरोधाभास पर पहुँच जाना चाहिए।]

अब, आइए किसी सम्मिश्र संख्या के सभी nवें मूलों को प्राप्त करने के एक उदाहरण पर विचार करें, जहाँ $n \in \mathbb{N}$.

उदाहरण 9: $\mathbb{C}$ में i के सभी पाँचवें मूलों को ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ संख्या i का कोई भी 5वाँ मूल है। तब $z^5 =$ i. i का ध्रुवीय रूप $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ है। इसलिए,

$$z^5 = i$$

$$\Rightarrow \quad r^5(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}, \text{ द मुआव्र प्रमेय से} \qquad \ldots (9)$$

(9) के दोनों पक्षों में सम्मिश्र संख्याओं के मापांकों तथा कोणांकों की तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$r^5 = 1$ तथा $5\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, जहाँ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ है।

r, 1 का अद्वितीय धनात्मक पाँचवाँ मूल है (देखिए प्रमेय 2)। क्योंकि $1 \in \mathbb{R}$, 1 का पाँचवाँ मूल है, इसलिए $r = 1$, अर्थात् $|z| = 1$. θ के संभव मान हैं:

$$\theta = \frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

इस प्रकार, i के संभव पाँचवें मूल हैं :

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{10} + 2k\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{10} + 2k\frac{\pi}{5}\right), \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

इससे ऐसा प्रतीत होता है कि i के अनंततः से अनेक 5वें मूल हैं, प्रत्येक $k \in \mathbb{Z}$ के लिए एक। आइए देखें कि क्या ऐसा ही है।

जब $k = -2$, तब $z = \cos\left(\frac{\pi}{10} - \frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{4\pi}{5}\right)$

$$= \cos\frac{7\pi}{10} - i\sin\frac{7\pi}{10} = z_{-2}, \text{ मान लीजिए।}$$

टिप्पणी 6 में आप देखेंगे कि हमने $k = -2$ से क्यों प्रारंभ किया है।

जब $k = -1$, तब $z = \cos\frac{3\pi}{10} - i\sin\frac{3\pi}{10} = z_{-1}$, मान लीजिए।

जब $k = 0$, तब $z = \cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10} = z_0$, मान लीजिए।

जब $k = 1$, तब $z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = z_1$, मान लीजिए।

जब $k = 2$, तब $z = \cos\frac{9\pi}{10} + i\sin\frac{9\pi}{10} = z_2$, मान लीजिए।

जब $k = 3$, तब $z = \cos\frac{13\pi}{10} + i\sin\frac{13\pi}{10} = \cos\left(2\pi - \frac{7\pi}{10}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{7\pi}{10}\right) = z_{-2}$,

$\cos(2\pi \pm \theta) = \cos\theta$, तथा
$\sin(2\pi \pm \theta) = \pm\sin\theta$.

जब $k = 4$, तब $z = \cos\frac{17\pi}{10} + i\sin\frac{17\pi}{10} = \cos\left(2\pi - \frac{3\pi}{10}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{3\pi}{10}\right) = z_{-1}$.

इसी प्रकार, जब $k = 5$, तब आप z_0 प्राप्त करेंगे, तथा ऐसा आगे भी होता रहेगा।

इसी प्रकार, $k = 3, 4, ...$, हमें z के कोई नए मान नहीं देते हैं।

अब, यदि हम $k = -3$ रखें, तो हमें $z = \cos\left(\frac{-11\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{-11\pi}{10}\right) = z_2$ प्राप्त होता है।

इसी प्रकार, $k = -4, -5, ...$ z के कोई नए मान नहीं देंगे।

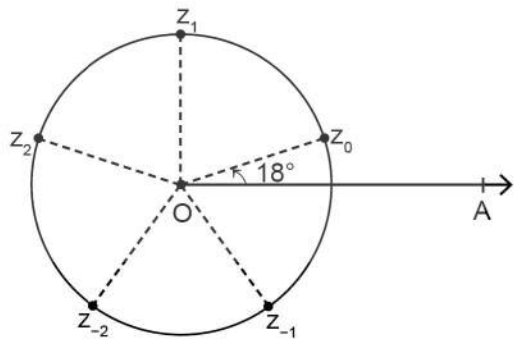
इसलिए, i के 5वें मूल केवल $k = 0, \pm1$ और ±2 के लिए

$\cos\left(\frac{\pi}{10} + 2k\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{10} + 2k\frac{\pi}{5}\right)$ हैं।

***

टिप्पणी 6: जैसा कि आप देख चुके हैं, i के 5वें मूल $\cos\left(\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}\right)$ में $k = 0, 1, 2, 3, 4$ लेकर भी प्राप्त कर सकते हैं। केवल यह ध्यान रखना है कि $k = 3$ और $k = 4$ के लिए, कोण θ प्रतिबन्ध $-\pi < \theta \leq \pi$ को संतुष्ट नहीं करेंगे। इसी कारण, हमने $k = 0, \pm1$ और ±2 लिए हैं।

अब, i के सभी 5वें मूलों पर दृष्टि डालिए। इनके मापांक किस प्रकार संबंधित हैं? इन सभी का एक ही मापांक, अर्थात् $|i|^{1/5}$ $(=1)$ है। इस प्रकार, ये सभी केन्द्र $(0, 0)$ और त्रिज्या 1 वाले वृत्त पर स्थित हैं। ये बिंदु इस वृत्त पर समान दूरी पर स्थित होंगे, क्योंकि क्रमागत बिंदुओं के कोणांकों का अंतर एक अचर, $\frac{2\neq}{5}$ है। हम इन्हें चित्र 10 में एक आरगां आरेख में आलेखित करते हैं।



चित्र 10: i के 5वें मूल

अब, एक और उदाहरण देखिए।

उदाहरण 10: इकाई, अर्थात् 1, के सभी पाँचवें मूलों को ज्ञात कीजिए।

हल: $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$.

यदि $[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^5 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$, तो $r^5 = 1$ तथा $5\theta = 2k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2$ के लिए। जैसा कि उदाहरण 9 में था, $r = 1$ है।

साथ ही, $\theta = \frac{2k\pi}{5}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2$ के लिए। इस प्रकार, इकाई के पाँचवें मूल $\cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2$ हैं।

***

क्या आपको उदाहरण 9 के मूलों तथा उदाहरण 10 के मूलों के बीच कोई संबंध दिखता है? i के 5वें मूल $w\alpha_1, w\alpha_2, w\alpha_3, w\alpha_4, w\alpha_5$ के रूप के हैं, जहाँ उदाहरण 9 में w, i का एक पाँचवाँ मूल है, मान लीजिए z_0, तथा $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ उदाहरण 10 के मूल हैं। आपको इसकी जाँच कर लेनी चाहिए कि ऐसा ही है।

उदाहरणों 9 और 10 जैसी विधि का प्रयोग करते हुए, हम किसी भी $n \in \mathbb{N}$ के लिए, किसी भी शून्येतर सम्मिश्र संख्या के भिन्न-भिन्न nवें मूल प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रकार, कोई शून्येतर सम्मिश्र संख्या z दी हुई रहने पर, हम इसे ध्रुवीय रूप $z = a(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ में लिखते हैं, जहाँ $a = |z|$ और $\alpha = \text{Arg } z$ है।

प्रमेय 2 से, एक अद्वितीय $r \in \mathbb{R}, r > 0$ है जिससे कि $r^n = a$ है, अर्थात् $r = a^{\frac{1}{n}}$ है। तब, z के भिन्न-भिन्न nवें मूल हैं :

$z_k = a^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ के लिए।

ज्यामितीय रूप से, ये त्रिज्या $a^{\frac{1}{n}}$ वृत्त पर बराबर दूरी पर स्थित होते हैं। ध्यान दीजिए कि

> किसी भी $n \in \mathbb{N}$ के लिए, एक शून्येतर सम्मिश्र संख्या के ठीक n भिन्न-भिन्न nवें मूल होते हैं। यदि z एक मूल है, तो अन्य मूल $z\alpha_1, z\alpha_2, \ldots, z\alpha_{n-1}$ होते हैं, जहाँ $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ इकाई के nवें मूल हैं।

अब, आपको कुछ संबंधित प्रश्नों को करना चाहिए।

E32) इकाई के घनमूल ज्ञात कीजिए, अर्थात् वे $z \in \mathbb{C}$ जिनसे कि $z^3 = 1$ हो। इन्हें एक आरगां आरेख में भी निरूपित कीजिए।

E33) समीकरण $z^4 - 4z^2 + 4 - 2i = 0$ को हल कीजिए।

[**संकेतः** इस समीकरण को पुनः $(z^2 - 2)^2 = (1+i)^2$ के रूप में लिखा जा सकता है।]

E32 में जो आपने इकाई के घनमूल प्राप्त किए हैं बहुत ही महत्त्वपूर्ण हैं। हम प्रायः घनमूल $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ को यूनानी अक्षर ω (ओमेगा) से व्यक्त करते हैं। ध्यान दीजिए कि $\omega^2 = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ है, जो इकाई का दूसरा अवास्तविक घनमूल है। इस प्रकार, नोट कीजिए कि :

> इकाई के तीन घनमूल हैं $-1, \omega, \omega^2$, जहाँ $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

साथ ही, यह भी ध्यान दीजिए कि

$1+\omega+\omega^2=0$ है। ... (10)

आप कई बार गणित में ω और संबंध (10) का उपयोग करेंगे। हम कई बार निम्नलिखित परिणामों का भी उपयोग करेंगे, जिन्हें हम आपसे सिद्ध करने को कह रहे हैं।

E34) क) मान लीजिए कि $a \in \mathbb{R}$ है। दर्शाइए कि a का एक वास्तविक घनमूल r है, तथा a के घनमूल r, $r\omega$ और $r\omega^2$ हैं।

ख) दर्शाइए कि यदि $a \in \mathbb{R}, a<0$ है तथा n एक सम धनात्मक पूर्णांक है, तो a का कोई वास्तविक nवाँ मूल नहीं होगा।

ग) मान लीजिए कि $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. दर्शाइए कि z के तीन घनमूल हैं, तथा यदि इनमें से एक γ है, तो अन्य दो $\gamma\omega$ और $\gamma\omega^2$ होंगे। इस तरह सभी घनमूलों का योग ज्ञात कीजिए।

इसके साथ ही हम सम्मिश्र संख्याओं की अपनी चर्चा की समाप्ति पर पहुँच गए हैं। इसका अर्थ यह नहीं है कि आप इनके साथ अब आगे कार्य नहीं करेंगे। वास्तव में, इस इकाई में हमने जो कुछ भी वर्णन किया है, आप उसका प्रायः इस पाठ्यक्रम का अध्ययन करते समय, तथा अन्य गणित के पाठ्यक्रमों के अध्ययन के समय, प्रयोग करते रहेंगे।

आइए अब इस इकाई में चर्चा किए गए बिंदुओं पर एक दृष्टि डालें।

4.6 सारांश

सम्मिश्र संख्याओं की इस इकाई में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है :

1. बीजीय (या मानक) रूप में एक सम्मिश्र संख्या की परिभाषा : एक सम्मिश्र संख्या $x+iy$ के रूप की एक संख्या होती है, जहाँ $x, y \in \mathbb{R}$ तथा $i=\sqrt{-1}$. तुल्य रूप से, यह एक युग्म $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ है।
2. $x+iy$ का वास्तविक भाग x है तथा अधिकल्पित भाग y है।
3. $x_1+iy_1=x_2+iy_2$ यदि और केवल यदि $x_1=x_2$ और $y_1=y_2$ है।
4. $z=x+iy$ का संयुग्मी $\bar{z}=x-iy$ है।
5. सम्मिश्र संख्या $x+iy$ का एक आरगां आरेख में ज्यामितीय निरूपण कार्तीय निर्देशांकों (x, y) वाला बिंदु होता है।
6. $z=x+iy$ का ध्रुवीय रूप $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ है, जहाँ $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ तथा $\theta=\text{Arg}\, z=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ है, जहाँ θ को हम इस प्रकार चुनते हैं कि वह आरगां आरेख में z के स्थान के संगत हो तथा $-\pi<\theta\leq\pi$ हो।

7. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ के लिए,

$|z_1z_2| = |z_1||z_2|$, $\text{Arg}(z_1z_2) = \text{Arg}\,z_1 + \text{Arg}\,z_2 + 2k\pi$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}\,z_1 - \text{Arg}\,z_2 + 2m\pi$ ($z_2 \neq 0$ के लिए),

जहाँ $k, m \in \mathbb{Z}$ इस प्रकार चुने जाते हैं कि

$-\pi < \text{Arg}(z_1z_2) \leq \pi$ और $-\pi < \text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \leq \pi$ हो।

8. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

i) $(a+ib) \pm (c+id) = (a \pm c) + i(b \pm d)$,

ii) $(a+ib) \times (c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$,

iii) $\frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} - \left(\frac{b}{a^2+b^2}\right)i$, $a+ib \neq 0$ के लिए,

iv) $\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}$, $c+id \neq 0$ के लिए।

9. द मुआव्र प्रमेयः $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \; \forall n \in \mathbb{Z}$, तथा किसी भी कोण θ के लिए।

10. त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं को सिद्ध करने में तथा सम्मिश्र संख्याओं के nवें मूलों को प्राप्त करने में द मुआव्र प्रमेय का अनुप्रयोग, जहाँ $n \in \mathbb{N}$ है।

11. इकाई के घनमूल $1, \omega$ और ω^2 हैं, जहाँ $\omega = \left(-\frac{1}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. साथ ही, $1 + \omega + \omega^2 = 0$ होता है।

अब जब आप इस इकाई का अध्ययन कर चुके हैं, कृपया भाग 4.1 में दिए उद्देश्यों पर वापिस लौट जाइए। क्या आप सोचते हैं कि आपने इन्हें प्राप्त कर लिया है? जैसा कि भाग 4.1 में बताया गया है, इसको जानने की एक विधि यह है कि इस इकाई में जो हमने प्रश्न दिए हैं उन सभी को हल कीजिए। यदि आप अपने हलों या उत्तरों की सत्यापन करना चाहते हैं, तो आप देखिए कि निम्नलिखित भाग में हमने क्या दिया है।

4.7 हल / उत्तर

E1)

z	Re z	Im z
$\frac{1+\sqrt{-23}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{-23}}{2}$
i	0	1
0	0	0
$\frac{-1+\sqrt{3}}{5}$	$\frac{-1+\sqrt{3}}{5}$	0

E2) हाँ, क्योंकि प्रत्येक वास्तविक संख्या x एक सम्मिश्र संख्या $x + 0i$ है।

E3) i) $\sqrt{k}+3i=\sqrt{3}+im \Leftrightarrow \sqrt{k}=\sqrt{3}$ तथा $3=m \Leftrightarrow k=3, m=3$.

ii) $ki=m\in\mathbb{R}$ यदि और केवल यदि $k=0$. इस प्रकार, $ki-m\in\mathbb{R}\ \forall m\in\mathbb{R}$ और $k=0$.

E4) $\overline{-5}=\overline{-5+0.i}=-5-0.i=-5$.

$\sqrt{-5}=i\sqrt{5}$. अतः, $\overline{\sqrt{-5}}=-i\sqrt{5}=-\sqrt{-5}$.

$\overline{2+3i}=2-3i$.

$\overline{2-3i}=2+3i$.

E5) मान लीजिए कि $z=x+iy$. तब, $\bar{z}=x-iy$.

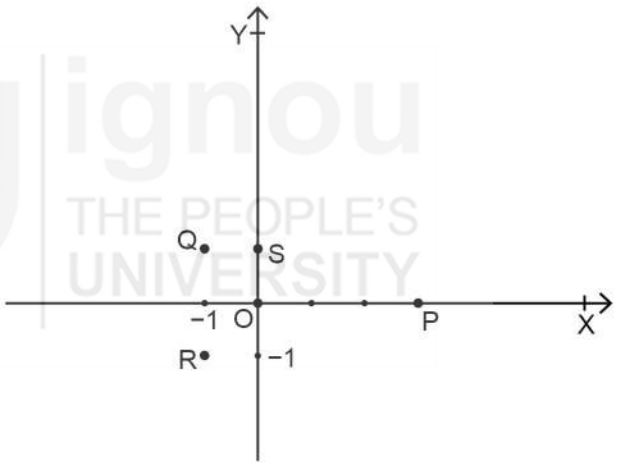
$\therefore\ z=\bar{z} \Rightarrow x+iy=x-iy \Rightarrow y=-y \Rightarrow y=0$.

$\therefore\ z=\bar{z}$ यदि और केवल यदि $z\in\mathbb{R}$.

E6) मान लीजिए कि $z=x+iy$. तब, $\bar{z}=x-iy$.

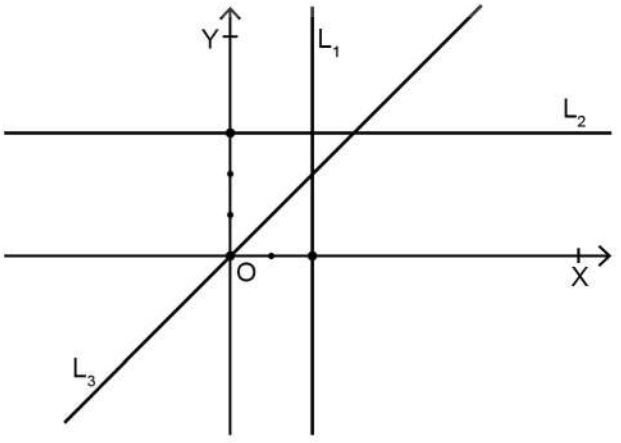
$\therefore\ \bar{\bar{z}}=\overline{x-iy}=x+iy=z$.

E7) क) चित्र 11 में, P, Q, R और S क्रमशः $3, -1+i, \overline{-1+i}$ और i को निरूपित करते हैं।



चित्र 11

ख) समुच्चय $S_1=\{(2, y)\mid y\in\mathbb{R}\}$, अर्थात् रैखिक समीकरण $x=2$ को संतुष्ट करने वाले बिंदुओं का समुच्चय। इसी प्रकार, आप देख सकते हैं कि S_2 रेखा $y=3$ द्वारा निरूपित है तथा S_3 रेखा $y=x$ द्वारा निरूपित है। मान लीजिए कि L_1, L_2 और L_3 क्रमशः समुच्चयों S_1, S_2 और S_3 को निरूपित करती हैं। इन्हें चित्र 12 में दर्शाया गया है।



चित्र 12

E8) $\frac{-1}{2}+\frac{i}{3}$, 2 तथा $-2i$ क्रमशः मानक रूप में $\mathbb{C}$ के अवयव हैं।

E9) $|3|=3$ और $\text{Arg}(3)=\tan^{-1}(0)=0$, क्योंकि 3 वास्तविक अक्ष की धनात्मक दिशा पर स्थित है। अतः, $3=3(\cos 0+i\sin 0)$.

अब $|-1+i|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, तथा

$\text{Arg}(-1+i)=\tan^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{4}$ या $3\frac{\pi}{4}$.

क्योंकि $-1+i$ बिंदु $(-1, 1)$ के संगत है, जो दूसरे चतुर्थांश में स्थित है, इसलिए $\text{Arg}(-1+i)=\frac{3\pi}{4}$.

$\therefore\ (-1+i)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

$$\overline{-1+i}=-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$.

E10) मान लीजिए कि $z=x+iy$. तब, $\bar{z}=x-iy$. इसलिए, $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=|\bar{z}|$.

आगे, $\text{Arg } z=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ तथा $\text{Arg } \bar{z}=-\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$. इस प्रकार, $\text{Arg } z=-\text{Arg } \bar{z}$.

E11) किसी भी $z=x+iy\in\mathbb{C}$ के लिए, $|z|=1\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1$.

E12) i) $2+3i+\overline{2+3i}=2+3i+2-3i=4+0i=4$.

ii) मान लीजिए कि $z=x+iy$ है। तब,

$z+\bar{z}=(x+iy)+(x-iy)=2x=2\text{Re}z$.

E13) मान लीजिए कि $z_1=x_1+iy_1$ और $z_2=x_2+iy_2$ है। तब,

$z_1+z_2=(x_1+x_2, y_1+y_2)$

$\therefore\ \overline{z_1+z_2}=(x_1+x_2, -(y_1+y_2))$
$=(x_1+x_2, -y_1-y_2)$
$=(x_1, -y_1)+(x_2, -y_2)$
$=\bar{z}_1+\bar{z}_2$.

E14) क) मान लीजिए कि $z_1=(x_1, y_1)$ और $z_2=(x_2, y_2)$ है।

तब, $z_1+z_2=(x_1, y_1)+(x_2, y_2)$
$=(x_1+x_2, y_1+y_2)$
$=(x_2+x_1, y_2+y_1)$ क्योंकि $a+b=b+a\ \forall a, b\in\mathbb{R}$
$=(x_2, y_2)+(x_1, y_1)$
$=z_2+z_1$

ख) मान लीजिए कि $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2), z_3 = (x_3, y_3)$ है।
तब, परिणाम को प्राप्त करने के लिए, ऊपर E14 (क) की ही तरह इस तथ्य का उपयोग कीजिए कि $(a+b)+c = a+(b+c) \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ है।

E15) मान लीजिए कि $z = x + iy$ है।
तब, $z + (a + ib) = z$
$\Leftrightarrow (x + iy) + (a + ib) = x + iy$
$\Leftrightarrow (x + a) + i(y + b) = x + iy$
$\Leftrightarrow x + a = x$ और $y + b = y$
$\Leftrightarrow a = 0, b = 0$
$\therefore a + ib = 0 + i0 = 0$ इसे संतुष्ट करता है।

$z - \bar{z}$ शुद्धतः रूप से अधिकल्पित होता है, यदि $\text{Im}\, z \neq 0$ है।

E16) i) $(3-2i) - \overline{(3-2i)} = (3-2i) - (3+2i) = (3-3) + i(-2-2) = -4i$ है।

ii) मान लीजिए कि $z = x + iy$ है। तब,
$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = (x - x) + i(y + y) = 2iy.$
$= i(2\,\text{Im}\, z).$

E17) मान लीजिए कि $z = x + iy$ है। तब, $-z = (-x) + i(-y)$ है।

i) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, तथा
$|-z| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$

ii) $\text{Arg}\, z = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

बिंदु $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ का **मूलबिंदु में परावर्तन** $(-a, -b)$ होता है।

$\text{Arg}(-z) = \tan^{-1}\left(\frac{-y}{-x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{Arg}\, z \pm \pi$, क्योंकि z का मूलबिंदु में परावर्तन $(-z)$ है।

E18) मान लीजिए कि $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ है। अब,

$1 = \cos 0 + i\sin 0, |0| = 0, i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ है।

अतः, $z.1 = r\{\cos(\theta + 0) + i\sin(\theta + 0)\} = r(\cos\theta + i\sin\theta) = z.$

अब, $|z.0| = |z||0| = 0$ है। इस प्रकार, $z.0 = 0$ है।

$z.i = r\{\cos(\theta + \pi/2) + i\sin(\theta + \pi/2)\} = r(-\sin\theta + i\cos\theta)$
$z\bar{z} = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2 = |z|^2.$

E19) क) मान लीजिए कि $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ तथा $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2).$

तब, $z_1 z_2 = r_1 r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2 + 2k\pi) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + 2k\pi)\}$
$= r_2 r_1\{\cos(\theta_2 + \theta_1 + 2k\pi) + i\sin(\theta_2 + \theta_1 + 2k\pi)\}$
$= z_2 z_1,$

जहाँ k को इस प्रकार चुना जाता है कि $\theta_1 + \theta_2 + 2k\pi$, अर्थात् $\theta_2 + \theta_1 + 2k\pi, -\pi$ और π के बीच में स्थित हो।

ख) मान लीजिए कि $z_m = r_m(\cos\theta_m + i\sin\theta_m)$, $m = 1, 2, 3$ के लिए। तब, आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि $|(z_1z_2)z_3| = (r_1r_2)r_3 = r_1(r_2r_3) = |z_1(z_2z_3)|$.

पुनः, $\text{Arg}[(z_1z_2)z_3] = \{(\theta_1 + \theta_2) + 2k\pi\} + \theta_3 + 2s\pi$

$= (\theta_1 + \theta_2) + \theta_3 + 2(k + s)\pi$

$= \theta_1 + (\theta_2 + \theta_3 + 2s\pi) + 2k\pi = \text{Arg}[z_1(z_2z_3)]$

जहाँ पूर्णांकों k और s को इस प्रकार चुना जाता है कि

$-\pi < (\theta_1 + \theta_2) + 2k\pi \le \pi$ हो, $-\pi < (\theta_2 + \theta_3) + 2s\pi \le \pi$ हो, तथा

$-\pi < (\theta_1 + \theta_2) + \theta_3 + 2(k + s)\pi \le \pi$ हो।

E20) $z_1 = 6(\cos\pi + i\sin\pi)$, $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore |z_1z_2| = 6\sqrt{2}$ और $\text{Arg}(z_1z_2) = \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$, जहाँ $k \in \mathbb{Z}$ ऐसा है कि $-\pi < \text{Arg}(z_1z_2) \le \pi$ है।

$\therefore \text{Arg}(z_1z_2) = \frac{-3\pi}{4}$.

E21) $(x, y)(1, 0) = (x, y)$

$(x, y)(0, 1) = (-y, x)$

$(x, y)(0, 0) = (0, 0)$

$(x, 0)(y, 0) = (xy, 0)$

$(x, y)(1, 1) = (x - y, x + y)$

$z.1 = z \ \forall\ z \in \mathbb{C}$

$z.0 = 0 \ \forall\ z \in \mathbb{C}$

E22) $(x, y)\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}, \frac{-xy+xy}{x^2+y^2}\right) = (1, 0)$.

E23) $\frac{-2+i}{i\sqrt{3}+i(2i)} = \frac{-2+i}{-2+i\sqrt{3}}$, क्योंकि $i^2 = -1$ है।

$$= \frac{(-2+i)(-2-i\sqrt{3})}{(-2)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \frac{4+\sqrt{3}}{7} + \frac{2}{7}\left(\sqrt{3}-1\right)i$$

इस संख्या का मापांक $\sqrt{\left(\frac{4+\sqrt{3}}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2(\sqrt{3}-1)^2} = \frac{\sqrt{35}}{7}$ है।

इसका मुख्य कोणांक $\theta = \tan^{-1}\left\{\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{4+\sqrt{3}}\right\}$ है।

इस प्रकार, इसका ध्रुवीय रूप $\frac{\sqrt{35}}{7}(\cos\theta + i\sin\theta)$ है।

E24) $c^2 + d^2 \ne 0$ का अर्थ है कि $c \ne 0$ या $d \ne 0$ है। इस प्रकार, $c + id \ne 0$ है।

अतः, $\frac{a+ib}{c+id}$ अर्थपूर्ण है।

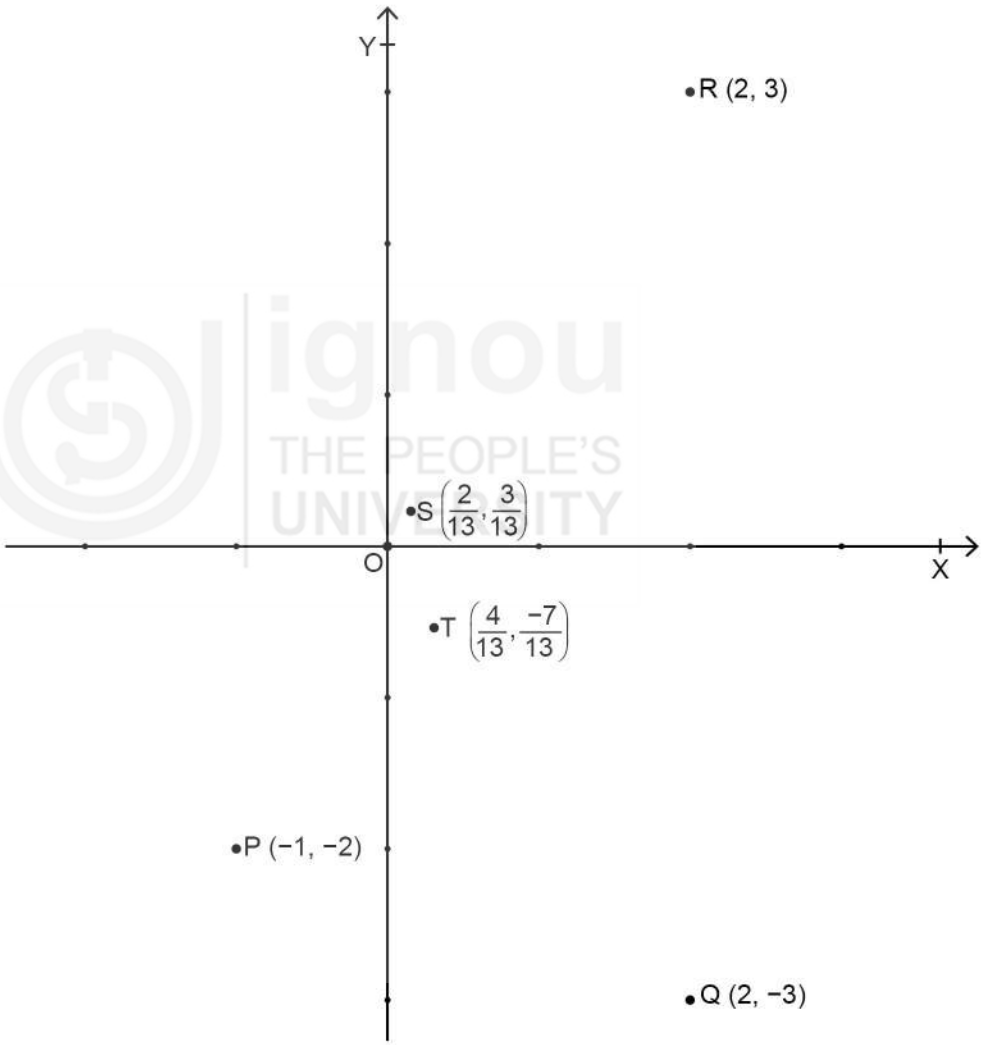
$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + i\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

E25) मान लीजिए कि $z = x + iy \neq 0$ है। तब, E18 से हम जानते हैं कि $z\bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$.

इसलिए, $z\left(\frac{1}{|z|^2}\bar{z}\right) = 1$. इस प्रकार, $\frac{1}{|z|^2}\bar{z}$ संख्या z का गुणनात्मक प्रतिलोम है, अर्थात यह $\frac{1}{z}$ है।

अब, $z.\frac{1}{z} = 1$. $\therefore |z|.\left|\frac{1}{z}\right| = |1| = 1$. $\therefore \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

E26) चित्र 13 में बिंदु P, Q, R, S और T क्रमशः $z_1, z_2, \bar{z}_2, \frac{1}{z_2}$ और $\frac{z_1}{z_2}$ को निरूपित करते हैं। यहाँ, $OT = \frac{OP}{OQ}$ और $\angle XOT = \angle XOP - \angle XOQ$.



चित्र 13

E27) i) $LHS = (1+i)[(\sqrt{2}+5) - 2i] = (7+\sqrt{2}) + i(3+\sqrt{2})$

$RHS = [(\sqrt{2}+3) + i(\sqrt{2}-3)] + (4+6i) = (\sqrt{2}+7) + i(\sqrt{2}+3)$

इस प्रकार, LHS = RHS है।

ii) मान लीजिए कि $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, z_3 = x_3 + iy_3$ हैं।

तब, $z_1(z_2 + z_3) = (x_1 + iy_1)[(x_2 + x_3) + i(y_2 + y_3)]$

$$= [x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3)] + i[x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)]$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1x_3 - y_1y_3) + i[(x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1y_3 + x_3y_1)]$$
$$= [(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)] + [x_1x_3 - y_1y_3) + i(x_1y_3 + x_3y_1)]$$
$$= z_1z_2 + z_1z_3$$

आप z_1, z_2 और z_3 को ध्रुवीय रूप में लिखकर भी इसको हल कर सकते हैं। यदि आप ऐसा करते हैं, तो उस स्थिति की सावधानी रखिए जब किसी i के लिए $z_i = 0$ हो तो।

E28) $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta.$ ... (11)

साथ ही,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3\cos^2\theta(i\sin\theta) + 3\cos\theta(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3$$
$$= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta) \quad \text{... (12)}$$

इस प्रकार, (11) और (12) के वास्तविक भागों की तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं कि

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta(1 - \cos^2\theta)$$
$$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

इसी प्रकार, अधिकल्पित भागों की तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं कि

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta(1 - \sin^2\theta) - \sin^2\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

E29) $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$, तथा

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta$$

$\therefore \cos\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$, तथा

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta.$$

E30) मान लीजिए कि $z = \cos\theta + i\sin\theta$ है। तब, उदाहरण 8 के (7) और (8) के प्रयोग से हम प्राप्त करते हैं कि

$$(2\cos\theta)^6 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^6 = \left(z^6 + \frac{1}{z^6}\right) + 6\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) + 15\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + 20, \text{ तथा}$$

$$(2i\sin\theta)^6 = \left(z^6 + \frac{1}{z^6}\right) - 6\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) + 15\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 20.$$

$$\therefore 2^6(\cos^6\theta - \sin^6\theta) = 2\left(z^6 + \frac{1}{z^6}\right) + 30\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)$$
$$= 4\cos 6\theta + 60\cos 2\theta \text{ (6) के प्रयोग से।}$$

$$\Rightarrow \cos^6\theta - \sin^6\theta = \frac{1}{16}(\cos 6\theta + 15\cos 2\theta).$$

E31) मान लीजिए कि $r, s \in \mathbb{R}$, $r, s > 0$, तथा $r^n = x = s^n$ है। तब,

$$r^n - s^n = (r - s)(r^{n-1} + r^{n-2}s + \cdots + rs^{n-2} + s^{n-1}) = 0.$$

अब, $r > 0, s > 0$ है, इसलिए $r^{n-1} + r^{n-2}s + \cdots + rs^{n-2} + s^{n-1} > 0$ है।

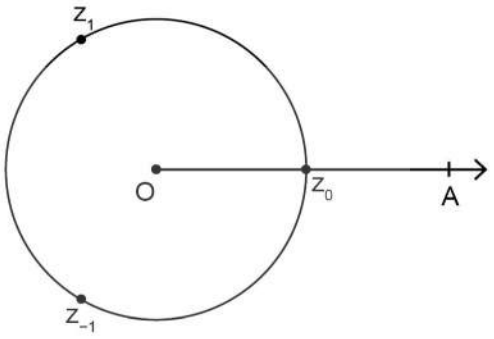
इस प्रकार, $(r - s)(r^{n-1} + r^{n-2}s + \cdots + s^{n-1}) = 0$ केवल तभी हो सकता है, जब $r - s = 0$ है, अर्थात् $r = s$ है।

E32) मान लीजिए कि $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ संख्या $1 = \cos 0 + i\sin 0$ का घनमूल है।

तब, $r = 1^{\frac{1}{3}} = 1$, $\theta = \dfrac{0 + 2k\pi}{3} = \dfrac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, -1$ के लिए।

इस प्रकार, मूल $1, \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ और $\dfrac{-1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ हैं।

इन्हें चित्र 14 में निरूपित किया गया है।



चित्र 14: इकाई के घनमूल

E33) हम वे $z \in \mathbb{C}$ प्राप्त करना चाहते हैं जिनके लिए

$(z^2 - 2) = \pm(1 + i)$, अर्थात्

$z^2 - 2 = 1 + i$ और $z^2 - 2 = -(1 + i)$, अर्थात्,

$z^2 = 3 + i$ और $z^2 = 1 - i$.

इस प्रकार, हम $3 + i$ और $1 - i$ के वर्गमूल ज्ञात करना चाहते हैं।

अब, $3 + i = \sqrt{10}\left\{\cos\left(\tan^{-1}\dfrac{1}{3}\right) + i\sin\left(\tan^{-1}\dfrac{1}{3}\right)\right\}$.

इस प्रकार, $3 + i$ के वर्गमूल हैं :

$10^{\frac{1}{4}}\left(\cos\dfrac{\theta}{2} + i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$ और $10^{\frac{1}{4}}\left\{\cos\left(\dfrac{\theta}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\theta}{2} + \pi\right)\right\}$,

जहाँ $\theta = \tan^{-1}\dfrac{1}{3}$.

साथ ही, $1 - i = \sqrt{2}\left\{\cos\left(\dfrac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)\right\}$, जिससे $1 - i$ के वर्गमूल

$2^{1/4}\left(\cos\dfrac{\pi}{8} - i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$ और $2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\dfrac{7\pi}{8} - i\sin\dfrac{7\pi}{8}\right)$ निकलते हैं।

ये 4 वर्गमूल दिए गए समीकरण के 4 मूल हैं।

E34) क) यदि $a \geq 0$ है, तो प्रमेय 2 से a का एक वास्तविक घनमूल $a^{\frac{1}{3}}$ है। अब, $a = a(\cos 0 + i\sin 0)$ है।

इस प्रकार, a के घनमूल $a^{\frac{1}{3}}\left(\cos\dfrac{2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{2k\pi}{3}\right)$, $k = 0, 1, 2$ हैं, अर्थात् $a^{1/3}, a^{1/3}\omega, a^{1/3}\omega^2$ हैं।

यदि $a < 0$ है, तो $-a > 0$ है। इस प्रकार, $-a$ का एक वास्तविक घनमूल, मान लीजिए, b है। तब, $r = -b$ संख्या a का एक वास्तविक घनमूल है। साथ ही, $|r| = |a|^{\frac{1}{3}}$ है, अर्थात् $r = -|r| = -|a|^{\frac{1}{3}}$ (क्योंकि r ऋणात्मक है)।

अब, $a = |a|(\cos\pi + i\sin\pi)$. इसलिए, a के घनमूल हैं :

$|a|^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{3} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{3}\right)$, $k = 0, 1, 2$ के लिए,

$r(\cos\pi + i\sin\pi)\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{3} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{3}\right)$, $k = 0, 1, 2$

(क्योंकि $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$).

$= r\left(\cos\frac{(2k+4)\pi}{3} + i\sin\frac{(2k+4)\pi}{3}\right)$, $k = 0, 1, 2$ के लिए

इस प्रकार, a के घनमूल $r, r\omega, r\omega^2$ हैं।

ख) मान लीजिए कि $n = 2m, m \in \mathbb{N}$ है। तब, किसी $b \in \mathbb{R}$ के लिए, $b^n = b^{2m} = (b^2)^m \geq 0$ है।

इस प्रकार, किसी भी $b \in \mathbb{R}$ के लिए, $b^n \neq a$ है। अतः, a का कोई भी वास्तविक n वाँ मूल नहीं हो सकता है।

ग) मान लीजिए कि ध्रुवीय रूप में, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ है। तब, इसके घनमूल हैं :

$r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right)$, $k = 0, 1, 2$ के लिए।

इस प्रकार, यदि $\gamma = r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}\right)$ है, तो अन्य मूल होंगे :

$r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) = \gamma\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \gamma\omega$ तथा

$r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\theta + 4\pi}{3}\right) = \gamma\omega^2$.

इकाई 5

बहुपद समीकरण और उनके हल

संरचना **पृष्ठ संख्या**

5.1	प्रस्तावना	120
	उद्देश्य	121
5.2	रैखिक और द्विघात समीकरण	121
	रैखिक समीकरण	122
	द्विघात समीकरण	123
5.3	बहुपद समीकरण	127
5.4	मूलों और गुणांकों में संबंध	131
5.5	मूलों की प्रकृति	135
	विविक्तकर	135
	चिह्नों का देकार्त नियम	137
5.6	सारांश	138
5.7	हल / उत्तर	140

5.1 प्रस्तावना

अपनी स्कूल की पढ़ाई के दौरान तथा इस पाठ्यक्रम की इकाइयों में, आप $ax+b=0$ या $ax^2+bx+c=0$ जहाँ $a, b, c \in \mathbb{R}$, जैसे समीकरण देख चुके हैं। जैसा कि आप इस इकाई में देखेंगे, ये $\mathbb{R}$ पर बहुपद समीकरणों के उदाहरण हैं। ऐसे समीकरणों के हल ज्ञात करने की प्रक्रियाओं ने सदियों से अनेक गणितज्ञों को बहुत सोचने पर मज़बूर किया है। प्राचीन भारतीय, अरब तथा बैबिलोनिया के गणितज्ञों ने रैखिक और द्विघात समीकरणों को हल करने की विधियों की खोज की। प्राचीन बैबिलोनवासियों तथा यूनानियों ने कुछ त्रिघात समीकरणों, अर्थात् $ax^3+bx^2+cx+d=0, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ जैसे समीकरणों, को हल करने की विधियों की भी खोज की। परंतु, जैसा हम इकाई 4 में बता चुके हैं, उन्होंने सम्मिश्र संख्याओं के बारे में नहीं सोचा था। अतः, उनके लिए अनेक द्विघात और त्रिघात समीकरणों के कोई हल नहीं थे।

यहाँ, भाग 5.2 में, जो पहले आप रैखिक और द्विघात समीकरणों तथा उनके मूलों के बारे में सीख चुके हैं, उसे दोबारा याद करने का अवसर मिलेगा। फिर, भाग 5.3

में, आपको $\mathbb{R}$ पर व्यापक बहुपद समीकरणों, तथा $\mathbb{C}$ में उनके मूलों से हम परिचित कराएंगे।

आगे, भाग 5.4 में, आप बहुपद समीकरणों के मूलों तथा गुणांकों के बीच कुछ रोचक और हो सकता है अप्रत्याशित, संबंध देखेंगे। आप यह भी देखेंगे कि समीकरणों के हल निकालने में किस प्रकार इन संबंधों का प्रयोग किया जा सकता है।

अंत में, भाग 5.5 में, हम बहुपद समीकरणों के मूलों की प्रकृति की चर्चा करेंगे, जैसे कितने मूल वास्तविक हैं, कितने अवास्तविक हो सकते हैं, इत्यादि। यहाँ, आप देकार्त द्वारा नोट किया गया एक बहुत रोचक नियम का अनुप्रयोग भी करेंगे, जो किसी बहुपद समीकरण के वास्तविक मूलों के प्रकारों तथा उसके गुणाकों के चिह्नों के बीच संबंध को दर्शाता है।

इस इकाई में, जब भी हम बहुपद समीकरणों की बात करेंगे, हम सदैव उन्हें एक चर में मानेंगे तथा उनके गुणांकों को $\mathbb{R}$ पर लेंगे, जब तक कि अन्यथा न कहा जाए।

एक गणितज्ञ की स्वाभाविक उत्सुकता के अतिरिक्त, बहुपद समीकरणों का अध्ययन करने के अनेक कारण हैं। इस इकाई में वर्णित की गई सामग्री गणितज्ञों, भौतिकविदों, रसायनविदों तथा सामाजिक वैज्ञानिकों के लिए भी उपयोगी है।

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद, कृपया यह जाँच करें कि आपने निम्नलिखित उद्देश्य प्राप्त कर लिए हैं या नहीं।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद, आपको निम्नलिखित में समर्थ हो जाना चाहिए :

- $\mathbb{R}$ पर किसी भी रैखिक या द्विघात समीकरण को हल करना;
- निरीक्षण विधि से $\mathbb{R}$ पर किसी भी बहुपद समीकरण के $\mathbb{C}$ में एक या अधिक मूल प्राप्त करना;
- $\mathbb{R}$ पर किसी भी बहुपद समीकरण के मूलों और गुणांकों के बीच संबंधों को देना;
- एक त्रिघात या चतुर्घात बहुपद समीकरण के मूलों और गुणांकों के बीच संबंधों का ऐसे समीकरणों को हल करने में उपयोग करना;
- $\mathbb{R}$ पर किसी भी बहुपद समीकरण के मूलों की प्रकृति ज्ञात करने के लिए देकार्त के चिह्नों के नियम, तथा बहुपद समीकरण के विविक्तकर, का प्रयोग करना।

5.2 रैखिक और द्विघात समीकरण

आइए इस इकाई का प्रारंभ करें, यह याद करके कि आप रैखिक और द्विघात समीकरणों के बारे में क्या पढ़ चुके हैं।

5.2.1 रैखिक समीकरण

जैसा कि आप जानते हैं, कि $2x+3, -\pi x, \sqrt{2}x-5$ में से सभी $\mathbb{R}$ पर रैखिक बहुपद हैं। आप यह भी जानते हैं कि $2x+3=0$ या $-\pi x=0$ रैखिक समीकरणों के उदाहरण हैं। अधिक व्यापक रूप में, हमें निम्नलिखित परिभाषाएँ प्राप्त हैं।

परिभाषा : i) $ax+b$ के रूप का व्यंजक, जहाँ $a, b \in \mathbb{R}$ और $a \neq 0$, $\mathbb{R}$ **पर एक चर x में एक रैखिक बहुपद (linear polynomial)** कहलाता है।

ii) $ax+b=0, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ के रूप का समीकरण $\mathbb{R}$ पर एक रैखिक समीकरण (linear equation) कहलाता है।

iii) **रैखिक समीकरण** $ax+b=0$ **का** एक **हल** एक ऐसा सम्मिश्र संख्या α होता है, जिसके लिए $a\alpha+b=0$ है। α को $ax+b=0$ का एक **मूल (root)** भी कहते हैं।

अब, आप एक रैखिक समीकरण को केवल देख कर, अर्थात् उसका निरीक्षण करके ही, उसका हल ज्ञात कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, यदि $\sqrt{2}x-7=0$ समीकरण है, आप जानते हैं कि $x=\frac{7}{\sqrt{2}}$ इसका एक हल है, क्योंकि $\sqrt{2}\left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right)-7=0$ है। क्या इसके कोई और हल भी हैं? आइए देखें। मान लीजिए कि $\alpha \in \mathbb{C}$ ऐसा है कि $\sqrt{2}\alpha-7=0$ है। तब, आप देख सकते हैं कि $\alpha=\frac{7}{\sqrt{2}}$ है, पहले वाला हल है।

इस प्रकार, अधिक व्यापक रूप में, हमें निम्नलिखित प्रमेय प्राप्त है।

प्रमेय 1: रैखिक समीकरण $ax+b=0, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ का एक और केवल एक ही हल होता है, जो $x=\frac{-b}{a}$ है।

पिछली इकाइयों में, तथा स्कूल में भी, आपने अनेक रैखिक समीकरणों को हल किया होगा। आप इकाई 2 से भी याद कर सकते हैं कि एक फलन $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: f(x)=ax+b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ एक **रैखिक फलन** कहलाता है। अतः, एक रैखिक बहुपद से एक रैखिक फलन प्राप्त होता है।

आइए अब दैनिक जीवन में रैखिक समीकरणों के उपयोग के एक उदाहरण पर दृष्टि डालें।

उदाहरण 1: मान लीजिए कि मैं दो भूमिखंडों (plots) को Rs. 1,20,000 में खरीदती हूँ तथा फिर उन्हें बेच देती हूँ। साथ ही, यह भी मान लीजिए कि मुझे पहले भूखंड पर 15% का लाभ मिला है तथा दूसरे भूखंड पर 10% की हानि उठाई है। यदि मेरा कुल लाभ Rs. 5500 है, तो मैंने प्रत्येक भूखंड को कितने में ख़रीदा था?

हल : मान लीजिए कि पहले भूखंड की लागत Rs. x है। तब, दूसरे भूखंड की लागत Rs. $(1,20,000-x)$ है। इस प्रकार, मेरा लाभ $\frac{15}{100}x$ है तथा मेरी हानि $\frac{10}{100}(1,20,000-x)$ है।

$$\therefore \frac{15}{100}x-\frac{10}{100}(1,20,000-x)=5500$$

अर्थात्, $25x - 17,50,000 = 0$

अर्थात्, $x = 70,000.$

इस प्रकार, पहले भूखंड का मूल्य Rs. 70,000 था तथा दूसरे भूखंड का मूल्य Rs. 50,000 था।

***

कभी-कभी आप ऐसे समीकरण पाते हैं जो रैखिक प्रतीत नहीं होते, परंतु सरल करने के बाद वे रैखिक बन जाते हैं। आइए एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 2: $\frac{3p-1}{3}-\frac{2p}{p-1}=p$ को हल कीजिए। (यहाँ हमें यह मानना चाहिए कि $p\neq 1$ है।)

हल : पहली दृष्टि में, p में यह समीकरण रैखिक प्रतीत नहीं होती। परंतु वज्र गुणन द्वारा हम निम्नलिखित तुल्य समीकरण प्राप्त करते हैं :

$(3p-1)(p-1)-3(2p)=3(p-1)p.$

इसको सरल करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$3p^2-4p+1-6p=3p^2-3p$, अर्थात्, $7p-1=0.$

इस समीकरण का हल $\frac{1}{7}$ है। इसलिए यह उस समीकरण का हल है जिससे हमने शुरू किया था।

***

अब, आप निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास करें।

E1) इंगित चर के लिए, निम्नलिखित समीकरणों में से प्रत्येक को हल कीजिए। यह मान कर चलें कि सभी हर शून्येतर हैं।

i) चर x के लिए $J\left(\frac{x}{k}+a\right)=x$, जहाँ J, k और a अचर हैं, $J\neq k.$

ii) R के लिए $\frac{1}{R}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$, r_1 और r_2 को अचर रखते हुए, $r_1+r_2\neq 0.$

iii) F के लिए $C=\frac{5}{9}(F-32)$, C को अचर रखते हुए।

E2) एक विद्यार्थी अपने घर से अध्ययन केन्द्र तक साइकिल पर जाने में 20 मिनट का समय लेती है। वापिसी की यात्रा चढ़ाई वाली है तथा उसे इसमें आधा घंटा लगता है। यदि उसकी चाल वापिसी यात्रा में 8 कि. मी. प्रति घंटा कम है, तो वह अध्ययन केन्द्र से कितनी दूरी पर रहती है?

अब, जब हम रैखिक समीकरणों को देख चुके हैं, आइए द्विघात समीकरणों पर विचार करें।

5.2.2 द्विघात समीकरण

पछली इकाइयों में आप अनेक द्विघात समीकरणों को देख चुके हैं। इनमें से एक $x^2=5$ है, यानी $x^2-5=0.$ एक अन्य समीकरण है वह जिसे कार्दानो ने हल करने का प्रयास किया था, अर्थात् $x^2-10x+40=0$ (देखिए भाग 4.1) आप ऐसे अनेकों समीकरण सोच सकते हैं। आइए इस पद को व्यापक रूप में परिभाषित करें।

परिभाषाएँ : i) ax^2+bx+c, जहाँ $a, b, c\in\mathbb{R}, a\neq 0$, के रूप का व्यंजक एक चर x में $\mathbb{R}$ पर एक **द्विघात बहुपद (quadratic polynomial)** कहलाता है।

ii) एक द्विघात बहुपद को शून्य के बराबर करने पर, हमें मानक रूप में $\mathbb{R}$ पर एक **द्विघात समीकरण (quadratic equation)** प्राप्त हो जाता है।

iii) द्विघाती समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का **हल** एक ऐसी सम्मिश्र संख्या α है जिससे कि $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ हो।

अब आप जानते हैं कि $x^2 - 5 = 0$ के $\mathbb{C}$ में दो हल, अर्थात् $x = \sqrt{5}$ और $x = -\sqrt{5}$, हैं। ये दिए हुए समीकरण के **मूल** कहलाते हैं।

द्विघात समीकरणों को हल करने की विभिन्न विधियाँ बैबिलोनिया के समय (2000 ई.पू.) से ही ज्ञात थीं। ब्रहमगुप्त ने भी लगभग सन् 628 में द्विघात समीकरणों को हल करने का एक नियम दिया था। जैसा कि आपको याद होगा, वह विधि जो किसी भी द्विघात समीकरण के लिए प्रयोग की जा सकती है, 'वर्ग पूर्ण करने' की विधि है। इसका उपयोग करके, हम द्विघात सूत्र प्राप्त करते हैं, जो नीचे खाने में दिया है।

द्विघात सूत्र : द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, जहाँ $a, b, c \in \mathbb{R}$ और $a \neq 0$, के दो हल हैं: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

व्यंजक $b^2 - 4ac$ समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का **विविक्तकर (discriminant)** कहलाता है। ध्यान दीजिए कि यह सूत्र हमें बताता है कि द्विघात समीकरण के दो मूल होते हैं। ये मूल बराबर हो सकते हैं, या भिन्न-भिन्न हो सकते हैं; ये वास्तविक, या सम्मिश्र हो सकते हैं।

परंपरा : हम $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ में स्थित मूल को **सम्मिश्र मूल** कहते हैं। ध्यान दीजिए कि ऐसा मूल $a + ib, a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ के रूप का होता है।

आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें, जो द्विघात समीकरण के मूलों की प्रकृति की विभिन्न संभावनाओं को दर्शाते हैं।

उदाहरण 3: निम्नलिखित द्विघात समीकरणों को हल कीजिए :

i) $x^2 - 4x + 1 = 0$,

ii) $4x^2 + 25 = 20x$,

iii) $x^2 - 10x + 40 = 0$.

हल : i) यह समीकरण मानक रूप में है। इसलिए, हम सीधे ही द्विघात सूत्र का प्रयोग कर सकते हैं। यहाँ $a = 1, b = -4$ और $c = 1$ है। इन मानों को द्विघात सूत्र में प्रतिस्थापित करने पर, हमें समीकरण के निम्नलिखित दो मूल प्राप्त होते हैं :

$$x = \frac{-(-4) + \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = 2 + \sqrt{3}, \text{ तथा}$$

$$x = \frac{-4(-4) - \sqrt{(4)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = 2 - \sqrt{3}.$$

इस प्रकार, दो हल $2 + \sqrt{3}$ और $2 - \sqrt{3}$ हैं, जो $\mathbb{R}$ के दो अलग अवयव हैं। ध्यान दीजिए कि इस स्थिति में विविक्तकर धनात्मक है।

ii) इस स्थिति में, आइए पहले समीकरण को मानक रूप में लिखें। यह रूप है :

$4x^2 - 20x + 25 = 0$

अब, द्विघात सूत्र में, $a = 4, b = -20$ और $c = 25$ रखने पर, हम ज्ञात करते हैं कि

$x = \frac{20 + \sqrt{400 - 4(4)(25)}}{2(4)} = \frac{20 + \sqrt{0}}{8} = \frac{5}{2}$, तथा $x = \frac{20 - \sqrt{400 - 4(4)(25)}}{2(4)} = \frac{5}{2}$.

यहाँ, हम देखते हैं कि दोनों मूल संपाती हैं और वास्तविक हैं। ध्यान दीजिए कि इस स्थिति में विविक्तकर 0 है।

iii) द्विघात सूत्र का प्रयोग करने पर, हम पाते हैं कि हल

$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 160}}{2} = 5 \pm \frac{\sqrt{-60}}{2} = 5 \pm i\sqrt{15}$ हैं।

इस प्रकार, इस स्थिति में, हमें दो अलग सम्मिश्र मूल $5 + i\sqrt{15}$ और $5 - i\sqrt{15}$ प्राप्त होते हैं। ध्यान दीजिए कि इस स्थिति में विविक्तकर ऋणात्मक है।

***

उपरोक्त उदाहरण में क्या आप द्विघात समीकरण के मूलों की प्रकृति का उसके विविक्तकर के मानों से कोई संबंध देखते हैं? ऐसा संबंध है, जिसका कथन हम अब दे रहे हैं।

प्रमेय 2: समीकरण $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$ के $\mathbb{C}$ में दो मूल होते हैं।

i) ये वास्तविक और अलग-अलग हैं, यदि $b^2 - 4ac > 0$;

ii) ये वास्तविक और बराबर हैं, यदि $b^2 - 4ac = 0$;

iii) ये सम्मिश्र और अलग-अलग हैं, यदि $b^2 - 4ac < 0$.

अब आइए कुछ महत्त्वपूर्ण टिप्पणियों पर विचार करें, जो द्विघात समीकरणों को हल करते समय आपको मदद करेंगी।

टिप्पणी 1: α और β द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल होते हैं यदि और केवल यदि $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ हो।

इस प्रकार, $\alpha \in \mathbb{C}$ समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का एक मूल है यदि और केवल यदि $(x - \alpha) | (ax^2 + bx + c)$

टिप्पणी 2: द्विघात सूत्र से आप देख सकते हैं कि यदि $b^2 - 4ac < 0$, तो द्विघात समीकरण के दो सम्मिश्र मूल हैं, जो परस्पर संयुग्मी हैं। **इस प्रकार, यदि $b^2 - 4ac < 0$ है तथा एक मूल $\alpha + i\beta$ है, तो दूसरा मूल $\alpha - i\beta$ होगा।**

टिप्पणी 3: कभी-कभी एक द्विघात समीकरण को केवल निरीक्षण से, बिना द्विघात सूत्र का प्रयोग किए, भी हल किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, समीकरण $x^2 = 9$ के स्पष्टतः दो मूल, 3 और –3 हैं। इसी प्रकार, समीकरण $(x - 1)^2 = 0$ के दो संपाती मूल हैं, दोनों 1 के बराबर हैं (देखिए टिप्पणी 1)।

आइए अब एक समीकरण पर विचार करें, जो द्विघाती नहीं है, परंतु इसके हलों को संबंधित द्विघात समीकरणों से प्राप्त किया जा सकता है।

उदाहरण 4: $x = \sqrt{15-2x}$ को हल कीजिए।

हल : $x = \sqrt{15-2x}$ एक बहुपद समीकरण नहीं है। परंतु यदि हम दोनों पक्षों का वर्ग लें, तो हम बहुपद समीकरण $x^2 = 15-2x$ प्राप्त करते हैं।

अब, $x = \sqrt{15-2x}$ का कोई भी मूल $x^2 = 15-2x$ का भी एक मूल होगा। (परंतु इसका विलोम सत्य होना आवश्यक नहीं है, क्योंकि $x^2 = 15-2x$ का अर्थ $x = -\sqrt{15-2x}$ भी हो सकता है।) अतः, हम $x^2 = 15-2x$ के दोनों मूलों को प्राप्त करेंगे तथा देखेंगे कि इनमें से कौन सा $x = \sqrt{15-2x}$ को संतुष्ट करता है।

अब, द्विघात समीकरण $x^2 = 15-2x$ के मूल $x = -5$ और $x = 3$ हैं। हमें इन मानों को दिए गए समीकरण में यह देखने के लिए अवश्य रखना चाहिए कि ये उस समीकरण को संतुष्ट करते हैं कि नहीं।

अब, $x = -5$ के लिए, $x - \sqrt{15-2x} = (-5) - \sqrt{15+10} = (-5) - 5 = -10 \neq 0.$

अतः, $x = -5$ दिए हुए समीकरण का हल नहीं है। परंतु यह $x^2 = 15-2x$ का एक हल है। हम ऐसे मूल को **अतिरिक्त हल (extraneous solution)** कहते हैं।

आगे, जब हम दिए हुए समीकरण में $x = 3$ रखते हैं, तब क्या होता है? हमें $3 = \sqrt{15-6}$, अर्थात, $3 = 3$ प्राप्त होता है, जो सत्य है। इस प्रकार, $x = 3$ दिए हुए समीकरण का हल है।

***

अभी तक हमने जो भी कहा है, उसका इस्तेमाल करते हुए, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E3) $\mathbb{R}$ पर द्विघात समीकरण के सम्मिश्र मूल हो सकते हैं, जबकि $\mathbb{R}$ पर रैखिक समीकरण का केवल वास्तविक मूल हो सकता है। सत्य या असत्य? क्यों?

E4) निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए :

i) $x^2 + 5 = 0,$

ii) $(x+9)(x-1) = 0,$

iii) $x^2 - \sqrt{5}x = 1.$

E5) k के किन मानों के लिए, समीकरण $kx^2 + (2k+6)x + 16 = 0$ के संपाती मूल होंगे?

E6) यदि α और β समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल हैं, तो दर्शाइए कि $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ और $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ है।

E7) मान लीजिए कि $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ऐसे हैं कि $\alpha + \beta = p \in \mathbb{R}$ तथा $\alpha\beta = q \in \mathbb{R}$. दर्शाइए कि $x^2 - px + q = 0$ के मूल α और β हैं।

E8) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$ को एक द्विघात समीकरण में बदलिए और इस तरह, इसे हल कीजिए।

E9) अमीना अल्का से 1 कि.मी. प्रति घंटा तेज़ पैदल चलती है। दोनों अपने गाँव से एक पास के पुस्तकालय तक पैदल चल कर गई थी, जो 24 कि.मी. की दूरी पर है। अल्का ने अमीना से 2 घंटे ज़्यादा समय लिया। अल्का की औसत रफ़्तार क्या थी?

क्या आपने इस ओर ध्यान दिया कि E7, E6 का विलोम है? वास्तव में, आप इस संबंध को अगले भाग में स्पष्ट रूप से देखेंगे। इस भाग में, हमारा उद्देश्य था कि आपको रैखिक और द्विघात समीकरणों को हल करने की विधियों को पुनः याद करने का मौक़ा मिले। आइए अब व्यापक रूप में बहुपद समीकरणों की चर्चा करें।

5.3 बहुपद समीकरण

आप $\mathbb{R}$ में गुणांकों वाले एक चर में रैखिक और द्विघात बहुपदों के बारे में अध्ययन पहले ही कर चुके हैं। आप $2x^3+5x^2$ या $\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{9}x^3+\pi x^2+\sqrt{2}$ के प्रकार के व्यंजकों को भी देख चुके हैं। ये उसके उदाहरण हैं, जिसे हम अब परिभाषित करने जा रहे हैं।

परिभाषा : $a_0x^0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ के रूप के व्यंजक, जहाँ $n\in\mathbb{N}$ और $a_i\in\mathbb{R}\ \forall\ i=1,\ldots,n$, चर x में $\mathbb{R}$ पर एक **बहुपद (polynomial)** कहलाता है। $a_0, a_1, \ldots, a_n$ इस बहुपद के **गुणांक (coefficient)** हैं।

आगे, यदि $a_n\neq 0$ है, तो हम कहते हैं कि इस बहुपद की **घात (degree)** n है, तथा इसका **अग्रग पद (leading term)** a_nx^n है।

हम प्रायः x में बहुपदों को $f(x), g(x)$, इत्यादि से व्यक्त करते हैं। यदि चर x को समझ लिया जाता है, तो हम $f(x)$ के स्थान पर कई बार केवल f लिखते हैं। हम बहुपद $f(x)$ की घात को **deg f(x)** या **deg f** द्वारा व्यक्त करते हैं।

बहुपदों की चर्चा करते समय, हम निम्नलिखित परंपराओं के अनुसार चलेंगे।

परंपराएँ : हम

i) x^0 को 1 लिखेंगे, और इसलिए हम a_0x^0 के लिए a_0 लिखेंगे;

ii) x^1 को x लिखेंगे, और इसलिए a_1x^1 को a_1x लिखेंगे;

iii) $1.x^m$ के स्थान पर x^m लिखेंगे (अर्थात्, जब $a_m=1$ है);

iv) $0.x^m$ के प्रकार के पदों को छोड़ देंगे, यानी नहीं लिखेंगे;

v) **शून्य बहुपद 0 की घात को $-\infty$ परिभाषित करेंगे।**

इस प्रकार, बहुपद $2+3x^2-x^3$ वास्तव में $2x^0+0.x^1+3x^2+(-1)x^3$ है। ध्यान दीजिए कि $f(x)$ की घात $f(x)$ में प्रकट होने वाली x की उच्चतम घात है। उदाहरणार्थ,

i) $3x+6x^2+\frac{5}{2}x^3$ घात 3 वाला बहुपद है,

ii) x^5 घात 5 वाला बहुपद है, तथा

iii) 2 घात 0 वाला बहुपद है, क्योंकि $2=2x^0$.

$\mathbb{R}$ का कोई भी शून्येतर अवयव $\mathbb{R}$ पर घात 0 वाला बहुपद है।

आपके सम्मुख प्रायः घातों 3 और 4 वाले बहुपद आएँगे। इनके विशिष्ट नाम हैं।

परिभाषा : i) घात 3 वाला बहुपद एक **त्रिघात (cubic) बहुपद** कहलाता है।

ii) घात 4 वाला बहुपद एक **चतुर्घात (quartic** या **hiquadratic)** बहुपद कहलाता है।

बहुपद की घात के कुछ गुण हैं, जिनका कथन हम अब देने जा रहे हैं।

प्रमेय 3: यदि $\mathbb{R}$ पर $f(x)$ और $g(x)$ दो बहुपद हैं, तो

i) $f(x) \pm g(x)$, $\mathbb{R}$ पर एक बहुपद है, तथा
$\deg(f(x) \pm g(x)) \leq \max(\deg f(x), \deg g(x))$.

ii) $f(x)g(x)$, $\mathbb{R}$ पर एक बहुपद है, तथा
$\deg(f(x).g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$.

इस पूरी इकाई में, हम $\mathbb{R}$ पर बहुपदों की बात करते आए हैं। इसी प्रवाह में, हम कहते हैं कि $f(x)$, $\mathbb{C}$ **पर एक बहुपद है**, यदि इसके गुणांक सम्मिश्र संख्याएँ हैं, तथा **f(x), $\mathbb{Q}$ पर एक बहुपद** है, यदि इसके गुणांक परिमेय संख्याएँ हैं। निस्संदेह, $\mathbb{R}$ पर प्रत्येक बहुपद $\mathbb{C}$ पर एक बहुपद है। उदाहरणार्थ, $2x + 3$ और $x^2 + 3$, $\mathbb{Q}$ (और ही $\mathbb{R}$, और $\mathbb{C}$) पर बहुपद हैं। दूसरी ओर, $\sqrt{3}$, $\mathbb{R}$ पर (परंतु $\mathbb{Q}$ पर नहीं) एक बहुपद है। इस पाठ्यक्रम में, हम **लगभग सदैव $\mathbb{R}$ पर बहुपदों के साथ ही कार्य करेंगे**।

आइए अब एक संबंधित पद को परिभाषित करें।

परिभाषा : यदि हम घात n के बहुपद को शून्य के बराबर रख दें, तो हमें **घात n वाला एक बहुपद समीकरण (polynomial equation)** या nवें घात वाला समीकरण, प्राप्त होता है।

उदाहरणार्थ,

i) $2x + 3 = 0$ घात 1 वाला बहुपद समीकरण, अर्थात्, एक रैखिक समीकरण है।

ii) $3x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$ घात 2 वाला बहुपद समीकरण, अर्थात्, द्विघात समीकरण है।

iii) $1 + \sqrt{5}x^3 = 0$ घात 3 वाला बहुपद समीकरण, अर्थात्, एक त्रिघात समीकरण है।

परंतु, $(\sin x)^4 + 1 = 0$ और $x^3 + \sqrt{x} = 0$ बहुपद समीकरण नहीं हैं, क्योंकि इन्हें $f(x) = 0$ के रूप में नहीं लिखा जा सकता है, जहाँ f एक बहुपद है।

अब, यदि $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ एक बहुपद है, तथा $a \in \mathbb{C}$ है, तो हम x के स्थान पर a लिख कर $f(a)$ प्राप्त कर सकते हैं, जो **$x = a$ पर बहुपद का मान** है। इस प्रकार, $f(a) = a_0 + a_1a + a_2a^2 + \cdots + a_na^n$.

उदाहरणार्थ, यदि $f(x) = 2x + 3$, तो $f(1) = 2.1 + 3 = 5$, $f(i) = 2i + 3$ तथा

$$f\left(\frac{-3}{2}\right) = 2\left(\frac{-3}{2}\right) + 3 = 0.$$

क्योंकि $f\left(\frac{-3}{2}\right) = 0$, तो आप जानते हैं कि $\frac{-3}{2}$, $f(x)$ का एक मूल कहलाता है।

अब, जैसा कि आप द्विघात समीकरणों की स्थिति में देख चुके हैं, बहुपद समीकरण के अनेक मूल हो सकते हैं।

यहाँ, अब कुछ संबंधित परिभाषाएँ दी जा रही हैं।

परिभाषाएँ : i) मान लीजिए कि $\mathbb{R}$ पर $f(x)$ एक शून्येतर बहुपद है। $\alpha \in \mathbb{C}$ को $f(x)$ का एक **मूल** (या **शून्यक**) कहा जाता है, यदि $f(\alpha) = 0$ हो। इस स्थिति में, हम यह भी कहते हैं कि α समीकरण $f(x) = 0$ का एक **हल** (या एक **मूल**) है।

ii) समीकरण के हलों के समुच्चय को उसका **हल समुच्चय** कहते हैं।

अतः, उदाहरणार्थ, $x^2 + 1 = 0$ का हल समुच्चय $\{i, -i\}$ है, तथा $x^3 - 3x = 0$ का हल समुच्चय $\{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ है।

ऐसी अनेक स्थितियाँ हैं, जब त्रिघात और चतुर्घात समीकरणों को हल करने की आवश्यकता पड़ती है। उदाहरणार्थ, सामाजिक, भौतिक तथा जैविकी विज्ञान की अनेक समस्याएँ अंत में 3 या 4 कोटि के वर्ग आव्यूह के **आइगेनमानों** को प्राप्त करने तक की रह जाती हैं (जिसके बारे में आप रैखिक बीजगणित के पाठ्यक्रम में अध्ययन कर सकते हैं)। तथा इसके लिए आपको यह जानने की आवश्यकता होती है कि ऐसे समीकरणों के हल किस प्रकार प्राप्त किए जाएँ।

बहुपद समीकरण के हलों को प्राप्त करने के लिए, हमें बहुपद समीकरणों के मूलों के बारे में कुछ परिणामों की आवश्यकता है। आप इन्हें रैखिक और द्विघात समीकरणों के संदर्भ में पहले ही देख चुके हैं, तथा इनका प्रयोग कर चुके हैं। हम यहाँ इन्हें, बिना उपपत्ति के, प्रस्तुत कर रहे हैं।

प्रमेय 4: घात n के बहुपद समीकरण $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0$, जहाँ $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ तथा $a_n \neq 0$, के $\mathbb{C}$ में n मूल होते हैं। आगे, यदि इस समीकरण के n मूल $x_1, \ldots, x_n$ हैं, तो $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$.

[ध्यान दीजिए कि मूलों का भिन्न-भिन्न होना आवश्यक नहीं है। उदाहरणार्थ, $1 + 2x + x^2 = (x + 1)^2$]

इस प्रमेय को यहाँ हम सिद्ध नहीं करेंगे, लेकिन हम एक बहुत महत्त्वपूर्ण परिणाम का कथन देंगे जिसका उपयोग इसकी उपपत्ति में किया जाता है। यह पूर्णांकों के लिए विभाजन कलन विधि (division algorithm) के समान ही है, जिसे आपने स्कूल में सीखा था।

प्रमेय 5 (विभाजन कलन विधि) : $\mathbb{R}$ पर बहुपदों $f(x)$ और $g(x)$ दिए रहने पर, जहाँ $g(x) \neq 0$, $\exists$ $\mathbb{R}$ पर अद्वितीय बहुपद $q(x)$ और $r(x)$ जिनसे कि

$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, तथा $\deg r(x) < \deg g(x)$ है।

अब, यदि आप टिप्पणी 2 पर वापिस जाएँ, तो आप पाते हैं कि यदि $b^2 - 4ac < 0$ है, तो $ax^2 + bx + c = 0$ के सम्मिश्र मूल $\alpha + i\beta$ और $\alpha - i\beta$ हैं, अर्थात्, ये संयुग्मी युग्मों के रूप में होते हैं। यह केवल द्विघात समीकरणों के लिए ही सत्य नहीं है, जैसा कि आप अगले प्रमेय से देख सकते हैं।

प्रमेय 6: यदि $\mathbb{R}$ पर किसी बहुपद समीकरण के सम्मिश्र मूल हैं, तो वे संयुग्मी युग्मों के रूप में होते हैं। वास्तव में, यदि एक मूल $a + ib$ है, तो $a - ib$ भी एक मूल अवश्य होगा।

उपपत्ति : मान लीजिए कि $\mathbb{R}$ पर $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0$ एक बहुपद समीकरण है तथा $a + ib$ इस समीकरण का एक मूल है। तब, परिभाषा से,

$a_0 + a_1(a + ib) + \cdots + a_n(a + ib)^n = 0.$

समीकरण के दोनों पक्षों पर संयुग्मियों को लेने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$a_0 + a_1(a - ib) + \cdots + a_n(a - ib)^n = 0.$

इसका मतलब है कि $a - ib$ भी बहुपद समीकरण का एक मूल है। ■

यहाँ, इस प्रमेय से संबंधित एक महत्त्वपूर्ण बात है।

टिप्पणी 4: ध्यान दीजिए कि प्रमेय 6 यह नहीं कहता कि $f(x) = 0$ का एक सम्मिश्र मूल अवश्य ही होना चाहिए। यह केवल यह कहता है कि **यदि इसका एक सम्मिश्र मूल है**, तो उसका संयुग्मी भी एक मूल होगा। उदाहरणार्थ, $x^2 - 1 = 0$ के कोई सम्मिश्र मूल नहीं हैं, परंतु $x^2 + 1 = 0$ के दो सम्मिश्र मूल i, और उसका संयुग्मी $-i$, हैं।

अतः, त्रिघात समीकरणों के संदर्भ में प्रमेय 4 और 6 क्या बताते हैं? $\mathbb{R}$ पर व्यापक त्रिघात समीकरण पर विचार कीजिए। ये है :

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0.$

प्रमेय 4 से हम जानते हैं कि इस समीकरण के $\mathbb{C}$ में 3 मूल हैं। प्रमेय 6 से हम जानते हैं कि या तो तीनों मूल वास्तविक हैं, या एक मूल वास्तविक है और दो सम्मिश्र हैं।

आगे, चतुर्घात समीकरणों के संदर्भ में प्रमेय 4 और 6 क्या बताते हैं? प्रमेय 4 हमें बताता है कि एक चतुर्घात समीकरण के 4 मूल होते हैं, जो वास्तविक या सम्मिश्र हो सकते हैं। प्रमेय 6 द्वारा संभावनाएँ हैं कि

i) सभी मूल वास्तविक हैं, या

ii) दो वास्तविक हैं तथा दो परस्पर सम्मिश्र संयुग्मी हैं, या

iii) चारों मूल सम्मिश्र संयुग्मियों के दो युग्मों के रूप में हैं, अर्थात् $a + ib, a - ib, c + id$ और $c - i\,d$, किन्हीं $a, b, c, d \in \mathbb{R}, b, d \neq 0$ के लिए।

आइए एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 5: $2x^4 + x^2 + 1 = 0$ के मूल प्राप्त कीजिए।

हल: $2x^4 + x^2 + 1 = 0$ को $2y^2 + y + 1 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ $y = x^2$.

तब, इसे y के लिए हल करने पर, हम $y = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}$, अर्थात् $x^2 = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}$ प्राप्त करते हैं, जो $\mathbb{C}$ पर दो बहुपद समीकरण हैं। द मुआव्र प्रमेय के अनुप्रयोग से, आप देख सकते हैं कि

$x^2 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{4}$ और $x^2 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{4}$ के मूल क्रमशः

$z_1 = 2^{-1/4}\left(\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}\right), z_2 = 2^{-1/4}\left(-\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$ तथा

$z_3 = 2^{1/4}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right), z_4 = 2^{-1/4}\left(-\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}\right)$ हैं, जहाँ $\theta = \tan^{-1}\sqrt{7}$.

ध्यान दीजिए कि z_1 और z_3 संयुग्मी युग्म हैं, तथा z_2 और z_4 भी संयुग्मी युग्म हैं।

***

अब आप कुछ संबंधित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E10) पुष्टि के साथ $\mathbb{R}$ पर एक ऐसा समीकरण का उदाहरण दीजिए जो बहुपद समीकरण **नहीं** है।

E11) त्रिघात समीकरण $2x^3 - \sqrt{5}x^2 = 0$ का हल समुच्चय प्राप्त कीजिए।

E12) निम्नलिखित के हल समुच्चय प्राप्त कीजिए :

i) $x^7 - 1 = 0$;

ii) $5 = x^7$.

E13) $x^5 + 4x^3 = 5x$ के सभी मूल प्राप्त कीजिए।

अभी तक आप समीकरणों के हलों को केवल निरीक्षण से, या द्विघात सूत्र से, या द मुआव्र प्रमेय के प्रयोग से प्राप्त कर रहे थे। आइए कुछ नियमों पर दृष्टि डालें जो हमें हलों को निर्धारित करने में सहायता करते हैं।

5.4 मूलों और गुणांकों में संबंध

इस भाग में हम सर्वप्रथम यह देखेंगे कि E6 और E7 क्या कहते हैं। वहाँ हमने देखा था कि एक द्विघात समीकरण के मूल किस प्रकार उसके गुणांकों से निकट रूप से जुड़े हुए थे। वास्तव में, यही एक त्रिघात समीकरण के लिए भी सत्य है। इसको दर्शाने के लिए, हमें पहले एक परिभाषा की आवश्यकता है।

परिभाषाः दो बहुपद $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ तथा $b_0 + b_1x \ldots + b_mx^m$ **बराबर** कहलाते हैं, यदि $n = m$ और $a_i = b_i \; \forall \; i = 0, 1, \ldots, n$.

इस प्रकार, दो बहुपद तब बराबर होते हैं, जब उनकी घात एक ही हो तथा उनके संगत गुणांक बराबर हों। इस प्रकार, $2x^3 + 3 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ यदि और केवल यदि $a = 2, b = 0, c = 0, d = 3$ हो।

इस परिभाषा का प्रयोग करते हुए, आप क्यों नहीं अब नीचे दिए प्रश्नों में दिए संबंधों को सिद्ध करने का प्रयास करते?

E14) दर्शाइए कि α, β और γ एक त्रिघात समीकरण $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0$, के मूल होते हैं यदि और केवल यदि

i) $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$;

ii) $\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = \frac{c}{a}$;

iii) $\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$.

[**संकेतः** ध्यान दीजिए कि प्रमेय 4 से दिया हुआ त्रिघात समीकरण $a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0$ के तुल्य है।]

E14 हमें बताता है कि एक त्रिघात समीकरण के लिए,

i) मूलों का योग $= -\frac{x^2 \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

ii) दो-दो करके मूलों के गुणनफलों का योग $= \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

iii) मूलों का गुणनफल $= -\frac{\text{अचर पद}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

आइए अब 'रचित' मूलों वाले समीकरणों को बनाने के लिए, इन तीनों संबंधों का प्रयोग करें।

उदाहरण 6: यदि α, β, γ समीकरण $x^3 - 7x^2 + x - 5 = 0$ के मूल हैं, तो वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \alpha+\gamma$ हैं।

हल : E14 में दिए हुए के संबंधों से, हम जानते हैं कि

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma &= 7\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma &= 1\\ \alpha\beta\gamma &= 5\end{aligned}\right] \quad \ldots (1)$$

इसलिए, $(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\alpha+\gamma) = 2(\alpha+\beta+\gamma) = 14$ ... (2)

साथ ही, $\alpha+\beta = 7-\gamma, (\beta+\gamma) = 7-\alpha$ और $\gamma+\alpha = 7-\beta$ है, जिससे

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)+(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta)$

$= \{49-7(\gamma+\alpha)+\gamma\alpha\}+\{49-7(\alpha+\beta)+\alpha\beta\}+\{49-7(\beta+\gamma)+\beta\gamma\}$

$= 147 - 98 + 1$, (1) और (2) के प्रयोग से

$= 50$, तथा ... (3)

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma) = (7-\gamma)(7-\beta)(7-\alpha)$ ... (4)

(4) के दाएँ पक्ष के व्यंजक का मान निकालने के लिए, हम (1) का प्रयोग कर सकते हैं या इस तथ्य का उपयोग कर सकते हैं कि

$x^3 - 7x^2 + x - 5 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$.

अतः, $x = 7$ रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$7^3 - 7.7^2 + 7 - 5 = (7-\alpha)(7-\beta)(7-\gamma)$, अर्थात्, $(7-\alpha)(7-\beta)(7-\gamma) = 2$.

इसलिए (4) से प्राप्त होता है: $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma) = 2$ ... (5)

अब, E14, (2), (3) और (5) हमें वाँछित समीकरण देते हैं, जो $x^3 - 14x^2 + 50x - 2 = 0$ है।

***

अब, क्यों नहीं आप निम्नलिखित प्रश्नों को करने का प्रयास करते?

E15) समीकरण $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ के मूलों के घनों का योग ज्ञात कीजिए। इस तरह, मूलों की चतुर्थ घातों का योग ज्ञात कीजिए।

E16) मान लीजिए कि $a, b, c \in \mathbb{R}$, $S_1 = a+b+c$, $S_2 = ab+bc+ca$ तथा $S_3 = abc$ है। दर्शाइए कि a, b, c धनात्मक हैं यदि और केवल यदि S_1, S_2, S_3 धनात्मक हैं।

E17) $a \in \mathbb{R}$ को ज्ञात कीजिए, यदि आपको यह ज्ञात है कि $x^3 - 3x^2 + ax - 1 = 0$ के तीन धनात्मक हल हैं। साथ ही, समीकरण को हल कीजिए।

अब, जैसा कि द्विघात और त्रिघात समीकरणों की स्थिति में था, यदि r_1, r_2, r_3, r_4 एक चतुर्घात समीकरण $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ के मूल हैं, तो इनके संबंध को हम इस

समीकरण के गुणांकों के साथ ज्ञात कर सकते हैं। आइए देखें कि ये क्या हैं। हम जानते हैं कि

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)$$

$$\Leftrightarrow x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)$$

$$= x^4 - (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)x^3 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4)x^2$$

$$-(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4)x + r_1r_2r_3r_4 .$$

x^3, x^2, x^1 और x^0 के गुणांकों की तुलना करने पर, हम देखते हैं कि

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\frac{b}{a},$$

$$r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = \frac{c}{a},$$

$$r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = -\frac{d}{a}, \text{ तथा}$$

$$r_1r_2r_3r_3 = \frac{c}{a}.$$

इसका अर्थ है कि

मूलों का योग $= -\dfrac{x^3 \text{ का गुणांक}}{x^4 \text{ का गुणांक}}$,

दो-दो करके मूलों के गुणनफलों का योग $= \dfrac{x^2 \text{ का गुणांक}}{x^4 \text{ का गुणांक}}$,

तीन-तीन करके मूलों के गुणनफलों का योग $= -\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{x^4 \text{ का गुणांक}}$,

मूलों का गुणनफल $= \dfrac{x^0 \text{ का गुणांक}}{x^4 \text{ का गुणांक}} = \dfrac{\text{अचर पद}}{x^4 \text{ का गुणांक}}$.



चित्र 1: फ्रांसोआ विऐत (1504-1603)

ये चारों समीकरण निम्नलिखित परिणाम की एक विशेष स्थिति है, जो एक बहुपद समीकरण के मूलों का उसके गुणांकों के साथ संबंध बताता है। इस प्रमेय का श्रेय गणितज्ञ वीऐत (Viète) को जाता है।

प्रमेय 7: मान लीजिए कि $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ समीकरण $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, $a_i \in \mathbb{R}\ \forall\, i = 0, 1, \ldots, n$, $a_0 \neq 0$, के n मूल हैं। तब,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$\sum_{\substack{i,\, j=1 \\ i<j}}^{n} \alpha_i\alpha_j = \frac{a_2}{a_0}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_t}^{n} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_t} = (-1)^t\frac{a_t}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_i = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}$$

$\sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$

$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1A_2\cdots A_n$

E6, E7 और E14 में आप पहले ही देख चुके हैं कि यह परिणाम $n = 2$ और $n = 3$ के लिए सत्य है। प्रमेय 7 अनेक प्रकार से बहुत उपयोगी है। आइए $n = 4$ की स्थिति में इसके एक अनुप्रयोग पर विचार करें।

उदाहरण 7: यदि समीकरण $4x^4 - 24x^3 + 31x^2 + 6x - 8 = 0$ के दो मूलों का योग शून्य है, तो इस समीकरण के सभी मूलों को ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि मूल a, b, c, d हैं, जहाँ $a + b = 0$ है।

तब, $a + b + c + d = \frac{24}{4} = 6.$

$\therefore c + d = 6$ ... (6)

साथ ही, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = (a + b)(c + d) + ab + cd = \frac{31}{4}$

$\therefore ab + cd = \frac{31}{4}.$ ... (7)

आगे, $(a + b)cd + ab(c + d) = acd + bcd + abc + abd = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$

$\therefore (6) \Rightarrow ab = -\frac{1}{4}$ ... (8)

अंत में, $abcd = \frac{-8}{4} = -2$

$\therefore (8) \Rightarrow cd = 8.$ ... (9)

अब, E7, (6) और (9) हमें बताते हैं कि c और d समीकरण $x^2 - 6x + 8 = 0$ के मूल हैं। इस प्रकार, द्विघात सूत्र से $c = 2$ और $d = 4$ हैं।

इसी प्रकार, आपको जाँच करनी चाहिए कि a और b समीकरण $x^2 - \frac{1}{4} = 0$ के मूल हैं। इसीलिए, $a = \frac{1}{2}$ और $b = -\frac{1}{2}$ हैं।

इस प्रकार, दिए गए चतुर्घात समीकरण के मूल $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, 4$ हैं।

***

अब, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E18) समीकरण $x^4 + 15x^3 + 70x^2 + 120x + 64 = 0$ को हल कीजिए, जबकि दिया है कि इसके मूल G P, अर्थात्, गुणोत्तर श्रेणी में है।

[**संकेत:** यदि चार संख्याएँ a, b, c, d एक G.P. में हैं, तो $ad = bc$ होता है।]

E19) दर्शाइए कि यदि $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ (जहाँ $p, q, r, s \in \mathbb{R}$) के दो मूलों का योग इसके अन्य दो मूलों के योग के बराबर है, तो $p^3 - 4pq + 8r = 0$ होगा।



चित्र 2: नील्ज़ हैंरीक आबल

हमने मूलों और गुणांकों के बीच संबंधों की झलक $n = 2, 3, 4$ के लिए ही देखा है। परंतु आप प्रमेय 7 को किसी भी $n \in \mathbb{N}$ के लिए, लागू कर सकते हैं। आप देख चुके हैं कि किस प्रकार इन संबंधों का उपयोग समीकरणों को हल करने में भी किया जा सकता है। आपको शायद मालूम हो कि द्विघात सूत्र की तरह, त्रिघात और चतुर्घात समीकरणों को हल करने के लिए भी सूत्र हैं, जिनका श्रेय कार्दानो, फ़ेरारी तथा अन्य गणितज्ञों को जाता है। परंतु, 1824 में नॉर्वे के बीजगणितज्ञ आबल [Abel (1802–1829)] ने निम्नलिखित परिणाम की एक उपपत्ति प्रकाशित की:

बहुपद समीकरण के मूलों के लिए, उस समीकरण के गुणांकों पर स्पष्टतः बीजीय संक्रियाओं में व्यक्त कोई भी व्यापक सूत्र नहीं है, यदि इस समीकरण की घात 4 से अधिक है।

यह परिणाम बताता है कि घात > 4 वाले बहुपद समीकरणों के कोई व्यापक बीजीय हल नहीं होते। परंतु, ऐसी विधियाँ हैं जो हमें वास्तविक मूलों के सन्निकट मान प्रदान करती हैं, जिनका अध्ययन आप संख्यात्मक विश्लेषण (Numerical Analysis) पर हमारे पाठ्यक्रम में करेंगे। निस्संदेह, घात ≥ 5 वाले कुछ विशेष बहुपद समीकरण हैं जिन्हें हल किया जा सकता है (जैसा कि E 13 में है)।

अब, एक बहुपद समीकरण दिया रहने पर, क्या बिना उसे हल किए, यह जानने की कोई विधि है कि इसके मूल किस प्रकार के होंगे? हम इसकी चर्चा अगले भाग में करने जा रहे हैं।

5.5 मूलों की प्रकृति

भाग 5.3 में आपने देखा था कि घात n वाले बहुपद समीकरण के n मूल होते हैं, जो वास्तविक या सम्मिश्र हो सकते हैं। प्रमेय 6 हमें यह भी बताता है कि सम्मिश्र मूल सदैव संयुग्मी युग्मों में होते हैं, जिस कारण से ऐसे मूलों की संख्या सम होनी चाहिए। आप यह भी जानते हैं कि एक द्विघात समीकरण का विविक्तकर आपको बताता है कि इस समीकरण के मूल किस प्रकार के होते हैं। अतः, क्या हम इस संकल्पना का व्यापकीकरण कर सकते हैं? आइए देखें।

5.5.1 विविक्तकर

द्विघात समीकरण $x^2 + bx + c = 0$ की स्थिति में आप जानते हैं कि विविक्तकर $b^2 - 4c$ है। साथ ही, यदि α और β इस समीकरण के दो मूल हैं, तो $\alpha + \beta = -b$ और $\alpha\beta = c$ है। इसलिए, $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = b^2 - 4c$. इस प्रकार, विविक्तकर $= (\alpha - \beta)^2$ है, जहाँ α और β द्विघात समीकरण के मूल हैं।

अब व्यापक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ पर विचार कीजिए। मान लीजिए कि इसके मूल α और β हैं। तब, इसका विविक्तकर $b^2 - 4ac = a^2(\alpha - \beta)^2$ है।

हम किसी भी बहुपद समीकरण के विविक्तकर को परिभाषित करने के लिए, उपरोक्त संबंध का व्यापकीकरण करते हैं।

परिभाषा : $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$ का **विविक्तकर (discriminant)** $a_n^{2(n-1)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$ है, जहाँ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ बहुपद समीकरण के मूल हैं।

घात $n \in \mathbb{N}$ वाले बहुपद समीकरण का विविक्तकर शून्य होता है, यदि और केवल यदि इसके कम से कम दो बराबर मूल हों।

विशेष रूप में, यदि हम $n = 3$ और $a_n = 1$ की स्थिति पर विचार करें, तो हम देखते हैं कि एक त्रिघात समीकरण का विविक्तकर काफी जटिल व्यंजक है। यह वास्तव में कार्दानो के दिए गए त्रिघातों के हलों से निकलता है, जिसका अध्ययन हम इस पाठ्यक्रम में नहीं कर रहे हैं। परंतु, हम निम्नलिखित दे रहे हैं :

त्रिघात समीकरण $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ का विविक्तकर $D = -(27B^2 + 4A^3)$ है, जहाँ

$A = q - \frac{p^2}{3}$, $B = \frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r$.

अब, हम जानते हैं कि $D = (\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\alpha-\gamma)^2$ है, जहाँ α, β, γ त्रिघात समीकरण के मूल हैं। जैसा कि द्विघात समीकरणों की स्थिति में था, क्या यहाँ भी विविक्तकर का चिह्न हमें समीकरण के मूलों की प्रकृति के बारे में कुछ बताता है? आइए, त्रिघात समीकरण के मूलों α, β और γ की विभिन्न संभावनाओं पर दृष्टि डालें।

1) यदि मूल वास्तविक और भिन्न-भिन्न हैं, तो $(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\alpha-\gamma)^2 = D > 0$ है।

2) यदि एक मूल, मान लीजिए α वास्तविक है, तो β और γ सम्मिश्र मूल होंगे।

$\therefore \beta - \gamma$ शुद्धतः अधिकल्पित है, जिससे कि $(\beta-\gamma)^2 < 0$ है।

साथ ही, $\overline{\alpha-\beta} = \alpha-\gamma$ जिससे कि $(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) > 0$ है।

अतः, इस स्थिति में, $D < 0$ है।

3) मान लीजिए कि $\alpha = \beta$, तथा $\gamma \neq \alpha$ है। क्योंकि $\alpha - \beta = 0$, इसलिए $D = 0$. साथ ही, $B \neq 0$ है। क्यों? क्योंकि यदि $B = 0$ हो, तो $A = 0$ होगा (क्योंकि $D = 0$ है)।

परंतु $A = 0 \Rightarrow q = \frac{p^2}{3}$, अर्थात्, $\alpha(\alpha + 2\gamma) = \frac{(2\alpha+\gamma)^2}{3}$.

[यहाँ हम मूलों के बीच संबंधों का उपयोग कर रहे हैं, क्योंकि
$p = -(\alpha+\beta+\gamma) = -(2\alpha+\gamma)$ और $q = \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = \alpha(\alpha+2\gamma)$ है।]

सरल करने पर, हम $\alpha = \gamma$ प्राप्त करते हैं, जो एक अंतर्विरोध है।

इस प्रकार, $B \neq 0$ है।

अतः, यदि किसी त्रिघात समीकरण के ठीक दो मूल बराबर हैं, तो $D = 0$ और $B \neq 0$ है, तथा इसीलिए $A \neq 0$ है।

4) यदि $\alpha = \beta = \gamma$ है, तो $D = 0, B = 0$ है, तथा इसीलिए $A = 0$ है।

आइए एक त्रिघात समीकरण के मूलों की प्रकृति की विभिन्न संभावनाओं का सारांश दें।

त्रिघात समीकरण $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, $p, q, r \in \mathbb{R}$, पर विचार कीजिए, तथा मान लीजिए कि $B = \frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r$ और $A = q - \frac{p^2}{3}$. तब, $D = -(27B^2 + 4A^3)$, तथा

1. इसके सभी मूल वास्तविक और अलग हैं यदि और केवल यदि $D > 0$ है।
2. ठीक एक मूल वास्तविक है यदि और केवल यदि $D < 0$ है।
3. ठीक दो मूल बराबर हैं यदि और केवल यदि $D = 0$ है और $B \neq 0$ है। आगे इस स्थिति में सभी मूल वास्तविक हैं।
4. तीनों मूल बराबर हैं यदि और केवल यदि $D = 0$ और $B = 0$.

आइए, किसी बहुपद समीकरण के मूलों के प्रकारों का विश्लेषण करने के लिए, उसके विविक्तकर के उपयोग का एक उदाहरण देखें।

उदाहरण 8: $x^3 + 2x - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}x^2$ का विविक्तकर प्राप्त कीजिए। फिर, इसके मूलों की प्रकृति की जाँच कीजिए।

हल : यहाँ $p = -\sqrt{5}, q = 2, r = -2\sqrt{5}$ है। इसलिए, $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{-10\sqrt{5}}{27}$ और $D = \frac{-56}{3}$ है। क्योंकि $D < 0$ है, इसलिए ठीक एक मूल वास्तविक है, और इसीलिए अन्य दो मूल सम्मिश्र संयुग्मी हैं।

***

अब, आप नीचे दिए हुए प्रश्नों को हल करने का प्रयास करें जिससे आप जान सकें कि अभी जो हमने चर्चा की है उसे आप कितना समझ पाए हैं।

E20) $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0, a \neq 0$ के गुणांकों पर किस प्रतिबंध के अंतर्गत इस समीकरण के सम्मिश्र मूल होंगे?

E21) क्या $x^3 = 15x + 126$ के सभी मूल वास्तविक होंगे? क्यों, या क्यों नहीं?

अभी तक हमने आपको एक बहुपद समीकरण के मूलों के प्रकार निर्धारित करने की एक ही विधि से अवगत कराया है। आइए, अब एक ऐसी विधि पर दृष्टि डालें, जो हमें समीकरण के वास्तविक मूलों के चिह्नों के बारे में बताती है।

5.5.2 चिह्नों का देकार्त नियम

आइए, बहुपद समीकरण $2x^5 + 3x^4 - \sqrt{2}x^3 - \frac{1}{\sqrt{3}}x^2 + x + \pi = 0$ से शुरू करें। इसको केवल देखने से, क्या आप कह सकते हैं कि इसके कितने धनात्मक और कितने ऋणात्मक वास्तविक मूल हो सकते हैं? देकार्त के निम्नलिखित आश्चर्यजनक प्रमेय के कारण यह संभव है।

प्रमेय 8 (चिह्नों का देकार्त नियम) : बहुपद के धनात्मक वास्तविक मूलों की संख्या उसके गुणांकों में चिह्नों के परिवर्तनों की संख्या द्वारा परिबद्ध होती है।

अतः, यदि हम उपरोक्त बहुपद समीकरण में प्रमेय 8 का अनुप्रयोग करें, तो $x^5, x^4, x^3, x^2, x^1, x^0$ के गुणांकों के चिह्न $++--++$ हैं। इस प्रकार, यहाँ चिह्न में केवल दो परिवर्तन हैं – एक x^4 से x^3 तक तथा एक x^2 से x^1 तक। इस प्रकार, इसके ज़्यादा से ज़्यादा दो धनात्मक वास्तविक मूल हो सकते हैं।

टिप्पणी 5: ध्यान दीजिए कि हम यह नहीं कह रहे हैं कि बहुपद के वास्तविक मूल ज़रूर होंगे। हम कह रहे हैं कि **यदि इसके वास्तविक मूल हैं,** तो इनमें से अधिकतम दो धनात्मक हो सकते हैं। वास्तव में, हो सकता है कि इसके कोई भी मूल वास्तविक न हों या कोई भी धनात्मक वास्तविक मूल न हों। (देखिए E24.)

अब, आप यह सोच रहे होंगे कि क्या ऐसा ही नियम ऋणात्मक वास्तविक मूलों के लिए भी है। ध्यान दीजिए कि **यदि $\mathbb{R}$ पर बहुपद f(x) का एक मूल a है,**

तो f(–x) का एक मूल –a होता है। उदाहरणार्थ, यदि $p(x) = x^2 - 3x + 2$, तो $p(-x) = (-x)^2 - 3(-x) + 2 = x^2 + 3x + 2$. अब, -1 और -2, $p(x)$ के मूल हैं, इसलिए $p(-x)$ के मूल -1 और -2 हैं।

अतः, इस संबंध का प्रयोग करते हुए, हम प्रमेय 8 का निम्नांकित उपप्रमेय लिख सकते हैं।

एक प्रमेय का उपप्रमेय एक ऐसा कथन है जिसकी सत्यता प्रमेय से सीधी स्पष्ट होती है।

उपप्रमेय 1: $\mathbb{R}$ पर $f(x)$ में ऋणात्मक मूलों की अधिकतम संख्या $f(-x)$ के गुणांकों के चिह्नों के परिवर्तनों की संख्या के बराबर है।

आइए, देकार्त के इस नियम के प्रयोग एक उदाहरण देखें।

उदाहरण 9: समीकरण $3x^4 + 12x^2 + 5x - 4 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $f(x) = 3x^4 + 12x^2 + 5x - 4$. देकार्त नियम के प्रयोग से हम देख सकते हैं कि $f(x)$ में चिह्न का केवल एक परिवर्तन है। अतः, इसका अधिकतम एक धनात्मक मूल हो सकता है।

अब $f(-x) = 3x^4 + 12x^2 - 5x - 4$ पर विचार कीजिए। इसमें भी चिह्न का केवल एक ही परिवर्तन है। इस प्रकार, $f(x)$ का अधिकतम एक मूल ऋणात्मक हो सकता है।

हम यह भी जानते हैं कि $f(x)$ के $\mathbb{C}$ में 4 मूल होने चाहिए। इस प्रकार, इसके कम से कम दो मूल अवास्तविक होंगे, और इसीलिए ये सम्मिश्र संयुग्मी होंगे।

***

अब, क्यों नहीं आप कुछ प्रश्नों को करने का प्रयास करें?

E22) देकार्त नियम के प्रयोग से, $x^2 + 3x$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए। साथ ही, अपने जवाब की जांच के लिए, इसके मूलों को भी प्राप्त करके, दोनों जवाब मिलाइए।

E23) समीकरण $x^{10} - 4x^6 + x^4 - 2x - 3 = 0$ के मूलों की प्रकृति क्या हो सकती है?

E24) $p(x) = x^2 - 2x + 3$ पर विचार कीजिए।

i) देकार्त नियम से, $p(x)$ के कितने धनात्मक मूल हो सकते हैं?

ii) $p(x)$ के मूल प्राप्त कीजिए।

i) और (ii) से आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

बहुपद के मूलों के प्रकार, या प्रकृति, को समझने का प्रयास करने की इस चर्चा के साथ, हम बहुपद समीकरणों की अपनी चर्चा को यहीं समाप्त करते हैं। आइए, इस इकाई में की गई चर्चा को संक्षिप्त रूप में प्रस्तुत करें।

5.6 सारांश

इस इकाई में आपने निम्नलिखित बातों का अध्ययन किया है।

1. रैखिक और द्विघात समीकरणों का पुनः स्मरण, उनके हल तथा द्विघात समीकरण का विविक्तकर हमें समीकरण के मूलों की प्रकृति के बारे में क्या बताता है।

2. चर x में $\mathbb{R}$ पर बहुपद $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ के रूप का एक व्यंजक होता है। इसका घात n है। इसका संगत बहुपद समीकरण $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0$ है, जिसकी घात n है।

3. $\deg 0 = -\infty$.

4. घात n वाला बहुपद, f(x), के $\mathbb{C}$ में n मूल होते हैं। $a \in \mathbb{C}$, f(x) का एक मूल है यदि और केवल यदि $f(a) = 0$ हो, अर्थात् यदि और केवल यदि $(x - a) | f(x)$ हो।

5. यदि $\mathbb{R}$ पर f(x) और g(x) बहुपद हैं, तो $f(x) \pm g(x)$ और $f(x)g(x)$ भी $\mathbb{R}$ पर बहुपद हैं।
साथ ही, $\deg(f(x) \pm g(x)) \leq \max(\deg f(x), \deg g(x))$, तथा
$\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$.

6. घात 3 वाला बहुपद समीकरण एक त्रिघात समीकरण कहलाता है, तथा घात 4 वाला बहुपद समीकरण चतुर्घात समीकरण कहलाता है।

7. विभाजन कलन विधि बताती है कि $\mathbb{R}$ पर बहुपद f(x) और g(x), $g(x) \neq 0$, दिए रहने पर, $\exists\, \mathbb{R}$ पर अद्वितीय बहुपद q(x) और r(x) जिनसे कि $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, और $\deg r(x) < \deg g(x)$ है।

8. यदि किसी बहुपद समीकरण के सम्मिश्र मूल हैं, तो वे संयुग्मी युग्मों में होते हैं।

9. निम्नलिखित प्रमेय के अनुप्रयोग :
मान लीजिए कि $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ समीकरण
$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, $a_i \in \mathbb{R}\ \forall i = 0, 1, \ldots, n$, $a_0 \neq 0$ के मूल हैं। तब

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$\sum_{\substack{i,\, j=1 \\ i<j}}^{n} \alpha_i\alpha_j = \frac{a_2}{a_0}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_t}^{n} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_t} = (-1)^t \frac{a_t}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_i = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

10. यदि बहुपद समीकरण $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0$, $a_n \neq 0$ के मूल $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ हैं, तो इसका विविक्तकर $D = a_n^{2(n-1)} \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$ होता है।

हमने यह भी चर्चा की है कि D को किस प्रकार समीकरण के मूलों की प्रकृति को समझने में उपयोग किया जा सकता है, विशेष रूप से त्रिघात समीकरणों की स्थिति में।

11. यदि $\mathbb{R}$ पर f(x) एक बहुपद है, तो चिह्नों का देकार्त नियम हमें बताता है कि $f(x) = 0$ के धनात्मक मूलों की अधिकतम संख्या उसके गुणांकों के चिह्न के परिवर्तनों की संख्या के बराबर है। इसका अनुप्रयोग करके, हमने ऋणात्मक मूलों

की संख्या पर भी परिबद्ध प्राप्त किया था। अतः, हमने $f(x) = 0$ के सभी मूलों की प्रकृति की पहचान करने का प्रयास किया था।

5.7 हल / उत्तर

E1) i) $J\left(\frac{x}{k} + a\right) = x \Leftrightarrow (J-k)x = -Jak \Leftrightarrow x = \frac{-Jak}{J-k}$, जो सुपरिभाषित है क्योंकि $J \neq k$ है।

ii) $\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}$

अतः, $R = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$.

iii) $F = \frac{9}{5}C + 32$

E2) 20 मिनट $= \frac{1}{3}$ घंटा।

मान लीजिए कि अध्ययन केन्द्र पर विद्यार्थी की जाने की रफ़्तार x कि.मी. प्रति घंटा है। तब, उसके द्वारा चली दूरी $\frac{x}{3}$ कि.मी. है।

इसी प्रकार, क्योंकि वापिसी की रफ़्तार $(x - 8)$ कि.मी. प्रति घंटा है, इसलिए वही दूरी, अर्थात् अध्ययन केन्द्र से घर तक चली दूरी $\frac{1}{2}(x - 8)$ कि.मी. है।

अतः, $\frac{x}{3} = \frac{1}{2}(x - 8)$.

x के लिए इसे हल करने पर, $x = 24$ प्राप्त होता है। इस प्रकार, विद्यार्थी $\frac{24}{3} = 8$ कि.मी. की दूरी पर रहती है।

E3) कथन सत्य है। एक रैखिक समीकरण, मान लीजिए $ax + b = 0$, पर विचार कीजिए। यहाँ, $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ है। इसका हल $-\frac{b}{a}$ है, जो $\mathbb{R}$ में है।

अब द्विघात समीकरण $x^2 + 1 = 0$ पर विचार कीजिए। इसके सम्मिश्र मूल $i, -i$ हैं। इस प्रकार, $\mathbb{R}$ पर एक द्विघात समीकरण के सम्मिश्र मूल हो सकते हैं।

E4) i) $x^2 + 5 = 0 \Rightarrow x^2 = -5 = 5i^2$. इस प्रकार, $x = \pm i\sqrt{5}$.

ii) $(x+9)(x-1) = 0 \Rightarrow x + 9 = 0$ या $x - 1 = 0 \Rightarrow x = -9, 1$.

iii) $x^2 - \sqrt{5}x = 1 \Rightarrow x^2 - \sqrt{5}x - 1 = 0$, मानक रूप में। द्विघात सूत्र के प्रयोग द्वारा हम $x = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{5+4}}{2} = \frac{\sqrt{5}+3}{2}, \frac{\sqrt{5}-3}{2}$ प्राप्त करते हैं।

E5) मूल संपाती होंगे, अर्थात् दोनों बराबर होंगे, यदि और केवल यदि विविक्तकर शून्य है, अर्थात् $(2k+6)^2 - 64k = 0$ है।

$\Rightarrow 4k^2 - 40k + 36 = 0 \Rightarrow k^2 - 10k + 9 = 0$.

द्विघात सूत्र द्वारा, हम प्राप्त करते हैं :

$k = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = 5 \pm 4 = 9, 1$, जो वाँछित मान हैं।

E6) टिप्पणी 1 से,

$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta) = a\{x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\}.$

समिका के दोनों पक्षों में, x के गुणांकों, तथा अचर पदों, को बराबर करने पर, हम $b = -a(\alpha+\beta)$ और $c = a\alpha\beta$ प्राप्त करते हैं।

अर्थात्, $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ और $\alpha\beta = \frac{c}{a}$.

E7) $x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$ का α एक मूल है यदि और केवल यदि
$\alpha^2 - (\alpha+\beta)\alpha + \alpha\beta = 0$, जो सत्य है। अतः, α दिए हुए समीकरण का एक मूल है।
इसी प्रकार, β भी दिए हुए समीकरण का मूल है।

E8) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1.$
दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$(2x+3) + (x+1) - 2\sqrt{(2x+3)(x+1)} = 1$

$\Leftrightarrow 3x + 3 = 2\sqrt{(2x+3)(x+1)}.$

इसका पुनः वर्ग करने पर, हम प्राप्त करते हैं कि

$9x^2 + 18x + 9 = 4(2x+3)(x+1)$

$\Leftrightarrow 9x^2 + 18x + 9 = 8x^2 + 20x + 12$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0.$

इस समीकरण के मूल 3 और –1 हैं।

अब, इन मानों को पहले दिए हुए समीकरण में रखने पर, हम देखते हैं कि $\sqrt{2(3)+3} - \sqrt{3+1} = 1$, तथा $\sqrt{2(-1)+3} - \sqrt{(-1)+1} = 1.$ इस प्रकार, 3 और – 1 दोनों ही दिए हुए समीकरण के हल हैं।

E9) मान लीजिए कि अल्का की औसत रफ़्तार x कि.मी. प्रति घंटा है, तथा मान लीजिए कि उसने 24 कि.मी. चलने के लिए t घंटे का समय लिया है।
तब, $24 = xt$, अर्थात् $t = \frac{24}{x}$.
साथ ही, अमीना की रफ़्तार $(x+1)$ कि.मी. प्रति घंटा है, तथा उसके द्वारा लिया गया समय $(t-2)$ घंटे हैं।
अतः, $24 = (x+1)(t-2) = (x+1)\left(\frac{24}{x} - 2\right)$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3, -4.$

क्योंकि औसत रफ़्तार ऋणेतर होती है, इसलिए $x = -4$ स्वीकार्य नहीं है। अतः, $x = 3$ है, अर्थात्, अल्का की औसत रफ़्तार 3 कि.मी. प्रति घंटा है।

E10) यहाँ अनंततः अनेक उदाहरण हैं।
उदाहरणार्थ, $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$ में अपरिमित पद हैं। इसलिए यह बहुपद नहीं है।

E11) $2x^3 - \sqrt{5}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(2x - \sqrt{5}) = 0$. देखने से ही, हम प्राप्त करते हैं कि दो मूल शून्य हैं। अतः, हम $x = 0$ या $2x - \sqrt{5} = 0$ प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार, हल समुच्चय $\left\{0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$ है।

E12) i) वाँछित समुच्चय इकाई के सातवें मूल्यों का समुच्चय है (देखिए इकाई 4, भाग 4.5). इस प्रकार, हल समुच्चय $\left\{\cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7}, k = 0, \pm1, \pm2, \pm3\right\}$ है।

ii) पुनः, भाग 4.5 से, आप जानते हैं कि यदि $x^7 = 5$ का एक मूल α है, तो इसका हल समुच्चय $\left\{\alpha\left(\cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7}\right), k = 0, \pm1, \pm2, \pm3\right\}$ है। यहाँ हम α को वास्तविक संख्या $(5)^{\frac{1}{7}}$ चुनते हैं।

E13) $x^5 + 4x^3 = 5x$

$\Leftrightarrow x(x^4 + 4x^2 - 5) = 0.$

देखने से ही हम प्राप्त करते हैं कि एक मूल 0 है, तथा अन्य मूल $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$ के मूल हैं।

अब, $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$ को हल करने के लिए, $x^2 = t$ रखिए। तब, समीकरण $t^2 + 4t - 5 = 0$ हो जाता है। इसके मूल $t = 1, -5$.

इस प्रकार, $x^2 = 1$ और $x^2 = -5$ हैं, जो हमें दिए हुए समीकरण के मूल प्रदान करते हैं।

अब, $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm1$.

साथ ही, $x^2 = -5 \Rightarrow x = \pm i\sqrt{5}$ हैं।

अतः, दिए हुए समीकरण के 5 मूल $0, \pm1, \pm i\sqrt{5}$ हैं।

E14) प्रमेय 4 के प्रयोग से हम प्राप्त करते हैं :

$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$

$= a\{x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)x - \alpha\beta\gamma\}$

अब, दोनों पक्षों में x^2, x^1, x^0 के गुणांकों को बराबर करने पर, हम क्रमशः (i), (ii) और (iii) प्राप्त करते हैं।

E15) यदि α, β, γ समीकरण के मूल हैं, तो हम जानते हैं कि ... (10)

$\alpha + \beta + \gamma = 6,$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = 11,$ ... (11)

$\alpha\beta\gamma = 6.$ ... (12)

हमें $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$, और फिर $\alpha + \beta^4 + \gamma^4$, ज्ञात करने की आवश्यकता है।

अब, $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma).$

इस प्रकार, (10) और (11) से हम ज्ञात करते हैं कि

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (6)^2 - 2(11) = 14$ ... (13)

अब, क्योंकि α, β, γ दिए हुए समीकरण के मूल हैं, इसलिए हम जानते हैं कि

$\alpha^3 - 6\alpha^2 + 11\alpha - 6 = 0,$

$\beta^3 - 6\beta^2 + 11\beta - 6 = 0,$

$\gamma^3 - 6\gamma^2 + 11\gamma - 6 = 0.$

इन समीकरणों को जोड़ने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)-6(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+11(\alpha+\beta+\gamma)-18=0.$

अब, (10) और (13) के प्रयोग से, हम ज्ञात करते हैं कि

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=6(14)-11(6)+18=36.$ ... (14)

अब, ध्यान दीजिए कि दिए हुए समीकरण को x से गुणा करने पर, हम $x^4-6x^3+11x^2-6x=0$ प्राप्त करते हैं।

क्योंकि α, β, γ इस समीकरण के भी मूल हैं, इसलिए ऊपर वाली प्रक्रिया अपनाने से हम तीन समीकरण प्राप्त करते हैं। इन्हें जोड़ने पर, हम $(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)-6(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+11(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-6(\alpha+\beta+\gamma)=0$ प्राप्त करते हैं।

अतः, (14), (13) और (10) के प्रयोग से, हम

$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=6(36)-11(14)+6(6)=98$ प्राप्त करते हैं।

E16) सर्वप्रथम, यदि a, b , c धनात्मक हैं, तो S_1, S_2 और S_3 भी धनात्मक होंगे। (क्यों?)

अब, हमें इसके विलोम को सिद्ध करने की आवश्यकता है, अर्थात् यदि S_1, S_2 और S_3 धनात्मक हैं, तो a, b और c भी धनात्मक होंगे। इसके लिए, ध्यान दीजिए कि a, b और c त्रिघात समीकरण $x^3-S_1x^2+S_2x-S_3=0$ के मूल होंगे।

अतः, $a^3-S_1a^2+S_2a-S_3=0$

$\Rightarrow a(a^2-S_1a+S_2)=S_3>0$

इसलिए, $a\neq 0$ है।

साथ ही, यदि $a<0$ है, तो $a^2-S_1a+S_2>0$ है, जिससे $a(a^2-S_1a+S_2)<0$ हो जाता है, जो एक अंतर्विरोध है। इसलिए, a धनात्मक ही है।

इसी प्रकार, b और c भी धनात्मक मूल हैं।

E17) यदि α, β, γ समीकरण के मूल हैं, तो $\alpha+\beta+\gamma=3, \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=a$ और $\alpha\beta\gamma=1.$

देखने से ही, हम प्राप्त करते हैं कि $\alpha=\beta=\gamma=1$ सभी संबंधों को संतुष्ट करते हैं। तब, $a=3.$

E18) मान लीजिए कि a, b, c और d मूल हैं, जो GP में हैं।

तब, $ad=bc.$ ...(15)

अब, हम जानते हैं कि

$a+b+c+d=-15$ ... (16)

$ab+ac+ad+bc+bd+cd=70$ ... (17)

$(a+b)cd+ab(c+d)=-120$

$\Rightarrow ad(b+c)+bc(a+d)=-120$ ... (18)

$abcd=64$ ... (19)

अब, (15), (16) और (18) हमें $ad(-15)=-10$, अर्थात् $ad=8=bc$ देते हैं।

आगे, (17) हमें $(a+d)(b+c)+2bc=70$ देता है।

$\Rightarrow \{-15-(b+c)\}(b+c)+2bc=70$, (16) के प्रयोग से

$\Rightarrow (b+c)^2 + 15(b+c) + 54 = 0$

$\Rightarrow b+c = -6$ या $b+c = -9$

हम $b+c = -6$ लेते हैं। ... (20)

तब, $(b-c)^2 = (b+c)^2 - 4bc = 4.$

$\Rightarrow b-c = 2.$ ... (21)

(20) और (21) से, हम $b = -2, c = -4$ प्राप्त करते हैं।

साथ ही, (16) और (20) हमें $a+d = -9$ देते हैं।

ऊपर की तरह ही, हम $a = -1$ और $d = -8$ प्राप्त करते हैं।

अतः, क्रम में दिए रहने पर ये मूल $-1, -2, -4, -8$ हैं, जिसमें सार्व अनुपात 2 है।

[ध्यान दीजिए कि (20) में, हम $b+c = -9$ ले सकते थे। तब् भी शेष परिकलनों से अंत में हमें यही मूल प्राप्त हो जाते।]

E19) मान लीजिए कि मूल a, b, c, d हैं, जहाँ

$a+b = c+d.$ ... (22)

अब, $a+b+c+d = p$ ... (23)

$ab+ac+ad+bc+bd+cd = q$ ... (24)

$(a+b)cd + ab(c+d) = r$ ... (25)

$abcd = s$ ... (26)

(22) और (23) $\Rightarrow a+b = \frac{p}{2} = c+d$

तब, (25) $\Rightarrow ab+cd = \frac{2r}{p}$

साथ ही, (24) $\Rightarrow (a+b)c + (a+b)d + ab + cd = q.$

अतः, $\frac{p^2}{4} + \frac{2r}{p} = q \Rightarrow p^3 + 8r = 4pq$

$\Rightarrow p^3 - 4pq + 8r = 0.$

E20) यह स्थिति केवल तभी होगी, जब $D < 0$, अर्थात्, $27B^2 + 4A^3 > 0$ है,

जहाँ $B = 2\frac{(3b)^3}{a^3}.\frac{1}{27} - \frac{9bc}{a^2}.\frac{1}{3} + \frac{d}{a} = \frac{2b^3}{a^3} - \frac{3bc}{a^2} + \frac{d}{a},$

तथा $A = \frac{3c}{a} - \frac{1}{3}\left(\frac{3b}{a}\right)^2 = \frac{3c}{a} - 3\frac{b^2}{a^2}.$

इस प्रकार, आवश्यकता है कि

$$27\left(\frac{2b^3 - 3abc + ad^2}{a^3}\right)^2 + 4(27)\left(\frac{ac - b^2}{a^2}\right)^3 > 0$$

$\Rightarrow (2b^3 - 3abc + a^2d)^2 + 4(ac - b^2)^3 > 0$ हो।

E21) यहाँ $p = 0, q = -15, r = -126$ है।

अतः, $B = -126, A = -15$, जिससे $D = -\{27(-126)^2 + 4(-15)^3\} < 0$ है।

इसलिए केवल एक मूल वास्तविक होगा, तथा दो सम्मिश्र संयुग्मी होंगे।

E22) देकार्त नियम से, इसका कोई धनात्मक मूल नहीं होगा, तथा अधिकतम एक ऋणात्मक मूल होगा। अतः, इसका एक मूल शून्य के बराबर होगा तथा एक ऋणात्मक मूल होगा। देखने से, हमें पता चल जाता है कि इसके दो मूल 0 और -3 हैं, जो देकार्त नियम द्वारा बताए प्रकृति से मेल खाता है।

E23) देकार्त नियम के प्रयोग से, हम देखते हैं कि $f(x)$ के अधिकतम तीन धनात्मक मूल हो सकते हैं, क्योंकि चिह्न हैं :

$\underbrace{+}_{1}\ \underbrace{-}_{1}\ \underbrace{+}_{1}\ -$, अर्थात्, कुल तीन चिह्न परिवर्तन हैं।

अब, $f(-x) = x^{10} - 4x^6 + x^4 + 2x - 3$.

अतः, यहाँ दो चिह्न परिवर्तन हैं।

इसलिए, इस समीकरण के अधिकतम दो ऋणात्मक मूल हो सकते हैं।

अब, इस समीकरण के 10 मूल हैं, तथा हम देखते हैं कि अधिकतम 5 वास्तविक हो सकते हैं। अतः, कम से कम 5 मूल सम्मिश्र हैं। परंतु सम्मिश्र मूल युग्मों में होते हैं। इसलिए, कम से कम 6 मूल सम्मिश्र हैं। तब, 4 मूल वास्तविक होंगे।

दूसरी संभावना है कि इसके 8 सम्मिश्र मूल हों तथा दो मूल वास्तविक हों, जिनमें से एक धनात्मक और एक ऋणात्मक होगा।

तीसरी संभावना यह है कि इसमें सम्मिश्र मूलों के 5 युग्म हों, तथा कोई वास्तविक मूल न हो।

E24) i) नियम के द्वारा, इसके दो धनात्मक मूल हो सकते हैं।

ii) मूल $\frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = 1 \pm i\sqrt{2}$ हैं।

इस प्रकार, यद्यपि नियम वास्तविक मूलों की अधिकतम संभावना बताता है, परंतु आवश्यक नहीं है कि उसका कोई भी मूल वास्तविक हो। यहाँ दोनों मूल सम्मिश्र हैं।

विविधा प्रश्न

नीचे दिए गए प्रश्न, इस खंड में आपके द्वारा अध्ययन की गई संकल्पनाओं और प्रक्रियाओं पर आधारित हैं। इनको करने से, आप संबंधित संकल्पनाओं को बेहतर समझ पाएँगे, और आपको ऐसे प्रश्नों को हल करने का अभ्यास भी हो जाएगा।

1. यदि $a, b, c \in \mathbb{R}$ इस प्रकार है कि $(2ax+b) \mid (ax^2+bx+c)$ है, तो $ax^2+bx+c=0$ के मूलों की क्या प्रकृति है?

2. निम्नलिखित समुच्चयों के ज्यामितीय निरूपण दीजिए :

   i) $\{-3, 0.75, \sqrt{2}\} \subseteq \mathbb{R}$,

   ii) $\{x \mid x < -3\} \cup \{3\} \subseteq \mathbb{R}$,

   iii) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{3}x - 2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

3. निम्नलिखित द्वारा परिभाषित फलन f का आलेख खींचिए :

   i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{यदि } x \le 1, \\ x^2 & \text{यदि } x > 1. \end{cases}$

   ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = -|x|$,

   iii) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : f(x) = 2^x$.

4. क्या $\left(\frac{4-i}{1+i} - \frac{2i}{2+i}\right) 4i$ एक शुद्धतः अधिकल्पित संख्या है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

5. समीकरण $\frac{x+1}{x-3} = \frac{4}{x+3} + 6, x \neq \pm 3$ को हल कीजिए।

6. यदि दो व्यक्ति मिलकर किसी कमरे के फ़र्श पर टाइलें बिछाते हैं, तो इस कार्य को करने में 4 घंटे का समय लगता है। यदि प्रत्येक अकेला कार्य करे, तो इनमें से एक दुसरे व्यक्ति से कार्य पूरा करने में 1 घंटा कम समय लेता है। प्रत्येक को फ़र्श पर टाइलें बिछाने में कितना समय लगेगा?

7. निम्नलिखित के मान निकालिए, जहाँ ω इकाई का एक घनमूल है :

   i) $(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)$,

   ii) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5)$.

8. वह समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसके मूल समीकरण $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 17x + 11 = 0$ के मूलों के मानों से 4 कम हैं।

   [**संकेतः** आप समीकरण को $x-4$ के समीकरण के रूप में पुनः लिख सकते हैं।]

9. $x^4 + 9x^3 + 16x^2 + 9x + 1 = 0$ को हल कीजिए।

   [**संकेतः** ध्यान दीजिए कि इसमें, $r = 0, 1, 2$ के लिए, x^r और x^{4-r} के गुणांक एक ही हैं। साथ ही, $x = 0$ इसका मूल नहीं है। पूरे समीकरण को x^2 से भाग देकर, आप इस समीकरण को $x + \frac{1}{x} = y$ (मान लीजिए) में एक समीकरण के रूप में लिख सकते हैं। तब, इसे y के लिए हल कीजिए।]

10. $x^9 - x^5 + x^4 + x^2 + 1 = 0$ के अधिकल्पित मूलों की न्यूनतम संभव संख्या ज्ञात कीजिए।

11. $4ab - 2i(a^2 - b^2)$, जहाँ $a, b \in \mathbb{R}$ है, के वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल \ उत्तर

1. $ax^2 + bx + c = 0$ के दो मूल हैं। दिए हुए प्रतिबंध के अनुसार, एक मूल $\frac{-b}{2a}$ है। मान लीजिए कि दूसरा मूल $r \in \mathbb{R}$ है। तब,

$$a\left(x - \frac{b}{2a}\right)(x - r) = ax^2 + bx + c.$$

गुणांकों को बराबर करने पर, हम $r = \frac{-b}{2a}$ प्राप्त करते हैं। इस प्रकार, दोनों मूल बराबर और वास्तविक हैं।

2. i)



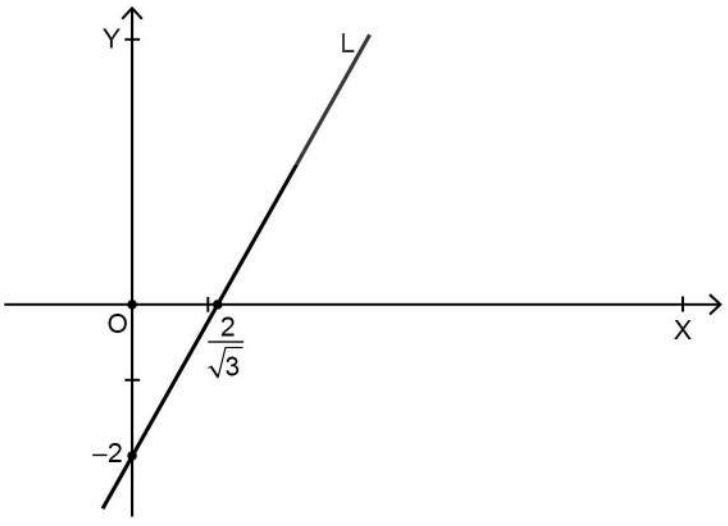
चित्र 1

ii)



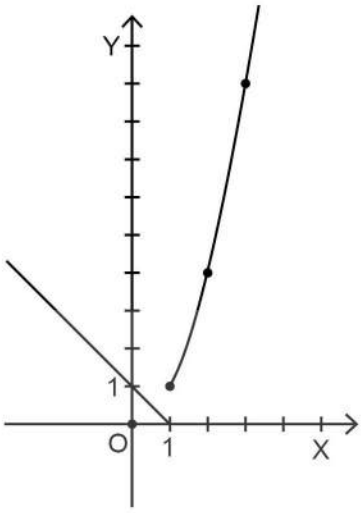
चित्र 2: संख्या रेखा का वह हिस्सा जो –3 के बाईं ओर है, 3 को दर्शाने वाली बिंदु के साथ, इस समुच्चय को निरूपित करता है।

iii)

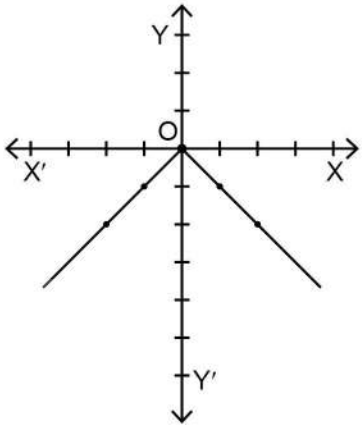


चित्र 3: $y = \sqrt{3}x - 2$ को रेखा L निरूपित करती है।

3. (i) और (ii)



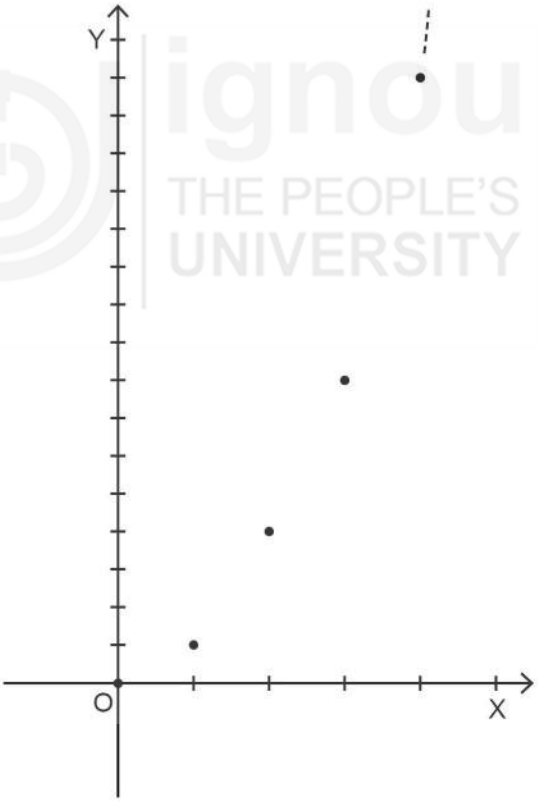
(i)



(ii)

चित्र 4: (i) $y = \begin{cases} 1-x, & x \le 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$, (ii) $y = -|x|$

iii)



चित्र 5: $y = 2^x \ \forall x \in \mathbb{N}$

4. संख्या है: $4i\left\{\frac{(4-i)(2+i)-2i(1+i)}{(1+i)(2+i)}\right\} = \frac{44i}{1+3i} = \frac{44i(1-3i)}{10}$.

इस प्रकार, इसका वास्तविक भाग शून्येतर है, और इसीलिए यह संख्या शुद्धतः रूप से अधिकल्पित नहीं है।

5. $\frac{x+1}{x-3}=\frac{4}{x+3}+6$

$\Rightarrow 5x^2=-69$

$\Rightarrow x=\pm i\sqrt{\frac{69}{5}}$.

6. मान लीजिए कि धीरे कार्य करने वाला व्यक्ति उस कार्य को x घंटे में करता है। तेज़ कार्य करने वाला व्यक्ति उसे $(x-1)$ घंटे में करेगा।
प्रत्येक द्वारा प्रति घंटे में किए गए कार्य का भाग क्रमशः $\frac{1}{x}$ और $\frac{1}{x-1}$ हैं।
वे मिलकर कार्य को 4 घंटे में पूरा करते हैं।

$\therefore 4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)=1$

$\Rightarrow x^2-9x+4=0$

$\Rightarrow x=\frac{9+\sqrt{65}}{2}, \frac{9-\sqrt{65}}{2}=8.5, 0.5$ (लगभग)

$x=0.5$ संभव नहीं है, क्योंकि तब $x-1=-0.5$ होगा, जो ऋणात्मक है, और इसीलिए किसी व्यक्ति द्वारा काम करने का समय नहीं हो सकता।
इस प्रकार, $x\approx 8.5$ और $x-1\approx 7.5$ है।
अतः, ये दोनों व्यक्ति अकेले टाइलें बिछाने में क्रमशः 7.5 घंटे और 8.5 घंटे लेंगे।

7. i) हम जानते हैं कि $1+\omega+\omega^2=0$ तथा $\omega^3=1$.
$\therefore (1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)=(-2\omega)(-2\omega^2)=4$.

ii) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5)$

$=(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2)$

$=(1-\omega)^2(1-\omega^2)^2$

$=(1-2\omega+\omega^2)(1-2\omega^2+\omega^4)=9$.

8. मान लीजिए कि $y=x-4$ है। तब, दिया हुआ समीकरण

$(y+4)^4-5(y+4)^3+7(y+4)^2-17(y+4)+11=0$ हो जाता है:

$\Leftrightarrow y^4+11y^3+43y^2+55y-9=0$, जो वाँछित समीकरण है।

9. $x^4+9x^3+16x^2+9x+1=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+9\left(x+\frac{1}{x}\right)+16=0$, पूरे समीकरण में x^2 से भाग देने पर।

$\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+9\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0$

इनमें $x+\frac{1}{x}=y$ रखिए, जिससे $y^2+9y+14=0$ प्राप्त होता है।

तब, $y=-2, -7$.

अतः, $x+\frac{1}{x}=-2$ और $x+\frac{1}{x}=-7$, जो हमें क्रमशः $x^2+2x+1=0$ और $x^2+7x+1=0$ देते हैं।

इनको हल करने पर, हमें शुरू के समीकरण के चार मूल $1, 1, \frac{-7\pm\sqrt{45}}{2}$ प्राप्त होते हैं।

10. मान लीजिए $f(x)=x^9-x^5+x^4+x^2+1$. तब, $f(-x)=-x^9+x^5+x^4+x^2+1$.
क्योंकि $f(x)$ में चिह्नों के परिवर्तन केवल दो हैं, इसलिए इसके अधिकतम दो धनात्मक मूल हो सकते हैं। क्योंकि $f(-x)$ में चिह्नों का केवल एक ही परिवर्तन है, इसलिए $f(x)$ का अधिकतम एक मूल ऋणात्मक हो सकता है।
क्योंकि $f(x)$ के 9 मूल हैं, जिनमें से अधिकतम 3 वास्तविक हो सकते हैं, इसलिए इसके न्यूनतम 6 मूल सम्मिश्र होंगे।

11. $4ab-2i(a^2-b^2)=2(a^2+b^2)(\cos\theta+i\sin\theta)$, जहाँ $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{b^2-a^2}{2ab}\right)$.
अतः, वर्गमूल हैं, $\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}\left(-\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right)$,
जहाँ $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{b^2-a^2}{2ab}\right)$.

ignou
THE PEOPLE'S
UNIVERSITY

शब्दावली

Absolute value	निरपेक्ष मान
Additive identity	योज्य तत्समक
Angular coordinate	कोणीय निर्देशांक
Argand diagram	आरगां आरेख
Argument	कोणांक
Associative	साहचर्य
Bijective (or 1-to-1)	एकैकी आच्छादक
Binary operation	द्विआधरी संक्रिया
Biquadratic (or quartic)	चतुर्घात
Cardinality	गणनांक
Cartesian product	कोर्णीय गुणनफल
Co-domain	सह-प्रांत
Coefficient	गुणांक
Collection	संग्रह
Commutative	क्रमविनिमेय
Complement	पूरक
Complementation	पूरकीकरण
Complex number	सम्मिश्र संख्या
Composition of functions	फलनों का संयोजन
Conjugate	संयुग्मी
Constant	अचर
Contained in	में आविष्ट
Contradiction	अंतर्विराध
Converse	विलोम
Coordinates	निर्देशांक
Corollary	उपप्रमेय
Cube root	घनमूल
Cubic	त्रिघात

De Moivre	द मुआव्र
De Morgan	द मौर्गन
Degree	घात
Discriminant	विविक्तकर
Distributive Law	बंटन नियम (या वितरण नियम)
Division algorithm	विभाजन कलन विधि
Domain	प्रांत
Empty set	रिक्त समुच्चय
Equal set	समान समुच्चय
Equivalence relation	तुल्यता संबंध
Extraneous solution	अतिरिक्त हल
Finite set	परिमित समुच्चय
Function	फलन
Geometric progression	गुणोत्तर श्रेणी
Graph	आलेख
Identity	सर्वसमिका
Identity function	तत्समक फ़लन
Imaginary number	अधिकल्पित संख्या
Imaginary unit	अधिकल्पित एकक
Implies	में निहित है
Infinite set	अनंत (या अपरिमित)
Injection	एकैक
Injective (or 1-1)	एकैकी
Integer	पूर्णांक
Intercept	अंतःखंड
Intersection	प्रतिच्छेदन
Inverse	प्रतिलोम
Linear polynomial/equation	रैखिक बहुपद/समीकरण
Listing method	सूचियन विधि

Modulus	मापांक
Natural number	प्राकृतिक संख्या
Negative	ऋणात्मक
Non-negative	ऋणेतर
Non-zero	शून्येतर
n-tuple	n-ट्यूपल
Onto (or surjective)	आच्छादक
Operation	संक्रिया
Ordered pair	क्रमित युग्म
Polar	ध्रुवीय
Polynomial	बहुपद
Positive	धनात्मक
Power set	घात समुच्चय
Projection	प्रक्षेप
Proof	उपपत्ति
Proper subset	उचित उपसमुच्चय
Property method	गुण विधि
Quadrant	चतुर्थांश
Quadratic polynomial/equation	द्विघात बहुपद / समीकरण
Radial coordinate	त्रिज्य निर्देशांक
Range	परिसर
Rational number	परिमेय संख्या
Real number	वास्तविक संख्या
Reflection	परावर्तन
Reflexive	स्वतुल्य
Relation	संबंध
René Descartes	रने देकार्त
Root	मूल
Set	समुच्चय

Singletion	एकल
Slope	प्रवणता
Square root	वर्गमूल
Subset	उपसमुच्चय
Substitution	प्रतिस्थापन
Superset	अधिसमुच्चय
Symbol	प्रतीक
Symmetric	सममित
Theorem	प्रमेय
Transitive	संक्रामक
Trigonometry	त्रिकोणमिति
Triple	त्रिक
Union	सम्मिलन
Unique	अद्वितीय
Universal set	समष्टीय समुच्चय
Venn diagram	वेन आरेख
X-axis (y-axis)	x-अक्ष (y-अक्ष)

ignou THE PEOPLE'S UNIVERSITY